

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

НАУЧНЫЙ СОВЕТ ПО ПРОБЛЕМЕ «ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ  
ПРОЦЕССОВ ГОРЕНИЯ»

ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ХИМИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

---

Я. Б. Зельдович

СТРУКТУРА И УСТОЙЧИВОСТЬ  
СТАЦИОНАРНОГО ЛАМИНАРНОГО ПЛАМЕНИ  
ПРИ УМЕРЕННО БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ  
РЕЙНОЛЬДСА

(STRUCTURE AND STABILITY OF STEADY  
LAMINAR FLAME AT MODERATELY LARGE  
REYNOLDS NUMBERS)

(Препринт)



Черноголовка 1979

Посвящается памяти Л. Д. Ландау в год его семидесятилетия и десятилетия со дня смерти.

**УДК 536.46**

Рассматривается диффузионно-тепловая и гидродинамическая устойчивость пламени.

Исследуется сферическое пламя, а также распространение пламени в трубах.

Показано, что во втором случае крупномасштабные возмущения, делая пламя выпуклым, препятствуют росту малых возмущений и обеспечивают тем самым ламинарное распространение пламени вплоть до умеренно больших чисел Рейнольдса.

## **ВВЕДЕНИЕ**

В теории распространения пламени, может быть, самым ярким индивидуальным достижением является открытие гидродинамической неустойчивости ламинарного горения. Это открытие было сделано независимо и практически одновременно Л. Д. Ландау в СССР [1, 2] и Дарье во Франции [3, 4].

Говоря об «индивидуальном достижении», мы подчеркнем отсутствие предшественников, которые ставили бы вопрос об универсальной гидродинамической неустойчивости пламени. Для сравнения вспомним ситуацию с основными идеями теории горения и взрыва. Ведущая роль теплопроводности в распространении пламени (дефлаграции) рассматривалась как очевидная и тривиальная на протяжении всей истории исследования горения. Эта идея была естественной уже потому, что горение применялось именно для получения тепла, поскольку была известна химическая инертность горючего при комнатной температуре и большая скорость реакции при высокой температуре.

Точно так же идея существенной роли ударной волны в детонации была тривиальной: эту идею подсказывали разрушительные механические воздействия детонационной волны, на долю XX века осталось создание конкретной теории.

Иначе обстояло дело с теорией гидродинамической устойчивости пламени, распространяющегося в заранее перемешанной взрывчатой смеси. Турбулентность технических пламен естественно объяснялась турбулентностью поступающего в горелку потока газа. Языки пламени, характерные для костра, нерегулярные случайные черты процесса свободного горения в атмосфере, полные неизъяснимой прелести, невольно привлекают внимание, надолго приковывают взгляд и мысли. Вспоминаю тяжело больного Шостаковича, с трудом, упрямо идущего к костру около последнего его дома недалеко от Москвы. «Люблю огонь» — говорил он автору . . .

Но турбулентность костра объясняется конвекцией, связанной с подъемной силой горячего газа в поле тяжести.

Все это лирическое отступление о турбулентных пламенах сделано для того, чтобы противопоставить им ламинарное пламя бунзеновской горелки, ламинарное распространение пламени в гладких трубах, ламинарное сферическое пламя.

Все визуальные и фотографические наблюдения первой половины XX века не давали никаких оснований для вывода о собственной неустойчивости пламени или его спонтанной турбулизации при отсутствии внешних турбулизующих факторов.

Можно высказать еретическое предположение, что Л. Д. Ландау не стал бы теоретически исследовать устойчивость пламени, если бы знал экспериментальный материал, который неопровержимо, казалось бы, эту устойчивость доказывает.

Но Л. Д. Ландау, решив задачу без оглядки на опыты, получил замечательный результат — неустойчивость пламени, экспоненциальный рост малых возмущений! Он сделал вывод, что ламинарных пламен не существует, что любое пламя с числом Рейнольдса большим единицы в действительности турбулизировано. Специально поставленные опыты показали, однако, что автотурбулизация по Ландау возникает в определенных условиях, это делает честь Ландау. Почетно объяснить эксперимент, но еще более почетно предсказать явление, которое лишь после этого находят экспериментаторы. Однако автотурбулизация возникает лишь при гигантских числах Рейнольдса  $\sim 10^4 \div 10^6$ .

Теория вступила в конфликт с экспериментом! После работ Л. Д. Ландау во весь рост встала задача, противоположная предыдущей: теперь необходимо было объяснить огромную величину критического числа Рейнольдса.

Чтобы оценить трудность задачи, достаточно напомнить, сколько времени прошло от появления числа Рейнольдса (и экспериментального определения критической величины его — 2300 для течения в прямой трубе) до теоретической интерпретации турбулентности.

## § 1. ДИФФУЗИОННО-ТЕПЛОВАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И ПЛАМЯ С УВЕЛИЧИВАЮЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТЬЮ ГОРЕНИЯ

Итак, напомним важнейшие работы, связанные с работой Л. Д. Ландау и направленные на согласование теории с экспериментом.

Еще до Л. Д. Ландау был поставлен вопрос об устойчивости плоского пламени, зависящей от тепловых и диффузионных процессов [5]. Оказалось, что решающую роль играет отношение коэффициента диффузии реагирующего вещества  $D$ , к коэффициенту диффузии тепла  $\kappa$ , т. е. тот безразмерный критерий, который теперь называется «числом Льюиса»  $Le = \frac{D}{\kappa}$ . При  $Le > 1$  плоское пламя неустойчиво относительно коротких волн, при  $Le < 1$  короткие волны затухают. На другом языке можно сказать, что скорость пламени зависит от кривизны его поверхности. При малом искривлении производная  $\frac{\partial u}{\partial G}$ , называемая числом Маркштейна ( $Ms$ ) [6, 7], такова, что  $Ms \cong D = \kappa$  при  $Le = 1$ ,  $Ms \sim + D \frac{A}{RT_b}$  при  $Le \gg 1$  и  $Ms \sim - \kappa \frac{A}{RT_b}$  при  $Le \ll 1$ .

Введение числа Маркштейна в уравнение Ландау, так же как и учет вязкости, модифицирует коротковолновую асимптотику гидродинамической неустойчивости. При положительном  $Ms > 1$  пламя становится устойчивым при малых длинах волн<sup>1</sup>. Длина волны критического возмущения характеризуется числом Рейнольдса и при  $Le > 1$  это  $Re_c$  может оказаться порядка  $A/RT_b$ , т. е. порядка 10 — 20. В пламени плотность и диссипативные константы продуктов горения в несколько раз отличаются от соответствующих величин в несгоревшей смеси — и это отношение также входит в критическое число Рейнольдса. Однако на таком пути нельзя получить  $Re_c > 100$ ; эксперимент остается необъяснимым!

Для сферического пламени А. Г. Истратов и В. Б. Либрович [8, 9] доказали существенное увеличение критического значения числа Рейнольдса по сравнению с распространением плоского фронта пламени. При этом суммируется несколько эффектов: данное возмущение, с данной длиной волны  $\lambda$ , которое в данный момент  $t$  укладывается  $n$  раз по экватору пламени (точнее, описывается  $n$ -м полиномом Лежандра в зависимости от углов  $\theta$ ,  $\varphi$ ),

---

<sup>1</sup> Вопрос о кажущейся двумерной неустойчивости при  $Le \gg 1$ ,  $\frac{A}{RT_0} \gg 1$ , получающейся как косвенное следствие одномерной неустойчивости, а также элементарный способ получения  $Ms$  при  $Le \equiv 1$  рассматривается в приложении.

$\lambda = 2\pi r/n$ , с течением времени растягивается; число  $n$  сохраняется, а следовательно,  $\lambda$  растет пропорционально  $r = u_b t$ . Но при увеличении  $\lambda$  убывает инкремент возрастания возмущения, возмущения, с данным  $n$  растут как степень  $t^k$ , а не экспоненциально  $e^{\gamma t}$ .

Отметим, что при данном радиусе пламени  $r$  путь, пройденный им относительно несгоревшего газа, меньше  $r$  в отношении степени расширения при горении, т. е. приблизительно пропорционально  $T_b/T_0$ , поэтому размеры сферического пламени могут расти быстрее амплитуды некоторых длинноволновых возмущений на его поверхности. Наконец, наиболее опасные возмущения — это те, длина волны которых всего в несколько раз больше Михельсоновской ширины фронта к моменту достижения данного радиуса  $R$ , эти возмущения ранее были настолько короткими, что они затухали за счет теплодиффузионных эффектов. Они растут лишь на второй половине пути, и, следовательно, начальная амплитуда мало зависит от несимметрии зажигания, а главным образом определяется весьма малыми термодинамическими флуктуациями при  $r \sim R/n$ . Рассмотрим наиболее опасные возмущения из условия

$$\frac{a(R)}{a(r_c)} = e^{\Gamma}, \quad \Gamma = \int_{r_c/n}^{R/n} \gamma dt, \quad \gamma = \gamma(n, r); \quad (1)$$

для каждого  $n$  находим  $r_c$  из условия  $\gamma(n, r_c) = 0$  и с учетом того, что

$$r_c \sim \alpha \frac{nD}{u} \eta, \quad \gamma \sim \frac{\beta un}{r}$$

при  $r > r_c$ , при этом  $r = ut$ . Получим

$$\Gamma(R, n) = \beta n \ln \frac{Ru}{\alpha Dn}, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial n} = \beta \ln \frac{Ru}{\alpha Dn} - \beta = 0, \quad \ln \frac{Ru}{\alpha Dn} = 1,$$

$$n_{max} = \frac{Ru}{\alpha e D}, \quad r_c = R/e,$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  безразмерные коэффициенты порядка единицы, зависящие от отношения плотности сгоревшего и несгоревшего газа, от показателя кинетической экспоненты при температуре горения  $A/RT_b$  и от числа Льюиса.

Существенный вывод, получающийся при подстановке  $n_{max}(R)$  в выражение для  $\Gamma(R, n)$  есть

$$\Gamma_{max}(R) = \frac{\beta}{\alpha e} \frac{Ru}{D} = \frac{\beta}{\alpha e} Re(R).$$

Этот результат полезно сравнить с экспонентой усиления возмущения плоской моды, прошедшей равный путь за равное время.

Наибольший локальный коэффициент усиления соответствует короткой усиливаемой волне,  $\lambda$  порядка

$$\lambda_{min} \sim r_{c/n} \sim \alpha \frac{D}{u},$$

при этом

$$\gamma_{max} \sim \frac{\beta u}{\lambda_{min}} \sim \frac{\beta u^2}{\alpha D}$$

и за время  $\frac{R}{u}$  получим

$$\Gamma_{\text{плоск, max}}(R) = \frac{\beta}{\alpha} \frac{Ru}{D} = \frac{\beta}{\alpha} Re(R)$$

— отличие в  $e$  раз. Однако это отличие стоит в экспоненте и, кроме того, в плоской задаче нет периода отрицательного  $\gamma$ , т. е. периода выравнивания опасных (в будущем) волн.

Отличие от экспоненциального закона роста возмущений с ростом радиуса, отмеченное ранее Истратовым и Либровичем, относится к фиксированному номеру гармоники  $n$ , тогда как выше  $\Gamma$  при разных  $R$  сравнивались каждый со своим  $n(R)$ .

Итак, для наиболее опасной моды зависимость коэффициента усиления от числа Рейнольдса экспоненциальна, но со сравнительно малым коэффициентом. К тому же начальное возмущение весьма мало, порядка  $\lambda/\sqrt{N}$ , где  $N$  — число молекул в объеме  $\lambda^3$ . Поэтому критическое условие получения заметного возмущения  $a_R \sim \lambda$  приводит к

$$\text{const} \cdot Re = \ln \sqrt{N}, \quad (3)$$

так что логарифм оказывается числом порядка 20 или более.

Заметим, что здесь мы предполагаем  $Le \leq 1$ , т. е. теплодиффузионную устойчивость пламени, благодаря которой существует критическая длина волны  $\lambda_c$  для данного  $n$  и критический радиус  $r_c = n\lambda_c/2\pi$ . Взаимодействие гидродинамической и теплодиффузионной неустойчивости в последнее время рассмотрено в ряде работ [10—12].

Наконец, отметим работу [13], в которой рассматривались нелинейные эффекты в развитии возмущений в пламени. Рассмотрим рост синусоидальных возмущений и отдельно, без учета неустойчивости, поведение синусоидально возмущенного пламени в покоящемся газе. В последнем случае по принципу Гюйгенса в ходе распространения возникнут угловые точки, уменьшающие поверхность; с течением времени возмущения сглаживаются. Рассматривая оба эффекта (рост возмущений и их сглаживание) как независимые и складывая их, можно сделать вывод, что нелинейное сглаживание ограничивает рост возмущений определенной

амплитудой, пропорциональной длине волны и зависящей от степени расширения газа в пламени. Этот вывод сделан при числе Рейнольдса (составленном из длины волны), значительно большем единицы. Теплодиффузионные эффекты при этом несущественны — от них зависит лишь детальная картина закругления пламени вблизи угловой точки, но не амплитуда возмущения как целого. Нелинейные численные расчеты проделаны также в работах [11, 14].

В данной работе рассматривается распространение ламинарного пламени в трубе с умеренно большим числом Рейнольдса (составленным из радиуса трубы, скорости распространения пламени по трубе и вязкости газа) с позиций, завоеванных при рассмотрении линейной и нелинейной задачи в сферическом и безграничном плоском случаях.

## § 2. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛАМЕНИ В ТРУБЕ. ФОРМА ПОВЕРХНОСТИ

Хорошо известна из многих фотографий форма пламени в горизонтальной трубе (рис. 1, стр. 16) при распространении его от открытого конца к закрытому (см., например, работу [15]). Эта форма была объяснена простыми соображениями: сила тяжести при наличии разности плотностей холодного и горячего газа вызывает движение вправо (в сторону холодного газа) в верхней части трубы и движение влево — в нижней части трубы. Поскольку холодный газ находится у закрытого конца, он в среднем покоится и, следовательно, это течение сопровождается перетеканием холодного газа сверху вниз.

В упомянутой работе был правильно сформулирован принцип ведущей точки: скорость перемещения пламени по трубе равна сумме нормальной скорости пламени и горизонтальной составляющей скорости холодного газа около наиболее продвинутой точки пламени  $A$  (рис. 1)  $u = u_n + u_z(A)$ . С другой стороны, поверхность пламени подстраивается под скорость газа в ведущей точке и под скорость перемещения пламени, так что  $Su_n \equiv \pi R^2 u$ .

Таким образом, для теоретического вычисления  $u$  надо знать нормальную скорость пламени  $u_n$  и найти  $u_z(A)$ , но эту величину трудно рассчитать. Напротив, для определения  $u_n$  из опыта целесообразно измерять  $u$  и по обмерам фотографии найти  $S$ .

Попутно отметим, что, вероятно, и в других случаях — в частности, в теории турбулентного горения — целесообразно различать ведущий механизм переноса пламени и подстраивающуюся к нему поверхность пламени. Представляется неоправданным теоретически искать величину поверхности фронта пламени, так как она не определяет скорости горения, а подстраивается к ней, а скорость горения зависит от движения ведущей точки.

Вернемся к горению в трубе. Течение газа у стенки обязательно направлено вдоль нее, при этом скорость его меньше  $u_z(A)$ . Поэтому фронт пламени расположен наклонно к стенке и не перпендикулярен к потоку (рис. 2)

$$(\sin \alpha^{-1}) = [u_z(A) u_n - u_z(R)] / u_n,$$

В последующих работах [16] отмечен важный качественный факт: во фронте пламени тангенциальная составляющая скорости сохраняется, а нормальная — растет пропорционально расширению газа; следовательно, линии тока газа преломляются: частицы газа получают составляющую скорости, направленную от стенки к оси трубы! Течение возможно лишь при образовании застойной зоны, которая и была обнаружена [16] путем визуализации картины мелким порошком, подмешанным к газу (рис. 3). Вероятно, ее можно обнаружить и в нестационарном опыте типа описанного выше, дополняя фотографию свечения реакции тепловых фотоаппаратом. Важный теоретический момент, появившийся в работах [16, 17], состоит в том, что выпуклая форма фронта пламени возможна и без влияния силы тяжести. Есть две возможности: плоский фронт и выпуклый фронт.

Рассмотрим плоскую двумерную задачу (рис. 4). Как видно из рисунка, выпуклую поверхность пламени (в трубе или канале) можно рассматривать как одну ячейку возмущенного, ячеистого пламени, т. е. как такое решение, к которому, с учетом нелинейных эффектов, приводит развитие неустойчивости по Л. Д. Ландау<sup>1</sup>. Таким образом, стационарное существование выпуклой поверхности пламени в трубе при отсутствии силы тяжести или даже несмотря на ее противодействие можно рассматривать как проявление гидродинамической неустойчивости по Л. Д. Ландау.

При рассмотрении теории явления при умеренно больших числах Рейнольдса вязкостью можно пренебречь, движение газа перед фронтом пламени считать безвихревым. Если поле течения холодного газа известно, то форма фронта пламени может быть определена из условия, что нормальная составляющая скорости потока к фронту равна известной величине — скорости ламинарного пламени ( $u_n = u_*$ ). Давление перед фронтом следует из уравнения Бернулли. Так, в системе координат, в которой пламя покоится, а холодный газ на бесконечности движется как целое ( $z \rightarrow \infty, p_0, \rho_0, u_z = u, u_r = 0$ ), имеем

$$p = p_0 + \frac{\rho_0 u^2}{r} - \frac{\rho_0 u^2(r, z)}{r}.$$

<sup>1</sup> Авторы, рассматривавшие ячеистую структуру пламен [11, 12, 14], так же как Г. А. Барский и Я. Б. Зельдович, не заметили, что картина пламени приводит к образованию застойных зон.



Во фронте все частицы газа испытывают одинаковый скачок давления, на одинаковую величину  $u_n \left( \frac{\rho_0}{\rho_b} - 1 \right)$  изменяется нормальная составляющая скорости газа.

После пламени движение является вихревым, что было отмечено в работах [18—20]<sup>1</sup>.

Теперь обратимся к распределению скорости продуктов горения далеко от пламени. Очевидно, что течение газа там становится коллинеарным, направленным вдоль оси трубы. В застойной зоне давление постоянно как по радиусу, так и вдоль оси.

Задаваясь давлением в далеком сечении по закону Бернулли, можно найти скорость каждой струи. Интегрируя количество газа, сгоревшее в части пламени, ограниченной текущим радиусом  $r$ , можно найти радиус  $r_1$ , на котором окажется в коллинеарном потоке частица газа, пересекая пламя на радиусе  $r$  (рис. 5). Таким образом, зная течение перед пламенем и отсюда — форму пламени, однозначно находим течение в коллинеарном потоке, в сечении  $BB$  (в его нетривиальной части  $B'B'$ ).

Существует еще одно условие, а именно условие сохранения вихря в частице. Можно сравнить значение вихря в произвольной точке  $r$  на поверхности пламени (со стороны горячего газа) и значение его в той же струе в коллинеарном потоке. Возможно, это сравнение даст недостающее условие, отбирающее единственную форму пламени (кроме плоского) или, по крайней мере, дискретный ряд таких форм<sup>2</sup>.

### § 3. ЛИНЕЙНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ВЫПУКЛОГО ПЛАМЕНИ

Как уже говорилось, выпуклый фронт пламени в трубе можно рассматривать как одну ячейку, одну волну, выросшую по механизму Л. Д. Ландау до предела, обусловленного нелинейностью. Но для этого выпуклого пламени можно поставить вопрос о возмущениях меньшей длины волны и, следовательно, с большим инкрементом роста. При этом выявляется принципиальное отличие линейной теории возмущений для выпуклого пламени по сравнению с плоским.

При умеренно большом числе Рейнольдса пламени в целом минимальная длина волны способных к росту возмущений  $\lambda_c$ , а также наиболее быстро растущие возмущения с длиной волны  $\lambda_m \sim 2\lambda_c$  — значительно короче радиуса трубы. На поверхности

<sup>1</sup> Однако в свете существования застойной зоны конкретный расчет распределения скорости и давления в работах [18—20] подлежит пересмотру.

<sup>2</sup> Обсуждение с Н. И. Кидиным показало, что условие, связанное с вихрем, удовлетворяется тождественно, так что для отбора потребуется двумерный расчет или, может быть, условие на поток импульса.

пламени можно уложить много таких волн и следить за их эволюцией, пользуясь теорией, которая является аналогом геометрической оптики или метода Венцеля—Крамерса—Бриллюэна в теории волновых процессов [22] — рис. 6.

Картина распространения пламени для наблюдателя, в системе отсчета которого покоится закрытый конец трубы и (в среднем по сечению) покоится холодный газ, показана на левой стороне рис. 6. Каждая точка пламени передвигается по нормали к поверхности пламени относительно газа. У выпуклого пламени нормаль наклонена от оси к стенке, между осью и стенкой холодный газ также движется в сторону стенки. Как в геометрической оптике или геометрической акустике, можно ввести понятие перемещения каждого элементарного участка пламени по лучу с учетом движения среды, по которой распространяется поверхность волны. Эти лучи  $AA'A''$  и  $BB'B''$  движутся от оси к стенке. Только центральный луч  $C$  распространяется по оси, не отклоняясь. Всякий нецентральный луч за конечное время достигает стенки и, упираясь в нее, заканчивает свое существование. В системе координат, в которой пламя покоится (правая сторона рис. 6), каждая точка пламени скользит вдоль поверхности от центра к стенке (последовательные положения  $A-A'A''$  или  $B-B'B''$ ).

Вблизи оси радиальная скорость поверхности пламени пропорциональна радиусу по порядку величины

$$u_r \sim \frac{r}{R} (u - u_n) \sim \frac{r}{R} u_n,$$

Отсюда следует, что время жизни данной точки до смерти на поверхности трубы

$$t = \int_r^R \frac{dr}{u_r} \sim \frac{R}{u_n} \ln \frac{R}{r}, \quad (4)$$

логарифмически расходится, когда  $r \rightarrow 0$ , т. е. начальное положение точки приближается к оси.

Закон перемещения точек по поверхности фронта пламени характеризуется общим растяжением (так называемый «stretch»). Общая картина, когда скорость пропорциональна расстоянию от оси напоминает расширяющуюся вселенную Фридмана, закон Хэббла разбегания галактик.

Расстояние между парой точек  $A$  и  $B$  с течением времени  $\tau$  экспоненциально возрастает

$$r_A - r_B \sim \exp\left(\frac{qu_n\tau}{R}\right),$$

где  $q$  численный коэффициент порядка единицы, определить который нетрудно, располагая детальной картиной течения перед

фронтом пламени. Величина  $q$  зависит от выпуклости пламени; в плоском пламени, распространяющемся по покоящемуся газу растяжения нет,  $q \equiv 0$ .

Растяжение каждого участка пламени приводит также к растяжению тех возмущений, которые первоначально заданы на этом участке.

Итак, зададимся возмущениями длиной волны  $\lambda$ , на участке пламени вблизи  $r$  и найдем, насколько они вырастут до момента их исчезновения при соприкосновении со стенкой. Обозначим  $a_1$  начальную амплитуду и  $a_w$  — конечную, у стенки. Выполним некоторые вычисления:

$$a_w/a_1 = e^\Gamma; \quad \Gamma = \int \gamma dt; \quad \gamma = \beta \frac{u_n}{\lambda};$$

$$\lambda = \frac{\lambda_1 r}{r_1}; \quad dr = \frac{r}{R} u_n dt; \quad dt \approx \frac{R}{r} \frac{dr}{u_n}; \quad \Gamma = \int_{r_1}^R \beta \frac{u_n r_1 R}{\lambda_1 r r} \frac{dr}{u_n} =$$

$$= \frac{\beta R r_1}{\lambda_1} \int_{r_1}^R \frac{dr}{r^2} \sim \frac{\beta R}{\lambda_1}. \quad (5)$$

Минимальная длина волны, которая растет с максимальной скоростью, — порядка  $\alpha D/u_n$ . Подставляя эту величину в выражение для  $\Gamma$ , найдем максимум

$$\Gamma_{max} \sim \beta \frac{R u_n}{\alpha D} \sim \frac{\beta Re}{\alpha}.$$

В силу малости начальных возмущений можно полагать, что коэффициент, связывающий  $\Gamma_m$  и число Рейнольдса, значительно меньше единицы. Заметим, что на последнем этапе близость твердой стенки уменьшает  $\gamma(r)$ .

Вблизи оси трубы диссипативные процессы убирают все возмущения, кроме термодинамических флюктуаций. Поэтому в выражении критического числа Рейнольдса добавочно появляется большой логарифм, такой же как в теории сферического пламени<sup>1</sup>.

Здесь нужно отметить отличие выпуклого пламени от плоского. Для последнего в линейной теории коротковолновые возмущения, удовлетворяющие граничным условиям на стенках трубы, растут экспоненциально с течением времени. Величина, стоящая в экспоненте  $\Gamma$ , пропорциональна длине трубы, а не ее радиусу.

<sup>1</sup> По грубой оценке  $Re \sim \frac{1}{\beta} \frac{E}{RT_b} \ln(nl^3) > 100$ , где  $n$  — число молекул в единице объема;  $l$  — длина свободного пробега молекул в газе. Детали и попытка уточнения будут даны в последующих работах.

Поэтому сильное возмущение плоского фронта в длинной трубе неизбежно. С этой точки зрения можно так сформулировать полученный результат: начнем с плоского фронта — он неустойчив, сперва нарастают мелкомасштабные возмущения, затем — медленнее — крупномасштабные. По мере искривления фронта пламени, с учетом нелинейности, развитые крупномасштабные возмущения ухудшают условия усиления мелкомасштабных — это показало проведенное выше рассмотрение. В конце концов остается только одно возмущение наибольшего масштаба конечной (ограниченной нелинейностью) амплитуды — именно то возмущение, которое описывает форму пламени. Процесс аналогичен зарастанию поляны лесом: сперва «мелкомасштабная» трава, потом быстрорастущие осины и березы, но в конце концов их обгоняют сосны, растущие медленно. Сосны перерастают лиственные деревья, лишают их солнечного света и заглушают — так в природе возникают чистые сосновые боры, без травы, с ковром опавших иголок под ногами.

#### § 4. ФОРМАЛЬНОЕ СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ И ОПТИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ РЕШЕНИЕМ. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛАНДАУ ДЛЯ ВОЗМУЩЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Согласно общей теории устойчивости к малым возмущениям, если существует стационарное возмущение исследуемой на устойчивость задачи, то уравнение для малых возмущений можно искать в виде

$$f = \sum F_i(x, r) e^{\gamma_i t},$$

т. е. с экспоненциально зависящими от времени частными решениями. Это следует из того, что в линейной теории, если  $\Phi(x, r, t)$  является решением, то и  $A\Phi(x, r, t)$  (где  $A = \text{const}$ ) является таковым. С другой стороны, уравнения для возмущений на стационарном фоне допускают группу сдвига по времени, т. е. если  $\Phi(x, r, t)$  является решением, то и  $\Phi(x, r, t + \tau)$  — также. Поэтому можно искать семейство таких решений, для которых группы (умножения на  $A$  и сдвига по  $t$ ) совпадают ( $A = e^{\gamma t}$ ), что и приводит к частным решениям вида  $F_i(x, r) e^{\gamma_i t}$ . Между тем, в предыдущем параграфе методом типа метода Венцеля — Крамерса — Бриллюэна (ВКБ) было получено решение существенно иного вида — возмущения, локально растущие, но сползающие от оси к стенке трубы, т. е. не сохраняющие своей формы в пространстве. В каком соотношении находятся эти два подхода? Вопрос напоминает известный спор XVIII века о колебаниях струны: как трактовать соотношение между решениями вида  $f(x \pm ct)$ , т. е. бегущими волнами и решениями вида стоячих волн, периодически зависящих от времени.

Для пламени ответ состоит в следующем: нет сомнения, что существует решение в виде суммы собственных функций; если начальное возмущение задано в виде коротковолнового пакета, сосредоточенного сбоку от оси, то формальная математика сама приведет к нужному результату — смещению пакета к стенке со всеми последствиями (см. выше). С другой стороны, метод приближенного (ВКБ) решения позволяет предсказать свойства собственных функций. Они на выпуклом невозмущенном пламени имеют переменную по поверхности длину волны. Более того, можно сказать, что собственные функции существуют благодаря поправкам к методу ВКБ. В первом приближении ВКБ возмущения сносятся без остатка, оставляя центральную область невозмущенной. Но ВКБ и геометрическая оптика являются только приближением! В действительности возмущения дифракционно выходят за пределы, заданные лучами, т. е. остаются там, откуда луч ушел — и именно благодаря этому существуют решения, сохраняющие свою форму с течением времени. Однако если нарушение ВКБ мало, то сохранение формы возмущения возможно лишь поскольку все решение экспоненциально падает с течением времени.

Таким образом, рассмотрение возмущений по методу ВКБ не только не противоречит существованию решений в виде суммы собственных функций, но, напротив того, позволяет предвидеть свойства этих функций.

Первое предсказание: существуют отрицательные  $\gamma_i$  и затухающие решения, не нарушающие устойчивости для коротких волн вблизи центра.

Второе предсказание касается зависимости собственных функций от  $r$ : по-видимому, для высоких гармоник волновые функции сильно возрастают при приближении к стенке. Если все  $\gamma$  отрицательны, то стационарное решение существует лишь для неоднородного уравнения с правой частью, описывающей термодинамические флюктуации или внешнее возмущение. Именно такое решение было найдено ранее методом ВКБ.

Представляет большой интерес найти численными методами, с учетом теплодиффузионных эффектов нестационарное решение для пламени в трубе для различных начальных условий. Подобная работа в определенном приближении проделана для плоского пламени [23], но из всего предыдущего рассмотрения следует, что пламя в трубе может дать качественно иные результаты.

Пользуюсь случаем поблагодарить А. П. Алдушина, А. Г. Истратова, Н. И. Кидина, В. Б. Либровича и Ю. В. Фролова за помощь и обсуждение.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### I. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА МАРКШТЕЙНА ДЛЯ $Le=1$ , И БЕЗ УЧЕТА ПЕРЕМЕННОСТИ КОНСТАНТ

Будем искать решение уравнения распространения для сферического ( $k=2$ ) или цилиндрического ( $k=1$ ) пламени

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= D\Delta T + \Phi = D \frac{1}{r^k} \frac{\partial}{\partial r} r^k \frac{\partial T}{\partial r} + \Phi(T) = \\ &= D \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + D \frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \Phi(T). \end{aligned} \quad (6)$$

Подставим

$$\begin{aligned} T &= T(r - ut) = T(\xi), \quad \frac{\partial T}{\partial t} = -u \frac{dT}{d\xi}; \\ -u \frac{dT}{d\xi} &= D \frac{d^2 T}{d\xi^2} + D \frac{k}{r} \frac{dT}{d\xi} + \Phi(T). \end{aligned} \quad (7)$$

Переносим второй член правой части налево, видим, что  $u + D \frac{k}{r}$  входит вместо  $u_n$  плоской задачи откуда видно, что

$$u = u_n - \frac{Dk}{r}. \quad (8)$$

Следовательно, скорость пламени зависит от Гауссовой кривизны  $G$  равной  $\frac{1}{r}$  для цилиндра и  $\frac{2}{r}$  для сферы,  $u = u_n - DG$ .

Но коэффициент при Гауссовой кривизне и есть число Маркштейна. Итак, в сделанных предположениях  $Ms = D$ .

Очевидно, что при  $Le=1$  коэффициенты диффузии  $D$  и температуропроводности  $\kappa$  совпадают, так что с равным успехом можно было бы написать  $Ms = \kappa$ . Наконец, в этом рассмотрении мы не разбираем зависимости констант ( $\rho$ ,  $D$ ,  $\kappa$ ) от температуры, что сильно ограничивает ценность результата.

### II. О КАЖУЩЕЙСЯ (СПОНТАННОЙ) ДВУМЕРНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ОБЛАСТИ ОДНОМЕРНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПРИ $Le \gg 1$

Пусть пламя одномерно неустойчиво и существует решение

$$T = T(x - ut) + e^{i\gamma t} f(x - ut),$$

где  $\gamma$  может быть комплексным, но вещественная его часть положительна.

В частности, положение фронта пламени  $x$  определим, например, как точку с  $T = (T_b + T_0)/2$ . Пусть  $x = ut + ae^{i\gamma t}$  или в другой системе координат  $x = ae^{i\gamma t}$ . Рассмотрим совокупность трубок

(расположенных как в органе), в каждой из которых независимо распространяется пламя по одинаковому газу. Сфазирuem зажигание и возмущение в трубках, так что  $a = a(y) = ae^{iky}$ , где  $y$  — номер трубки. Получим

$$x = a_0 e^{iky + \gamma t} + ut.$$

Таким образом, двумерная картина соответствует растущему возмущению, отклонение фронта  $x$  от невозмущенного положения и крутизна волны  $\frac{\partial x}{\partial y}$  экспоненциально растут со временем.

Однако такую неустойчивость необходимо как-то терминологически отделить от истинной неустойчивости, будь то гидродинамическая по Л. Д. Ландау или термодиффузионная. Рассматриваемая здесь неустойчивость возникает при отсутствии взаимодействия соседних слоев, она спонтанна, т. е. получается в результате фазировки независимых одномерных возмущений (ср. «спонтанное» распространение пламени при фазированном зажигании).

Как отличить при формальном расчете с учетом всех факторов такую спонтанную двумерную неустойчивость от истинной, связанной с взаимодействием соседних слоев? Предлагается критерий, основанный на поведении дисперсионной кривой, т. е. зависимости инкремента  $\gamma$  от волнового вектора вдоль поверхности. Для неустойчивости Ландау —  $\gamma \sim k$ , для теплодиффузионной  $\gamma \sim k^2$  (рассматривается асимптотика при  $k \rightarrow 0$ ). Спонтанная неустойчивость отличается тем, что  $\gamma \neq 0$  при  $k \rightarrow 0$ , что и указывает на независимость эффекта от взаимодействия соседних слоев.

### III. ПОВЕДЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ПЛОСКОГО ПЛАМЕНИ В ТЕОРИИ Л. Д. ЛАНДАУ

В теории Л. Д. Ландау можно искать уравнение для одной функции (одной или двух переменных), характеризующей форму пламени (форму разрыва плотности). Задание положения и скорости поверхности пламени определяет значение нормального компонента скорости холодного газа у поверхности. Вместе с условием безвихревого движения холодного газа и естественными граничными условиями на бесконечности условия на пламени полностью определяют движение холодного газа. Движение горячего газа вдали от пламени может быть вихревым и поэтому не определяется полностью мгновенной формой и скоростью распространения поверхности. Однако, особенно учитывая малую плотность горячего газа и отток его от поверхности, влияние произвола в задании движения горячего газа на возмущение поверхности пламени должно быть малым. Эти соображения обосновывают возможность построения замкнутого уравнения для  $z(x, y, t)$ , в

которое распределение скорости — функция 3-х переменных  $u(x, y, t)$  — не входит (см. [20]). В линейном приближении Л. Д. Ландау показал, что инкремент временной зависимости пропорционален волновому вектору  $k$  в форме  $e^{\gamma t} \sin \vec{k}r$ , где  $r$  — в плоскости  $x, y$ , а величина  $\gamma = \pm \omega |k|$ .

Очевидно, такое выражение  $\gamma$  получится, если  $z$  подчиняется уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\omega^2 \Delta_2 z = -\omega^2 \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right). \quad (9)$$

Если  $z$  зависит лишь от  $x$ , но не от  $y$ , уравнение упрощается

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\omega^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}. \quad (10)$$

В работе [22] та же задача решается с помощью интегрального выражения

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{2} \int k dk \int z(x - \xi) \cos k\xi d\xi.$$

Приводя это выражение из [12], мы опустили члены, описывающие теплодиффузионные эффекты. При рассмотрении одной только неустойчивости по Л. Д. Ландау дифференциальное уравнение второго порядка, по-видимому, не только проще, но и точнее интегрального, так как оно описывает не только растущую, но и падающую ветвь возмущений.

Любопытно, что одномерное дифференциальное уравнение имеет простое замкнутое решение.

В самом деле, при другом знаке

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (11)$$

мы писали бы решение в виде бегущих волн

$$f = f_1(x - \omega f) + f_2(x + \omega f), \quad (12)$$

где  $f_1$  и  $f_2$  легко находятся из начальных условий

$$f(x, 0) = f_1(x) + f_2(x); \quad (13)$$

$$f'(x, 0) = -\omega f_1'(x) + \omega f_2'(x),$$

где штрих есть знак частной производной по времени.

Аналогично, не боясь комплексных величин, запишем решение для пламени

$$z(x, t) = z_1(x - i\omega f) + z_2(x + i\omega f) \quad (14)$$

и найдем  $z_1$  и  $z_2$  из начальных условий. Вещественные начальные условия обеспечивают вещественность решения, записанного в комплексной форме.

Приведем прекрасный пример: пусть в момент  $t=0$ ,  $z=e^{-x^2}$ ,

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 0.$$



Легко найдем точное решение

$$z(x, t) = -\frac{1}{2} [e^{-(x-i\omega t)^2} + e^{-(x+i\omega t)^2}] = e^{-x^2 + \omega^2 t^2} \cos \omega t x. \quad (15)$$

Отметим, что имеет место рост во времени более быстрый, чем по простой экспоненте в соответствии с тем, что с течением времени появляются все более короткие волны,  $k = \omega t$ ,  $\lambda = 2\pi/\omega t$ , амплитуда которых в первоначальном Гауссовом распределении экспоненциально мала. С другой стороны, общая модулирующая функция  $e^{-x^2}$  остается с течением времени без изменения. Неустойчивость по Л. Д. Ландау не приводит в данном случае к расплыванию возмущений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1944, 14, 6, стр. 240.
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
3. G. Darieus. "J. phys. Chim.", 1944, 88, S. 641.
4. G. Darieus. В сб.: "6th International Congr. of Appl. Mech.". Paris, 1946.
5. Я. Б. Зельдович. Теория горения и детонации. М., Изд-во АН СССР, 1944; Н. П. Дроздов, Я. Б. Зельдович. «Ж. физ. химии», 1943, 17, № 3, стр. 134.
6. G. Markstein. "J. Aeronaut. Sci.", 1951, 18, No 3. (Русский перевод — «Вопр. ракетн. техн.», 1951, 4).
7. Нестационарное распространение пламени. Ред. Г. Маркштейн. М., «Мир», 1968.
8. А. Г. Истратов, В. Б. Либрович. «Ж. прикл. механ. и техн. физ.», 1966, № 1, стр. 67; «Докл. АН СССР», 1966, № 1, стр. 43.
9. A. G. Istratov, V. B. Librovich. "Astronaut. Acta", 1969, 14, p. 453.
10. А. Г. Истратов, В. Б. Либрович. «Прикл. матем. и механ.», 1966, 30, 3, стр. 451.
11. G. I. Sivashensky. "Acta Astronaut.", 1977, 4, p. 1177.
12. D. M. Michelson, G. I. Sivashensky. "Acta Astronaut.", 1977, 4, p. 1207.
13. Я. Б. Зельдович. «Ж. прикл. механ. и техн. физ.», 1966, 1, стр. 102.
14. G. Markstein. Heat Trans. and Fl. Mech. Inst. Stant. Univ. Press, 1957, p. 295.
15. Г. А. Барский, Я. Б. Зельдович. «Ж. физ. химии», 1944, 24, № 5, стр. 589.
16. M. S. Uberoi. "Phys. of Fluids", 1959, 2, No 1, p. 72.
17. T. Maxworthy. "Phys. of Fluids", 1962, 5, No 4, p. 407.
18. Я. Б. Зельдович. «Ж. техн. физ.», 1944, 14, 3, стр. 162.
19. Г. Г. Черный. В сб.: «Теоретическая гидромеханика». МГУ, 1954, № 12, вып. 4, стр. 31.
20. H. S. Tsien. "J. Appl. Mech.", 1954, 18, p. 188.
21. В. И. Борисов. «Физ. гор. и взрыва», 1978, 14, № 2, стр. 26.
22. Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц. Квантовая механика. М., Гостехиздат, 1948.
23. Ya. B. Zeldovich, G. I. Varenblatt. "Combustion and Flame", 1959, 3, No 2, p. 61.

Рис. 1. Форма пламени и движение газа при распространении в горизонтальной трубе

The flame shape and the motion of gas in a horizontal tube during flame propagation

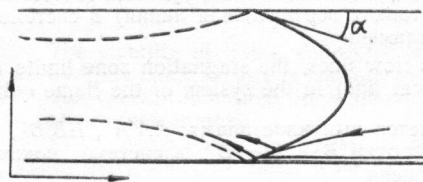
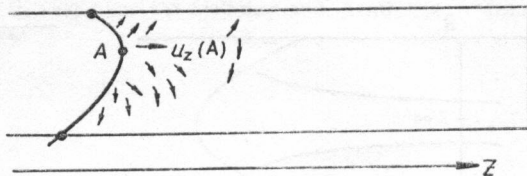


Рис. 2. Течение газа вблизи стенки трубы и застойные зоны

The gas flow near the wall and stagnation zones

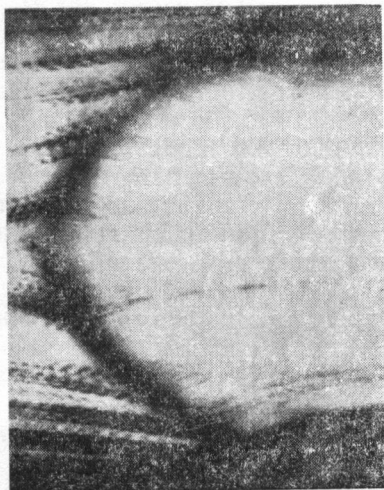


Рис. 3. Фото пламени при распространении в трубе  
The photo of the flame during the propagation in a tube

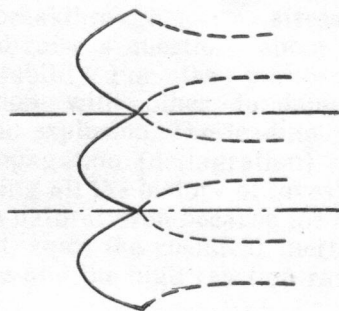


Рис. 4. Плоская структура ячеистого пламени (штрих-пунктир — плоскости симметрии, пунктир отделяет застойные зоны)  
The plane structure of the cellular flame (touch-dotted line—the planes of symmetry; dotted line separates the stagnation zones)

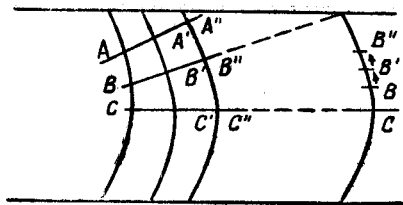
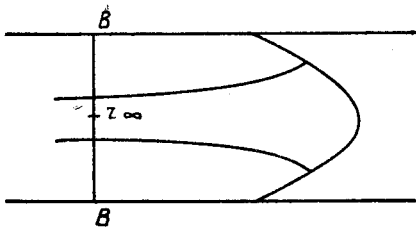


Рис. 5. Распространение пламени в трубе, линии тока газа, граница застойной зоны (пунктир) и контрольная поверхность (тонкая вертикальная линия) в системе покоя пламени

The flame propagation in a tube, the gas flow lines, the stagnation zone limits (dotted line) and the control surface (thin vertical line) in the system of the flame quiteness

Рис. 6. Лучи, по которым распространяется выпуклое пламя:  $AA'A''$ ,  $BB'B''$ ,  $CC'C''$ . Справа — последовательные положения точки  $B \rightarrow B' \rightarrow B''$  в системе покоя пламени

On the rightbaudside — consecutive positions of the point  $B \rightarrow B' \rightarrow B''$  in the system of rest of the flame

The rays along which the convex flame is propagating:  $AA'A''$ ,  $BB'B''$ ,  $CC'C''$