

БАКАЛАВРИАТ И МАГИСТРАТУРА

# ПРОЦЕССЫ И АППАРАТЫ ХИМИЧЕСКОЙ ТЕХНОЛОГИИ

---

ОБЩИЙ КУРС

## Книга 1



[www.e.lanbook.com](http://www.e.lanbook.com)



**ЭБС  
ЛАНЬ**

# ПРОЦЕССЫ И АППАРАТЫ ХИМИЧЕСКОЙ ТЕХНОЛОГИИ ОБЩИЙ КУРС

В двух книгах  
Книга 1

*Под редакцией В. Г. Айнштейна*

УЧЕБНИК

*Издание восьмое, стереотипное*



САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР  
2019



ББК 35.11я73

П 84

**П 84** Процессы и аппараты химической технологии. Общий курс. В двух книгах. Книга 1 / Под ред. В. Г. Айнштейна: Учебник. — 8-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2019. — 916 с. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

**ISBN 978-5-8114-2975-2 (Общий)**

**ISBN 978-5-8114-2976-9 (Книга 1)**

В учебнике, написанном опытными преподавателями Московского государственного университета тонких химических технологий им. М. В. Ломоносова (МИТХТ им. М. В. Ломоносова), рассмотрены теоретические основы построения, математического описания и инженерного расчета основных химико-технологических процессов, а также принципы устройства и функционирования технологической аппаратуры.

В Книге 1 раскрываются основные понятия и соотношения, основы тепло- и массопереноса, основные закономерности переноса импульса, теплоты, вещества. Особое внимание уделяется вопросам гидравлики, перемещения жидкостей, сжатия газов, гидромеханическим процессам, теплопередаче и теплообмену, структуре потоков, а также выпариванию. За создание учебника авторы удостоены премии Правительства Российской Федерации в области образования за 2005 год.

Учебник предназначен для студентов и аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям и специальностям, входящим в УГС: «Химия», «Химические технологии», а также для специалистов химической промышленности и работников смежных областей знаний и отраслей промышленности.

ББК 35.11я73

#### **Рецензенты:**

Кафедра процессов и аппаратов химической технологии  
Российского химико-технологического университета им. Д. И. Менделеева;  
*Б. С. САЖИН* — доктор технических наук, профессор  
Московского государственного текстильного университета им. А. Н. Косыгина.

#### **Обложка**

*Е. А. ВЛАСОВА*

© Издательство «Лань», 2019  
© Коллектив авторов, 2019  
© Издательство «Лань»,  
художественное оформление, 2019

# ОГЛАВЛЕНИЕ

## Книга 1

Предисловие к седьмому изданию .....	13
Предисловие к первому изданию .....	14
Основные условные обозначения .....	26

## Глава 1

<b>ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И СООТНОШЕНИЯ .....</b>	<b>31</b>
1.1. Введение .....	31
1.1.1. Предмет и место курса .....	31
1.1.2. Краткие исторические сведения .....	35
1.1.3. Перенос субстанции в химической технологии .....	38
1.1.4. Размерности. Системы единиц. Единицы измерения .....	41
1.1.5. О точности инженерных расчетов .....	44
1.2. Основные понятия .....	45
1.2.1. Обобщение и конкретизация .....	45
1.2.2. Некоторые физические понятия .....	47
1.2.3. Основные характеристики (свойства) рабочих тел .....	50
1.3. Общие подходы к анализу процессов переноса .....	55
1.3.1. Уравнения баланса .....	55
1.3.2. Интенсивность процессов переноса .....	60
Потенциалы и потоки субстанций .....	60
О перекрестных эффектах Онзагера .....	66
Пропускные способности .....	67
1.3.3. Подходы к анализу и установлению общих закономерностей процессов переноса .....	69
1.3.4. Общая канва анализа .....	73
1.4. Уравнения неразрывности и расхода .....	74
1.4.1. Уравнение неразрывности .....	74
1.4.2. Уравнения расхода .....	77
1.5. Уравнения переноса импульса, теплоты и вещества .....	79
1.5.1. Дифференциальное уравнение движения несжимаемой жидкости (перенос импульса) .....	79
1.5.2. Дифференциальное уравнение переноса теплоты в движущейся жидкости .....	83
1.5.3. Дифференциальное уравнение переноса вещества в движущейся жидкости .....	86
1.6. Модификации уравнений переноса .....	89
1.6.1. Условия протекания процесса переноса .....	89
1.6.2. Различные конфигурации потоков субстанции .....	91
1.6.3. Анизотропные среды .....	95
1.7. Условия однозначности .....	97
1.8. Физическое подобие .....	99
1.8.1. Обобщенные переменные .....	99
1.8.2. Геометрическое и физическое подобие. Масштабные преобразования. Критерии подобия .....	101
1.8.3. Обобщенные переменные на базе основных уравнений переноса .....	106

Гидродинамическое подобие.....	106
Тепловое подобие.....	110
Диффузионное подобие .....	111
Подобие в переносе различных субстанций .....	112
1.8.4. Обобщенные переменные на базе других уравнений и представлений .....	112
1.8.5. Критериальные уравнения.....	114
1.8.6. Обобщенные переменные и пропускные способности.....	115
<i>Литература к главе 1</i> .....	118

## Глава 2

<b>ГИДРАВЛИКА</b> .....	119
2.1. Гидростатика.....	119
2.1.1. Основные уравнения гидростатики и поверхностей уровня .....	120
2.1.2. Давления и поверхности уровня в покоящемся сосуде.....	122
2.1.3. Давления и поверхности уровня в случае относительного покоя Цистерна, движущаяся с постоянным ускорением по горизонтальной плоскости.....	124
Вертикальный цилиндрический сосуд, вращающийся вокруг своей оси .....	125
Горизонтальный сосуд, вращающийся вокруг своей оси .....	126
2.1.4. Силы давления на дно и боковые стенки сосуда.....	128
2.2. Гидродинамика (общие проблемы).....	130
2.2.1. Уравнение Бернулли.....	132
Уравнение Бернулли для идеальной жидкости .....	133
Уравнение Бернулли для реальной жидкости .....	134
2.2.2. Уравнение Дарси-Вейсбаха .....	137
2.2.3. Режимы течения жидкости.....	139
2.2.4. Законы ламинарного течения ньютоновских жидкостей .....	142
2.2.5. Законы турбулентного течения.....	146
Общая картина течения.....	151
Распределение скоростей в турбулентном потоке .....	151
Коэффициент гидравлического сопротивления.....	155
2.2.6. Местные сопротивления.....	159
2.2.7. Характер изменения напора по длине трубопровода.....	163
2.3. Трубопроводы.....	166
2.3.1. Простой трубопровод .....	167
2.3.2. Наивыгоднейший диаметр трубопровода. Диапазоны рекомендуемых скоростей.....	168
2.3.3. Разветвленный трубопровод .....	172
2.3.4. Трубопровод с путевым и транзитным расходами.....	173
2.3.5. Газопровод.....	176
2.3.6. Гидравлический удар.....	179
2.4. Гравитационное течение тонких пленок.....	182
2.5. Течение неньютоновских жидкостей .....	185
2.5.1. Классификация и общие свойства неньютоновских жидкостей .....	190
2.5.2. Пластичное течение бингамовских жидкостей .....	190
2.5.3. Пластичное течение псевдопластичных и дилатантных жидкостей .....	195
2.6. Истечение жидкостей и газов.....	199
2.6.1. Истечение жидкости при постоянном напоре.....	202
Истечение через отверстие в дне сосуда .....	203
Истечение через отверстие в боковой стенке.....	205

2.6.2. Истечение жидкости при переменном напоре .....	207
2.6.3. Об истечении газов .....	209
2.7. Элементы гидравлики дисперсных систем .....	213
2.7.1. Общая характеристика дисперсных систем с твердой фазой .....	214
2.7.2. Неподвижный слой .....	217
2.7.3. Движущийся слой .....	222
2.7.4. Псевдоожженный слой .....	224
Кривые псевдоожжения .....	227
Гидравлическое сопротивление псевдоожженного слоя .....	228
Скорость начала псевдоожжения .....	230
Скорость уноса .....	232
Стесненное впитание и расширение псевдоожженного слоя .....	236
2.7.5. Образование и движение жидких капель и газовых пузырей ....	241
Оценка размеров элементов дисперсной фазы .....	241
О скорости движения капель и пузырей в сплошной среде .....	244
2.8. Двухфазные течения .....	246
2.8.1. Общие положения .....	246
2.8.2. Транспортные системы с твердой фазой .....	250
Общие характеристики пневмотранспортных систем .....	250
Гидравлическое сопротивление .....	253
2.8.3. О двухфазных течениях типа жидкость–жидкость и жидкость–газ .....	255
2.9. Об особенностях молекулярного течения .....	257
<i>Литература к главе 2</i> .....	260

## Глава 3

<b>ПЕРЕМЕЩЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ</b> .....	261
3.1. Классификация насосов. Типовая схема и основные характеристики насосной установки .....	262
3.1.1. Классификация насосов .....	262
3.1.2. Основные характеристики насосной установки .....	267
3.1.3. Предельная геометрическая высота всасывания насосов .....	270
3.1.4. О мощности и КПД насосов .....	273
3.2. Поршневые насосы .....	274
3.2.1. Принцип действия и классификация насосов .....	274
3.2.2. Производительность .....	279
3.2.3. Закон движения поршня. Диаграмма подачи .....	281
Закон движения поршня .....	281
Диаграмма подачи .....	283
3.2.4. Работа и расчет воздушных колпаков .....	285
3.2.5. Характеристика поршневых насосов .....	289
3.2.6. Предельная высота всасывания .....	290
3.2.7. Расчет мощности, потребляемой поршневым насосом .....	293
3.2.8. Регулирование производительности поршневых насосов .....	294
3.3. Центробежные насосы .....	295
3.3.1. Основное уравнение. Напор .....	298
3.3.2. Производительность .....	303
3.3.3. Характеристики центробежных насосов .....	304
Частная характеристика центробежного насоса .....	304
Рабочая точка центробежного насоса .....	306
Законы пропорциональности .....	308
Универсальная характеристика центробежного насоса .....	309

3.3.4. Параллельная и последовательная работа насосов.....	311
3.3.5. Предельная высота всасывания .....	313
3.4. Немеханические насосы .....	314
3.4.1. Газлифты.....	314
3.4.2. Струйные насосы.....	316
3.5. Достоинства и недостатки насосов различных типов. Области их применения.....	317
<i>Литература к главе 3.....</i>	<i>322</i>

## Глава 4

<b>СЖАТИЕ ГАЗОВ.....</b>	<b>323</b>
4.1. Классификация компрессоров .....	324
4.2. О термодинамических основах работы компрессоров.....	325
4.3. Поршневые компрессоры.....	330
4.3.1. Устройство и работа поршневых компрессоров .....	330
4.3.2. Удельные затраты энергии в поршневом компрессоре .....	332
4.3.3. Производительность поршневого компрессора .....	337
4.3.4. Степень сжатия в поршневом компрессоре.....	342
4.3.5. Сжатие газа в многоступенчатых компрессорах .....	343
Схема многоступенчатой компрессионной установки .....	343
Оптимизация распределения степени сжатия по ступеням компрессора .....	345
Оптимизация распределения степени сжатия при промежуточном отборе части газа.....	350
4.3.6. Об охлаждении поршневых компрессоров .....	351
4.3.7. Расход энергии. Мощность .....	352
4.3.8. Регулирование производительности поршневых компрессоров.....	354
4.4. Некоторые специальные объемные компрессоры .....	356
4.4.1. Пластинчатые ротационные компрессоры.....	356
4.4.2. Водокольцевые компрессоры .....	358
4.5. Центробежные компрессоры .....	359
4.5.1. Устройство и принцип действия турбокомпрессоров.....	359
4.5.2. Производительность турбокомпрессоров.....	360
4.5.3. Напор, развиваемый турбокомпрессорами .....	361
4.5.4. Характеристики турбокомпрессоров .....	364
4.5.5. Регулирование производительности турбокомпрессоров .....	365
4.5.6. Центробежные вентиляторы .....	366
4.6. Другие динамические компрессоры.....	367
4.7. Области применения компрессоров.....	368
4.8. Вакуумирование .....	368
4.8.1. Поршневые вакуум-насосы .....	369
4.8.2. О вакуум-насосах глубокого вакуума .....	372
4.8.3. Время вакуумирования сосудов.....	374
<i>Литература к главе 4.....</i>	<i>375</i>

## Глава 5

<b>ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ.....</b>	<b>377</b>
5.1. Осаждение.....	378
5.1.1. Общие положения .....	378
5.1.2. Естественное осаждение .....	383

5.1.3. Центробежное осаждение в неоднородных жидкостных системах Связь свойств суспензии с геометрическими размерами центрифуги и ее производительностью .....	392
Затраты энергии на работу центрифуги .....	395
5.1.4. Центробежное осаждение в неоднородных газовых системах ....	404
Устройство и принцип работы циклонов .....	404
Технологический расчет циклонов .....	407
5.1.5. Некоторые другие процессы осаждения .....	412
5.2. Фильтрование .....	413
5.2.1. Общие положения .....	413
5.2.2. Устройство и работа фильтров .....	415
5.2.3. Основные характеристики фильтрационного процесса .....	418
5.2.4. Основное уравнение фильтрования .....	419
5.2.5. Отдельные режимы периодического фильтрования .....	422
Фильтрование при постоянной движущей силе .....	422
Фильтрование при постоянной скорости фильтрации .....	424
О других режимах и моделях фильтрования .....	425
5.2.6. Непрерывный процесс фильтрования на барабанном вакуум-фильтре .....	426
5.2.7. Определение параметров процесса фильтрования .....	428
5.2.8. Фильтрование в поле центробежных сил .....	430
5.2.9. Промывка осадка .....	435
5.3. Перемешивание .....	436
5.3.1. Общие положения .....	436
Цели процесса перемешивания .....	436
Основные проблемы процессов перемешивания .....	437
Способы перемешивания .....	441
5.3.2. Пневматическое перемешивание .....	441
5.3.3. Циркуляционное перемешивание .....	443
5.3.4. Перемешивание лопастными мешалками .....	445
Движение жидкости в окрестности вращающейся лопасти .....	446
Центральная воронка .....	452
Затраты энергии на перемешивание лопастными мешалками .....	453
5.3.5. О перемешивании паст и сыпучих материалов .....	460
5.4. Диспергирование жидкостей и газов .....	461
5.4.1. Механическое диспергирование .....	462
5.4.2. Диспергирование при истечении из отверстий и сопел .....	465
Литература к главе 5 .....	467

## Глава 6

<b>ОСНОВЫ ТЕПЛОПЕРЕНОСА .....</b>	<b>469</b>
6.1. Основные понятия .....	471
Теплофизические свойства рабочих тел .....	472
Характер процессов переноса теплоты .....	474
6.2. Виды теплопереноса. Общее математическое описание .....	475
6.2.1. Виды теплопереноса .....	475
6.2.2. Удельные тепловые потоки .....	477
6.2.3. Об уравнении Фурье—Кирхгофа .....	478
6.3. Стационарный кондуктивный перенос теплоты через стенки .....	478
6.3.1. Плоская однослойная стенка .....	479
6.3.2. Плоская многослойная стенка .....	481
6.3.3. Цилиндрические стенки .....	482

6.3.4. Сферические стенки .....	484
6.4. Конвективный теплоперенос .....	485
6.4.1. Коэффициент теплоотдачи и число Нуссельта .....	485
6.4.2. Аналогия в процессах конвективного переноса количества движения и теплоты, а также вещества .....	487
6.4.3. Теплоперенос в условиях вынужденной конвекции .....	490
6.4.4. Теплоперенос в условиях естественной конвекции .....	491
6.4.5. Конвективная теплоотдача к шару .....	495
6.5. Теплоперенос при конденсации пара .....	496
6.6. Теплоперенос при кипении жидкости .....	502
6.7. Теплоотдача от поверхности в псевдооживленном слое .....	506
6.8. Порядок коэффициентов теплоотдачи .....	508
6.9. Теплоперенос излучением .....	509
6.9.1. Общие понятия .....	510
6.9.2. Лучистый теплоперенос между двумя телами .....	512
6.9.3. Экранирование .....	515
6.9.4. Об излучении газов .....	516
<i>Литература к главе 6</i> .....	518
<b>Приложения к главе 6</b> .....	519
Приложение 6.1. К определению среднего коэффициента рядности для пучков горизонтальных труб .....	519
Приложение 6.2. К расчету относительного коэффициента теплоотдачи при кипении .....	522

## Глава 7

<b>ТЕПЛОПЕРЕДАЧА И ТЕПЛООБМЕН</b> .....	523
7.1. Классификация теплообменников .....	523
7.2. Теплопередача (основные понятия) .....	527
7.3. Коэффициент теплопередачи .....	529
7.3.1. Общая концепция коэффициента теплопередачи при последовательном теплопереносе .....	529
7.3.2. Расчет коэффициентов теплопередачи .....	531
7.3.3. Коэффициент теплопередачи при параллельном теплопереносе .....	534
7.4. Отдельные задачи теплопередачи .....	535
7.4.1. Распределение температур в катализаторной зоне в круглой трубе .....	535
7.4.2. Перенос теплоты через стержень бесконечной длины .....	539
7.4.3. Критическая и целесообразная толщина тепловой изоляции .....	541
7.5. Теплообмен (основные проблемы и положения) .....	544
7.5.1. Круг задач .....	544
7.5.2. Потoki энтальпии и тепловые балансы .....	546
7.6. Средний температурный напор .....	550
7.6.1. Характерные температурные профили .....	550
7.6.2. Средние температурные напоры .....	551
7.6.3. Проектный выбор теплообменника .....	558
7.7. Тепловой поток .....	559
7.7.1. Тепловой поток при движении теплоносителей в режиме идеального перемешивания .....	559
7.7.2. Тепловой поток при прямоточном и противоточном движении теплоносителей .....	561
7.8. Изменение температур вдоль теплообменной поверхности .....	565



7.9. Лимитирующие стадии в процессах теплопереноса .....	567
7.9.1. Общие понятия.....	567
7.9.2. Пропускные способности и лимитирующие стадии при стационарном теплопереносе.....	568
7.9.3. О пропускных способностях в нестационарных процессах.....	574
7.10. Нестационарный теплообмен с твердыми телами .....	574
7.10.1. Основные понятия.....	574
7.10.2. Нестационарный безградиентный теплообмен с твердым телом .....	576
7.10.3. Нестационарный теплообмен с шаром в граничных условиях III и I рода .....	577
7.11. Межфазный теплообмен в псевдоожигенном слое.....	583
7.11.1. Межфазный теплообмен в тонком псевдоожигенном слое.....	584
7.11.2. Вырождение смешанной задачи в потоковую (балансовую) .....	586
7.12. Регулярный режим теплообмена тела со сплошной средой .....	588
7.12.1. Регулярный режим 1-го рода .....	589
7.12.2. Регулярный режим 2-го рода .....	590
7.13. О термосифонах и тепловых трубах .....	592
7.14. Приближенный расчет регенераторов .....	594
7.15. Отдельные задачи теплообмена .....	601
7.15.1. Нагрев конденсирующимся паром интенсивно перемешиваемой жидкости.....	601
7.15.2. Нагрев псевдоожигенного слоя потоком горячего газа в условиях балансовой задачи .....	602
7.15.3. Нестационарный теплообмен между двумя интенсивно перемешиваемыми жидкостями .....	603
7.15.4. Безградиентное остывание тела за счет лучистого теплообмена.	605
<i>Литература к главе 7.....</i>	<i>606</i>

## Глава 8

<b>СТРУКТУРА ПОТОКОВ.....</b>	<b>607</b>
8.1. Общие понятия.....	608
8.2. Влияние продольного перемешивания на эффективность ХТП .....	612
8.3. Структура потоков в случае простейших идеальных моделей.....	618
8.3.1. Идеальное вытеснение.....	618
Время пребывания.....	618
Кривые отклика.....	618
Результирующий эффект процесса $U_{рез}$ .....	621
8.3.2. Идеальное перемешивание.....	621
Время пребывания.....	621
Кривые отклика.....	623
Результирующий эффект процесса $U_{рез}$ .....	624
8.3.3. Параметры кривых отклика и простейших моделей продольного перемешивания .....	627
8.4. Структура потоков в реальных системах.....	628
8.4.1. Ячеечная (каскадная, ступенчатая,...) модель потока с продольным перемешиванием.....	629
Сущность модели.....	629
Расчетные соотношения. Определение $U_{рез}$ .....	632
8.4.2. Диффузионная модель потока с продольным перемешиванием .....	634
Сущность модели.....	634
Расчетные соотношения. Определение $U_{рез}$ .....	637
8.5. Общая оценка моделей структуры потоков .....	638

8.5.1. Сопоставление моделей продольного перемешивания.....	638
8.5.2. Общая оценка моделей продольного перемешивания.....	640
8.6. Об экспериментальном изучении продольного перемешивания .....	644
8.6.1. Общие положения .....	644
8.6.2. О среднем времени пребывания.....	647
8.6.3. К выбору модели и определению ее параметров.....	648
8.6.4. Определение параметров моделей методом моментов .....	650
8.7. Структура потоков в технологических расчетах.....	655
8.7.1. Химическая реакция в потоке.....	656
8.7.2. Распределение элементов потока по времени пребывания при гравитационном течении тонких пленок .....	658
8.7.3. Конвективный теплообмен при ограниченном продольном перемешивании одного из теплоносителей.....	661
<i>Литература к главе 8.....</i>	<i>666</i>

## Глава 9

<b>ВЫПАРИВАНИЕ.....</b>	<b>667</b>
9.1. Сущность процесса. Цели и области применения.....	667
9.2. Основные типы выпарных аппаратов .....	669
9.2.1. Классификация выпарных аппаратов.....	669
9.2.2. Конструкции выпарных аппаратов .....	671
9.3. Физико-химические основы процесса выпаривания.....	675
9.4. Схема работы выпарных аппаратов. Количество удаляемого растворителя .....	683
9.4.1. Типовая схема выпарного аппарата. Обозначение параметров процесса .....	683
9.4.2. Определение количества (потока ) удаляемого растворителя.....	684
9.5. Выпарные аппараты периодического действия .....	685
9.5.1. Периодическое выпаривание с однократной загрузкой исходного раствора в аппарат.....	686
9.5.2. Периодическое выпаривание с постоянным уровнем раствора в аппарате.....	690
9.6. Выпарные аппараты непрерывного действия .....	693
9.6.1. Однокорпусный выпарной аппарат .....	693
9.6.2. Выбор рабочего давления процесса.....	695
9.6.3. Схема и расчет вакуумной выпарной установки .....	696
9.6.4. Пути экономии греющего пара.....	702
9.6.5. Многокорпусные выпарные установки .....	704
Схема и работа многокорпусных установок .....	704
Расчет прямоточной многокорпусной установки .....	708
9.6.6. Выпарной аппарат с полным тепловым насосом .....	716
9.6.7. Выпарной аппарат с частичным тепловым насосом.....	719
Расход пара .....	719
Расчет коэффициента инжекции.....	720
9.6.8. Повышение эффективности выпарных установок за счет утилизации теплоты .....	725
9.7. Пленочные выпарные аппараты.....	727
9.8. Выбор размеров сепарационного пространства выпарных аппаратов ..	730
<i>Литература к главе 9.....</i>	<i>733</i>
<b>Приложения к главе 9.....</b>	<b>734</b>
Приложение 9.1. Дифференциальные теплоты дегидратации $Q_d$ (кДж/кг растворителя) для водных растворов некоторых распространенных неорганических веществ различных концентраций $a$ [% (мас.)].....	734

## Глава 10

<b>ОСНОВЫ МАССОПЕРЕНОСА .....</b>	<b>735</b>
10.1. Общая характеристика массопере­носа .....	736
10.1.1. Классификация массообменных процессов .....	736
10.1.2. Составляющие описания массопере­носа .....	742
10.1.3. Массообменные устройства .....	744
10.1.4. Порядок последующего изложения .....	748
10.2. Концентрации .....	750
10.2.1. Способы выражения и пересчета концентраций .....	751
10.2.2. Расчет некоторых свойств смесей с использованием концент­раций .....	755
10.2.3. О концентрациях в технологических расчетах .....	758
10.2.4. Правило рычага .....	759
10.3. Равновесие .....	762
10.3.1. Общие положения .....	762
10.3.2. Равновесие в системах класса 3(2-2)1 .....	766
10.4. Кинетика массопере­носа в фазе .....	768
10.4.1. Общие положения .....	768
10.4.2. Виды массопере­носа. Об уравнении Фика .....	770
10.4.3. Диффузионный массопере­нос .....	772
10.4.4. Конвективный массопере­нос .....	773
10.5. Элементы материального баланса для фазы .....	778
10.6. Массопередача и баланс для процессов класса 3(2-2)1 .....	780
10.6.1. Массопередача .....	780
Составление уравнения массопередачи .....	781
Двухплеченная модель массопередачи .....	781
Расчет коэффициентов массопередачи .....	785
10.6.2. Материальный баланс аппарата .....	788
10.6.3. Пропускные способности массообменного процесса .....	791
10.7. Рабочие линии в аппарате для непрерывного процесса класса 3(2-2)1 .....	792
10.7.1. Уравнения и положение рабочих линий .....	793
10.7.2. Построение рабочих линий .....	797
10.7.3. Рабочие линии в некоторых специфических случаях .....	801
10.8. Средняя движущая сила для процессов класса 3(2-2)1 .....	805
10.8.1. Идеальное перемешивание обеих фаз .....	806
10.8.2. Прямоточное движение фаз в режиме ИВ .....	808
10.8.3. Противоточное движение фаз в режиме ИВ .....	811
10.8.4. Основные размеры массообменных аппаратов .....	814
10.9. Поток вещества в процессах класса 3(2-2)1 .....	817
10.9.1. Идеальное перемешивание обеих фаз .....	818
10.9.2. Прямоточное движение фаз в режиме ИВ .....	821
10.9.3. Противоточное движение фаз в режиме ИВ .....	823
10.10. Пропускные способности и лимитирующие стадии для процессов класса 3(2-2)1 .....	825
10.10.1. Пропускная способность массообменного аппарата .....	825
10.10.2. Лимитирующие стадии процесса .....	828
10.10.3. О подмене задачи в массопере­носе .....	829
10.11. Сети аппаратов (общая характеристика) .....	830
10.12. Ступенчатый проток для процессов класса 3(2-2)1 .....	833
10.12.1. Общие положения. Графоаналитический расчет .....	834

10.12.2. Аналитический расчет идеального процесса.....	838
10.12.3. Аналитический расчет реального процесса.....	841
Ступенчатый противоток для цепочки из двух аппаратов .....	841
Ступенчатый противоток для цепочки из $n$ одинаковых аппаратов .....	843
10.12.4. Оценка эффективности функционирования ступенчато-противоточной цепочки реальных массообменных аппаратов .....	848
10.12.5. О расчете противоточных аппаратов и их цепочек по "методу ВЭТС".....	851
10.13. Перекрестное соединение аппаратов в сети для процессов класса 3(2-2)1 .....	851
10.13.1. Массоперенос при идеальном контакте фаз в ступенях .....	853
10.13.2. Оптимизация ступенчато-перекрестных процессов при идеальном контакте фаз.....	857
Оптимизация потоков распределяемой фазы .....	857
Оптимизация числа ступеней .....	859
Выбор распределяемой фазы .....	860
10.13.3. Массоперенос в реальных ступенях контакта в случае прямой линии равновесия .....	861
10.14. Периодические и полунепрерывные процессы класса 3(2-2)1.....	862
10.14.1. Периодические процессы.....	863
10.14.2. Полунепрерывные процессы.....	865
10.15. О расчете массообменных процессов иных классов, нежели 3(2-2)1 .....	868
10.16. Массообмен с твердыми телами.....	871
10.16.1. Общие положения .....	871
10.16.2. Внешняя задача массопереноса.....	873
Составляющие внешнего массопереноса .....	873
Массообмен в псевдооживленном слое в условиях внешней задачи .....	875
10.16.3. Внутренняя задача массопереноса .....	877
10.16.4. Поточковая задача массопереноса .....	880
10.16.5. О смешанных задачах массопереноса .....	882
10.17. К оценке качества разделения .....	884
<i>Литература к главе 10</i> .....	888
<i>Предметный указатель</i> .....	1

## Книга 2

<i>Оглавление</i> .....	891
<b>Глава 11. АБСОРБЦИЯ</b> .....	907
<b>Глава 12. ДИСТИЛЛЯЦИЯ И РЕКТИФИКАЦИЯ</b> .....	969
<b>Глава 13. ЖИДКОСТНАЯ ЭКСТРАКЦИЯ</b> .....	1103
<b>Глава 14. АДСОРБЦИЯ</b> .....	1157
<b>Глава 15. СУШКА ТВЕРДЫХ МАТЕРИАЛОВ</b> .....	1213
<b>Глава 16. КРИСТАЛЛИЗАЦИЯ</b> .....	1307
<b>Глава 17. РАСТВОРЕНИЕ И ВЫЩЕЛАЧИВАНИЕ</b> .....	1393
<b>Глава 18. СУБЛИМАЦИЯ И ДЕСУБЛИМАЦИЯ</b> .....	1435
<b>Глава 19. ГРАНУЛИРОВАНИЕ</b> .....	1469
<b>Глава 20. МЕМБРАННЫЕ ПРОЦЕССЫ РАЗДЕЛЕНИЯ</b> .....	1519
<b>Глава 21. УМЕРЕННОЕ И ГЛУБОКОЕ ОХЛАЖДЕНИЕ</b> .....	1551
<b>Глава 22. ИЗМЕЛЬЧЕНИЕ ТВЕРДЫХ МАТЕРИАЛОВ</b> .....	1619
<b>Глава 23. КЛАССИФИКАЦИЯ ТВЕРДЫХ МАТЕРИАЛОВ</b> .....	1655
<b>Глава 24. СОПРЯЖЕННЫЕ И СОВМЕЩЕННЫЕ ПРОЦЕССЫ</b> .....	1697
<b>Перечень учебников по общему курсу Процессы и аппараты химической технологии</b> .....	1733
<b>Предметный указатель</b> .....	1735

## ПРЕДИСЛОВИЕ К СЕДЬМОМУ ИЗДАНИЮ

Первое издание двухтомника вышло в 1999 г. (кн. 1) — 2000 г. (кн. 2). Учебник вызвал огромный интерес у студентов, аспирантов, предприятий, вузов, научных организаций и частных лиц — научных работников, инженеров. Книга выдержала несколько переизданий.

Авторы учебника внимательно изучили замечания, полученные от читателей и рецензентов, большинство их учтено в той или иной форме (полностью либо частично). Меньшую часть мы отклонили по двум причинам. Во-первых, при анализе конкретных объектов авторы учебника придерживаются других взглядов и подходов к описанию или рациональной методике изложения. Во-вторых, часть замечаний, с сущностью которых авторы учебника согласны, не были приняты по соображениям, затронутым в Предисловии к первому изданию учебника и подробно развернутым в главе 1. Дело в том, что любая учебная дисциплина есть лишь некая доля соответствующей науки, призванная представить положения и закономерности этой науки в обобщённом и в тоже время упрощённом виде. И в учебнике авторы постоянно (и намеренно) старались соблюсти известную меру научной строгости, понимая при этом различие между наукой и ее учебной долей, стремясь найти разумное соотношение научного и учебного начал. Мы полагаем, что более строгому анализу того или иного объекта место в научной литературе, но не в учебнике, тем более по общей учебной дисциплине.

Благодаря профессиональной интуиции и организационным усилиям редакции издательства «Лань» читатели снова смогут найти учебник и в бумажном, и в электронном виде.

Все замечания и предложения читателей авторы по-прежнему примут с благодарностью.

Светлой памяти Учителя —  
выдающегося педагога,  
ученого и инженера  
**Нисона Ильича Гельперина**  
посвящаем

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Развитие научной мысли, расширение масштабов научного знания и проникновение в его глубины сопровождается *дифференциацией* науки, возникновением и выделением новых ее областей, более дробной рубрикацией, усилением разобщенности между различными научными дисциплинами и разделами внутри дисциплин, ослаблением и даже утерей связей (по крайней мере — ясно видимых) между ними. Это приводит к *потерям в осознании единства* природных явлений, *общности* в закономерностях дисциплин и отдельных их разделов, в подходах к их изучению — движение мысли происходит по *обособленным* траекториям. В результате появляются затруднения в изучении (усвоении) научных дисциплин, в использовании успехов одной науки (одного раздела науки) при теоретическом и экспериментальном изучении проблем и практической реализации решений — в другой области знаний (нередко — достаточно близкой).

Растущее принципиальное *противоречие* (развитие науки и потеря общности между разными областями знания) особенно негативно влияет на процесс обучения студентов, так как именно в этот период закладывается научное мировоззрение будущих специалистов. Поэтому одна из важнейших задач при написании вузовского учебника состоит в том, чтобы вскрыть перед студентами *причинно-следственные связи* изучаемой дисциплины с другими (предыдущими, смежными, последующими) и между разделами (а также внутри разделов) изучаемой дисциплины. Применительно к курсу “Процессы и аппараты химической технологии” (ПАХТ) необходимо подчеркнуть в первую очередь тесную связь с Высшей математикой (это для ПАХТ не только инструментарий, но во многом еще и наука, определяющая пути и методы анализа явлений и процессов, в ряде случаев — просто способ мышления), Физикой (прежде всего речь здесь идет о понятийном аппарате и феноменологическом подходе к анализу явлений), Физической химией (в наибольшей мере — с разделом “Термодинамика”, отчасти — с кинетикой химиче-

ских реакций), а также с рядом других дисциплин. В то же время при изучении курса ПАХТ необходимо прокладывать мостики (далее они будут расширены и конкретизированы) к курсам "Общая химическая технология", "Реакторные устройства и моделирование", "Системы управления", "Оборудование заводов", а также к курсам специальных технологий.

**МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ КУРСА ПАХТ.** Вряд ли следует жестко противопоставлять содержательную и методическую стороны учебного материала. Важны обе проблемы: **Чему учить и Как учить**, — но вторая представляется сегодня более острой, что и обусловило повышенное внимание в учебнике к методологии и методическим вопросам.

ПАХТ — курс *синтетический*. Он формировался на протяжении десятков лет из отдельных (нередко — обособленных) областей знания и дисциплин, зачастую подходящих к анализу и описанию явлений и процессов с совершенно разных позиций. Разумеется, одновременно происходил и обратный процесс: некоторые разделы ПАХТ выделялись в самостоятельные учебно-научные дисциплины. Но при создании учебника **интеграция** занимает нас больше, нежели дифференциация, поскольку именно при интеграции возникает проблема *осмысления и пояснения общности в подходах* (при дифференциации — лишь вопрос о сохранении или несохранении этой общности).

Современные учебные курсы ПАХТ содержат анализ традиционного набора технологических приемов; вариации — весьма невелики (наличие или отсутствие некоторых глав: "Измельчение и классификация твердых материалов", "Холодильные процессы" и т.п.). Формируя содержательное наполнение учебника, мы сочли целесообразным дополнительно включить в него ряд технологических приемов, приобретающих значимость в наши дни и имеющих достоверную перспективу на будущее: "Сублимация и десублимация", "Гранулирование", "Сопряженные и совмещенные процессы". Кроме того, нетрадиционно расставлены акценты в главе "Мембранные процессы деления".

Объединить методологически и методически отдельные (часто разрозненные, имеющие разные базы) подходы к анализу процессов, явлений — весьма непросто. Но если этого не сделать, то перед студентом курс не будет выступать в виде единого, логически увязанного целого; скорее, он предстанет как собрание отдельных рецептов, применяемых к решению тех или иных задач. Иными словами, будет набор проблем, подпроблем, вопросов и задач, каждую из которых надо решать своим специфическим способом. Излишне говорить, что такой курс окажется громоздким, лоскутным, не объединенным общей идеей.



Созданию методологически выдержанного курса **препятствуют**:

— традиции, громадный накопленный **опыт**, выраженный прежде всего в многочисленных практических рекомендациях, эмпирических формулах, прагматических рецептах решения отдельных задач;

— **различия в подходах** к решению разных проблем — как достаточно общих, так и сугубо частных.

Видимо, поэтому в ряде учебников по курсу ПАХТ ощущается четко выраженное *стремление к обобщению* излагаемого материала, иначе говоря — к *интеграции* знания. В учебники включаются главы общего характера, на основе которых далее трактуются технологические приемы и описания конкретных процессов (конкретных в смысле ПАХТ, но не отдельных технологий). Цель — выявить и проследить перед студентами эту общность, *показать связи* дисциплин по вертикали и горизонтали, базируя новый материал на уже известном. Подчеркнем, что интеграции знаний способствует акцент в учебнике прежде всего на **фундаментальные** положения курса. Это позволяет от эвристических правил перейти к структурированию учебно-научного материала на уровне **принципов**, что в конечном итоге приводит к репрографии (более сжато и емкому представлению) информации и ускоряет познание.

Существенной помехой в последовательной реализации идеи обобщения является желание авторов многих учебников охватить в ходе анализа и описания крайне широкий круг процессов и задач. Эта многоохватность в условиях любой разумной ограниченности объема учебника возможна только за счет глубины проработки основ; многочисленные частности (под эгидой "практической важности" или "освоения последних достижений науки и техники") можно включить в учебник только в ущерб выявлению общности и анализу физического смысла явлений, процессов. Кстати, ограниченность времени на изучение в вузе курса ПАХТ делает освоение такого учебника практически невозможным. Разумеется, учебник по охвату проблем должен быть шире курса ПАХТ в любом химико-технологическом вузе, дабы в ходе обучения можно было выбрать разделы, коим желательно (соответственно направленности и традициям вуза, факультета, а может быть — и пристрастиям кафедры, преподавателей) уделить более пристальное внимание (сократив или опустив изучение других). Однако существующие учебники, на наш взгляд, отличаются тенденцией к рассмотрению чрезмерного множества отдельных объектов, в том числе таких, место которым (при всей их практической значимости) — в научных публикациях, справочной литературе. Не в подробном описании многочисленных объектов видятся нам цели вузовского учебника.

Соответственно указанным выше положениям при создании учебника мы исходили не из тезиса **"Что можно добавить"**, а из тезиса **"Без чего нельзя обойтись"**, имея в виду прежде всего общие подходы к рассматриваемым явлениям и типовым процессам (конечно, насколько это возможно на существующем уровне науки о ПАХТ). Мы считали целесообразным ограничить изложение курса *основными проблемами* (вопрос в том, насколько правильно мы смогли установить и отобрать основное), *типовыми примерами*, привлекая наиболее интересные (полезные!) частности лишь для иллюстрации — в целях лучшего усвоения основ.

При отборе материала мы отдавали предпочтение **методически существенным** моментам перед прикладными (пусть даже практически важными), полагая главной целью — раскрыть перед студентом **подходы** к анализу процесса и **методы** проведения анализа. Надо исходить из того, что, восприняв общие подходы и приемы, студент (а впоследствии научный работник, инженер) с анализом множества конкретных процессов и ситуаций справится *самостоятельно*.

**ПРИНЦИПЫ ИЗЛОЖЕНИЯ КУРСА.** Существующая ныне градация усвоения знания насчитывает четыре уровня: **"Распознавание"** (узнавание ранее изученного объекта при его предъявлении); **"Воспроизведение"** (умение воспроизвести объект, его описание, математический вывод); **"Понимание"** (овладение связями различных факторов, умение установить и объяснить их, предсказать поведение объекта при изменении условий, — т. е. активное применение знаний); **"Творчество"** (создание новых подходов к описанию объекта, выявление новых факторов, новых объектов, новых областей знания). Мы полагаем, что инженер или научный работник, владея уровнями Распознавания и Воспроизведения, должен в основном функционировать на уровнях Понимания и Творчества (доля последнего особенно высока у научного работника). По этой причине мы старались построить учебник на уровне Понимания — это предпосылка Творческого уровня, когда *вопросы становятся важнее ответов*. В конце концов, сверхзадача — не в том, чтобы студент знал описание того или иного процесса, а в том, чтобы он усвоил общие подходы (к рассмотрению явлений и процессов, к постановке технологических задач) и приемы (анализа этих явлений, процессов, задач), чтобы смог подойти к описанию любого (даже незнакомого) процесса, провести его анализ-синтез на уровне ПАХТ.

В соответствии с этим в учебнике особенно тщательно и детально проработаны общие главы, где изложены основные положения, важные для ряда конкретных (последующих) глав. Общность в физико-химических закономерностях, технологиче-

ских аспектах, методических вопросах, в подходах к анализу подчеркивается нередкими перекрестными ссылками в тексте материалы других глав (чаще — предыдущих, в основном — общих). Специально заметим, что в согласии с концепцией учебника оправдано место главы "Основы массопереноса": традиционно ее включают в тот том, где изучаются конкретные массообменные процессы; в данном учебнике она помещена в томе (книге), содержащем *все общие главы*. Это позволяет проследить общность различных процессов переноса.

Заметно расширена и углублена глава "Кристаллизация", ставшая фундаментом для глав "Растворение и выщелачивание", "Сублимация и десублимация", "Гранулирование". Значительно шире (в виде отдельной главы) представлена общая проблема **структуры потоков**. Для главы 10 "Основы массопереноса" существенно выделение систем класса 3(2-2)<sup>1</sup> — анализ разнообразных массообменных процессов этого класса (скажем, многих процессов абсорбции и экстракции) ведется по *единой канве*.

Общность подчеркивается и внутри глав. Так, с единых позиций анализируется кристаллизация из растворов и расплавов.

При изложении некоторых разделов нам пришлось в ряде случаев использовать базу (подходы, приемы, методы), традиционно выпадающую из общих (устоявшихся) подходов к курсу (это относится, например, к главе "Выпаривание", в еще большей мере — к главе "Сушка", отчасти — к главе "Адсорбция"). Мы постарались и здесь показать связи этой базы с общими подходами — в балансовых соотношениях, в кинетических закономерностях и т.п.

Многие фундаментальные (концептуальные, методологические) положения научный работник, преподаватель, инженер (и не каждый!) начинают чувствовать и понимать через 15—20 лет профессиональной деятельности, т.е. далеко за пределами вуза. Для студента они остаются не только непознанными, но чаще всего — даже не обозначенными. Авторы учебника постарались сделать акцент на некоторых таких моментах (примеры приведены ниже), наиболее концентрированно — в первой главе. Их осмысление способствует становлению *методологического* характера мышления студентов, поиску ими причинно-следственных связей. При этом появляются вопросы и сомнения, а это предпосылка успешной творческой учебы и работы.

В ходе изложения материала в учебнике авторы постарались показать и подчеркнуть **общность** рассматриваемых проблем:

- на **содержательном** уровне (вывод и вид дифференциальных уравнений переноса различных субстанций; представление равновесия и кинетики переноса, и т.п.);

- на **методологическом** уровне (линейность-нелинейность модельных описаний; уровень абстрагирования модели от объекта; концепция пропускных способностей и лимитирующих

стадий; место обобщенных переменных; правомерность использования коэффициентов незнания и т.д.);

— на **методическом** уровне (сходное построение большинства глав, техника составления балансов; выбор подходящего типа концентраций компонентов для обеспечения постоянства расчетных потоков; определение числа теоретических ступеней; равноточность инженерных расчетов и др.).

В настоящем учебнике отдельных технологических задач рассмотрено меньше, чем в других учебниках. Скажем, в разделе "Дистилляция" опущены некоторые способы осуществления этого процесса, не содержащие оригинальных методических решений; по той же причине в главе "Экстракция" не рассматривается экстрагирование с флегмой (в таких случаях читатель обычно отсылается к соответствующей литературе). Мы постарались использовать предоставленные нам страницы для углубленной (в плане ПАХТ) проработки физического смысла, подходов и приемов, детального рассмотрения тех процессов и ситуаций, которые характерны для возможно более широкого круга "процессных" задач. В ряде случаев приводится несколько возможных путей анализа объектов; в качестве примеров можно привести распределение скоростей при течении тонких пленок (глава "Гидравлика") или формирование напора центробежного насоса (глава "Перемещение жидкостей").

Все это предопределило ряд **особенностей учебника**.

1. Главное внимание уделено вопросам, разделам, главам, дающим наиболее **общие представления** о процессах и группах сходных процессов, о постановке задач, приемах анализа, алгоритмах расчетов, о физическом смысле явлений и процессов.

2. Основные вопросы в учебнике — не "*как?*" и "*что?*", а "*зачем?*" (постановка проблемы) и "*почему?*" (обоснование хода и результатов анализа). Поэтому, где возможно, мы стремились дать **образы, модельные представления** о явлении, процессе, сочетая феноменологический и аналитический подходы. При этом в ходе получения ответов на вопросы "*зачем?*" и "*почему?*" разрешаются многочисленные вопросы типа "*что?*", "*как?*": в естественно-научном и техническом образовании важны не столько факты и эмпирические связи, сколько постижение их *физической сущности и доказательность анализа*. А эмпирику и аксиоматику мы постарались свести к минимуму.

3. В учебник включено рассмотрение отдельных вопросов, не очень существенных с прагматической точки зрения, но важных в методическом отношении (в смысле нетривиальности подхода, приема анализа). Здесь цель — **не потерять метод**, вооружить студента достаточно широким и действенным инструментарием для разрешения технологических ситуаций (пусть даже в

ущерб перебору более широкого круга конкретных практических задач).

4. Мы особо старались обратить внимание студентов на те моменты курса ПАХТ, которые (мы знаем это из опыта преподавания) вызывают у них **затруднения** при постижении физической сущности процесса и осмыслении полученного результата либо вообще ускользают от их внимания.

5. В качестве основного мы старались выдержать **дедуктивный метод** построения курса и изложения материала, не отказываясь в отдельных случаях и от других способов его подачи.

При написании учебника мы *стремились*:

— *найти разумное соотношение научного и учебного начал*, сохранить приемлемый научный уровень (но без глубоких научных изысков — их рассмотрение в учебнике может затруднить усвоение материала студентом; место им — в научной литературе, т.е. на более высокой ступени овладения научной дисциплиной);

— *выдержать методический уровень*, позволяющий студенту уяснить суть и двигаться дальше.

Мы старались соблюсти известную *меру научной строгости* (не опускаясь до вульгаризации), понимая в то же время различие между наукой и ее учебной долей, преподносимой в учебнике. Поэтому мы считали возможным в ряде случаев поступиться строгостью научного изложения, если это помогало *созданию образа* (облика), модели явления, процесса и способствовало лучшему осмыслению проблемы. Полагаем, что строгость научного восприятия и анализа придет к студенту, инженеру, научному работнику (или они придут к ней) при более глубокой проработке проблемы, если им доведется столкнуться с ней в будущей учебе и деятельности.

Достаточно строгое изложение материала в учебнике для естественных и технических вузов не отрицает целесообразности (если удастся) *эмоциональной подачи материала*, повышающей интерес к предмету, способствующей усвоению и запоминанию. Речь идет об интересных технологических ситуациях, запоминающихся эпизодах, элегантных путях решения задач, ярком языке — образности, эпитетах, метафорах. Одним словом, во вузовском учебнике есть место для восклицательного знака (и не только в изображении факториалов) и для многоточия (и не только при указании на прерывание записи бесконечных последовательностей).

Авторы в основном придерживались терминологии, установившейся в науке о ПАХТ, не отказываясь вместе с тем от ее изменения и уточнения там, где это представлялось целесообразным. Так, в главах "Основы теплопереноса", "Теплопередача и теплообмен" разведены (им придан конкретный смысл) понятия "теплоперенос", "теплоотдача", "теплопередача", "теплообмен".

В учебник включались только те вопросы, которые авторы “пропустили через себя”, т.е. по которым у них была достаточная ясность. По этой причине из рассмотрения исключен, например, такой вопрос (интересный методически и важный для химической технологии), как истечение на водосливах: в существующих учебниках он дан с недопустимыми ошибками, а более строгое решение отличается неприемлемой громоздкостью. Пока же компактного, строгого, но доступного студентам решения этого вопроса, к сожалению, нет.

Изложенные выше подходы представляются нам важными вообще, в том числе и при написании учебника по курсу ПАХТ, в особенности – в связи с намечающимся в перспективе возникновением более общей научной (впоследствии и учебной) дисциплины “Технологические процессы и аппараты” (ТПА), в которую дисциплина ПАХТ войдет как составная часть со своим характерным (для химической технологии) содержанием. Но методология и методика у ТПА и ПАХТ будут общими (вероятно, обогащенными новыми подходами). Подчеркнутое внимание в учебнике к общим моментам и выявлению связей — существенно еще и в этом аспекте.

**ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛА ЧИТАТЕЛЮ (СТУДЕНТУ).** Учебник разделен на две примерно равные по объему книги. Отдельные книги не являются тематически обособленными: вторая книга представляет собой продолжение первой; нумерация страниц у книг — общая. Представление материала в учебнике учитывает развитие науки “Процессы и аппараты химической технологии” — сложный нелинейный переход от эвристических правил (в период становления технологии) к основополагающим принципам (глобальным, общим, отраслевым, частным) на основе фундаментальных представлений в исследуемой и смежных областях Знания.

*Причинно-логические* связи анализируются, а *математические преобразования* приводятся в учебнике достаточно подробно, чтобы студенту были вполне ясны постановка задачи, канва вывода, анализ полученного результата. Мы считаем неприемлемой нередко реализуемую в учебниках практику, когда результат приводится сразу, а ход решения изымается. Ведь в самом ходе решения часто встречаются поучительные приемы, а порой и неожиданные повороты.

*Сведения из других курсов* (предыдущих и смежных), на которых базируется понимание и описание отдельных вопросов курса ПАХТ, представлены только в необходимых объемах, без их детализации и подробного повторения.

*Конструкции аппаратов*, в которых протекают изучаемые процессы, приводятся схематично, стилизованно, без несущественных (в аспекте курса ПАХТ) узлов, описание их работы дается лаконично. Основная цель здесь — дать студенту понимание принципа работы аппарата, в котором происходит анализируемый процесс; частные практические рекомендации сведены к минимуму. Предполагается, что в идеале теоретическому учебнику по курсу ПАХТ должно сопутствовать отдельное учебное пособие с детальным описанием конструкций аппаратов и изложением принципов и особенностей их работы.

При необходимости более подробного рассмотрения каких-либо вопросов, касающихся теоретического анализа, инженерно-технологических расчетов, сведений из других курсов, конструкций аппаратов и т.п., следует воспользоваться помещенными в учебнике *ссылками на учебную и научную литературу*. Список рекомендуемой литературы в алфавитном порядке размещается после каждой главы. Кроме того, во второй книге перед “Предметным указателем” дан перечень известных нам учебников по общему курсу “Процессы и аппараты химической технологии”, изданных на русском языке.

*Нумерация рисунков, таблиц, основных формул* дана по главам арабскими цифрами, например (2.1), (5.2); в ряде случаев (составные рисунки, модификация формул) применяется запись вида (10.76). Нумерация вспомогательных соотношений обозначается русскими буквами (а), (б) и т.д. и ведется заново с каждого подраздела уровня (7.3).

В редких случаях отдельные главы учебника заканчиваются *приложениями*, включающими необходимые для расчетов материалы, не содержащиеся в распространенной учебной и справочной литературе.

В тексте учебника принято *использование различных шрифтов* (полужирного, курсива, петита) с целью акцентирования и обособления отдельных моментов — ключевых, углубляющих анализ, методически важных (или, наоборот, необязательных) для понимания учебного материала, изучаемого в данном и последующих разделах. О назначении каждой формы шрифтовых выделений см. соответствующий подраздел в “Основных условных обозначениях”.

*Список основных условных обозначений и подробный Предметный указатель* помещены в каждую из двух книг. В *Оглавлении*



первой книги приведен также перечень глав второй книги, а во второй книге — глав первой книги. Мы вообще старались излагать и размещать материал так, чтобы это было удобно читателю, студенту.

---

Учебник включает целый ряд идей (как содержательного, так и методического характера) заслуженного деятеля науки и техники, лауреата Государственной премии, доктора технических наук профессора **Нисона Ильича Гельперина**, в том числе разрабатываемых им в последние годы жизни, — он не успел их реализовать. Существенную роль в выдвижении и осмыслении вошедших в учебник химико-технологических проблем сыграли некоторые преподаватели кафедры ПАХТ МИТХТ, не принявшие участия в написании учебника; среди них — один из первых учеников Н.И.Гельперина в МИТХТ, опытный преподаватель профессор В.Л. Пебалк. Авторам хотелось бы рассматривать предлагаемый учебник как определенный шаг в развитии *научно-учебной школы Учителя*.

Изучение весьма нелегкого для студентов курса ПАХТ (а потому — и материала в учебнике) требует грамотной постановки задач, логически выдержанного хода решений, анализа найденных результатов, т.е. **постоянной работы на понимание**. Поэтому самым способом подачи учебного материала авторы стремились убедить студента, что **ход решения задачи важнее полученного результата** (факта, рецепта действий), а **метод решения — еще важнее**, поскольку относится не к единичной задаче — он охватывает группу задач. Иными словами, основой науки и учебной дисциплины “Процессы и аппараты химической технологии” является никак не *Know how* (“Знаю как”), а *Know why* (“Знаю почему”) и не менее важное, а зачастую и более сложное *Know what for* (“Знаю зачем”). И еще: необходимо, чтобы учебник был проникнут духом *движения научной мысли* — это относится не только к быстро изменяющемуся прикладному материалу, частностям, накопленным фактам, рецептам, но и к более стабильным фундаментальным знаниям. Студент должен вынести из учебника понимание незавершенности дисциплины как в научном, так и в методическом аспекте.

В этом плане, как ни парадоксально, одна из главных задач курса (а значит, и учебника по курсу) состоит в том, чтобы при изучении материала студент чего-то не понял (или не до конца понял). *Осознанное непонимание рождает вопросы — это первый шаг к углубленному пониманию*.

*И если работать над курсом ПАХТ в таком ключе, если постичь связи между разделами дисциплины (и внутри разделов), а также с другими науками, то пытливый студент может вынести из учебника больше, чем заложено в него авторами.*

---

Авторами конкретных глав (их номера указаны в скобках) являются:

– проф. *В.Г. Айништейн*: Основные понятия и соотношения (1), Гидравлика (2), Сжатие газов (4), Гидромеханические процессы (5), Основы теплопереноса (6), Адсорбция (14), Сушка (15), Измельчение твердых материалов (22), а также (с участием доц. *В.В. Захаренко*) – Структура потоков (8);

– проф. *В.Г. Айништейн* и доц. *В.В. Захаренко*: Теплопередача и теплообмен (7), Основы массопереноса (10);

– проф. *В.Г. Айништейн*, проф. *М.К. Захаров*, проф. *А.Е. Костянян*: Дистилляция и ректификация (12);

– проф. *В.Г. Айништейн* и доц. *Т.В. Зиновкина*: Классификация твердых материалов (23);

– проф. *М.К. Захаров*: Перемещение жидкостей (3), Выпаривание (9), Абсорбция (11);

– доц. *Т.В. Зиновкина*: Умеренное и глубокое охлаждение (21);

– проф. *А.Е. Костянян*: Жидкостная экстракция (13);

– проф. *Г.А. Носов*: Кристаллизация (16), Растворение и выщелачивание (17), Сублимация и десублимация (18), Сопряженные и совмещенные процессы (24);

– доц. *А.Л. Таран*: Гранулирование (19), Мембранные процессы разделения (20).

---

Авторы благодарны рецензентам – заведующему кафедрой “Процессы и аппараты химической технологии и безопасности жизнедеятельности” Московской государственной текстильной академии доктору технических наук профессору *Б.С. Сажину* и кафедре “Процессы и аппараты химической технологии” РХТУ им. Д.И. Менделеева (заведующий кафедрой – доктор технических наук профессор *А.А. Тутов*), а также эксперту – заведующему лабораторией Теоретических основ химической технологии ИОНХ им. Н.С. Курнакова РАН доктору технических наук профессору *Н.Н. Кулову* – за внимание к рукописи учебника, доброжелательную критику и ценные замечания.

Все вопросы читателей, замечания и предложения – как общего характера, так и по конкретным разделам и главам – авторы воспримут с благодарностью.

**И в заключение – особенности подхода авторов учебника, выраженные титульным редактором книги *В.Г. Айништейном* в предельно компактной форме:**

Эти строки оды хвалебной  
Посвящаю группе фанатов,  
Написавших смелый учебник  
По процессам и аппаратам.

Он останется ярким следом  
В смутных дебрях сложной науки.  
Вклад его нам еще неведом –  
Оценить его смогут внуки.

В нем – явления переноса,  
Но готовых рецептов нету;  
В нем важнее ответов – метод,  
А еще важнее – вопросы.

Мы процессы свели в модели,  
Их исток – в бесконечно малом.  
Чтоб пробиться к расчетным целям,  
Подружились мы с интегралом.

За стеною из заблуждений –  
Безобразно серой, безликой,  
Мы увидели суть явлений,  
Протыкая привычность мнений  
Пропускных способностей пикой.

Проработать учебник – значит:  
Видеть смысл Приходов и Стоков,  
Распознать подмену задачи,  
Взвесить вклад структуры потоков,

Общность в разных найти явлениях,  
Вникнуть в свежих идей побег,  
Вскрыть потоковых стадий значение –  
Их порой не приемлют коллеги.

Что ж, нам тоже было непросто  
Мир порадовать новым словом.  
Но без трудностей – нету роста,  
Не окажется слово новым.

В гневе тот – наши книги топчет,  
Этот – славит их гимном звучным.  
Но учебник наш, знаю точно,  
Никому не кажется скучным.

Мы благое сделали дело –  
Каждый автор может быть гордым.  
Я хочу, чтоб оно звенело  
Не последним для нас аккордом.

## ОСНОВНЫЕ УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Настоятельно рекомендуем студентам (вообще — читателям учебника) отнестись к этому разделу с *большим вниманием*: ознакомление с ним поможет лучшему усвоению изложенного в учебнике материала.

Выбор символики (условных обозначений) в учебнике основан на следующих положениях и подходах:

- число используемых в учебнике понятий *больше* количества имеющихся символов; при совпадающей символике смысл разных величин различается с помощью индексов;

- потоки, силы, геометрические размеры и прочие величины обозначаются *латинскими* символами (исключения — единичны); при выборе символов исходили из латинского, английского или немецкого корня соответствующего понятия либо из установившихся традиций;

- расходы, потоки (теплоты, вещества) и другие величины, обозначенные латинскими символами, изображены курсивным шрифтом, количества (в редких случаях — другие характеристики) — прямым;

- индексы при величинах обозначены чаще всего *русскими* буквами; они обычно соответствуют начальным буквам поясняющего понятия.

В некоторых случаях возможны *вынужденные* отступления от сформулированных выше подходов.

Для облегчения работы с материалом учебника (иногда — и для уточнения) смысл обозначений, содержащихся в приводимом ниже перечне (и, естественно, дополнительно вводимых), поясняется также в каждой главе.

С целью сокращения записей и акцентирования внимания читателя в ряде глав прописными буквами выделены **ключевые слова**, их смысл специально пояснен в тексте.

В *заголовках* разделов и подразделов учебника выдержана иерархия шрифтов. В *тексте* учебника тоже используются различные **шрифтовые выделения**, что способствует смысловой рубрикации материала и установке акцентов.

Ниже последовательно приведены (где возможно — в алфавитном порядке) **основные условные обозначения**, используемые в учебнике: понятийная символика, аббревиатура ключевых слов (тех, что применяются в учебнике широко) и другие сокращения, некоторые математические символы, виды шрифтовых выделений в тексте.

# СИМВОЛЫ

$a$	– температуропроводность; удельная поверхность; концепция (преимущественно – массовая)	$N$	– мощность; число ячеек полного перемешивания; число ступеней
$b$	– линейный размер, ширина	$n$	– число оборотов; кратность циркуляции; число ступеней
$C$	– константа излучения; концентрация компонента (вещества) в потоке, в одной из фаз	$P$	– сила
$c$	– абсолютная скорость; теплоемкость	$p$	– давление, парциальное давление
$D$	– диаметр; коэффициент диффузии	$Q$ и $\dot{Q}$	– количество и поток теплоты
$D$ и $\dot{D}$	– количество и поток пара	$q$	– удельные потоки – теплоты (напряжение теплового потока) или вещества (массы, компонента)
$d$	– диаметр	$R$	– радиус; газовая постоянная (индивидуальная, универсальная)
$E$	– плотность лучистого потока; эффективность; коэффициент эффективной диффузии (продольного перемешивания)	$r$	– радиус, радиальная координата; теплота парообразования (конденсации)
$F$	– сила; поверхность теплообмена или контакта фаз	$S$	– поперечное сечение
$f$	– площадь поперечного сечения; частота	$S$ и $\dot{S}$	– количество и поток раствора
$G$ и $\dot{G}$	– массовые количество и расход вещества, твердой фазы	$s$	– энтропия (удельная)
$g$	– ускорение свободного падения	$T, t$	– температура
$H$	– высота	$U$	– относительная влажность твердого материала
$h$	– высота; энтальпия (удельная)	$u, v$	– скорость
$I$	– условное теплосодержание воздуха; момент инерции	$V$	– объем
$i$	– энтальпия (удельная)	$V$	– объемный расход
$k$	– коэффициенты теплопередачи или массопередачи; показатель адиабаты; константа скорости химической реакции	$v$	– удельный объем
$L$	– расход воздуха (в расчете на абсолютно сухой); удельный (на 1 кг топлива) расход воздуха; удельная работа	$W$ и $\dot{W}$	– межфазные количество и поток удаленной влаги
$L$	– работа	$w$	– скорость
$L$ и $\dot{L}$	– количество и расход жидкости	$X$	– относительная концентрация вещества в фазе $x$ ; степень сухости влажного пара
$l$	– линейный размер, длина; удельный (на 1 кг удаляемой влаги) расход воздуха	$x$	– влагосодержание воздуха; молярная (или какая-либо иная) концентрация вещества в фазе $x$ ; степень ожигения воздуха
$M$	– молярная масса	$Y$	– относительная концентрация в фазе $y$
$M$ и $\dot{M}$	– межфазные количество и поток переданного вещества	$y$	– молярная (или какая-либо иная) концентрация вещества в фазе $y$
$m$	– масса; показатель политропы; коэффициент распределения	$x, y, z$	– координаты
		$\alpha$	– коэффициент теплоотдачи; относительная летучесть; угол
		$\beta$	– коэффициент объемного расширения; коэффициент массоотдачи
		$\Gamma$	– плотность орошения

$\gamma$	– угол	$\mu$	– динамическая вязкость; номинальная (расходная) концентрация твердой фазы
$\Delta$	– движущая сила процесса ( $\Delta t$ , $\Delta C$ , $\Delta x$ , ...)	$\nu$	– кинематическая вязкость
$\delta$	– линейный размер, толщина стенки или пленки	$\xi$	– коэффициент местного сопротивления
$\varepsilon$	– порозность; степень черноты; холодильный коэффициент	$\Pi$	– периметр
$\eta$	– коэффициент пластической вязкости (пластичности); коэффициент полезного действия, эффективность	$\pi$	– осмотическое давление
$\theta$	– температура, безразмерная температура; безразмерное время	$\rho$	– плотность; абсолютная массовая концентрация
$\kappa$	– коэффициент расхода	$\sigma$	– поверхностное натяжение
$\lambda$	– коэффициент гидравлического сопротивления; теплопроводность; теплота плавления (затвердевания)	$\tau$	– время; напряжение трения
		$\varphi$	– плотность распределения; относительная влажность; доля; угол
		$\omega$	– угловая скорость; абсолютная влажность твердого материала

## ИНДЕКСЫ

### Верхние

кр	– критический	"	– конец, на выходе
р	– равновесное значение	*	– знак безразмерной величины
л	– ламинарный	-	– средний, усредненный (над символом)
т	– турбулентный		
'	– начало, на входе		

### Нижние

а	– аппарат	о	– начальный, исходный; нулевой
вл	– влажный	п	– пар
вх	– на входе	пл	– плавление
вых	– на выходе	пп	– продольное перемешивание
г	– газ, газообразный	р	– реальный
гр	– граничный; греющий	с	– сплошная среда; сухой; стесненный
д	– диффузионный, дисперсная фаза	св	– свободный
е	– эквивалентный	см	– смеси
ж	– жидкость, жидкий	ср	– средний
и	– истинный	ст	– стенка
ид	– идеальный	т	– твердый; тяжелый; трения
ин	– инерт, инертный	у	– условный
к	– конечный	уд	– удельный
кип	– кипение	ч	– частица
конд	– конденсация	э	– эффективный
л	– легкий, локальный	F	– поверхностный
м	– местный; материал	V	– объемный
н	– начальный		

## АББРЕВИАТУРА КЛЮЧЕВЫХ СЛОВ И ТИПОВЫЕ СОКРАЩЕНИЯ

ГУ	– граничное условие	ПАХТ	– процессы и аппараты химической технологии
ИВ	– идеальное вытеснение	ПС	– псевдооживленный слой
ИП	– идеальное перемешивание	ТМ	– твердый материал
КПД	– коэффициент полезного действия	Ис	– источник
НС	– неподвижный слой	Нак	– накопление
НУ	– начальное условие	Пр	– приход
ОБС	– основное балансовое соотношение	Рез	– результат
		Ст	– сток
		Ух	– уход

## ОБОБЩЕННЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

критерии подобия и другие комплексы

$Ar \equiv \frac{gd^3}{\nu^2} \frac{\rho_T - \rho}{\rho}$	– критерий Архимеда	$Gr \equiv \frac{gd^3}{\nu^2} \beta \Delta t$	– критерий Грасгофа
$a, S_x \equiv \frac{k_x F}{L}$	– число единиц переноса	$Nu \equiv \frac{\alpha l}{\lambda}, \frac{\alpha d}{\lambda}$	– число Нуссельта
$Bi \equiv \frac{\alpha l}{\lambda_T}, \frac{\alpha R}{\lambda_T}$	– критерий Био	$Pe_d \equiv \frac{wl}{D}$	– критерий Пекле диффузионный
$b, S_y \equiv \frac{k_y F}{D}$	– число единиц переноса	$Pe_T \equiv \frac{wl}{a}$	– критерий Пекле тепловой
$c \equiv \frac{L}{mD}$	– факторы массопереноса	$Pe_3 \equiv \frac{wl}{E}$	– критерий Пекле для продольного перемешивания (эффективный)
$c' \equiv \frac{mD}{L}$			
$Eu \equiv \frac{\Delta p}{\rho w^2}$	– число Эйлера		
$Fi \equiv \frac{D\tau}{l^2}, \frac{D\tau}{R^2}$	– критерий Фика	$Pr \equiv \frac{\nu}{a}$	– критерий Прандтля
$Fo \equiv \frac{a\tau}{l^2}, \frac{a\tau}{R^2}$	– критерий Фурье	$Re \equiv \frac{wl\rho}{\mu}, \frac{wd\rho}{\mu}, \frac{wd}{\nu}$	– критерий Рейнольдса
$Fr \equiv \frac{gl}{w^2}$	– критерий Фруда	$Sc \equiv \frac{\nu}{D}$	– критерий Шмидта



$Sh \equiv \frac{\beta l}{D}, \frac{\beta d}{D}$  – критерий Шервуда

$St_d \equiv \frac{\beta}{w}$  – число Стантона диффузионное

$St \equiv \frac{\alpha}{c_p w}$  – число Стантона тепловое

$We \equiv \frac{\rho w^2 d}{\sigma}$  – критерий Вебера

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ И ЗНАКОВАЯ СИМВОЛИКА

const – постоянная величина  
exp – экспонента:  $\exp u$  означает  $e^u$   
idem – одинаковый (-ая, -ое, -ые)  
lim – предел  
max – максимум  
min – минимум  
opt – оптимум  
var – переменная величина  
 $\Delta$  – разность, приращение

$\nabla^2$  – лапласиан  
 $\prod$  – произведение  
 $\Sigma$  – сумма  
 $||$  – абсолютная величина  
 $\circ - \bullet$  – операция сопоставления  
 $\equiv$  – знак тождества; обозначение  
 $\sim$  – пропорциональность  
 $\approx$  – приближенное равенство

## ШРИФТОВЫЕ ВЫДЕЛЕНИЯ В тексте

1. Полуужирный прямой – рубрикационные выделения (в начале строки), новые, принципиальные для данного текста понятия, термины; для некоторых обобщающих понятий используется полуужирный курсив.
2. Светлый прямой в разрядку – рубрикационные выделения (в начале строки; подчинены полуужирному прямому).
3. Светлый курсив – смысловые акценты; определения, формулировки законов правил.
4. Прописные буквы – аббревиатура ключевых слов и наиболее распространенных понятий.
5. С прописной буквы – составляющие балансовых соотношений (в обобщенном виде, безотносительно к переносимой субстанции).
6. Мелкий шрифт – конструкции аппаратов; фрагменты, иногда – элементы текста (углубление анализа), без проработки которых не нарушаются связность изложения и понимание последующего материала, а также подписи к рисункам и сноски.

## Н а р и с у н к а х

- I, II, ...* – потоки веществ, рабочих тел (символы снабжены на рисунках стрелками)  
(I), (II), ... – те же вещества, рабочие тела, занимающие пространства (области, зоны аппарата)

# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И СООТНОШЕНИЯ

“Процессы и аппараты химической технологии” (ПАХТ) — наука о принципах организации и расчета химико-технологических процессов и принципах (не деталях) конструирования технологической аппаратуры. ПАХТ — один из разделов более широкой области знаний — теоретических основ химической технологии (ТОХТ); но они выходят за пределы ТОХТ, включая некоторые прикладные аспекты.

## 1.1. ВВЕДЕНИЕ

### 1.1.1. Предмет и место курса

Номенклатура веществ (продуктов), получаемых химической и смежными отраслями промышленности, исчисляется ныне десятками тысяч наименований. Разумеется, ни одной науке в рамках химической технологии не под силу изучить даже небольшую часть процессов получения этих соединений. Поэтому каждая наука классифицирует упомянутые соединения и процессы по каким-то существенным признакам, например: по типу веществ (органические, неорганические, полимерные; иногда с более дробной рубрикацией); по фазовому состоянию (гетерогенные процессы или гомогенные; в жидкой, газовой или твердой фазе); по условиям проведения процесса (высоко- и низкотемпературные, под высоким или низким давлением и т. д.). ПАХТ классифицирует процессы по **элементарным технологическим приемам** (например, фильтрование, экстракция, сушка, гранулирование); таких приемов — около двух десятков. При этом рассмотрение технологических приемов в рамках ПАХТ ведется *в общем* — безотносительно к участвующим в процессе веществам, численным значениям их конкретных свойств и параметров процесса. Эта конкретика проявляется уже в ходе применения методов ПАХТ к инженерному расчету того или иного технологического процесса и реальному его воплощению — при совместных действиях специалистов в области ПАХТ и технологии производства интересующего нас продукта.

Именно в смысле использования того или иного технологического приема трактуется в курсе ПАХТ сам термин **процесс**. Различие отдельных химико-технологических процессов с точки зрения ПАХТ состоит в выборе (использовании) тех или иных приемов, в их числе и последовательности. Заметим, что многие из рассматриваемых в курсе ПАХТ приемов находят широкое применение также в пищевой, фармацевтической, металлургической и других областях промышленности.

Основная цель науки о ПАХТ состоит в анализе элементарных технологических приемов и функционирования типичных аппаратов — в отдельности и в различных сочетаниях. В качестве главных выделим здесь две задачи:

а) изучение закономерностей и математическое описание технологических приемов и их совокупностей, разработка расчетных методов перехода от процесса в лабораторной установке к крупным промышленным аппаратам (часто говорят: "от стекла к металлу");

б) усовершенствование существующих и разработка новых технологических приемов, создание методики их расчета.

Анализ явлений и процессов предполагает установление связей (качественных и количественных — их не надо противопоставлять) между объектами, потоками рабочих тел, их свойствами, параметрами. При этом *качественные* связи направлены прежде всего на установление характера влияния тех или иных параметров на ход технологического процесса, *количественные* — на доведение анализа "до числа", т. е. на расчет требуемых характеристик процесса. В конечном итоге реализация качественных и количественных связей в аспекте ПАХТ должна привести к созданию инженерной методики расчета технологического аппарата и проводимого в нем процесса.

Специально подчеркнем, что стадия поведения конкретного процесса до промышленных масштабов зачастую занимает существенно больше времени, нежели его лабораторная проработка. Оказывается, мало создать химико-технологический процесс в пробирке или лабораторной трубке, мало изучить его механизм и кинетику, отработать оптимальные условия его осуществления; надо еще обеспечить такие условия в промышленном агрегате, чтобы механизм и кинетика были достаточно хорошо воспроизведены. Этим и занимается наука ПАХТ — анализом и расчетом гидродинамической, тепловой, диффузионной обстановки, найденной в лабораторных условиях и необходимой для успешного проведения промышленного процесса.

Проиллюстрируем роль ПАХТ ярким примером из истории отечественной химической промышленности. В начале 30-х годов американцы продали нашей стране и смонтировали в Бобриках (ныне Новомосковск) колонны синтеза

аммиака по новейшей (тогда) технологии; однако в обусловленные сроки запустить их с гарантированной производительностью они не сумели. Выяснить причину было поручено молодому профессору Н.И.Гельперину. Он вскрыл колонны, проанализировал работу их теплообменных зон и выявил недопустимые температурные перекосы. На основе его расчетов была изменена конструкция теплообменного устройства в колоннах, и они были запущены (на *том же катализаторе, с тем же синтез-газом, при тех же параметрах работы*) с производительностью, заметно выше проектной. (Между прочим, американцы купили у нас лицензию — за небольшие деньги — на свою колонну, но с нашей теплообменной начинкой!) Таким образом, в осуществлении *каталитического* процесса решающей явилась *тепловая* обстановка, обеспеченная грамотным анализом и созданной на его основе рациональной конструкцией теплообменной зоны реактора.

Приведенный пример не должен создавать впечатления, что наука ПАХТ сегодня способна давать однозначные и исчерпывающие ответы на все технологические вопросы. До сих пор в химической технологии до трети капитальных затрат уходит на переделки и модернизацию оборудования — в значительной степени потому, что его не сумели достаточно хорошо рассчитать и сконструировать сразу. Это обусловлено, во-первых, сложностью самих технологических процессов, недостаточной изученностью механизмов их протекания; отсюда приближенность анализа и расчета, введение "*коэффициентов незнания*" (обоснованных и не очень) — различного рода коэффициентов полезного действия (КПД), степени приближения к оптимальному процессу и т.п. Это обусловлено, во-вторых, принципиальной вариативностью разумных технологических решений, да и не всегда заранее можно сказать, какое решение лучше в данной конкретной ситуации. Повышение эффективности химико-технологических процессов возможно путем количественных и качественных изменений. При *количественных* изменениях (величин и соотношений потоков, технологической аппаратуры и т.п.) за повышение эффективности, как правило, приходится "платить" усложнением и удорожанием (процесса, аппаратов, систем управления). Повышения эффективности при одновременном упрощении и удешевлении технологического процесса удастся добиться при *качественных* изменениях последнего: принципиально новых подходах к его осуществлению, возможно — на основе новых технологических приемов.

ПАХТ являются в значительной мере "синтетической" наукой; здесь широко используются инструментарий Математики и знания из ряда областей Физики, Прикладной механики, Технической термодинамики, Физической химии (прежде всего термодинамики и кинетики) и других дисциплин. Так, некоторые задачи ПАХТ прямо решаются с использованием понятийного аппарата Прикладной механики (например, задача о гидравлическом ударе), Электротехники (расчет электрофильтров), Физической химии (задачи макрокинетики) и т. п.

В свою очередь курс ПАХТ *служит базой* для ряда других наук, использующих его методы и результаты при решении своих научных и инженерных задач. В то же время ПАХТ нередко вторгаются в область некоторых других наук, в чем-то *пересекаясь* с ними, исследуя проблемы, представляющие совместный интерес.

Материалы учебного курса ПАХТ прямо используются при изучении дисциплины "Реакторные устройства и моделирование" — эта дисциплина в научном плане вообще составляет единое целое с ПАХТ. Некоторые идеи и методы ПАХТ применяются и получают дальнейшее развитие:

- при изучении закономерностей поведения достаточно сложных химико-технологических систем (ХТС) в курсах "Общая химическая технология", "Системные характеристики ХТС" и т. п.;

- при изучении проблем управления этими системами в курсе "Автоматические системы управления химико-технологическими процессами" (контроль и регулирование процесса, поддержание стабильного технологического режима) и в курсе "Химическая кибернетика", призванном обеспечить управление процессами в глобальном смысле — на уровне анализа-синтеза ХТС.

Положения и методы науки ПАХТ используются также в курсах конкретных технологий и оборудования заводов, изучающих специальные технологические схемы и аппаратуру для производства определенной химической продукции.

Научная дисциплина ПАХТ непрерывно развивается, углубляя и расширяя исследования и сферы своих интересов. Учебная дисциплина ПАХТ наряду с некоторыми другими завершает **общеинженерное образование**; далее инженерное образование продолжается в рамках отдельных технологий.

Жизнь постоянно предъявляет все более высокие требования к качеству химической продукции, а оно сегодня в значительной мере зависит от совершенства используемых технологических методов. Стремление к повышению качества продукции привело к технологической революции, и, вероятно, этот уже наступивший этап развития технологии будет достаточно продолжительным; по крайней мере, возможности совершенствования технологии еще далеко не исчерпаны. Значительное место в развитии технологических методов принадлежит науке о ПАХТ: тут и проникновение в механизм процессов, и углубление и расширение знаний об их оптимальном проведении (маршруты процессов, предпочтительные условия, режимы, технологические запреты, рациональные конструкции), и разработка новых эффективных приемов. Успех здесь — в сочетании фундаментальных построений науки о ПАХТ и специфики конкретных технологий. И как бы ни шло развитие химической технологии, как бы ни изменялись ее потребности и направленность, ПАХТ всегда будут занимать серьезное место в подготовке инженера-химика-технолога. При этом фундамент науки ПАХТ будет оставаться относительно стабильным (постепенно расширяясь и углубляясь), а вот ориентировка и конкретное наполнение учеб-

ных курсов могут, конечно, несколько смещаться в соответствии с потребностями отдельных наук и технологий.

Курс ПАХТ призван дать студенту химико-технологического вуза достаточно широкие сведения, позволяющие ему в дальнейшем самостоятельно ориентироваться в конкретных технологических процессах — в их анализе, математическом описании и инженерном расчете, в подходах к конструированию аппаратуры.

### 1.1.2. Краткие исторические сведения

Почти каждая наука, в особенности связанная с последующим практическим использованием ее теоретических изысканий, проходит "**собирательную**" стадию, когда она оперирует разрозненными объектами и фактами. По-настоящему наукой она становится на стадии обобщений, когда появляется возможность интерпретировать эти факты с общих позиций, обосновывать некие общие закономерности, прогнозировать ситуацию. Так, общая химия стала наукой с появлением Периодического закона.

Вплоть до конца XIX века технологи в построении промышленных процессов ориентировались на знание отдельных фактов и правил — ПАХТ находились на описательном (собирательном) этапе, преобладающую роль играло **инженерное искусство**. Успех в производстве того или иного конкретного продукта определяли всесторонние знания деталей данного производства (по существу — эвристические правила) — общие закономерности и связи в различных химико-технологических процессах не прослеживались. Вместе с тем передовые деятели науки и промышленности в России и за рубежом уже в конце XIX — начале XX века ясно видели необходимость таких обобщений (формирования технологических принципов), установления достаточно общих закономерностей явлений и процессов. Однако попытки такого подхода к описанию процессов с единых научных позиций до начала 20-х годов XX века нельзя считать успешными. Видимо, неудачи были предопределены неразработанностью необходимого понятийного аппарата и подспудным стремлением (в соответствии с тогдашними традициями) уделять большое внимание частностям, рецептам (в том числе — для конкретных производств). В результате не оставалось (или почти не оставалось) места для общего анализа. Только по отдельным технологическим приемам удавалось выйти на уровень обобщений, отвечающий (не по содержанию, конечно, а по направленности подхода) современным представлениям (примером может служить брошюра И.А.Тищенко "Теория расчета многокорпусных выпарных аппаратов", изд. МВТУ, 1911 г.).

Вряд ли можно назвать *дату* создания науки и курса ПАХТ в современном их понимании, становление происходило постепенно. В начале 20-х годов появились одна за другой две книги Л.Ф.Фокина "Методы и орудия химической техники" (Госиздат, М.—П., 1923 и 1925 гг.), где в отдельные главы были выделены некоторые технологические приемы в их современной классификации, например: компрессоры, разделение газов, центрифугирование, фильтрация, выпаривание, дистилляция и ректификация и др. Однако все же это был преимущественно подход на *описательном* уровне, а расчетные формулы приводились без их вывода и анализа.

Структурно и методически ближе к современным курсам ПАХТ стоит книга американских ученых W.H.Walker, W.K.Lewis, W.H.McAdams "Principles of Chemical Engineering" (McGraw Hill Co.; N.Y. — London, 1923 г.). Она содержит обычные для теперешних курсов главы: гидравлика, теплообмен, фильтрация, выпаривание, сушка, ректификация и др.; этим главам предпосланы методические и физико-химические основы (промышленная стехиометрия, включающая балансовые соотношения; пограничные пленки; основы испарения и сушки и т. п.). Правда, авторам не удалось полностью отойти от рассмотрения конкретных производств, составляющих предмет теплотехники и еще более — общей химической технологии (главы: топливо и энергия, сгорание, печи для обжига и сушки, газогенераторы).

Важным этапом становления науки о ПАХТ стала книга W.L.Badger, W.L.McCabe "Elements of Chemical Engineering" (McGraw Hill Co.; N.Y.—London, 1931 г.), оперативно переведенная на немецкий (1932 г.) и русский (1933 г.) языки. Здесь расширен круг рассматриваемых проблем (например, добавлены процессы выщелачивания, кристаллизации и др.) и, по-видимому, впервые введен термин "главные операции" — синоним применяемого ныне "технологические приемы".

Однако и в двух последних книгах обстоятельный анализ ряда процессов чередуется с рецептурными рекомендациями расчета по готовым формулам и с описательным материалом. Можно также констатировать (не в упрек авторам, конечно), что с современных позиций в этих монографиях еще не произошло дифференциации дисциплин "Процессы и аппараты химической технологии" и "Машины и аппараты химических производств".

В последующие десятилетия наука и учебный курс ПАХТ претерпевают существенные количественные и качественные изменения. В курс вливаются новые элементарные технологиче-

ские приемы, обогащающие химическую технологию; с другой стороны, отдельные разделы курса выделяются в самостоятельные научные и учебные дисциплины. Появляются общие учебники по ПАХТ и учебники (монографии) по отдельным технологическим приемам и группам приемов. Постепенно усилиями отечественных и зарубежных ученых наука и учебные курсы ПАХТ приобретают современные очертания — как по структуре, так и по содержанию. В нашей стране развитие этой науки связано с именами Н.И.Гельперина, А.Г.Касаткина, А.Н.Плановского и ряда других ученых и педагогов.

Первоначально отдельные технологические приемы анализировались исследователями, группами исследователей со специфических ("удобных") позиций — вне связи с другими приемами, так что вопрос об общности механизма протекания и закономерностей приемов просто не возникал. В ходе развития науки о ПАХТ происходит постепенная "притирка" различных технологических приемов, их математических описаний. В результате укрепляются связи между технологическими приемами, выявляются возможности общего подхода к их рассмотрению, хотя и в настоящее время в описании некоторых технологических приемов достаточно большое место занимают, к сожалению, обособленные подходы. Тем не менее основная тенденция развития ПАХТ бесспорна: повышение общности подходов к анализу и описанию различных технологических приемов, к объединению их в более крупные группы приемов и к поиску базы для дальнейших обобщений.

На современной стадии развития науки и учебной дисциплины ПАХТ снова возрастает значимость описательного, но на совершенно ином, более высоком уровне. Речь идет о выявлении связей и обосновании математического анализа — от построения моделей до осмысления результатов. Так реализуется диалектическая спираль познания: описательное — теоретический анализ — описательное.

Другая тенденция развития теории ПАХТ состоит в увеличении крена в сторону изучения (анализа, математического описания) собственно **процесса**, происходящего в том или ином аппарате. Детальное рассмотрение конструкции самого аппарата выносится за пределы курса ПАХТ — на стадию практического внедрения, отчасти отдается смежной дисциплине "Машины и аппараты химических производств".

Содержание отдельных глав, подходы к анализу и сам **перечень тем**, рассматриваемых в различных курсах и учебниках по ПАХТ, не совпадают, они *подвижны*. Нередко из рассмотрения исключают, например, некоторые механические процессы (измельчение, классификация), иногда — холодильные. Почти всегда из курса ПАХТ в отдельную дисциплину выделяют реак-



торные устройства и их моделирование. Круг вопросов, включенных в настоящий учебник, соответствует традициям Московской государственной академии тонкой химической технологии; он ясен из "Содержания".

### 1.1.3. Перенос субстанции в химической технологии

Химическая технология имеет дело с крайне широким разнообразием аппаратов. Среди них, разумеется, реакторы, в которых происходят химические превращения и получаются целевые продукты. Однако перечень химико-технологической аппаратуры далеко не исчерпывается химическими реакторами по ряду причин. Во-первых, реагенты надо *подготовить* к проведению процесса в реакторе: подать их туда при определенных давлении и температуре, в определенном (часто — отличающемся от исходного) агрегатном состоянии, с заданным соотношением компонентов и т.д. Во-вторых, в ходе химической реакции из-за нестрогой селективности (наряду с основными протекают и побочные реакции) и неполноты превращения почти всегда получаются смеси различных продуктов реакции и исходных реагентов, так что целевые продукты надо *отделить* от побочных (с целью их особого использования) и непрореагировавших компонентов (чтобы вернуть их в реактор). В-третьих, химическая технология использует ряд операций, вообще *не включающих* собственно химические превращения. Наконец, в-четвертых, самим химическим превращениям сопутствуют физические (физико-химические) явления, прямо не относящиеся к химической реакции, но *оказывающие* существенное (иногда — определяющее) *влияние* на результат химико-технологического процесса.

Таким образом, наряду с химическими превращениями химическая технология использует многочисленные явления и процессы нехимического характера, требующие определенных способов организации и осуществляемые в соответствующих аппаратах и процессуально-технологических схемах. Протекание таких процессов (собственно химических — тоже, конечно) в той или иной мере связано с **переносом** какой-либо **субстанции** — количества движения (импульса), теплоты, вещества (массы), иногда нескольких субстанций одновременно. Этот перенос характеризуется (вызывается или сопровождается) изменением технологической ситуации (параметров процесса), в общем случае — во времени в рассматриваемой точке аппарата, а в самом аппарате — от одной точки к другой, в более простых случаях — только во времени или только от точки к точке.

Изучение **переноса импульса** связано с анализом сил (внешних, внутренних), действующих на объект, рабочее тело; **переноса теплоты** — с перемещением и подводом (отводом) тепловой энергии (иногда с изменением агрегатного состояния, с тепловыделением); **переноса вещества** — с его перемещением в пределах какой-нибудь одной фазы и (или) между различными фазами. Все эти явления переноса могут быть использованы направленно — для осуществления процесса (скажем, теплоты — для нагрева объекта), а могут и сопровождать какой-либо, в том числе химический, процесс (скажем, отвод теплоты реакции или вывод одного из продуктов реакции).

Отдельные явления переноса затрагивались (в определенных аспектах) в ряде предшествующих дисциплин — в физике, технической механике, физической химии и др.; иные будут затронуты в последующих дисциплинах. Курс ПАХТ анализирует эти явления в плане построения и описания отдельных приемов (процессов) или их совокупностей; при этом в ряде случаев исследуется перенос сразу нескольких субстанций.

В зависимости от *преобладания* переноса той или иной субстанции в курсе ПАХТ выделяют и изучают следующие *группы процессов*:

- **гидромеханические**, где основные явления связаны с переносом импульса (количества движения) в жидкостных и газовых потоках, реже — в системах с твердыми телами. К этой группе примыкают **механические** процессы, базирующиеся в основном на законах механики твердого тела;

- **тепловые**, где наблюдаются явления, связанные с различными формами переноса теплоты в области умеренных, низких или высоких температур. При этом обычно приходится учитывать и закономерности переноса импульса, поскольку он сопутствует переносу теплоты;

- **массообменные** (прежде всего — **диффузионные**), куда относят многочисленные процессы, связанные с переносом вещества. При этом обычно приходится учитывать и закономерности переноса импульса, а довольно часто — и теплоты;

- **химические процессы** в научном плане, конечно, тоже относятся к дисциплине ПАХТ. В учебном аспекте в нашей стране их принято выделять в самостоятельные курсы, прежде всего — в курс "Реакторные устройства и моделирование", с определенных позиций — в "Общую химическую технологию", в некоторые разделы "Химической кибернетики" и т. д. Еще раз подчеркнем, что любой химический процесс сопровождается переносом импульса, теплоты, вещества; в ряде случаев именно явления переноса, а не собственно химическое превращение, определяют течение химического процесса и успех в его осу-

ществлении (приведенный в разд. 1.1.1 пример с синтезом аммиака — убедительная тому иллюстрация). Это означает, что в такого рода ситуациях анализ химико-технологического процесса должен обязательно учитывать закономерности переноса соответствующей субстанции.

Приведенная выше классификация ПАХТ по переносимой субстанции не является единственно возможной. Не менее важны и полезны также *другие классификационные срезы*.

При *неизменных во времени* характеристиках процесса в каждой точке технологического аппарата говорят о **стационарном (установившемся)** процессе; при этом упомянутые характеристики могут изменяться от одной точки аппарата к другой. Такая ситуация характерна для *непрерывных* процессов. При *изменяющихся* во времени характеристиках в аппарате в целом или в каких-либо его точках говорят о **нестационарном (неустановившемся)** процессе — такая ситуация характерна для *периодических* процессов либо для *полунепрерывных* (так нередко именуют процессы, когда некоторые — прежде всего входные — потоки рабочих тел и их параметры поддерживаются постоянными, но тем не менее характеристики процесса изменяются во времени). Заметим: если в стационарном процессе отслеживать характеристики какого-либо элемента потока при его перемещении в аппарате, то они претерпевают изменения — в пространстве (в аспекте мгновенного положения этого элемента), во времени (в аспекте самого элемента). В этих случаях, не отказываясь от термина "стационарность" относительно процесса в целом, нередко вводят еще термин "**квазистационарность**" — относительно исследуемого элемента.

Стационарные процессы отличаются стабильностью как ситуации в технологическом аппарате, так и характеристик получаемого продукта; они легко контролируются и управляются; для них обычно характерна высокая производительность. По этим причинам чаще всего стремятся к осуществлению технологических процессов в непрерывном режиме. Однако в ряде случаев технологические особенности процесса приводят к необходимости его проведения в периодическом режиме. Это нередко характерно для малотоннажных производств и при использовании одной и той же аппаратуры для попеременного получения партий разных продуктов; возможны и иные причины. С некоторыми из таких процессов нам предстоит встретиться в курсе ПАХТ.

Для организации технологического процесса существенно агрегатное состояние рабочих тел, отсюда — возможность классификации на основе *фазового состояния*. В зависимости от *количества* участвующих в процессе *фаз* различают **гомо- и гетерофазные** процессы. В зависимости от *числа компонентов*, входя-

щих в состав рабочего тела, различают процессы с **одно- и многокомпонентными** потоками (иногда удобно среди последних выделить еще и процессы с **двух- и трехкомпонентными** потоками). Процессы переноса приводят к разным результатам в зависимости от *взаимного направления* потоков, участвующих в технологической операции, от некоторых внутренних характеристик каждого из потоков. Все эти классификационные срезы будут рассмотрены позднее.

С точки зрения постановки *организационно-расчетных* проблем различают задачи:

— **эксплуатационные**: здесь речь идет о готовом аппарате с *известными* конструкционными характеристиками, направлением потоков, заданными начальными (входными) потоками и их параметрами; требуется определить результаты процесса — на выходе из аппарата или в конечный момент времени. Пример: надо определить конечные температуры теплоносителей в теплообменнике с известной поверхностью  $F$  при заданных начальных температурах и режимных характеристиках работы;

— **проектные**: здесь также известны (заданы) начальные (входные) потоки и их параметры, но кроме того задаются некоторые конечные (выходные) параметры целевого потока; требуется определить конечные (выходные) параметры остальных потоков и основные *конструктивные характеристики* (объемы, поверхности, форму, габариты и т. п.) проектируемого аппарата, иногда — разработать процессуально-технологическую схему. Пример: определение теплообменной поверхности  $F$ , необходимой для нагрева одного из теплоносителей до заданной температуры, если потоки и начальные температуры обоих теплоносителей известны.

Как правило, для данного аппарата (технологической схемы) возможны одна эксплуатационная и несколько проектных постановок задач расчета.

Следует подчеркнуть известную условность (незавершенность, открытость) приведенных классификаций. В зависимости от постановки проблем (здесь играют роль и соображения удобства анализа и систематизации), а также от уровня наших знаний — эти классификации могут быть изменены, дополнены, а иногда и изъяты из обращения.

#### 1.1.4. Размерности. Системы единиц.

##### Единицы измерения

Численные значения величин, входящих в математическое описание технологического процесса, зависят от **единиц измерения** этих величин. Совокупность согласованных единиц измере-

ния составляет **систему единиц**. Разумеется, в расчетах возможно использование различных систем единиц; важно только выбрать определенную систему и последовательно ее придерживаться. Смешение разных систем единиц и использование внесистемных единиц — одна из наиболее часто встречающихся причин ошибок в технологических расчетах.

В качестве предпочтительной в настоящее время принята **Международная система единиц — СИ** (System International — SI), базирующаяся на единицах длины  $l$  (м — метр), массы  $m$  (кг — килограмм) и времени  $\tau$  (с — секунды); к ним примыкает единица температуры  $T, t$  (K — градус Кельвина: "Кельвин"). Отсюда получаются *производные размерности* и единицы измерения (в принятой системе единиц), например для скорости  $w = l/\tau$  (м/с), силы  $P = m l/\tau^2$  (кг·м/с<sup>2</sup>) = Н — ньютон), давления  $p = P/l^2$  (Н/м<sup>2</sup> = Па — паскаль), работы  $L = P \cdot l$  (Н·м = Дж — джоуль) и др. Для указания на то, что речь идет о размерности, обычно используют квадратные скобки; например,  $[m] = \text{кг}$ .

Размерности и единицы измерения играют важнейшую роль в расчетах для любой научной дисциплины; курс ПАХТ в этом отношении — не исключение: инженерно-технологические расчеты без указания единиц измерения теряют содержательность. Размерность отражает физический смысл используемой величины, а единицы измерения позволяют оценить и представить ее порядок (вне единиц измерения такая оценка невозможна). Сопоставление размерностей величин в ходе теоретического описания процесса может служить способом проверки правильности математических преобразований: если размерности левой и правой частей равенства и отдельных их слагаемых не совпадают, то в анализе есть ошибка (правда, совпадение размерностей еще не гарантирует правильности анализа, а говорит лишь о тщательности преобразований, — ведь ошибка может содержаться и в постановке задачи).

Ранее в курс "Процессов и аппаратов" (и не только химической технологии) достаточно обширным разделом входила "Теория размерностей" с отдельным понятийным аппаратом, теоремами и методами исследования. Эта теория нередко использовалась для перехода к обобщенным переменным: искомую величину выражали как функцию (предпочтительно — степенную) набора других величин, выбираемых исходя из имеющегося научно-производственного опыта и здравого смысла (т.е. феноменологически); сопоставление размерностей позволяло сформировать безразмерные критерии (см. разд. 1.8), контролирующие технологический процесс. С течением времени и развитием аналитических методов область применения этих подходов существенно сузилась, уступив место иным приемам. Дело в том, что надежда на "здравый смысл" не всегда оправдывалась — были вскрыты ошибочные решения задач, обусловленные недостаточностью феноменологических представлений, возможной субъективностью в выборе переменных и т. д. (в истории науки известна "ошибка Рэлея", уступившего влияние одного из факторов и получившего деформированные

критерии подобия). Однако наметившийся отход от некоторых методов "Теории размерностей", конечно, не затрагивает сущности понятий "размерность", "единицы измерения" и необходимости грамотного их применения.

Рекомендуется первоначально выразить единицы измерения всех величин в *единой* системе единиц (например, в СИ), только после этого приступать к расчетам. Попытка вести пересчет единиц в ходе самого расчета — источник ошибок.

Перевод единиц из одной системы в другую ведется на основе известного соотношения эталонов основных единиц измерения. Пусть, например, в справочнике приведены значения динамической вязкости в сантипуазах:  $1 \text{ сП} = 0,01 \text{ дн}\cdot\text{с}/\text{см}^2$ ; надо выразить ее в СИ. Зная, что  $1 \text{ дн} \equiv 1 \text{ г}\cdot\text{см}/\text{с}$ ,  $1 \text{ г} = 10^{-3} \text{ кг}$ ,  $1 \text{ см} = 10^{-2} \text{ м}$ , запишем:

$$\begin{aligned} 1 \text{ сП} &= 0,01 \frac{\text{дн} \cdot \text{с}}{\text{см}^2} = 10^{-2} \frac{\text{г} \cdot \text{см} \cdot \text{с}}{\text{с}^2 \cdot \text{см}^2} = 10^{-2} \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{с}} = 10^{-2} \frac{10^{-3} \text{ кг}}{10^{-2} \text{ м} \cdot 1 \text{ с}} = \\ &= 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}} \cdot \frac{\text{м}}{\text{м}} \cdot \frac{\text{с}}{\text{с}} = 10^{-3} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{м}^2} \cdot \frac{\text{с}}{\text{м}^2} = 10^{-3} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \text{ с} = 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}. \end{aligned}$$

Для установления размерности и единицы измерения какой-либо величины используются два основных способа:

1) на основе **физического смысла** (определения) самой величины; если, например, скоростью называется путь, пройденный в единицу времени, то, очевидно, единица измерения скорости будет  $\text{м}/\text{с}$ ; если давление или напряжение трения определяется как сила, приходящаяся на единицу поверхности, то единица измерения для этих величин выразится как  $\text{Н}/\text{м}^2$ , и т. д.;

2) исходя из какого-либо **теоретического соотношения**, содержащего искомую величину, при условии, что единицы измерения остальных входящих в это соотношение величин известны. Пусть, скажем, имеется формула для теплоотдачи  $Q = \alpha \cdot F \cdot \Delta t$ , причем поток теплоты  $Q$  выражен в  $\text{Дж}/\text{с} = \text{Вт}$ , поверхность теплообмена  $F$  — в  $\text{м}^2$ , температурный напор  $\Delta t$  — в  $\text{К}$ ; тогда единица измерения коэффициента теплоотдачи на основе соответствующей размерности выразится так:

$$[\alpha] = \frac{[Q]}{[F] \cdot [\Delta t]} = \frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{К}} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}.$$

Выше указывалось на связь физического смысла величины с ее размерностью и единицей измерения. Однако эта связь может оказаться завуалированной при стремлении к сокращению записи единицы измерения. Так, единицу измерения коэффициента теплопроводности  $\lambda$  в СИ записывают упрощенно:  $\text{Дж}/(\text{с}\cdot\text{м}\cdot\text{К})$  — здесь физический смысл остается неясным. Это произошло из-за сокращения  $[\text{м}]$ ; полная запись имеет вид  $\text{Дж}/(\text{с}\cdot\text{м}^2\cdot\text{К}/\text{м})$ , и тогда физический смысл становится ясным; коэффициент теплопроводности есть поток теплоты в единицу времени между двумя плоскими поверхностями площадью в  $1 \text{ м}^2$ , если при расстоянии между этими плоскостями в  $1 \text{ м}$  температурный напор равен

1 К. Пользоваться упрощенной записью размерности и единицы измерения  $\lambda$ , конечно, можно; надо только понимать, что скрывается за упрощением.

В ряде случаев полная запись единицы измерения является обязательной. Так, при выражении концентрации  $[C] = \text{кг}/\text{кг}$  совершенно необходимо указывать, о каких "кг" идет речь (особенно в знаменателе): о кг вещества, приходящихся на 1 кг смеси или на 1 кг какого-либо отдельного компонента.

В ходе технологических расчетов нередко приходится использовать величины, не имеющие размерности. Некоторые из них безразмерны изначально (числа  $\pi$ ,  $e$ ), другие — по определению (различные коэффициенты полезного действия), третьи — по происхождению (комплексy, у которых размерности в числителе и знаменателе одинаковы и потому сократились).

### 1.1.5. О точности инженерных расчетов

Технологические расчеты должны проводиться с определенной точностью. Уровень этой точности (допустимая погрешность) обуславливается ответственностью расчета (скажем, учебный расчет нередко проводится с меньшей точностью, нежели проектный в конструкторском бюро) и точностью исходных величин, которыми мы располагаем. В равной мере неприемлемы как недостаточная, так и избыточная точность расчета (последняя чаще всего — следствие недостаточной грамотности лица, ведущего расчет).

Обычно точность получаемого результата не превышает точности исходных (заложенных в расчет) величин.

Покажем это на примере произведения двух величин  $z = xy$ . Пусть абсолютные погрешности  $x$  и  $y$  составляют  $\Delta x$  и  $\Delta y$ ; тогда относительная ошибка будет  $\delta x = \Delta x/x$  (в долях от  $x$ ); соответственно для  $y$ :  $\delta y = \Delta y/y$ . Примем (это наиболее частый практический случай), что абсолютные погрешности много меньше самих величин:  $\Delta x \ll x$ ,  $\Delta y \ll y$ ; тогда значения  $\Delta x$  и  $\Delta y$  в математическом плане можно трактовать как дифференциалы  $dx$  и  $dy$  и использовать аппарат дифференциального исчисления. Максимальная абсолютная ошибка исследуемого произведения  $\Delta z = \Delta(xy) = d(xy) = y \cdot dx + x \cdot dy$ . Относительная ошибка произведения  $\delta z = \Delta(xy)/(xy) = (y \cdot dx + x \cdot dy)/(xy) = dx/x + dy/y = \delta x + \delta y$ . Таким образом, максимальная относительная ошибка произведения равна сумме относительных ошибок сомножителей. Иначе говоря, она больше, чем относительная ошибка любого из сомножителей. И если один из сомножителей взят с погрешностью 1%, то произведение не может получиться точнее, сколько бы цифр ни высвечивалось на дисплее калькулятора или компьютера. И записывать результат нужно с тем числом значащих цифр, которое отвечает погрешности рассчитанной величины. При этом последняя из записанных цифр указывает абсолютную погрешность: если, например, записано 1,25, это означает, что найденная величина равна  $1,25 \pm 0,01$ ; а если записано 1,250, то, значит (должно означать!), что расчет произведен с большей точностью, и найденная величина равна  $1,250 \pm 0,001$ .

Чаще всего допускаемая погрешность в инженерных расчетах составляет доли процента. Чтобы выдержать эту точность, реко-

мендуется брать величины с *тремя значащими цифрами* (например: 65,2, или 6,52, или 0,652, или 0,0652 и т. п.). Исключением являются числа, начинающиеся с 1; во избежание снижения точности их целесообразно брать с *четырьмя значащими цифрами* (15,37 или 1,537 и т. д.). Именно с таким числом значащих цифр следует представлять результаты расчета (выходные сведения). Поскольку в ходе расчетов (а они бывают весьма громоздкими и многоступенчатыми) ошибка может накапливаться, то промежуточные величины целесообразно брать с одной дополнительной значащей цифрой. Представление результатов с излишней точностью (нередкая ситуация!), т. е. с числом значащих цифр, не отвечающих реальной погрешности и разумной точности расчета, — неграмотно и неправомерно.

## 1.2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

### 1.2.1. Обобщение и конкретизация

Объекты и процессы, изучением которых занимаются ПАХТ и другие науки, характеризуются многочисленными конкретными особенностями и связями; досконально и точно учесть их трудно, чаще всего — просто невозможно. Поэтому в ходе научного анализа выделяют основные (общие) моменты, давая упрощенное, *идеализированное* (пусть приближенное) представление о характеристиках изучаемых объектов, о закономерностях явлений и процессов — это придает *общность* устанавливаемым закономерностям. Такие закономерности часто именуют **законами природы**. Не исключено, что в отдельных случаях и ситуациях принятый уровень идеализации (абстрагирования) может оказаться чрезмерным; при переходе к рассмотрению конкретного объекта, явления, процесса в целях уточнения анализа потребуются снижение уровня идеализации. Тогда учитывают проигнорированные ранее более тонкие эффекты, выделяющие данный объект из группы сходных с ним.

Характерным примером абстрагирования может служить понятие **идеального газа**, подчиняющегося закону Клапейрона — Менделеева и справедливого (пусть не вполне точно) для всех газов в весьма широком диапазоне температур и давлений. Однако в определенных условиях (высокие давления, низкие температуры, близость к состоянию насыщения и т.п.) использование этого закона приводит к большим ошибкам, причем разным для отдельных газов. Поэтому уравнение Клапейрона — Менделеева приходится модифицировать, переходя к уравнению Ван-дер-Ваальса или вводя коэффициенты сжимаемости.

Вообще, физические представления и созданные на их основе математические построения (иначе: физические и математические модели) должны приводить к достаточной (разумной)



точности описания объекта, процесса, адекватно отражая его основные (обусловленные постановкой задачи) закономерности. Говорят: "Любая модель — всегда карикатура на действительность". Это, конечно, так, но ведь карикатура должна быть похожей, реальный объект должен быть в ней узнаваем. Строя физические и математические модели, необходимо представлять уровень абстрагирования (т. е. роль и вклад принятых допущений), чтобы можно было ограничить (оконтурить) область применения получаемых закономерностей и в случае необходимости наметить пути уточнения анализа.

Идеализация объектов и явлений нередко упрощает их математическое описание, хотя и делает результаты анализа и расчета приближенными. Отказ от упрощений уточняет результат, но обычно заметно усложняет выражение связей и получаемые закономерности. Поэтому всегда следует оценивать целесообразность отказа от упрощений; иногда уточнение столь несущественно, что отказ от упрощений совершенно не оправдан, скажем, в аспекте повышения точности инженерного анализа.

Среди общих путей упрощения изучаемых закономерностей особо выделяют **линеаризацию** связей между рассматриваемыми объектами, явлениями, процессами. Многообразие и сложность этих связей обуславливают (за крайне редким исключением) их заведомо нелинейную природу, а это создает серьезные затруднения при анализе и математическом описании процесса. Переход к линейным связям (линеаризация) существенно *упрощает анализ*; однако при этом *снижается точность анализа* — он становится приближенным. Важно, чтобы погрешности анализа при таком приближении не нарушили необходимую точность расчета.

Математически сформулированные выше положения наглядно иллюстрируются с позиций разложения функций в ряд Тейлора. Пусть мы хотим установить некую закономерность, выражающую зависимость определенного эффекта  $f(x)$  от переменной  $x$  в относительной близости к значению  $x = a$ . Тогда

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + \\ + \frac{f'''(a)}{3!} (x - a)^3 + \dots$$

При достаточно *малых* отклонениях (рассогласованиях)  $x$  от  $a$  все слагаемые, кроме первых двух, будут существенно малы из-за высоких степеней малой разности  $(x - a)$ . Поэтому без сколько-нибудь заметной погрешности можно считать, что зависимость  $f(x)$  является линейной относительно  $(x - a)$ , а значит и относительно  $x$ . Таким образом, для окрестности точки  $x = a$  предположение (упрощение!) о линейном характере закономерности  $f(x)$  является достаточно точным. Здесь крайне важно понимать, что при увеличении рассогласования  $(x - a)$  возрастает роль отброшенных членов бесконечного ряда

Тейлора. Так что при достаточно больших значениях разности  $(x - a)$  погрешности анализа на основе линейного соотношения выходят за допустимые пределы, и тогда игнорирование нелинейных членов ряда (третье и последующие слагаемые) становится неправомерным.

Строго говоря, использование линейных соотношений оправданно лишь после предварительной оценки вклада отброшенных нелинейных членов и установления диапазона значений  $(x - a)$ , в котором функцию  $f(x)$  можно считать линейной (или же, в более общем случае, — в котором допустимо брать ограниченное число членов разложения). Попытка "принудительного" сохранения линейного характера соотношений за пределами этого диапазона приводит либо к значительным ошибкам, либо к тому, что во избежание таких ошибок постоянные коэффициенты (множители) перед аргументом  $x$  или  $(x - a)$  в формуле Тейлора приходится принимать переменными; таким способом отражают объективно существующую нелинейность, проявляющуюся при достаточно больших отклонениях  $x$  от некоего важного для процесса значения  $a$ .

Многообразие связей и недостаточная познанность явлений, лежащая в основе анализируемых процессов, не дают оснований считать, что результат математического исследования проблемы и конструктивное решение должны быть единственными, жестко обусловленными: постановкой задачи; системой ограничений; сведениями, имеющимися в распоряжении научного работника или конструктора; ресурсами. В технике вообще, тем более на данном (еще не всегда высоком с позиций технологических задач) уровне развития науки и технических возможностей, совсем не исключены *различные пути и результаты решения* проблемы. При этом среди вариантов решений (научных, конструкторских) далеко не всегда можно с полной определенностью установить оптимум во всех отношениях; приходится сопоставлять достоинства и недостатки предложенных вариантов. Окончательный выбор (на стадии формулирования целей осуществления процесса либо при получении конечных решений) часто реализуется на основе **технологического компромисса**.

Сегодня уже ясно, что неоднозначность технологических решений — следствие объективного развития технологии. Дело в том, что с течением времени неизбежно происходят более или менее существенные изменения во взглядах на цели, возможности, пути реализации (а также ограничения) химико-технологических процессов, в таком случае говорят о вариативности критериев оптимальности. Это закономерно приводит к изменениям в конечных результатах (включая и конструктивное оформление процессов), в таком случае говорят о поливариантности решений.

### 1.2.2. Некоторые физические понятия

Введем некоторые физические понятия, необходимые для анализа и математического описания в ближайших разделах курса ПАХТ (другие понятия будут вводиться в последующих разделах по мере необходимости).

**Сплошная среда.** Жидкие, твердые, газообразные тела состоят из атомов, молекул, ионов и других элементарных образований; число их в единице объема в условиях, интересующих химическую технологию, очень велико. Например, в  $1 \text{ см}^3$  воздуха при нормальных условиях содержится  $\approx 2,7 \cdot 10^{19}$  молекул; даже в крайне разреженной атмосфере Луны их  $\approx 10^{10}$  в  $1 \text{ см}^3$ . В рассматриваемых курсом ПАХТ объектах (рабочих телах) атомы, молекулы, ионы и расстояния между ними, как правило, значительно меньше масштабов (размеров) объекта. Поэтому в подавляющем большинстве случаев можно считать, что рабочее тело *целиком* заполняет рассматриваемую в ходе анализа часть пространства, т. е. является **сплошной средой**. Дискретность пространства (т. е. различия в свойствах атомов, молекул и промежутков между ними) здесь в расчет не принимается.

В некоторых (весьма редких) случаях дискретность пространства приходится учитывать: например, в разреженных газах, когда расстояния между молекулами и путь их свободного пробега сопоставимы с характерным размером аппарата. В этих случаях делаются специальные оговорки и анализ ведется вне постулата о сплошности среды (см. разд. 2.9).

Представление о сплошной среде *физически* оправдано тем, что рассматриваемые химической технологией фрагменты пространства, в том числе трактуемые как бесконечно малые, практически всегда содержат достаточно большое число элементарных частиц (атомов, молекул и т. д.); поэтому можно считать, что они сохраняют общие свойства рабочего тела и закономерности изменения его состояния в ходе проведения с ним технологических операций. Идеализация систем путем введения понятия о сплошных средах позволяет в ходе анализа объектов, явлений, процессов пользоваться *математическим аппаратом непрерывных функций*, прежде всего — дифференциальным и интегральным исчислением.

**Идеальная жидкость.** Идеальной называется жидкость, *абсолютно не сопротивляющаяся сдвигу и разрыву* (т.е. обладающая абсолютной текучестью и полным отсутствием сил сцепления между частицами, значит, — вязкости и липкости) и *абсолютно сопротивляющаяся сжатию* (т.е. абсолютно несжимаемая). Трактовка жидкости в качестве идеальной приводит к значительному упрощению ряда закономерностей, используемых в "Технической гидравлике" (раздел ПАХТ, изучающий закономерности покоя и движения жидкости). **Реальные жидкости**, как правило, близки к идеальным в смысле несжимаемости: нужны очень высокие давления (в сотни и тысячи атмосфер), чтобы сжимаемость реальной жидкости стала заметной. Однако реальные жидкости могут весьма значительно сопротивляться сдвигу (свойство вязкости) и растяжению (свойство липкости). Заме-

тим, что газы существенно сжимаемы (скажем, идеальные — соответственно закону Клапейрона—Менделеева); реальные газы сопротивляются сдвигу (т. е. обладают вязкостью), хотя и не столь сильно, как реальные жидкости.

**Изотропные и анизотропные среды.** Если интересующее нас свойство рабочего тела не изменяется в занимаемом им пространстве, то это пространство и среда в нем называются **изотропными относительно данного свойства**. Если же наблюдается изменение свойства от точки к точке (иногда считают: и во времени), то пространство трактуется как не­изотропное, или **анизотропное**. Такое *широкое* понимание термина "изотропность" обычно используется в термодинамике и ряде других научных дисциплин.

В более узком смысле анизотропными считаются пространства (среды), в пределах которых изменяются некоторые **удельные свойства** (теплоемкость, вязкость, плотность, прозрачность и т.п.); но здесь термин "изотропность" не распространяется на изменение интенсивных величин — температуры, давления, концентрации и др. В другом (тоже узком) смысле признаком анизотропности считают неоднородность какого-либо свойства по разным направлениям пространства (скажем, вдоль координатных осей); примером может служить теплопроводность вдоль разных направлений в кристалле или прочность древесины (например, на сдвиг) вдоль и поперек древесных волокон. Именно такая — узкая — трактовка чаще всего используется в задачах науки ПАХТ.

**Идеальное вытеснение и идеальное перемешивание.** При изучении движения потоков в рабочих зонах технологических аппаратов удобны два упрощенных модельных представления.

Согласно первому из них все элементарные частицы потока движутся в рабочей зоне с одинаковыми скоростями и минуют эту зону за одинаковые промежутки времени. Такой характер движения называют **идеальным вытеснением (ИВ)**. Здесь для всех элементов потока *одинаково время пребывания*  $\tau_{\text{ИВ}}$  в рабочей зоне ( $\tau_{\text{ИВ}}$  — **сосредоточенная** величина), а интересующий нас признак (температура, концентрация, какое-нибудь свойство) изменяется по ходу потока. При этом на выходе из рабочей зоны все элементы потока в силу равенства для них значений  $\tau_{\text{ИВ}}$  имеют одинаковое значение температуры, концентрации, свойства. Заметим, что эту модель используют при анализе технологических процессов наиболее часто и, к сожалению, без необходимых оговорок.

Согласно второй модели — она носит название **идеального перемешивания (ИП)** — элементы потока полностью перемешаны в рабочей зоне. Поэтому *всякая* интересующая нас *характере-*

*ристика потока* (температура, концентрация, любое свойство рабочего тела) во всех точках в пределах рабочей зоны и на выходе из нее имеет *одинаковые значения*. Однако время пребывания элементов потока в рабочей зоне — **распределенная** величина: некоторые элементы могут быстро "проскочить" через рабочую зону, почти не задерживаясь в ней (выходные характеристики таких элементов будут мало отличаться от входных); другие будут весьма долго (часто — бесполезно долго) находиться в ней (здесь характеристики элементов на выходе из рабочей зоны будут существенно отличаться от входных). Использованию этой модели в расчетах обычно предшествуют специальные оговорки.

Математические описания процессов с использованием моделей ИП, и особенно ИВ, часто привлекают простотой получаемых решений. Реальную ситуацию в рабочей зоне чаще всего (не обязательно!) следует трактовать как промежуточную. Способы анализа и математические описания простейших идеализированных моделей и более сложных, ближе отвечающих реальным ситуациям, рассмотрены в гл.8.

### 1.2.3. Основные характеристики (свойства) рабочих тел

**Свойства, характеристики рабочих тел, субстанций.** Эти свойства делят на **экстенсивные** и **интенсивные**.

*Экстенсивным называется свойство, имеющее меру в самом себе*; количество этого свойства измеряется на основе одноименного эталона (скажем, длина — в м, масса — в кг и т. д.; здесь м и кг — эталоны той же природы, что и измеряемая величина: длина, масса). *Интенсивные величины не имеют меры в себе*, они измеряются косвенно, на основе экстенсивных (или производных от них) величин: например, температура измеряется по высоте столбика термометра, по объему газа в баллончике, по электрическим характеристикам термометра сопротивления или термопары.

Экстенсивные величины *пропорциональны количеству субстанции* (скажем, массе), при суммировании их количество увеличивается; именно эти величины имеются в виду, когда говорят, что часть меньше целого. Возможность суммирования экстенсивных величин лежит в основе расчета некоторых свойств субстанции (интенсивных, удельных — см. ниже) по аддитивности.

Интенсивная величина *не зависит от количества субстанции*; при увеличении ее количества простого суммирования интенсивной величины не происходит (скажем, при сложении двух масс одинаковой или разной температуры результирующая температура не равна сумме исходных). Интенсивная величина при

наращивании количества субстанции некоторым образом *усредняется*.

Перенос субстанции (теплоты, вещества и других экстенсивных величин) возможен, если в разных точках технологической системы (аппарата, потока) различны значения интенсивных свойств (температуры, давления и др.). Разница в значении **интенсивных свойств (потенциалов)** является **причиной и движущей силой переноса экстенсивных величин**.

В ряде случаев удобно выделять еще одну группу свойств — **удельные свойства**. Это какое-либо экстенсивное свойство, отнесенное к единице субстанции (например, к 1 кг) и потому *не зависящее* (подобно интенсивной величине) от количества субстанции. Примерами могут служить плотность вещества или его теплоемкость. Удельные свойства вещества, как и интенсивные, при сложении субстанции тоже усредняются.

Схема усреднения удельного или интенсивного свойства  $C$  на примере смешения двух порций (массовые количества —  $a$  и  $b$ , значения свойства —  $C_A$  и  $C_B$  соответственно) показана на рис. 1.1.

В простейших случаях *усреднение* интенсивных и удельных величин при изменении количества субстанции (например, при смешении нескольких порций вещества) нередко производят по *аддитивности*. Такая процедура усреднения подразумевает: математически — *линейность* рассматриваемого свойства, физически — справедливость *закона сохранения* для экстенсивной величины, используемой для расчета этого свойства.

Абсцисса точки смеси ( $m$ ) зависит от количеств  $a$  и  $b$  взятых порций (или, что то же, — от концентраций), она определяется по правилу рычага — см. разд. 10.2.4. В случае *аддитивного* расчета рассматриваемого свойства для смеси

$$C = (aC_A + bC_B)/(a + b)$$

линия смешения — прямая (на рисунке — сплошная линия 1).

Однако при наращивании количества субстанции (при смешении) нередко наблюдаются и *нелинейные* эффекты: например, выделение или поглощение теплоты смешения в случае расчета теплоемкости смеси. Тогда усредненное значение свойства следует рассчитывать с учетом таких нелинейных эффектов. В этом случае требуется написание баланса по субстанции (см. разд. 1.3.1) с учетом ее Источников (Ис) и Стоков (Ст), что приведет к отклонению от аддитивности — вверх или вниз от прямой на рис. 1.1 (в зависимости от знака нелинейного эффекта). Если искомое усредненное значение свойства, отвечающее точкам  $M$ , больше рассчитанного по аддитивности, то говорят о **синергизме** данного свойства (штриховая линия на рисунке),

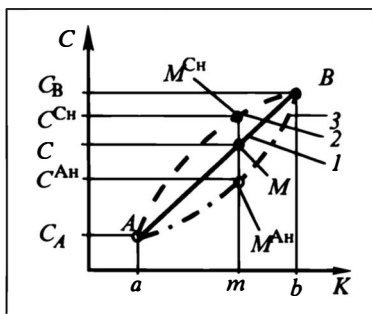


Рис. 1.1. К усреднению интенсивных или удельных свойств:

1 — аддитивность свойства, 2 — синергизм, 3 — антагонизм;  $C$  — свойство,  $K$  — количество,  $M$ ,  $M^{Cn}$  и  $M^{An}$  — точки, характеризующие свойства смеси для случаев 1, 2 и 3

если меньше, — то об **антагонизме** (штрих-пунктирная линия).

Напомним сущность некоторых экстенсивных и удельных свойств рабочего тела (либо связанных с ними характеристик), используемых в ближайших раз-

делах курса; во многом эти характеристики хорошо известны из предшествующих учебных дисциплин. Размерности приводимых величин даны в СИ.

**Масса  $m$**  — важнейшая физическая характеристика рабочего тела, определяющая его инерционные свойства. В механике масса является коэффициентом пропорциональности между действующей на тело силой и его ускорением. В СИ масса измеряется в кг.

**Плотность  $\rho$  и удельный объем  $v$ .** Масса, содержащаяся в единице объема  $V$ , называется плотностью тела:  $\rho = m/V$ , кг/м<sup>3</sup>. Величина, обратная плотности и представляющая собой объем, занимаемый единицей массы, называется **удельным объемом**:  $v = V/m$ , м<sup>3</sup>/кг. Совершенно очевидно (из физического смысла, из сопоставления размерностей), что в любой системе единиц  $\rho v = 1$ , соответственно  $\rho = 1/v$  и  $v = 1/\rho$ .

**Скоростью  $w$**  (в курсе ПАХТ будут использованы и иные символы) называется путь  $l$ , отнесенный к единице времени  $\tau$ ; единица измерения скорости — м/с. Если скорость во времени не изменяется, то она рассчитывается по формуле

$$w = l/\tau; \quad (1.1)$$

если же скорость переменна во времени, то **мгновенная скорость** (в момент  $\tau$ ) выразится как

$$w = dl/d\tau, \quad (1.1a)$$

а формула (1.1) в этом случае определяет **среднюю во времени скорость  $w$** .

Скорость потока жидкости (газа, твердого материала) в некоторой точке аппарата называется **локальной**. На ее основе определяется (из физических соображений, из сопоставления размерностей) поток жидкости (газа и т.д.)  $dV$  через элементарное живое сечение  $df$  (площадку, нормальную к направлению скорости):

$$dV = wdf \text{ или } w = dV/df. \quad (1.2)$$

Выражение (1.2) именуется **уравнением расхода в дифференциальной форме**. Для определения *средней по всему поперечному сечению  $f$*  скорости потока  $w_{cp}$  предварительно определяют полный расход:

$$V = \int_f w df \quad (1.2a)$$

и, исходя из (1.2), записывают **уравнение расхода в интегральной форме**:

$$w_{cp} = V/f \text{ или } V = w_{cp} f. \quad (1.3)$$

Заметим: в ряде технологических задач полный расход  $V$  задан, так что нет необходимости в использовании формулы (1.2a); кроме того, индекс "ср" нередко опускают.

**Силы.** В механике, гидравлике, ряде других разделов и дисциплин анализ взаимодействия сил равнозначен (в аспекте получаемых результатов) анализу потоков импульса (количества движения), поскольку *поток импульса, отнесенный к единице времени, представляет собой силу*. Единица измерения силы в СИ — ньютон  $H \equiv \text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2$ .

Обычно используют следующую классификацию сил: массовые (объемные), поверхностные, линейные.

**Массовыми** называют силы, действующие на каждую частицу внутри данной массы (объема) рабочего тела. Примером массовых сил могут служить силы всемирного тяготения (в частности — **вес**), центробежные силы, инерционные силы. Если источник массовых сил лежит вне тела, то говорят о *внешних* силах (источник веса тела — притяжение Земли); если силы проявляются независимо от внешних воздействий, то это *внутренние* массовые силы (силы инерции). Массовые силы пропорциональны массе рабочего тела; они могут быть представлены как произведение массы на ускорение:

$$P = ma. \quad (1.4)$$

В этом смысле ускорение выступает как **единичная** (удельная) массовая сила, т. е. отнесенная к единице массы:  $a = P/m = P'$ . В ходе анализа будет удобно использовать **проекции** единичных внешних массовых сил на оси координат:  $P_x, P_y, P_z$ .

**Поверхностными** называют силы, действующие на поверхность и пропорциональные ей. Различают **нормальные** и **тангенциальные** поверхностные силы. Первые действуют нормально к поверхности — это *силы давления* (сжатия и т.п.). Их пропорциональность величине поверхности выражается соотношениями

$$dP_n = p df \text{ или } P_n = pf \quad (1.5)$$

— в дифференциальной (для локальной силы давления  $dP_n$ ) или в интегральной (для полной силы давления  $P_n$ ) форме соот-



ветственно. Связь между выражениями (1.5) очевидна:  $P_H = \int_f p \, df$ . Удельная (приходящаяся на единицу поверхности) нормальная сила называется **давлением**:

— *локальным* (в точке поверхности)  $p = dP_H/df$ ;

— *средним* (по всей поверхности  $f$ )  $p = P_H/f$ .

Вдоль поверхности (тангенциально) действуют *силы сдвига* (в гидравлике — силы трения). Их удельная характеристика, отнесенная к единице поверхности, называется **напряжением сдвига (трения)**. Пропорциональность силы и поверхности здесь выражается соотношениями

$$dP_T = \tau_T df \text{ или } P_T = \tau_T f \quad (1.6)$$

в дифференциальной и интегральной формах, причем в первом случае  $\tau_T = dP_T/df$  — *локальное* напряжение сдвига (в точке поверхности), во втором  $\tau_T = P_T/f$  — *среднее* его значение по поверхности  $f$ .

Удельные характеристики поверхностных сил  $p$  и  $\tau_T$  измеряются в  $H/m^2 = Pa$  (паскаль).

Примером **линейных сил** является *сила поверхностного натяжения*, действующая по периметру  $\Pi$  и пропорциональная ему. Для полной силы поверхностного натяжения пропорциональность периметру выразится как

$$P_H = \sigma \Pi, \quad (1.7)$$

где  $\sigma$  — средний (по периметру  $\Pi$ ) **коэффициент поверхностного натяжения**,  $[\sigma] = H/m$ .

**Теплоемкостью** называется количество теплоты, необходимое для нагревания рабочего тела на 1 градус. Удобно оперировать **удельной теплоемкостью**  $c$ , отнесенной к единице массы тела. В курсе ПАХТ чаще всего используют теплоемкость при постоянном давлении ( $c \equiv c_p$ ). Единица измерения теплоемкости:  $Дж/(кг \cdot K)$ .

Другие необходимые характеристики будут вводиться по ходу изложения курса.

В заключение раздела заметим: при изложении курса нам придется неоднократно *классифицировать* явления, процессы, ситуации — подобно тому, как это сделано выше в отношении сил. Надо ясно понимать, что природа — единая, у нее нет классификаций; это **мы** вводим классификации в целях удобства восприятия и систематизации тех или иных фактов, явлений, закономерностей. В этом смысле любая классификация — *условна*, даже субъективна (хотя она вполне может быть удачной); нередко общепринятая классификация — просто дань традиции.

Покажем условность классификации на примере выталкивающей силы, действующей на тело объемом  $V$  и поверхностью  $F$ , погруженное в жидкость плотностью  $\rho$  (рис. 1.2.). На произвольную элементарную площадку  $dF$ , распо-

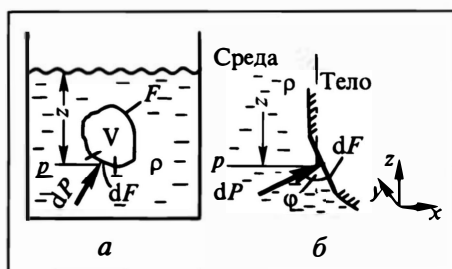


Рис. 1.2. К формированию архимедовой силы:

*a* — тело в жидкости: схема сил, *б* — увеличенный фрагмент элементарной поверхности

ложенную на глубине  $z$  (там давление  $p = \rho g z$ ) действует по нормали к площадке элементарная **поверхностная** сила  $dP = p dF$ . Если угол силы  $dP$  с вертикальной осью  $z$  равен  $\varphi$  (в месте расположения площадки), то составляющая силы  $dP$  вдоль вертикальной оси будет  $(dP)\cos\varphi = p(dF)\cos\varphi = p dx dy$  (поскольку проекция  $dF$  на плоскость  $xy$ , равная  $(dF)\cos\varphi$ , записывается как  $dx dy$ ). Чтобы получить полную силу вдоль вертикальной оси, надо просуммировать  $dP$  по всей поверхности  $F$ :

$$P = \iint_{(F)} p dx dy.$$

Но по формуле Остроградского—Гаусса между интегралами по поверхности и по объему существует связь:

$$\iint_{(F)} p dx dy = \iiint_{(V)} \frac{dp}{dz} dV.$$

В рассматриваемом случае  $dp/dz = \rho g$ , так что

$$\iiint_{(V)} \frac{dp}{dz} dV = \iiint_{(V)} \rho g dV = \rho g V. \quad (a)$$

Это и есть **закон Архимеда**: на погруженное в жидкость тело действует выталкивающая сила, равная весу жидкости в объеме тела. Таким образом, закон, представленный первоначально как результат действия *поверхностных* сил, получил конечное выражение (а) в форме *массовых* сил — в такой форме трактовать и использовать этот закон удобнее.

Проведенный анализ показывает условность введенной ранее классификации сил: архимедову силу можно относить как к *поверхностным*, так и к *массовым* — все зависит от стадии и целей анализа.

## 1.3. ОБЩИЕ ПОДХОДЫ К АНАЛИЗУ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА

### 1.3.1. Уравнения баланса

Среди разнообразных типов соотношений, встречающихся в химической технологии (во многих других учебно-научных дисциплинах — тоже), часто используются уравнения баланса. Эти

уравнения нередко выступают как математическое выражение законов сохранения какой-нибудь субстанции (массы, количества движения, теплоты, какого-либо вещества). Однако балансовые соотношения можно записать и для таких ситуаций, когда законы сохранения не действуют. Так, баланс может быть записан для *одного из* веществ, участвующих в химической реакции: здесь сохранения (скажем, массы или числа молей) именно этого вещества — нет, так как оно может исчезать или возникать в ходе химической реакции. К этой же категории относятся балансы объемов рабочих тел, энтропии (здесь отсутствие законов сохранения — фундаментальный факт). Таким образом, понятие баланса шире, нежели закона сохранения (по крайней мере, в рамках конкретной учебно-научной дисциплины).

Сущность метода балансов и последовательность составления балансовых соотношений заключается в следующем:

- а) определяют, для какой именно субстанции необходимо записать баланс;
- б) выделяют **пространственный контур**, для которого составляется баланс;
- в) устанавливают **временной интервал**, для которого будет составлен баланс.

Затем обозначают и выражают: потоки субстанции, входящие в контур (**Приход**  $\equiv$  Пр) и выходящие из него (**Уход**  $\equiv$  Ух); **Источники** (Ис) субстанции и ее **Стоки** (Ст) внутри контура; **Накопление** (Нак) субстанции (или **Результат** процесса, сокращенно — Рез) в контуре за исследуемый временной интервал. Далее записывают **Основное Балансовое Соотношение** (ОБС):

$$+ \text{Пр} - \text{Ух} + \text{Ис} - \text{Ст} = \text{Нак(Рез)} . \quad (1.8)$$

ОБС может быть записано для любой характеристики объекта, относящейся к экстенсивным величинам.

Основные цели составления баланса:

- проверка сходимости баланса, т.е. выявление невязки баланса и ее причин, принятие решения об уточнении модели процесса или о повышении точности определения величин, входящих в ОБС;
- нахождение неизвестного элемента баланса; здесь должны быть известны все элементы баланса, кроме определяемого;
- отыскание функциональной связи между элементами балансового соотношения (непосредственно или в результате математических преобразований).

В качестве **субстанции**, для которой записывается балансовое соотношение, может выступать **масса** (или **поток массы**). В этом случае чаще всего предполагается справедливость закона сохранения массы (дефект массы в ходе ядерных реакций в хими-

ческой технологии обычно не рассматривается). Баланс **импульса (количества движения)** часто используется при изучении механических и гидромеханических процессов. Следует иметь в виду, что эти балансовые выражения, отнесенные к *единице времени*, приобретают форму **балансов взаимодействующих сил**. Существенно, что при переносе импульса в поле *внешних* массовых сил причины их появления лежат *за пределами* выделенного контура; поэтому внешние массовые силы трактуются как Источники или Стоки импульса внутри контура. Кроме того, в этом случае обычно говорят не о Накоплении, что физически оправданно для количества движения, а о Результате (Рез) — изменении ситуации под влиянием равнодействующей сил.

При составлении **энергетического** баланса в качестве субстанции целесообразно (если это допустимо) выделить какой-либо определенный вид энергии, например — тепловой; тогда энергетический баланс превращается в *тепловой*; в других ситуациях приходится использовать полный энергетический баланс.

**Баланс по веществу** может быть записан для какого-нибудь одного или для нескольких участвующих в процессе компонентов либо для всех компонентов смеси.

**Пространственный контур** (рис. 1.3) выделяет из технологической системы один аппарат, несколько аппаратов или часть аппарата (возможно, бесконечно малую его часть). После выделения контура все потоки, пересекающие его границы (жирные линии), трактуются как Приходы субстанции в контур или ее Уходы из него. Если между потоками происходит обмен субстанцией, нередко при выборе контура потоки целесообразно формально обособить (*сегрегировать*) — примеры этому будут в курсе.

В качестве **временного интервала** можно выбрать время протекания *всего процесса* от начала до конца либо от начала до некоторого *промежуточного* состояния (так поступают при необходимости установления закономерностей изменения исследуемой характеристики во времени). Для периодических процессов нередко приходится начинать с составления баланса в дифферен-

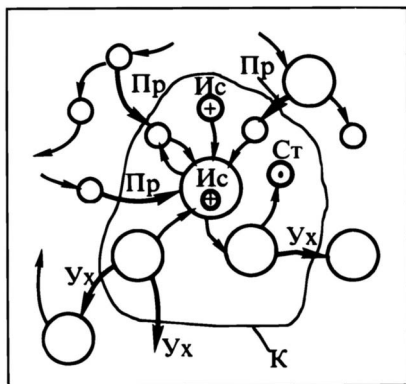


Рис. 1.3. К составлению баланса:

Пр — приход, Ух — уход, Ис — источник, Ст — сток, К — контур

циальной форме — для *бесконечно малого* (элементарного) промежутка времени  $dt$ . Для стационарных процессов за временной интервал чаще всего удобно выбирать единицу времени (1 с).

*Без выбора субстанции, определения пространственного контура и установления временного интервала составление баланса лишено смысла.*

При написании балансовых соотношений в дифференциальной форме (вообще — при составлении любых дифференциальных уравнений) необходимо строго следовать математическому правилу: если какая-либо независимая переменная  $x$  (пространственная или временная координата, другой аргумент) получила **приращение**  $dx$ , то исследуемая функция  $y$  тоже получает **приращение**  $dy$ , которое *всегда считается положительным*. Математике безразлична физическая сущность описываемого процесса; поэтому не нужно пытаться "догадываться", каким должен быть знак этого приращения  $dy$  в свете физических представлений о процессе. Присущий физическому смыслу знак  $dy$  *проявится сам* — при подстановке пределов интегрирования или граничных условий; вот их формулирование — дело исследователя (физика, химика, технолога), но не математика. Попытка учесть знак приращения на стадии составления дифференциального уравнения — источник ошибок. Их потом приходится мучительно устранять, причем "нечестными путями": делать где-то еще одну ошибку в знаке (например, произвольно меняя пределы интегрирования); объяснять, что знак "минус" означает расход (вещества, энергии и т. п.), а не их получение; а то и просто "забывать" про неестественно появившийся в формуле знак.

*Итак: при положительном приращении аргумента будем всегда полагать приращение функции положительным.*

И еще. В качестве пределов интегрирования должны подставляться только начальные или конечные (либо текущие) значения величин, являющихся параметрами интегрирования, т. е. стоящих в подынтегральном выражении *под знаком дифференциала* (в рассматриваемом случае — величин  $x$  и величин  $y$ ). И, разумеется, при подстановке нижнего ("н") и верхнего ("в") пределов в правой и левой частях равенства необходимо выдерживать горизонтальное соответствие: величине  $x_n$  отвечает  $y_n$ , величине  $x_v$  отвечает  $y_v$ .

В качестве **Прихода** и **Ухода** могут выступать *потоки* субстанции в единицу времени (в непрерывных стационарных процессах) либо ее *количества* (в периодических нестационарных процессах) — конечные (за весь процесс или часть его) или бесконечно малые (за элементарный промежуток времени  $dt$ ).

**Источники** и **Стоки** вводятся в балансовые уравнения, когда в изучаемой ситуации для субстанции отсутствует закон сохранения. Это *тоже могут быть потоки* субстанции (в единицу времени) либо ее *количества* (за конечный или бесконечно малый промежуток времени). На рис. 1.3 Источники и Стоки изображены крестиками или жирными точками в кружках малого размера.

В результате алгебраического сложения Приходов, Уходов, Источников и Стоков количество рассматриваемой субстанции в пределах контура может изменяться или не изменяться: происходит или не происходит **Накопление** субстанции. В *стационарном* состоянии (непрерывные процессы) таких изменений не

наблюдается, так что здесь Накопление субстанции  $\text{Нак} = 0$ . Для *нестационарных* процессов типично изменение количества балансируемой субстанции внутри контура. При этом Накопление всегда есть *разность между конечным и начальным* количествами субстанции; эта разность получится положительной, когда количество субстанции нарастает, и отрицательной, когда оно убывает.

Пусть, например, речь идет о балансе массы  $M$ . В стационарном процессе ее количество в контуре не изменяется во времени, так что  $\text{Нак} = M_k - M_n = 0$ . В периодическом процессе конечное количество массы  $M_k$  может быть не равно начальному  $M_n$ ; тогда  $\text{Нак} = M_k - M_n \neq 0$ . При рассмотрении бесконечно малого промежутка времени  $d\tau$  Накопление субстанции (здесь — массы) тоже *бесконечно мало*. Пусть в начале элементарного промежутка (момент  $\tau$ ) количество массы равно  $M$ , а в конце его (момент  $\tau + d\tau$ ) — равно  $M + dM$ . Тогда  $\text{Нак} = (M + dM) - M = dM$ . Если изменение массы зависит от *ряда факторов* (и время  $\tau$  — лишь один из них), то количество массы в момент  $\tau + d\tau$  составит  $M + \frac{\partial M}{\partial \tau} d\tau$ , так что  $\text{Нак} = \frac{\partial M}{\partial \tau} d\tau$ .

Заметим, что Накопление субстанции может быть равно 0 и в случае нестационарного процесса, когда пространственный контур стягивается, например, в поверхность (граница раздела фаз и т.п.): накопление субстанции в таком контуре нулевого объема означало бы бесконечно большое повышение потенциала (температуры, концентрации), чего физически происходить не может. Такая ситуация встретится, например, при записи граничных условий к дифференциальным уравнениям переноса.

В практических ситуациях ОБС (1.8) нередко может быть *упрощено и записано в урезанном виде*. Так, для *стационарных* процессов ( $\text{Нак} = 0$ ) оно принимает вид

$$+ \text{Пр} - \text{Ух} + \text{Ис} - \text{Ст} = 0. \quad (1.8a)$$

В условиях *действия законов сохранения* из ОБС выпадают Источники и Стоки:

$$+ \text{Пр} - \text{Ух} = \text{Нак}, \quad (1.8b)$$

а если речь идет еще и о *стационарных* процессах, то

$$+ \text{Пр} - \text{Ух} = 0. \quad (1.8в)$$

Последнее соотношение нередко представляют в форме

$$\text{Пр} = \text{Ух}. \quad (1.8г)$$

В ряде случаев здесь применяют иную запись; например, при переносе теплоты между двумя теплоносителями в отсутствие

теплопотерь в окружающую среду: сколько теплоты отдал один поток, столько получил другой.

Для *изолированных* систем (нет Приходов и Уходов субстанции):

$$+ \text{Ис} - \text{Ст} = \text{Нак.} \quad (1.8\text{д})$$

Разумеется, возможны и иные случаи и соответствующие им формы записи. В простейших случаях можно, конечно, сразу записать баланс в какой-либо усеченной форме. Надо только ясно представлять себе, что эта форма записи всегда является модификацией ОБС (1.8). Подчеркнем, что в ряде сложных ситуаций попытка упрощенной записи баланса может привести к ошибкам, чаще всего — в знаке какого-нибудь элемента баланса (такие ошибки известны в истории науки о ПАХТ).

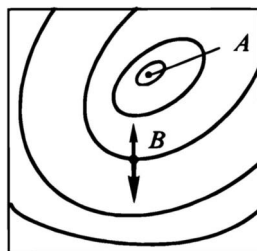
### 1.3.2. Интенсивность процессов переноса

#### *Потенциалы и потоки субстанций*

**Потенциалы и их поля.** В разных точках рабочего объема технологического аппарата в общем случае значения интенсивных величин (потенциалов) и некоторых других параметров — различны. Точки с одинаковыми значениями параметров образуют (рис.1.4) **изоповерхности** (например, одинаковой температуры). На рисунке эти поверхности представлены в виде **изолиний** — сечений изоповерхностей плоскостями, параллельными плоскости отсчета интенсивной величины (подобно тому, как это делается на географических картах при обозначении линий равной высоты над уровнем моря). Поскольку на изоповерхности значения свойства (потенциала, например температуры) не изменяются, то движущая сила, вызывающая перемещение субстанции (в рассматриваемом примере — теплоты) вдоль изолинии, изоповерхности, отсутствует, так что направленного перемещения субстанции вдоль этой линии, поверхности — не происходит. Однако значения потенциалов на разных изоповерхностях различны; существующая (и, как правило, поддерживаемая внешними факторами) разность потенциалов является *основой движущей силы* переноса субстанции между изоповерхностями: так, температурный напор — причина возникновения переноса теплоты. При этом по II закону термодинамики субстанция самопроизвольно переносится от большего ее потенциала к меньшему (для рассматриваемого примера: поток теплоты — от горячих зон к холодным).

Интенсивность переноса (поток субстанции) возрастает с увеличением движущей силы, приходящейся на единицу расстояния между изоповерхностями потенциала. Поскольку эти

Рис. 1.4. Изолинии потенциального поля с вершиной  $A$  (жирной стрелкой показано направление потока субстанции в точке  $B$ , тонкой — направление градиента)



расстояния зависят от принятого направления их отсчета, то возникает неопределенность в оценке интенсивности переноса субстанции. Поэтому целесообразно выбрать определенное направление, конкретизирующее оценку интенсивности переноса. В качестве такого направления берут самое короткое — *нормаль* к изоповерхности; в этом случае разность потенциалов, приходящаяся на единицу длины, будет наибольшей (в сравнении с другими направлениями расстояний между изоповерхностями), так что рассчитываемый поток субстанции будет выражен наибольшей величиной.

Изменение потенциала на единицу длины по нормали называется его **градиентом**. Согласно *общепринятой гипотезе*, интенсивность удельных (отнесенных к единице времени и единице поверхности, нормальных к изоповерхностям) потоков субстанции, выражающих скорость ее переноса, пропорциональна градиенту соответствующего потенциала. При этом градиент, согласно установлениям математики, принимается направленным в сторону *повышения* потенциала; между тем субстанция переносится *от большего* потенциала *к меньшему*. Поэтому в соотношениях, связывающих удельные потоки субстанции и градиенты, перед последними ставится знак "минус". Очевидно, что полный поток субстанции в единицу времени получается как произведение удельного потока на величину поверхности, через которую переносится субстанция.

**Удельные потоки субстанции.** Рассмотрим удельные потоки (иногда используют термин "плотность потока") применительно к переносу различных субстанций.

Пусть вдоль неподвижной поверхности (рис.1.5, а) движется жидкость, причем непосредственно у поверхности (стенки) скорость ее относительно стенки равна 0 — так называемая "концепция прилипания" (жидкости к поверхности). По мере удаления от стенки по нормали  $n$  скорость возрастает по некоторому закону: на расстоянии  $n$  от стенки она равна  $w$ , на расстоянии  $n + \Delta n$  равна  $w + \Delta w$ . Таким образом, на участке нормали  $\Delta n$  наблюдается приращение скорости  $\Delta w$ , так что среднее (на участке  $\Delta n$ ) значение градиента скорости равно  $\Delta w / \Delta n$ , а локальное (в точке  $n$ ) составляет  $\lim_{\Delta n \rightarrow 0} (\Delta w / \Delta n) = \partial w / \partial n$ .

Поскольку слои жидкости на расстояниях  $n$  и  $n + \Delta n$  движутся



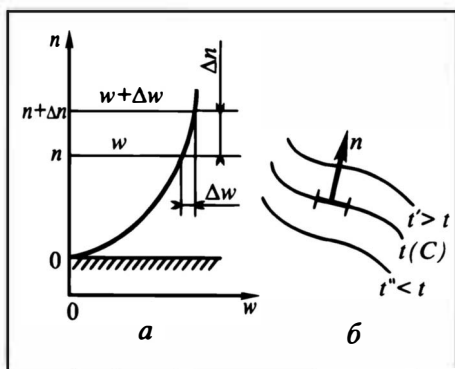


Рис. 1.5. Удельные потоки и градиенты:

*a* — к переносу импульса, *б* — к переносу теплоты (или вещества)

с разными скоростями, то между этими слоями возникают силы трения: импульс от слоев с большей скоростью передается к слоям с меньшей. **Удельный поток импульса** (если его отнести к единице вре-

мени, то речь пойдет о напряжении трения  $\tau_T$  — см. разд. 1.2.3), согласно упомянутой выше общей гипотезе, на участке  $\Delta n$  пропорционален величине  $\Delta w / \Delta n$ . Локальное значение потока импульса или напряжения  $\tau_T$  на расстоянии  $n$  от стенки получается в результате предельного перехода  $\Delta n \rightarrow 0$ :  $\tau_T \sim |\partial w / \partial n|$ , причем символ абсолютного значения градиента призван учесть противоположность направлений потока импульса и градиента. Связь  $\tau_T$  и градиента, записанная в форме равенства (т.е. с коэффициентом пропорциональности), называется **формулой Ньютона**:

$$\tau_T = -\mu \frac{\partial w}{\partial n} = \mu \left| \frac{\partial w}{\partial n} \right|. \quad (1.9)$$

Важно, что обоснованный выше знак "минус" относится не к коэффициенту пропорциональности  $\mu$ , а к *градиенту*  $\partial w / \partial n$ . Иначе говоря, более строго надо бы записывать не  $\tau_T = -\mu(\partial w / \partial n)$ , а  $\tau_T = \mu(-\partial w / \partial n)$ ; это замечание относится также к удельным характеристикам переноса и других субстанций.

Множитель  $\mu$  называется **коэффициентом динамической вязкости** (иногда кратко — динамической вязкостью). Согласно формуле (1.9) он представляет собой силу, действующую между двумя выделенными в жидкости единичными (в СИ —  $1 \text{ м}^2$ ) параллельными площадками, находящимися на расстоянии  $1 \text{ м}$ , при разности скоростей между площадками в  $1 \text{ м/с}$ . Единица измерения в СИ:

$$[\mu] = \frac{H}{\text{м}^2 \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}};$$

после формальных сокращений:  $(H/\text{м}^2) \cdot \text{с} = \text{Па} \cdot \text{с}$ .

В ходе анализа нередко оперируют **кинематической вязкостью**  $\nu \equiv \mu/\rho$ ; ее формальная размерность  $l^2/\tau$ , а единица измерения в

СИ —  $m^2/c$ ; физически это следует понимать как перенос импульса в единицу времени с объемным потоком между двумя параллельными площадками в  $1 m^2$ , находящимися друг от друга на расстоянии  $1 m$ , при движущей силе переноса, равной единице:

$$[v] = \frac{m^3}{c \cdot m^2 \cdot \frac{1}{m}}.$$

Аналогичные рассуждения можно провести для переноса **теплоты** (рис.1.5, б) между изотермическими поверхностями. Ее удельный поток  $q$  (в СИ:  $Bm/m^2$ ) согласно той же гипотезе будет пропорционален градиенту  $\partial t/\partial n$ . В форме равенства получаем **закон Фурье**:

$$q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} = \lambda \left| \frac{\partial t}{\partial n} \right|. \quad (1.10)$$

Множитель  $\lambda$  называется **коэффициентом теплопроводности** (или просто теплопроводностью). Он представляет собой поток теплоты, проходящий в единицу времени между двумя параллельными единичными площадками ( $1 m^2$ ), находящимися на расстоянии  $1 m$ , при разности температур между ними  $1 \text{ градус}$ ;

в СИ  $[\lambda] = \frac{Bm}{m^2 \cdot K/m}$ , сокращенно обычно записывают  $[\lambda] = Bm/(m \cdot K)$ .

В ходе анализа нередко оперируют **температуропроводностью**  $a \equiv \lambda/c\rho$ , имеющей формально размерность  $m^2/c$ . Физически же, как и в случае переноса импульса,  $a$  следует понимать как характеристику переноса субстанции (здесь — теплоты) с объемным потоком между единичными плоскими поверхностями в условиях, сформулированных при рассмотрении кинематической вязкости  $\nu$ :

$$[a] = \frac{Дж \cdot кг \cdot K \cdot m^3}{c \cdot m^2 \cdot K \cdot Дж \cdot кг} = l^2/\tau = m^2/c.$$

Наконец, **перенос вещества** по рассматриваемой гипотезе выражается **законом Фика**, согласно которому удельный поток вещества  $q_v$  пропорционален градиенту концентраций  $\partial C/\partial n$ :

$$q_v = -D \frac{\partial C}{\partial n} = D \left| \frac{\partial C}{\partial n} \right|. \quad (1.11)$$

Здесь  $D$  — **коэффициент диффузии**; аналогично  $\nu$  и  $a$  он измеряется в  $m^3/(m^2 \cdot c \cdot 1/m)$ , формально — в  $m^2/c$  и характеризует пере-

нос вещества в единицу времени между двумя единичными плоскостями, находящимися на расстоянии 1 м, при единичной разности потенциалов между ними. Заметим:  $q_v$  здесь выражен в  $\text{м}^3/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ ; при необходимости выражения массового потока в формулу (1.11) следует (ср. размерности) ввести плотность  $\rho$ :

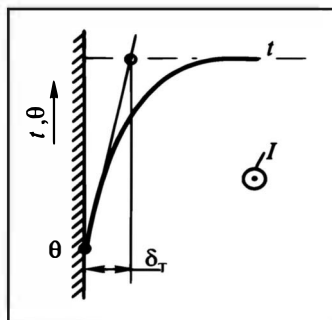
$$q_v^{\text{масс}} = - \rho D \frac{\partial C}{\partial n}. \quad (1.11a)$$

В ходе анализа и расчета процессов переноса субстанции необходимо располагать закономерностями изменения градиентов по объему технологического пространства (аппарата). Реально эти закономерности удастся установить и использовать лишь в достаточно простых ситуациях: чаще — при переносе субстанции в твердых телах или через них, реже — в случае жидкостных и газовых потоков. Нередко эти подходы не удастся реализовать в силу недостаточного уровня знаний о механизме процесса. Кроме того, такой путь иногда затруднен из-за сложностей теоретического анализа, а также громоздкости получаемых соотношений. В этих случаях прибегают к упрощенным представлениям о механизме переноса, что позволяет получить достаточно простые расчетные выражения. Чаще всего к упомянутым упрощениям обращаются в случае переноса теплоты и вещества.

Пусть имеется (рис.1.6) холодная теплообменная поверхность, омываемая горячим потоком жидкости или газа (перпендикулярно плоскости рисунка). Около этой поверхности температура изменяется от  $\theta$  на самой поверхности до  $t$  на некотором удалении от нее (далее — изменением  $t$  можно пренебречь). Область (по нормали к поверхности), в которой наблюдается значимое изменение потенциала (при анализе теплоты — температуры), называется **пограничным слоем (пленкой)**, в данном случае — *тепловым*. Это близкое к реальному представление удобно заменить упрощенным — *модельным*, согласно которому все изменение температуры от  $\theta$  до  $t$  сосредоточено в достаточно тонком **модельном тепловом пограничном слое** толщиной  $\delta_t$ , так что за его пределами температура потока  $t$  по нормали к поверхности не изменяется. Согласно такому модельному представлению  $(\partial t / \partial n)_{n=0} = \Delta t / \delta_t$ , где  $\Delta t \equiv t - \theta$ . Тогда удельный тепловой поток к стенке, соответственно выражению (1.10), равен  $q = \lambda(\Delta t / \delta_t) = (\lambda / \delta_t) \Delta t$ .

Важно, что речь идет не о реальной толщине пограничного слоя (вследствие асимптотического характера температурной кривой точно зафиксировать границу изменения  $t$  невозможно),

Рис. 1.6. К модели пограничной пленки ( $I$  — поток жидкости или газа по нормали к плоскости рисунка)



а о модельной, т. е. *расчетной* толщине  $\delta_T$ . В подавляющем большинстве случаев значение  $\delta_T$  неизвестно. Поэтому комплекс  $\lambda/\delta_T$  трактуется в целом как особая удельная характеристика интенсивности конвективного теплопереноса. Она носит название **коэффициента теплоотдачи**:

$$\alpha \equiv \lambda/\delta_T, \quad (1.12)$$

который представляет собой поток теплоты в единицу времени через единичную поверхность при температурном напоре в 1 К; в СИ  $[\alpha] = \text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ .

Аналогичная характеристика — **коэффициент массоотдачи** — вводится при описании переноса вещества:

$$\beta = D/\delta_d, \quad (1.13)$$

причем  $\delta_d$  — толщина (тоже модельная, расчетная — гипотетическая) **диффузионного пограничного слоя**, получаемая при спрямлении концентрационной кривой около поверхности массообмена. В СИ  $[\beta] = \text{м}^3/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ , формально  $[\beta] = \text{м}/\text{с}$ .

Значения  $\delta_T$  и  $\delta_d$  часто бывают достаточно близкими между собой (особенно для газов, когда налицо сходство в механизмах переноса теплоты и вещества), но они не обязательно совпадают по величине.

Аналогичные подходы могут быть реализованы и при переносе других субстанций. При необходимости расчета полных потоков субстанций в единицу времени значения  $\alpha$  и  $\beta$  следует умножить на величину поверхности  $F$  и соответствующую движущую силу ( $\Delta t$ ,  $\Delta C$ ).

Несмотря на крайне широкое использование коэффициентов отдачи (типа  $\alpha$  и  $\beta$ ) в технологических расчетах, надо понимать, что их применение обусловлено недостаточными знаниями о механизме процессов, а также иногда чисто счетными осложнениями. Поэтому расчетная концепция, основанная на коэффициентах тепло- и массоотдачи, является ограниченной; она существенно уступает прямым методам расчета, базирующимся на соотношениях типа (1.9) — (1.11). Недостатки использования коэффициентов отдачи проявляются особенно ярко, когда эти коэффициенты получаются зависящими от движущих сил  $\Delta t$ ,  $\Delta C$  или уровней температур, концентраций. Можно предвидеть отказ в будущем от использования коэффициентов отдачи; в основу расчетов будут положены закономерности, связанные с характером потенциальных полей — температурных, концентрационных и других.

## О перекрестных эффектах Онзагера

С позиций *неравновесной термодинамики* приведенные выше подходы к выражению удельного потока  $q_i$  произвольной субстанции могут быть представлены в *обобщенном виде*.

Движущая сила, отличная от нуля, приводит к возникновению потока некой конкретной ( $i$ -й) субстанции. При этом из феноменологических соображений ограничиваются линейной связью типа (1.9) — (1.13) между удельным потоком  $q_i$  и соответствующей движущей силой (разностью потенциалов)  $\Delta_j$ . Далее принимают, что результирующий поток переносимой субстанции является *линейной комбинацией* потоков, вызываемых характерными для рассматриваемых процессов движущими силами.

Пусть:  $i$  — вид субстанции;  $j$  — тип движущей силы, вызывающей ее поток;  $q_i$  — вектор удельных потоков субстанций, содержащий  $i$  элементов;  $\Delta_j$  — вектор движущих сил переноса, содержащий  $j$  элементов;  $A_{ij}$  — матрица коэффициентов пропорциональности, содержащая  $i \cdot j$  элементов. Тогда

$$q_i = \sum_{(j)} A_{ij} \Delta_j. \quad (a)$$

Выражение (a) представляет собой общую запись законов переноса субстанций в линеаризованной форме. Применительно к конкретным субстанциям\*

$q_t = \left  \lambda \frac{\partial t}{\partial n} \right  \equiv \frac{\lambda}{\delta} \Delta t \equiv A_{tt} \Delta_t$	— кондуктивный перенос теплоты (закон Фурье);	} (б)
$q_t = \alpha \Delta t \equiv A_{tr} \Delta_r$	— конвективный перенос теплоты (закон Ньютона);	
$q_m = \left  D \frac{\partial C}{\partial n} \right  \equiv \frac{D}{\delta} \Delta C \equiv A_{mm} \Delta_m$	— диффузионный перенос вещества (закон Фика);	
$q_m = \beta \Delta C \equiv A_{mr} \Delta_r$	— конвективный перенос вещества (уравнение массоотдачи);	
$q_I = \rho_I \left  \frac{\partial U}{\partial n} \right  \equiv \frac{\rho_I}{\delta} \Delta U \equiv A_{II} \Delta_I$	— перенос электричества (закон Ома);	
$q_v = \frac{R^2}{8\mu} \left  \frac{\partial p}{\partial n} \right  \equiv \frac{R^2}{8\mu\delta} \Delta p \equiv A_{VV} \Delta_V$	— ламинарное течение жидкости (закон Пуазей- ля, закон Дарси)	
и т. д.		

\* Для сокращения записи удельный поток теплоты  $q$  в (1.10) записан без индекса  $t$ .

Не введенные ранее обозначения:  $\delta$  — путь переноса субстанции;  $\rho_l$  — удельное электрическое сопротивление;  $U$  — электрический потенциал;  $R$  — радиус трубопровода.

Согласно второму принципу неравновесной термодинамики входящие в (а) и (б) коэффициенты пропорциональности удовлетворяют **перекрестным эффектам Онзагера** (иначе — **эквивалентным соотношениям взаимности**) для параллельного переноса какой-либо субстанции:

$$A_{ij} = A_{ji} . \quad (в)$$

(Заметим: правомерность перекрестных эффектов Онзагера ограничена "однородными" явлениями\*.)

Поясним смысл выражения (в) на примере тепло- и массопереноса. Пусть в процессе переноса этих субстанций участвуют две движущие силы — перепад температур  $\Delta_t$  и перепад концентраций  $\Delta_m$ . Тогда возможно возникновение двух параллельных потоков переноса — теплоты  $q_t$  и вещества  $q_m$ , базирующихся на перепадах температур и перепадах концентраций соответственно. Для рассматриваемых случаев эти потоки можно описать соотношениями типа (а), (б).

Перенос теплоты:

$$q_t = A_{tt}\Delta_t + A_{tm}\Delta_m . \quad (г)$$

Перенос вещества:

$$q_m = A_{mm}\Delta_m + A_{mt}\Delta_t . \quad (д)$$

Здесь *основная* составляющая переноса теплоты  $A_{tt}\Delta_t$  (она базируется на движущей силе  $\Delta_t$ ) *дополнена* составляющей теплового потока  $A_{tm}\Delta_m$  за счет *переноса вещества* (движущая сила —  $\Delta_m$ ). Эту дополнительную составляющую переноса теплоты называют **эффектом Дюфо**. Аналогично: *основная* составляющая переноса вещества  $A_{mm}\Delta_m$  (она базируется на движущей силе  $\Delta_m$ ) *дополнена* составляющей переноса вещества  $A_{mt}\Delta_t$  за счет разности температур  $\Delta_t$ . Дополнительная составляющая переноса вещества носит название **эффекта Соре**.

Из соотношений Онзагера (в) следует, что, например, в случае *малого* вклада теплопереноса в массоперенос (мал коэффициент  $A_{mt}$ , поэтому мала и величина  $A_{mt}\Delta_t$ ) коэффициент  $A_{tm}$ , а с ним и вклад  $A_{tm}\Delta_m$  массопереноса в теплоперенос, — *тоже мал*.

### Пропускные способности

В отечественной литературе достаточно широко используются понятия о **сопротивлении переносу** — *удельном* и (реже) *полном*; чаще всего это понятие используют при переносе теплоты

---

\* Подробнее об упомянутых ограничениях см. [1, 2].

и вещества. Под **сопротивлением переносу** понимают *отношение движущей силы*, т.е. разности потенциалов (в более общем смысле: характерного перепада потенциалов), *к потоку субстанции* — удельному или полному. Обозначим:  $\Delta t$  и  $\Delta C$  — температурный и концентрационный напоры (разности потенциалов, здесь — движущие силы рассматриваемых процессов переноса);  $\delta$  — толщина прослойки, через которую происходит перенос субстанции (пусть прослойка будет плоской; это может быть твердая стенка или гипотетическая пограничная пленка). Тогда удельное сопротивление теплопереносу выразится как  $\Delta t/q = \delta/\lambda$ , полное:  $\Delta t/Q = \delta/(\lambda F)$ , где  $Q = qF$  — поток теплоты через теплообменную поверхность  $F$ . При использовании коэффициента теплоотдачи:  $\Delta t/q = 1/\alpha$  и  $\Delta t/Q = 1/\alpha F$ . В случае переноса вещества — аналогично:  $\Delta C/q_v = \delta/D$  и  $\Delta C/M = \delta/(DF)$ ;  $\Delta C/q_v = 1/\beta$  и  $\Delta C/M = 1/\beta F$ , причем  $M = q_v F$  — поток переносимого вещества в единицу времени через поверхность контакта  $F$ .

В аспекте сопротивления переносу могут рассматриваться не только потоки субстанции, *нормальные* к поверхности контакта  $F$  (часто — одновременно и к направлению движения рабочего тела), и соответствующие движущие силы, но и *продольные* потоки и перепады потенциалов. Так, во многих задачах гидравлики поток  $G$  движется под действием перепада давлений  $p_1$  (на входе в объект) и  $p_2$  (на выходе); при переносе потока теплоты наблюдается характерное изменение температур теплоносителя от входа в аппарат  $t'$  до выхода из него  $t''$  и т.п.

В последние годы выявилась большая плодотворность использования для анализа процессов переноса величин, обратных сопротивлению. Они получили название **пропускных способностей** и представляют собой отношение *полного потока* субстанции к соответствующей *движущей силе* (в более общем плане — к характерному перепаду соответствующего потенциала). Так, для переноса потока теплоты  $Q$  *нормально* к теплопередающей поверхности  $F$  характерным перепадом температур будет движущая сила (температурный напор)  $\Delta t$ . Тогда пропускная способность  $Q/\Delta t$  для переноса теплоты путем теплопроводности выразится как  $(\lambda/\delta)F$ , а путем конвекции — как  $\alpha F$ ; аналогично — для массопереноса:  $(D/\delta)F$  и  $\beta F$ . Применительно к *продольному* переносу теплоты (например, при нагреве потока  $G$  жидкости с теплоемкостью  $c$  от температуры  $t'$  до  $t''$ ) поток теплоты, как будет показано в разд. 7.5 и следующих, выразится:  $Q = Gc(t'' - t')$ . Следовательно, пропускная способность  $Q/(t'' - t')$  в этом случае составит  $Gc$ .

Понятный аппарат пропускных способностей для различных процессов и их отдельных стадий будет достаточно широко представлен в этой и последующих главах курса.

Заметим, что в случае линейных соотношений (для постоянных  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $D$ , а также  $\alpha$ ,  $\beta$  и т.п.) понятия "сопротивление переносу" и "пропускная способность" имеют четкий физический смысл и определенное математическое выражение. Для нелинейных процессов и соотношений такой ясности пока нет, но общие качественные представления сохраняются.

### 1.3.3. Подходы к анализу и установлению общих закономерностей процессов переноса

Основу инженерного анализа составляет выявление количественных связей между различными факторами технологического процесса. Наиболее достоверные результаты дает строгий анализ, основанный на фундаментальных физических законах и учитывающий конкретную технологическую обстановку. В идеале такой анализ не должен привлекать каких-либо опытных данных, он должен исходить из физических основ явлений и процессов (англичане говорят: "from first principles"). Однако из-за многообразия и сложности причинно-следственных связей реализовать такой подход удастся весьма редко — лишь для самых простых процессов. Между тем инженерная практика зачастую не может ждать строгих теоретических решений и потому ищет дополнительные возможности.

На ранних стадиях создания и развития технологического приема, процесса нередко приходится ограничиваться **практическими рекомендациями**, базирующимися на положительном и отрицательном инженерном опыте осуществления этого или аналогичного процесса. Такие рекомендации частично сохраняют силу и на последующих стадиях модернизации данного и сходных процессов. Явная недостаточность этих рекомендаций приводит к необходимости **математических описаний** — первоначально на уровне *эмпирических* соотношений, связывающих основные характеристики процесса и вытекающих поначалу из самых примитивных, а затем и более достоверных представлений о *физической сущности* явлений и процессов (феноменологический подход). Такого рода расчетные соотношения носят, как правило, *частный* характер, их прогнозные возможности — невелики; применение их даже для сходных процессов и ситуаций, но с другими веществами, температурами и тому подобными условиями, конфигурациями рабочих зон аппаратов — чревато ошибками. Для расширения сферы использования таких соотношений и повышения их прогнозных возможностей приходится расширять диапазоны исследований (условий, рабочих тел, объектов), охватывая значительное число факторов



(хотя набор их по-прежнему определяется общими представлениями о закономерностях процесса). Тогда устанавливаемые при обработке опытных данных соотношения получаются более надежными; за это приходится платить более обширным экспериментом, а иногда и усложнением найденных расчетных соотношений. В рамках рассматриваемого подхода нередко проводят *чисто формальную обработку опытных данных*, строя соотношения (типа регрессионных моделей и др.) *вне* физических представлений о механизме протекания процесса и тем самым заведомо ограничивая возможности использования расчетного уравнения узкими рамками проведенного эксперимента. Во всех рассмотренных случаях нет гарантии приемлемой надежности (в том числе — прогнозности) получаемых расчетных уравнений, поскольку в своей основе они в значительной мере базируются на чисто инженерной интуиции исследователя — такая база не всегда надежна.

На более поздних этапах развития науки, технологии обращаются к **аналитическим** исследованиям, строя математические модели, глубже учитывающие взаимосвязи между отдельными факторами процесса. Этот путь обычно получает развитие после накопления солидного объема эмпирических сведений и соотношений — без этого не проверить правильность результатов анализа.

Немалую роль в развитии аналитических методов играет осознание недостаточности упомянутых ранее эмпирических и полумпирических подходов. Здесь также остается место феноменологическим моментам; однако это происходит на уровне *элементарных актов* процесса (например, переноса), где принимаемые феноменологические представления уже достаточно полно и убедительно апробированы. Далее выдвигают предположения о роли и месте упомянутых элементарных актов, о связях различных факторов, выделяя характерные особенности процесса, обозначают условия его проведения, в том числе — ситуацию в начале процесса и в ходе его на границах рабочей зоны. Последующий анализ должен в идеале привести к математическим выражениям, позволяющим осуществить инженерный расчет процесса. Нередко в этих случаях математические описания содержат некие численные коэффициенты (множители, слагаемые и т. п.), значения которых заранее не известны; их в дальнейшем находят из специального опыта, поставленного в соответствии с полученным математическим описанием, — так *теоретический анализ и эксперимент дополняют друг друга*.

Такой путь должен привести к получению надежных расчетных соотношений, применимых в широких рабочих диапазонах,

но при условии, что удалось достаточно полно выявить элементарные акты и выразить их связи, а потом разрешить возникшие математические проблемы. В противном случае решения получаются чрезмерно *приближенными*, описывающими процесс лишь в общих чертах, так что приходится проводить оценку: отвечает ли точность решения требованиям инженерного расчета, т. е. *адекватны* ли построенная модель процесса и полученное решение реальному процессу. Заметим, что особая трудность во многих случаях состоит в формулировании начальных и граничных условий (см. разд. 1.7): от правильности их записи в значительной мере зависит адекватность получаемого решения.

В ходе разработки математической модели, базирующейся на физических представлениях о механизме процесса, иногда получаются весьма сложные (например, трансцендентные) соотношения, не разрешимые в явном виде относительно искомой величины. Здесь приходится обращаться к **численным методам** решения (в том числе с использованием ЭВМ); однако при этом в известной мере теряется общий взгляд на протекание процесса, зачастую возникают затруднения в определении характера влияния отдельных факторов на процесс в целом.

Обилие переменных, громоздкость эмпирических соотношений и приближенность многих аналитических решений способствовали появлению (и крайне широкому распространению в предшествующие полвека) метода **обобщенных переменных**. Суть его заключается в том, что *отдельные переменные объединяются в комплексы* — не произвольно, конечно, а по определенным правилам, отвечающим физическому смыслу рассматриваемых явлений, процессов. Число таких комплексов, разумеется, меньше числа отдельных (исходных, натуральных) переменных. Это позволяет ставить эксперимент, варьируя меньшее число факторов (теперь это комплексы вместо натуральных величин) и получать более компактные (иногда и достаточно прогнозные) расчетные соотношения.

Обобщающий характер комплекса, составленного из нескольких натуральных (и потому — размерных) величин, существенно возрастает, если этот комплекс является **безразмерным**. В качестве таких комплексов выступают критерии подобия, числа переноса и некоторые другие величины — о них речь пойдет ниже. Каждый такой комплекс имеет *определенный физический смысл*; поэтому недостаточно представить набор натуральных величин в безразмерной форме, чтобы получить обобщенную переменную. Это важно подчеркнуть, поскольку в период увлечения обобщенными переменными было предложено

немало безразмерных комплексов, лишенных физического смысла; их использование приводило к формальным расчетным уравнениям, не обладающим прогнозностью, а зачастую имеющим мало общего с физическим смыслом процесса.

Аналитический метод и метод обобщенных переменных не противостоят один другому; их нередко используют совместно. Так, аналитические выражения часто представлены в дифференциальной форме или весьма громоздки для практического использования. Можно, *не решая* этих уравнений, на их основе сформировать обобщенные переменные и грамотно поставить эксперимент: ведь теперь уже ясно, какие именно обобщенные переменные надо варьировать в ходе опыта, чтобы установить достаточно надежные количественные связи между ними.

При анализе явлений, процессов нередко удается получить уравнения, качественно правильно отражающие взаимосвязи между различными факторами; однако количественно результаты могут при этом заметно отличаться от наблюдаемых на практике. В этих случаях вводят поправочные коэффициенты; фактически это **коэффициенты незнания** — в их роли часто выступают различного рода КПД, коэффициенты эффективности, поправочные множители и т. д. Если они лишь *несколько* (скажем, на 10% или немногим более) *корректируют* полученное ранее решение, то это допустимо: значит, основные эффекты учтены, а отклонения обусловлены менее значимыми факторами. Конечно, желательно в дальнейшем учесть эти дополнительные эффекты, но и с поправочными коэффициентами формула работоспособна. Однако бывает, что эти коэффициенты призваны скорректировать аналитическое решение *в несколько раз* (скажем, предложена расчетная формула для некоего процесса с КПД на уровне 0,1—0,2). Это означает, что выявить *основные* эффекты и влияющие на них факторы *не удалось*, и модель процесса построена на базе *второстепенных* эффектов. Успеха на таком пути создания расчетных соотношений не будет; полученные расчетные формулы ненадежны, в изменившихся условиях их использование может привести к ошибочным результатам.

В практике анализа явлений и процессов нередко производят **подмену задачи**, описывая одно явление в терминах и символах другого. В ряде случаев эту подмену проводят намеренно, тогда мы *осознаем последствия подмены* и можем оценить границы ее правомерности. В частности, мы осуществляем такую подмену, когда от выражения плотности потока через градиенты температур и концентраций переходим к выражениям через коэффициенты тепло- и массоотдачи; или сложные эффекты в переносе

импульса в некоторых течениях трактуем как проявление некой эффективной вязкости  $\mu_э$ , отличающейся от вязкости рабочего тела  $\mu$ . Нам придется неоднократно использовать такую подмену в курсе ПАХТ.

Но в ряде случаев исследователь проделывает такую подмену *неосознанно* — в порядке "добросовестного заблуждения"; таких примеров в науке предостаточно. Результат — недостоверный и неубедительный (а то и просто ошибочный) ход рассуждений, ненадежное (иногда неверное) решение. Примером может служить упомянутый выше анализ процесса без предварительного выявления основных факторов, построение модели на базе мало значащих для процесса эффектов. Неосознанная подмена задачи неоднократно в истории ПАХТ приводила к казусам, к совершенно неверным выводам и рекомендациям.

#### 1.3.4. Общая канва анализа

В последующих разделах представлены выводы общих дифференциальных уравнений переноса субстанций. Существуют различные пути анализа, приводящие к конечному результату. Выберем наиболее наглядный путь, использующий балансовые соотношения типа (1.8); он основан на рассмотрении неподвижного бесконечно малого постоянного объема в движущейся жидкости (при необходимости — газа, твердого тела). Удобнее всего вести анализ в декартовой системе координат (рис. 1.7), выделяя в качестве пространственного контура *элементарный прямоугольный параллелепипед* с ребрами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  и рассматривая (для единицы времени или бесконечно малого промежутка  $dt$ ) потоки соответствующей субстанции через пары граней  $dx dy$ ,  $dx dz$  и  $dy dz$ , а также изменения, происходящие внутри выделенного **элементарного объема**  $dV = dx dy dz$ . В зависимости от рассматриваемой субстанции получают дифференциальные уравнения неразрывности и переноса субстанции. Интегрирование этих дифференциальных уравнений с установленными условиями однозначности должно привести к уравнениям, которые можно использовать в инженерных расчетах. Формулирование упомянутых условий и процедуры интегрирования (или

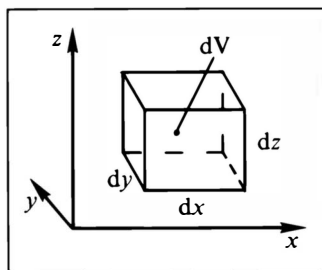


Рис. 1.7. К выводу дифференциальных уравнений переноса: элементарный контур в декартовой системе координат

способы замены этих математических операций при возникновении определенных трудностей) рассматриваются в соответствующих главах курса.

В подходах к выводу уравнений неразрывности и переноса различных субстанций (а для последних — и в конечных выражениях) имеется много общего. Последующий анализ ведется с подчеркиванием этих общих моментов и вместе с тем с указанием (для каждой субстанции) на особенности выводов и полученных закономерностей.

## 1.4. УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ И РАСХОДА

### 1.4.1. Уравнение неразрывности

Запишем закон сохранения массы для неподвижного прямоугольного элементарного параллелепипеда (контур) в движущейся жидкости (рис.1.8; координатные оси в целях упрощения рисунка не показаны) для бесконечно малого промежутка времени  $dt$ . Закон сохранения предполагает отсутствие Источников и Стоков массы внутри контура. Предварительно укажем, что элементарные объемный и массовый потоки жидкости, проходящей *в единицу времени* через элементарное сечение  $df$  нормально к нему, составляют

$$dV = wdf, \quad dG = \rho wdf, \quad (1.14)$$

причем в общем случае плотность  $\rho$  может изменяться во времени и по координатам.

Вдоль оси  $x$  через левую грань  $dydz$  со скоростью  $w_x$  в контур за время  $dt$  *входит* элементарное количество жидкости  $\text{Пр}_x = \rho w_x dydzdt$ , через правую — *уходит*  $\text{У}_x = \left[ \rho w_x + \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} dx \right] dydzdt$ . Для оси  $x$  разность  $+\text{Пр}_x - \text{У}_x$  составляет (после раскрытия скобок и очевидных сокращений)

$$- \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} dx dydzdt, \text{ или } - \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} dVdt. \quad (a)$$

Аналогичные разности  $+\text{Пр}_j - \text{У}_j$  ( $j = y, z$ ) для осей  $y$  и  $z$  запишутся:

$$- \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} dVdt \text{ и } - \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z} dVdt. \quad (б)$$

Соответственно основному балансовому соотношению (1.8) необходимо выразить *накопление* массы в контуре за время  $dt$ .

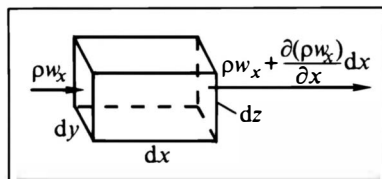


Рис. 1.8. К выводу уравнения неразрывности

Количество массы в объеме  $dV$  в момент  $\tau$  равно  $\rho dV$ . Поскольку  $\rho$  может изменяться по координатам  $(x, y, z)$  и во времени  $(\tau)$ , то накопление массы к моменту времени  $\tau + d\tau$  записывается в частных производных:

$$\text{Нак} = \frac{\partial(\rho dV)}{\partial \tau} d\tau = \frac{\partial \rho}{\partial \tau} dV d\tau. \quad (\text{в})$$

Собирая теперь найденные выше элементы баланса (а), (б) и (в) в ОБС (1.8), получаем после сокращения на  $dV$  и  $d\tau$  **уравнение неразрывности (сплошности)**:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z}, \quad (1.15)$$

или в несколько иной форме:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z} = 0. \quad (1.15')$$

Интегрирование полученного уравнения с конкретными условиями однозначности приводит к закону сохранения массы в интегральной форме.

Применительно к ряду частных случаев общее уравнение (1.15) существенно упрощается.

Для *стационарных* процессов  $\partial \rho / \partial \tau = 0$ , и тогда

$$\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z} = 0. \quad (1.15a)$$

В случае *однонаправленных* течений, скажем вдоль оси  $x$ , будет  $w_y = w_z = 0$ , так что

$$-\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x}, \quad (1.15б)$$

а если такое движение является еще и *стационарным*, то

$$\frac{d(\rho w_x)}{dx} = 0, \quad (1.15в)$$

причем частные производные заменены здесь на обыкновенные, поскольку осталась только одна независимая переменная  $x$ .

В случае *несжимаемой* жидкости (практически — при не слишком больших изменениях давления, когда можно считать  $\rho \approx \text{const}$ ) справедливо  $\partial \rho / \partial t = 0$ ; кроме того,  $\rho$  может быть вынесено из-под знака производной в оставшихся слагаемых уравнения (1.15) и сокращено. Тогда

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0, \quad (1.15г)$$

а для *однонаправленного движения несжимаемой жидкости* — еще проще:

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} = \frac{dw_x}{dx} = 0. \quad (1.15д)$$

Если поток представляет собой *смесь  $N$  компонентов*, то уравнение неразрывности может быть записано не только для всей смеси в форме (1.15), но и для отдельного  $i$ -го компонента ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Для этого вводится понятие о **парциальной плотности** (по существу — о **массообъемной концентрации**,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ) данного компонента:  $\rho_i = dm_i/dV$ , где  $m_i$  — масса  $i$ -го компонента в контуре  $dV$ . В принятых обозначениях уравнение неразрывности в отсутствие Источников и Стоков компонента  $i$  принимает вид

$$-\frac{\partial \rho_i}{\partial t} = \frac{\partial(\rho_i w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_i w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_i w_z)}{\partial z}. \quad (1.15е)$$

Для различных частных случаев уравнение (1.15е) также может быть представлено в упрощенных формах записи.

При наличии *химических реакций* закон сохранения массы  $i$ -го компонента может быть нарушен из-за появления Источников и(или) Стоков этого компонента. Пусть интенсивность его появления (исчезновения) в результате реакции характеризуется приращением количества его молей  $\kappa_{vi}$  — в **единице объема и в**

**единицу времени**; значит, **приращение массы** составит  $\kappa_{vi}M_i$ , где  $M_i$  — молярная масса компонента  $i$  (размерности:  $[\kappa_{vi}] = \text{кмоль}/(\text{м}^3 \cdot \text{с})$ ;  $[M_i] = \text{кг}/\text{кмоль}$ ;  $[\kappa_{vi}M_i] = [\text{кмоль}/(\text{м}^3 \cdot \text{с})] \times \times (\text{кг}/\text{кмоль}) = \text{кг}/(\text{м}^3 \cdot \text{с})$ ). Тогда входящая в ОБС (1.8) разность Ис — Ст для элементарного объема  $dV$  за бесконечно

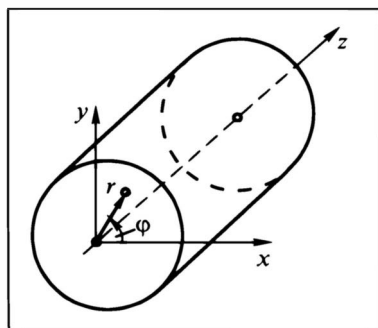


Рис. 1.9. Связь декартовых и цилиндрических координат

малое время  $dt$  запишется как  $\kappa_{vi} M_i dV dt$ . С учетом Источников и Стоков уравнение неразрывности после сокращения на  $dV dt$  (см. вывод уравнения) примет вид

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_i w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_i w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_i w_z)}{\partial z} = \kappa_{vi} M_i. \quad (1.16)$$

Разумеется, при сложении уравнений (1.16) для всех  $N$  компонентов смеси мы приходим к выражению (1.15), поскольку

$$\sum_{i=1}^N \kappa_{vi} M_i = 0, \text{ так что для смеси в целом закон сохранения мас-}$$

сы остается справедливым.

В технологической практике рабочее тело (газ, жидкость и т.п.) часто движется в пространстве цилиндрической конфигурации — трубе, колонне, цилиндрическом аппарате. В этом случае бывает удобной запись уравнения неразрывности в *цилиндрических координатах* (рис.1.9): декартовы координаты  $x$  и  $y$  заменяются на радиальную  $r$  и угловую  $\varphi$ , а координата  $z$  — сохраняется. Связь координат — очевидна:  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $z = z$ .

В результате преобразования координат (ввиду громоздкости оно здесь не приводится) общее уравнение неразрывности типа (1.15') в отсутствие Источников и Стоков массы приобретает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho \cdot r \cdot w_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho w_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z} = 0, \quad (1.15ж)$$

где  $w_r$  и  $w_\varphi$  — радиальная и угловая составляющие скорости.

В случае *несжимаемой* жидкости ( $\rho = \text{const}$ ) первое слагаемое обращается в нуль, а в остальных слагаемых  $\rho$  сокращаются. Тогда

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r \cdot w_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = \frac{1}{r} \left( r \frac{\partial w_r}{\partial r} + w_r \frac{\partial r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial w_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0. \quad (г)$$

После раскрытия скобок и сокращений

$$\frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{w_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0. \quad (1.15з)$$

Из (1.15е) и (1.15ж) нетрудно получить выражения для частных случаев движения жидкости, например для осесимметричного течения, т. е. при  $\partial w_\varphi / \partial \varphi = 0$ .

## 1.4.2. Уравнения расхода

На основе введенных ранее понятий элементарных потоков  $dV$  и  $dG$  получают уравнения расхода для конечных живых сечений и участков аппаратов, трубопроводов. Для нахождения полного *массового* потока в единицу времени через живое сечение  $f$  проинтегрируем второе из выражений (1.14) по сечению  $f$  и используем теорему о среднем:

$$G = \int_f \rho w df = (\rho w)_{\text{ср}} f. \quad (д)$$



Будем в дальнейшем пренебрегать возможными, но весьма малыми изменениями плотности потока в сечении  $f$ ; тогда  $(\rho w)_{\text{ср}} = \rho w_{\text{ср}}$ . В результате из (д) получают **уравнение массового расхода** для любой жидкости (в том числе сжимаемой, т.е. для газа):

$$G = \rho w_{\text{ср}} f = \rho w f, \quad (1.17)$$

причем в правом фрагменте формулы под  $w$  понимают среднюю скорость (индекс "ср" здесь просто опущен).

Если между двумя сечениями, помеченными индексами "1" и "2", нет Прихода и Ухода жидкости (газа, твердого), то в отсутствие Накоплений (для стационарных процессов)

$$G = \rho_1 w_1 f_1 = \rho_2 w_2 f_2; \quad (1.17a)$$

в случае несжимаемых жидкостей это соотношение записывается в форме

$$G = \rho w_1 f_1 = \rho w_2 f_2 \quad (1.176)$$

и может быть использовано также для нестационарных течений.

Заметим, что выражения (1.17) — (1.176) могут быть получены из уравнения неразрывности для однонаправленного движения типа (1.15в) — до сокращения на  $dV = dx dy dz = dx df$ .

Для *несжимаемых жидкостей* (практически для реальных жидкостей, а также приближенно для газов, если перепад давления между сечениями "1" и "2" мал в сравнении с абсолютными давлениями) из выражений (1.17) и (1.176) получаются **уравнения объемного расхода**  $V = G/\rho$ :

$$V = w f. \quad (1.18)$$

При отсутствии Приходов и Уходов жидкости между рассматриваемыми сечениями

$$V = w_1 f_1 = w_2 f_2, \quad (1.18a)$$

причем в силу несжимаемости жидкостей (здесь  $\text{Нак} = 0$ ) формула (1.18a) справедлива также для нестационарных течений.

Из (1.18) и (1.18a) следует, что при постоянном расходе  $V$  увеличение живого сечения потока  $f$  сопровождается понижением его скорости  $w$ .

Выражения типа (1.17), (1.17a), (1.176), (1.18) и (1.18a) широко используются в инженерных расчетах.

Специально подчеркнем, что в технологической практике нередко ситуации с неравномерным во времени движением потока, значит и с изменяющейся во времени скоростью (эта неравномерность может быть специально организована либо обусловлена природой явления). В таких случаях тоже приходится усреднять скорость, но уже во времени: говорят об **осредненных скоростях**. Надо обязательно видеть разницу *в усреднении локальной скорости по живому сечению и в осреднении мгновенной скорости по времени*.

## 1.5. УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИМПУЛЬСА, ТЕПЛОТЫ И ВЕЩЕСТВА

### 1.5.1. Дифференциальное уравнение движения несжимаемой жидкости (перенос импульса)

Перенос импульса (количества движения) детально изучается в главе "Гидравлика". Кардинальная проблема при анализе переноса импульса состоит в определении давления и скорости в интересующей нас точке технологического пространства в произвольный момент времени:

$$p = p(x, y, z, \tau); \quad w = w(x, y, z, \tau). \quad (a)$$

В конкретных задачах гидравлики уравнение переноса импульса используется совместно с уравнениями неразрывности и (или) расхода.

Будем рассматривать контур – элементарный прямоугольный параллелепипед, выделенный в движущейся *несжимаемой* жидкости (рис. 1.10). Как и при выводе уравнения неразрывности, ограничимся вначале изучением ситуации применительно к одной из осей координат (например, оси  $x$ ); полученные закономерности распространим в дальнейшем на течение вдоль остальных осей.

Анализ можно вести для *переноса импульса* и количества движения либо относя все потоки этой субстанции к единице времени, т.е. для *действующих сил*, – результат будет одинаковым. Выберем второй путь: будем выражать соответствующие силы и записывать балансы сил согласно ОБС (1.8), отслеживая одновременно (в целях уяснения физического смысла) и составляющие переноса импульса (количества движения) за единицу времени.

**Нормальные поверхностные силы** (силы давления), действующие вдоль оси  $x$  на левую грань  $dydz$  равны  $p dydz$  (с позиций переноса импульса – это его Приход в контур  $dV$  через левую

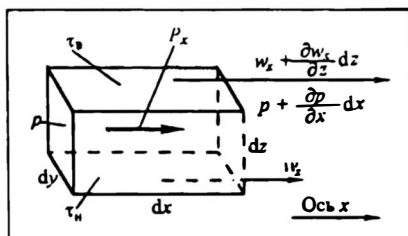


Рис. 1.10. К выводу основного уравнения гидродинамики

грань). Справа, где давление на элементарную грань равно  $p + \frac{\partial p}{\partial x} dx$ , нормальная сила против оси  $x$  запишется:  $(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx) dy dz$  (с позиций переноса импульса — это его Уход из контура  $dV$  через правую грань). Разность этих нормальных сил (в символике ОБС:  $+ Pr_n - U_{x_n}$ ) составляет

$$p dy dz - (p + \frac{\partial p}{\partial x} dx) dy dz, \text{ или } - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz = - \frac{\partial p}{\partial x} dV. \quad (6)$$

**Тангенциальные поверхностные силы** (сдвига, внутреннего трения) рассмотрим сначала для какой-нибудь пары граней, например верхней и нижней (см. рис. 1.8). Вдоль нижней грани  $dx dy$  действует сила  $\tau_n dx dy$ , где  $\tau_n$  — напряжение трения на нижней грани. Эта сила выражает перенос импульса из объема жидкости снизу через грань  $dx dy$  в элементарный контур  $dV$ , *получающий* импульс (это Приход:  $Pr_t$ ). Через верхнюю грань  $dx dy$  контур  $dV$  *теряет* импульс (это Уход:  $U_{x_t}$ ) в жидкостное пространство; в силовом выражении эта потеря импульса записывается как  $\tau_b dx dy$ , где  $\tau_b$  — напряжение трения на верхней грани. Обозначим составляющие скорости по оси  $x$  на

нижней и верхней гранях соответственно  $w_x$  и  $w_x + \frac{\partial w_x}{\partial z} dz$ . Для рассматриваемой пары граней речь идет об изменении скорости  $w_x$  при переходе от нижней грани к верхней, т. е. вдоль оси  $z$ ; ось  $z$  здесь — нормаль к элементарной площадке  $dx dy$ . Выразив теперь  $\tau_n$  и  $\tau_b$  по формуле (1.9), получим силы, действующие на нижнюю и верхнюю грани (соответственно Приход и Уход импульса через упомянутые грани) —

$$\begin{aligned} \tau_n dx dy &= - \mu \frac{\partial w_x}{\partial z} dx dy, \\ \tau_b dx dy &= - \mu \frac{\partial}{\partial z} (w_x + \frac{\partial w_x}{\partial z} dz) dx dy. \end{aligned}$$

Разность этих тангенциальных сил или потоков импульса (по символике ОБС:  $+ Pr' - U_{x'}$ ) составляет — после раскрытия скобок и очевидных сокращений —

$$(\tau_n - \tau_b) dx dy = \mu \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} dx dy dz = \mu \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} dV. \quad (в)$$

Тангенциальные силы **вдоль оси  $x$**  действуют не только на рассмотренную пару граней. В той же манере могут быть про-

анализированы силы, действующие, например, на ближнюю и дальнюю грани  $dx dz$ ; разница в том, что нормаль к этим площадкам направлена по оси  $y$ . Поэтому в результате преобразований, аналогичных тем, что привели к выражению (в), полу-

чится  $\mu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} dV$ . Соответствующий анализ для левой и правой

граней дает  $\mu \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} dV$ . В целом баланс всех тангенциальных сил

вдоль оси  $x$  (в символах ОБС:  $+ Pr - Ux$ ) выражается суммой:

$$\mu \left( \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} \right) dV \equiv \mu \nabla^2 w_x dV, \quad (г)$$

причем оператор Лапласа (лапласиан)  $\nabla^2$  означает сумму вторых производных по осям координат от величины, стоящей под знаком этого оператора (в рассматриваемом случае — от  $w_x$ ).

На массу жидкости плотностью  $\rho$  в объеме  $dV$  могут действовать **внешние массовые силы**; в терминах ОБС (1.8) — это Источники и Стоки. Обозначим  $P_x$  проекцию равнодействующей единичной массовой силы вдоль оси  $x$ . Тогда сила, приложенная по оси  $x$  к массе жидкости в объеме  $dV$  (с позиций переноса — внешний импульс; в символах ОБС:  $+ Ис - Ст$ ), составит

$$P_x \rho dV. \quad (д)$$

Равнодействующая всех рассмотренных выше сил обусловит **Результат** (Рез — в терминах и символах ОБС). По II закону Ньютона он равен произведению массы жидкости в контуре (объеме)  $dV$  на ускорение вдоль оси  $x$ :

$$\rho dV \frac{dw_x}{dt}; \quad (е)$$

связывая систему координат с неподвижным элементарным параллелепипедом, эту величину трактуют в смысле **силы инерции**. С позиций переноса рассматриваемой субстанции Результат надо понимать как Накопление количества движения (Нак) — объемом  $dV$ , массой  $\rho dV$ .

Собирая теперь найденные величины по (б), (г), (д), (е) и следуя ОБС (1.8), приходим после сокращения на  $dV$  к балансовому соотношению для оси  $x$ :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 w_x + P_x \rho = \rho \frac{dw_x}{dt}. \quad (ж)$$

Обычно каждое из слагаемых делят на  $\rho$  и, подставляя

$\mu/\rho \equiv \nu$ , записывают (ж) в виде

$$\frac{dw_x}{dt} = P_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 w_x \quad (1.19)$$

или

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = P_x - \frac{dw_x}{dt} + \nu \nabla^2 w_x. \quad (1.19a)$$

Скорость  $w_x$ , согласно (а), является функцией координат и времени. Поэтому ее полный дифференциал равен

$$dw_x = \frac{\partial w_x}{\partial t} dt + \frac{\partial w_x}{\partial x} dx + \frac{\partial w_x}{\partial y} dy + \frac{\partial w_x}{\partial z} dz.$$

Отсюда, имея в виду, что  $dx/dt = w_x$ ,  $dy/dt = w_y$ ,  $dz/dt = w_z$ , легко найти полную производную  $dw_x/dt$  (ее еще называют **субстанциональной производной\*** и обозначают  $Dw_x/dt$ ), поделив каждое слагаемое на  $dt$ :

$$\frac{dw_x}{dt} = \frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z}. \quad (3)$$

С этим значением производной  $dw_x/dt$  выражение (1.19) принимает вид

$$\frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z} = P_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 w_x. \quad (1.196)$$

Существенно, что при стационарном течении  $\partial w_x/\partial t = 0$ , но  $dw_x/dt$  совсем не обязательно равно нулю, поскольку силы инерции возникают не только при изменении с течением времени скорости в точке — первое слагаемое в правой части выражения (3), но и при ее изменении от точки к точке вдоль оси координат — остальные слагаемые в правой части (3).

Специально напомним, что при выводе уравнений (1.19) на стадии получения соотношений (б), (в), (д) и (е) нас *не должны заботить знаки* разностей типа  $(Pr - Yx)$  или величин  $P_x$  и  $dw_x/dt$ . Согласно правилам математики все эти приращения принимаются **положительными**, а знак скажется (**проявится**) при подстановке пределов интегрирования или условий однозначности (скажем, граничных условий) либо при конкретизации технологической проблемы (где знак, например  $P_x$ , будет просто

---

\* Субстанциональная производная — особый вид *полной* производной. Субстанциональная производная подразумевает, что определяется полная производная при *движении субстанции*; при этом входящие в математические выражения производные от координат по времени имеют смысл скоростей по соответствующим осям координат.

задан условиями задачи). Это положение полностью относится также к анализу переноса теплоты и вещества, изложенному в последующих разделах.

Выражения, аналогичные (1.19 — 1.19б), могут быть получены и для других осей координат. Чаще всего их записывают решенными относительно слагаемых типа  $\partial p / \partial x$ , т.е. в форме (1.19а):

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= P_x - \frac{dw_x}{dt} + \nu \nabla^2 w_x \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= P_y - \frac{dw_y}{dt} + \nu \nabla^2 w_y \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= P_z - \frac{dw_z}{dt} + \nu \nabla^2 w_z \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

Эта система уравнений и представляет собой **основное уравнение гидродинамики (уравнение Навье—Стокса)** для несжимаемой жидкости.

Зафиксируем: в терминах баланса сил (и потоков импульса соответственно) член в левой части выражает **силы давления** (разность Приходов потоков импульса в контур и Уходов из него за счет нормальных сил); первое слагаемое в правой части — **массовые силы** (внутренний Источник импульса в контуре или его Сток — за счет внешних причин); второе — **силы инерции** (Накопление контуром  $dV$  количества движения); третье — **силы внутреннего трения, вязкости** (разность Приходов потоков импульса в контур и Уходов из него — под действием тангенциальных сил). Смысл обыкновенных производных  $dw_x/dt$  и  $dw_z/dt$  раскрывается аналогично тому, как это было сделано для субстанциональной производной вдоль оси  $x$ :  $dw_x/dt$ .

Для **сжимаемых жидкостей (газов)** основное уравнение гидродинамики записывается более сложно; в нем появляются дополнительные слагаемые, учитывающие сжимаемость (с использованием отдельных моментов, связанных с уравнением неразрывности).

### 1.5.2. Дифференциальное уравнение переноса теплоты в движущейся жидкости

Перенос теплоты детально изучается в главах "Основы теплопереноса" и "Теплопередача и теплообмен". Кардинальной проблемой при анализе теплопереноса является определение температуры в интересующей нас точке технологического пространства в произвольный момент времени:

$$t = t(x, y, z, \tau). \quad (\text{и})$$

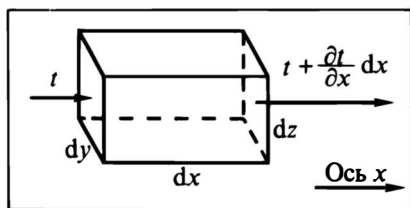


Рис. 1.11. К выводу основного уравнения теплопереноса

Поскольку в общем случае распределение температур связано с закономерностями течения, то в конкретных технологических задачах уравнение теплопереноса используется

совместно с уравнениями неразрывности, расхода и гидродинамики.

Будем рассматривать перенос теплоты за бесконечно малый промежуток времени  $d\tau$  применительно к контуру — элементарному прямоугольному параллелепипеду (рис. 1.11), первоначально — вдоль оси  $x$ .

Приход теплоты в контур за счет **теплопроводности (кондукции)** через левую грань  $dydz$ , где температура равна  $t$ , согласно закону Фурье (1.10) за время  $d\tau$  составляет  $Pr_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} dydzd\tau$ .

Через правую грань  $dydz$ , где температура равна  $t + \frac{\partial t}{\partial x} dx$ , теплота уходит из контура — за время  $d\tau$  в количестве  $U_{x_x} = -\lambda \frac{\partial}{\partial x} (t + \frac{\partial t}{\partial x} dx) dydzd\tau$ .

Разность этих Прихода и Ухода (потоки теплоты на рисунке показаны стрелками) после раскрытия скобок и очевидных сокращений выразится так:

$$+ Pr_x - U_{x_x} = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} dx dy dz d\tau = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} dV d\tau. \quad (\kappa)$$

Аналогичные разности кондуктивных потоков теплоты вдоль осей  $y$  и  $z$  запишутся как

$$+ Pr_y - U_{x_y} = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} dV d\tau \quad \text{и} \quad + Pr_z - U_{x_z} = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} dV d\tau. \quad (\lambda)$$

Общее количество теплоты, воспринятое объемом  $dV$  за время  $d\tau$  путем теплопроводности, будет равно:

$$\begin{aligned} + Pr - U_{x_j} &= \sum_j (+ Pr_j - U_{x_j}) = \\ &= \lambda \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) dV d\tau \equiv \lambda \nabla^2 t dV d\tau, \end{aligned} \quad (\mu)$$

причем  $j = x, y, z$  — направление по осям координат (индекс суммирования); символ  $\nabla^2$  обозначен и использован в разд. 1.5.1.

В общем случае в контуре  $dV$  могут существовать **Источники** и(или) **Стоки** теплоты — за счет экзо- или эндотермической реакции, индукционного нагрева, ряда других причин. Обозначим Источник (Сток) теплоты, отнесенный к единице объема и единице времени, через  $q_v$  (в СИ: Дж/м<sup>3</sup>·с). Тогда для элементарного объема  $dV$  и временного промежутка  $dt$  можно записать алгебраическую сумму:

$$+ И_{с} - С_{т} = q_v dV dt. \quad (н)$$

В результате кондуктивных потоков по (м) и тепловыделения (теплопоглощения) по (н) произойдет **Накопление** теплоты, т.е. нагрев или охлаждение жидкости в элементарном контуре  $dV$  — температура изменится на величину  $dt$ :

$$Нак = c_p dV dt, \quad (о)$$

где  $c$  — теплоемкость рабочего тела в объеме  $dV$ .

Собирая теперь найденные в (м), (н) и (о) элементы баланса в общее соотношение (1.8.), приходим после сокращения на  $dV$  и  $dt$  к следующему выражению:

$$\lambda \nabla^2 t + q_v = c_p \frac{dt}{dt}. \quad (п)$$

Обычно каждое слагаемое делят на  $c_p$  и представляют результат решенным относительно  $dt/dt$ . Тогда после замены  $\lambda/c_p \equiv a$  получается

$$\frac{dt}{dt} = a \nabla^2 t + \frac{q_v}{c_p}. \quad (1.21)$$

Поскольку температура по (и) есть функция координат и времени, то  $dt = \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial t}{\partial x} dx + \frac{\partial t}{\partial y} dy + \frac{\partial t}{\partial z} dz$ . Отсюда, поделив все слагаемые на  $dt$  и выражая производные пути по времени вдоль осей координат в виде соответствующих скоростей (см. раздел 1.5.1.), имеем

$$\frac{dt}{dt} = \frac{\partial t}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z}. \quad (р)$$

С этим значением полной (субстанциональной) производной выражение (1.21), представляющее собой **дифференциальное уравнение переноса теплоты в движущейся жидкости (уравнение Фурье — Кирхгофа)**, принимает вид:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z} = a \nabla^2 t + \frac{q_v}{c_p}. \quad (1.21a)$$



Существенно, что при стационарных течениях  $\partial t / \partial \tau = 0$ , но  $dt/dx$  и другие производные от температуры по осям координат совсем не обязательно равны нулю, поскольку температура может изменяться не только во времени, но и от точки к точке.

Первое слагаемое в левой части уравнения (1.21) характеризует **локальное Накопление теплоты** объемом  $dV$  за счет изменения температуры во времени в рассматриваемой точке. Слагаемые типа  $w_x \partial t / \partial x$  выражают **Накопление теплоты при перемещении** элемента  $dV$  от точки к точке — это перенос субстанции (здесь — теплоты) **путем вынужденной конвекции** (т.е. потоком, движущимся со скоростью  $w_x$  и т.п.). Первое слагаемое в правой части отвечает за перенос теплоты **теплопроводностью**; второе — за **тепловыделение** (теплопоглощение) внутри контура  $dV$ .

### 1.5.3. Дифференциальное уравнение переноса вещества в движущейся жидкости

Общие закономерности переноса вещества детально изучаются в главе "Основы массопереноса", а применительно к отдельным случаям, вариантам, условиям — в конкретных главах, описывающих различные массообменные процессы. Кардинальная задача при анализе переноса вещества состоит в определении концентрации компонента (выбранного нами  $i$ -го или каждого) в какой-либо точке технологического пространства в произвольный момент времени:

$$C_i = C_i(x, y, z, \tau). \quad (a)$$

Поскольку распределение концентраций в общем случае связано с закономерностями течения, а зачастую и теплопереноса, то в конкретных технологических задачах уравнение массопереноса используется совместно с уравнениями неразрывности, расхода, переноса импульса, а при необходимости — и переноса теплоты.

Анализ переноса вещества будем вести по той же канве, что и импульса, и теплоты; в качестве потенциала здесь выступает концентрация интересующего нас компонента смеси  $C_i$ . В целях

согласования с уравнением неразрывности (1.16) будем оперировать (это необходимо) мольно-объемными концентрациями [в СИ: (кмоль компонента  $i$ )/м<sup>3</sup>];

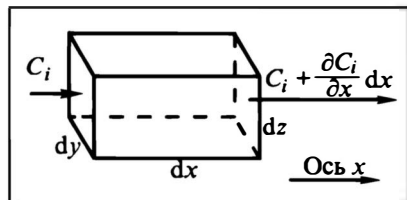


Рис. 1.12. К выводу основного уравнения переноса вещества

связь такой концентрации с массообъемной  $C_i^{м/о}$  (в кг  $i/м^3$ ) очевидна:  $C_i^{м/о} = C_i M_i$ , где  $M_i$  — молярная масса [в СИ  $[M_i] = (\text{кг компонента } i)/(\text{кмоль компонента } i)$ ], это ясно из сопоставления размерностей:

$$\frac{\text{кмоль } i}{\text{м}^3} \cdot \frac{\text{кг } i}{\text{кмоль } i} = \frac{\text{кг } i}{\text{м}^3}.$$

Рассмотрим мольный поток вещества (компонента  $i$ ) вдоль оси  $x$  за счет **диффузии** — за бесконечно малый интервал времени  $dt$  применительно к бесконечно малому объему — контуру  $dV$  (рис. 1.12). Пусть концентрация компонента  $i$  на левой грани  $dydz$  равна  $C_i$ , на правой  $C_i + \frac{\partial C_i}{\partial x} dx$ . Тогда согласно закону Фика (1.11) Приход вещества в объем  $dV$  через левую грань выразится:  $Pr_x = -D \frac{\partial C_i}{\partial x} dydzd\tau$ , а Уход  $U_{x_x} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( C_i + \frac{\partial C_i}{\partial x} dx \right) dydzd\tau$ . Разность этих мольных потоков вещества после раскрытия скобок и сокращений составит

$$+ Pr_x - U_{x_x} = D \frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} dx dydzd\tau = D \frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} dVd\tau. \quad (г)$$

Аналогичные разности потоков того же компонента вдоль осей  $y$  и  $z$  запишутся как

$$+ Pr_y - U_{x_y} = D \frac{\partial^2 C_i}{\partial y^2} dVd\tau \quad \text{и} \quad + Pr_z - U_{x_z} = D \frac{\partial^2 C_i}{\partial z^2} dVd\tau. \quad (y)$$

Тогда общее количество компонента  $i$ , воспринятого за счет диффузии элементарным объемом  $dV$  за время  $d\tau$ , будет равно

$$\begin{aligned} + Pr - U_x &= \sum_j (+ Pr_j - U_{x_j}) = \\ &= D \left( \frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_i}{\partial z^2} \right) dVd\tau \equiv D \nabla^2 C_i dVd\tau, \end{aligned} \quad (ф)$$

причем  $j = x, y, z$  — направления осей координат (индекс суммирования); оператор  $\nabla^2$  обозначен и использован в разделах 1.5.1 и 1.5.2.

В общем случае в элементарном объеме  $dV$  могут существовать **Источники** и (или) **Стоки** компонента  $i$  за счет химических превращений. Эти Источники (Стоки) в молях компонента  $i$ , отнесенные к единице объема и единице времени, были в разд.

1.4 обозначены  $\kappa_{vi}$ . Тогда для объема  $dV$  и временного интервала  $d\tau$  можно записать:

$$+ I_{\text{с}} - C_{\tau} = \kappa_{vi} dV d\tau. \quad (\text{х})$$

В результате диффузии компонента по  $(\phi)$  и его возникновения (исчезновения) по  $(\text{х})$  в элементарном объеме  $dV$  может происходить **Накопление** компонента, т.е. изменение его концентрации — за время  $d\tau$  на величину  $dC_i$ :

$$\text{Нак} = dV dC_i. \quad (\text{ц})$$

Собирая теперь найденные в  $(\phi)$ ,  $(\text{х})$  и  $(\text{ц})$  элементы баланса в общее соотношение (1.8), после сокращения на  $dV$  и  $d\tau$  приходим к следующему выражению:

$$D\nabla^2 C_i + \kappa_{vi} = \frac{dC_i}{d\tau}. \quad (\text{ч})$$

Это выражение обычно записывают решенным относительно  $dC_i/d\tau$ , причем индекс "i" часто опускают, подразумевая, что речь идет об определенном компоненте, концентрация которого  $C \equiv C_i$ :

$$\frac{dC}{d\tau} = D\nabla^2 C + \kappa_v. \quad (1.22)$$

Поскольку  $C$  изменяется по координатам и во времени, то точно так же, как при переносе импульса или теплоты (разд.1.51 и 1.52),

$$\frac{dC}{d\tau} = \frac{\partial C}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial C}{\partial x} + w_y \frac{\partial C}{\partial y} + w_z \frac{\partial C}{\partial z}. \quad (\text{ш})$$

С этим значением полной (субстанциональной) производной выражение (1.22), представляющее собой **дифференциальное уравнение переноса вещества в движущейся жидкости (уравнение Фика)**, принимает вид

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial C}{\partial x} + w_y \frac{\partial C}{\partial y} + w_z \frac{\partial C}{\partial z} = D\nabla^2 C + \kappa_v, \quad (1.22a)$$

причем в случае **стационарных** течений  $\partial C/\partial \tau = 0$ , но совсем не обязательно равны нулю слагаемые типа  $w_x(\partial C/\partial x)$  — в полном соответствии с замечаниями, сделанными в разд. 1.51 и 1.52.

Первое слагаемое в левой части уравнения (1.22) характеризует изменение **локальной** концентрации (**Накопление**) компонента **во времени** в объеме  $dV$ . Слагаемые типа  $w_x(\partial C/\partial x)$  также характеризуют **Накопление** компонента, но в связи с перемещением объема  $dV$  в технологическом пространстве — говорят о переносе вещества путем **вынужденной конвекции**. Первое сла-

гаемое в правой части отвечает за перенос компонента путем диффузии; второе слагаемое — за появление (исчезновение) этого компонента внутри объема  $dV$  в результате химической реакции.

Выражение типа (1.22а) может быть записано и для *массо-объемной концентрации* компонента; для этого следует каждое слагаемое умножить на молярную массу  $M \equiv M_i$  рассматриваемого компонента:

$$\frac{\partial C^{\text{мо}}}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial C^{\text{мо}}}{\partial x} + w_y \frac{\partial C^{\text{мо}}}{\partial y} + w_z \frac{\partial C^{\text{мо}}}{\partial z} = D \nabla^2 C^{\text{мо}} + \kappa_v M_i, \quad (1.22б)$$

причем, как указывалось в разд. 1.4, массообъемная концентрация  $C^{\text{мо}}$  представляет собой парциальную плотность  $i$ -го компонента.

---

**Сходство** полученных выше *математических описаний* процессов переноса импульса, теплоты, вещества указывает на сходство в глобальных *закономерностях и механизме самих процессов*. Проблемы аналогии в переносе различных субстанций затронуты в последующих разделах этой главы, а более подробно — в главах 6 и 10.

## 1.6. МОДИФИКАЦИИ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА

Уравнения переноса (1.19), (1.20), (1.21), (1.22) в разд. 1.5 представлены в *достаточно общем виде* (иногда с ограничениями; скажем, уравнение Навье—Стокса — для несжимаемой жидкости). Применительно к ряду конкретных случаев и условий — эти уравнения могут быть модифицированы; при этом зачастую они упрощаются (иногда — весьма существенно) или становятся удобнее для аналитических решений. Примеры таких упрощений уравнения неразрывности были приведены в разд. 1.4. Продемонстрируем некоторые возможности модификаций уравнений переноса (в основном на примере уравнения Фурье—Кирхгофа).

### 1.6.1. Условия протекания процесса переноса

В случае *стационарных* процессов из приведенных выше уравнений переноса выпадает член, содержащий частную производную по времени:  $\partial w_j / \partial \tau$ ,  $\partial t / \partial \tau$ ,  $\partial C / \partial \tau$ . Тогда принятое в качестве иллюстрирующего примера уравнение (1.21а) запишется так:

$$w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z} = a \nabla^2 t + \frac{q_v}{c\rho}. \quad (1.21б)$$

В отсутствие Источников и Стоков субстанции (внешних массовых сил и импульса; теплоты; вещества) выпадает слагаемое, содержащее соответственно  $P_x$  (либо  $P_y, P_z$ ),  $q_v$ ,  $\kappa_v$ . Тогда уравнение (1.21a) примет вид

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z} = a \nabla^2 t, \quad (1.21b)$$

а в случае *стационарного* процесса — еще проще:

$$w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z} = a \nabla^2 t. \quad (1.21г)$$

Заметим, что при переносе импульса (баланс сил) в уравнении Навье — Стокса (1.20) нередко выпадают слагаемые  $P_j$  лишь по отдельным осям координат  $j = x, y$  либо  $z$ . Так, при рассмотрении течения в поле сил тяжести (пусть она направлена вдоль вертикальной оси  $z$ ) обращаются в нуль величины  $P_x$  и  $P_y$ , а проекция единичной массовой силы на вертикальную ось  $P_z = -g$ , где  $g$  — ускорение свободного падения, знак "минус" отражает противоположное направление оси  $z$  и этой массовой силы.

В процессах с *однонаправленным* перемещением субстанции (скажем, вдоль оси  $x$ ) в уравнениях остаются лишь члены, содержащие скорости и производные вдоль данного направления, поскольку вдоль других осей эти величины обращаются в нуль. Например, для теплопереноса

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial t}{\partial x} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{q_v}{c\rho}. \quad (1.21д)$$

В рассматриваемой ситуации в системе уравнений (1.20) нас будет интересовать лишь первое из них — для оси  $x$ . Выражение (1.21д) в свою очередь упрощается для стационарных процессов ( $\partial t / \partial \tau = 0$ ), при отсутствии Источников и Стоков теплоты ( $q_v = 0$ ) и т. п. Заметим также, что практически вполне возможно *однонаправленное* движение потока рабочего тела (пусть вдоль оси  $x$ , так что  $w_y = w_z = 0$ ), но *кондуктивный перенос теплоты* происходит по разным направлениям; тогда

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial t}{\partial x} = a \nabla^2 t + \frac{q_v}{c\rho}, \quad (1.21e)$$

причем лапласиан здесь, в отличие от (1.21д), сохраняет производные по всем осям координат, не только по  $x$ . Вообще, анализируемое направление движения жидкости (газа и т. п.) не обязательно совпадает с направлением переноса другой субстанции; поэтому в уравнения переноса вполне могут входить слагаемые

(отвечающие, с одной стороны, за конвективный перенос субстанции, а с другой, — за перенос путем трения, теплопроводности, диффузии), содержащие производные *по разным осям координат*.

В случае переноса *в твердых телах* выпадают конвективные составляющие, так как скорости  $w_j$  равны нулю. Тогда

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t + \frac{q_v}{c\rho}. \quad (1.21ж)$$

Разумеется, это уравнение для ряда ситуаций будет выглядеть еще проще:

— *стационарный перенос теплоты* ( $\partial t / \partial \tau = 0$ ):

$$a \nabla^2 t + \frac{q_v}{c\rho} = 0; \quad (1.21жI)$$

— *отсутствие Источников (Стоков) теплоты* ( $q_v = 0$ ):

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t; \quad (1.21жII)$$

— *стационарный теплоперенос в отсутствие Источников и Стоков теплоты* ( $\partial t / \partial \tau = 0$ ,  $q_v = 0$ , возможность сокращения  $a$ ):

$$\nabla^2 t = 0, \quad (1.21жIII)$$

а если при этом анализируется еще и *однонаправленный* перенос теплоты (например, вдоль оси  $x$ ), то совсем просто:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \frac{d^2 t}{d x^2} = 0. \quad (1.21жIV)$$

Рассмотренные примеры, разумеется, не охватывают всего многообразия конкретных случаев, но приведенных иллюстраций вполне достаточно для модификации уравнений переноса — применительно к другим субстанциям и некоторым возможным ситуациям.

### 1.6.2. Различные конфигурации потоков субстанции

Существует иной срез модификации уравнений переноса, связанный с **конфигурацией** потоков субстанции, объекта (технологического аппарата, его рабочей зоны), в которых перемещается субстанция. В расчетно-аналитическом плане проблемы здесь прежде всего связаны с выражением лапласиана, записанного ранее в декартовых координатах:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (a)$$

Использование этих координат удобно в случае плоских течений: движение жидкости в узкой щели, в виде тонких пленок и т. д. Однако при движении жидкости, например, в цилиндрических трубах или кольцевых каналах уравнения переноса при выражении лапласиана по (а) становятся крайне неудобными для решения, но ситуация обычно значительно упрощается при переходе к цилиндрическим координатам.

При решении технологических задач чаще всего наряду с декартовыми приходится использовать **цилиндрические** и **сферические** координаты. В первом случае — это в равной мере относится к течениям в цилиндрических аппаратах и трубах и к переносу субстанции в твердых телах цилиндрической формы, во втором случае — это чаще всего перенос субстанции в сферических телах. Переход от декартовых координат к цилиндрическим и сферическим производится по известным из математики правилам преобразования координат. Ниже эти весьма громоздкие преобразования опущены, приводятся результирующие выражения для *лапласианов* (и других слагаемых уравнений переноса, если в этом есть необходимость).

Связь **цилиндрических** координат — **радиальной**  $r$ , **полярной**  $\varphi$  и **продольной** (направим ее вдоль оси  $z$ ) с декартовыми дана в разд. 1.4:  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $z = z$  (см. рис.1.9).

Лапласиан величин, имеющих *скалярную* природу (температуры, концентрации), записывается в виде

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1.23)$$

В частности, для переноса теплоты:

$$\nabla^2 t \equiv \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}. \quad (1.23a)$$

Практический интерес зачастую представляют следующие варианты процессов переноса:

— *симметричный* перенос субстанции; в рассматриваемом примере — симметричный теплообмен, когда  $\partial^2 t / \partial \varphi^2 = 0$ , т.е. нет изменения потенциала (здесь — температуры) по полярному углу: на одинаковых радиусах — одинаковые температуры;

— перенос субстанции в рабочих зонах *большой протяженности* по оси  $z$ ; тогда интенсивность переноса субстанции (здесь — теплоты путем теплопроводности) вдоль этой оси может оказаться существенно ниже, чем в радиальном направлении — можно принять  $\partial^2 t / \partial z^2 \rightarrow 0$ .

Трансформация выражения (1.23a) для каждого из этих случаев затруднений не вызывает. Если, например, реализуются

сразу оба условия (а) и (б), то

$$\nabla^2 t \equiv \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r}. \quad (1.236)$$

При переходе к цилиндрическим координатам изменения затрагивают не только лапласиан, но и *конвективные* составляющие переноса. Например, в часто встречающемся и достаточно общем случае осесимметричного потока (жидкости, газа) и несимметричного переноса теплоты (скажем, вследствие неравномерного обогрева стенок канала) уравнение теплопереноса имеет вид

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + w_r \frac{\partial t}{\partial r} + w_z \frac{\partial t}{\partial z} = a \left( \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{c\rho}, \quad (1.23в)$$

причем индексы при скоростях отвечают координатным осям.

Для величин, имеющих *векторную* природу (в курсе ПАХТ речь идет о скорости и ее составляющих по осям координат), выражение для лапласиана получается сложнее\*; одновременно изменяются и выражения для конвективных составляющих переноса. Обозначим скорости вдоль осей цилиндрических координат  $r$ ,  $\varphi$  и  $z$  соответственно  $w_r$ ,  $w_\varphi$ ,  $w_z$ ; другие слагаемые с этими индексами также относятся к соответствующим осям координат. Наиболее актуально в практическом аспекте течение вдоль продольной оси  $z$ . Для *несжимаемой жидкости* уравнение Навье—Стокса в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = P_z - \left[ \frac{\partial w_z}{\partial \tau} + w_r \frac{\partial w_z}{\partial r} + \frac{w_\varphi}{r} \frac{\partial w_z}{\partial \varphi} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} \right] + \\ + \nu \left\{ \frac{\partial^2 w_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} \right\}. \quad (1.24)$$

Здесь в квадратных скобках стоит полная (субстанциональная) производная  $dw_z/d\tau$ , а в фигурных — лапласиан скорости  $w_z$ . При симметричном относительно оси  $z$  течении становятся равными нулю слагаемые, содержащие производные от скорости  $w_z$  по координатному углу  $\varphi$ , и выражение (1.24) упрощается.

Можно видеть, что выражения лапласиана для *продольной оси* (заметим, конвективной составляющей — также) в случае величин скалярной и векторной природы совпадают. Иначе обстоит дело с уравнениями относительно осей  $r$  и  $\varphi$ . Приведем в качестве примера запись уравнения Навье—Стокса для движения в направлении

---

\* См., например, [1, 3].



угла  $\varphi$  (это актуально для закрученных потоков):

$$\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = P_{\varphi} - \left[ \frac{\partial w_{\varphi}}{\partial \tau} + w_r \frac{\partial w_{\varphi}}{\partial r} + \frac{w_{\varphi}}{r} \frac{\partial w_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{w_{\varphi} w_r}{r} + w_z \frac{\partial w_{\varphi}}{\partial z} \right] + \\ + v \left\{ \frac{\partial^2 w_{\varphi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_{\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_{\varphi}}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial w_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 w_{\varphi}}{\partial z^2} - \frac{w_{\varphi}}{r^2} \right\}. \quad (1.25)$$

Как и ранее, в квадратных скобках здесь субстанциональная производная, но уже от скорости  $w_{\varphi}$ , а в фигурных — ее лапласиан. При отсутствии движения жидкости (газа) вдоль радиальной координаты (это справедливо в большинстве практических случаев, если нет Источников и Стоков жидкости, а стенки канала непроницаемы для нее) и при осесимметричном течении, когда  $\partial w_{\varphi}/\partial \varphi$  и  $w_r$  равны нулю, уравнение (1.25) существенно упрощается:

$$\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = P_{\varphi} - \left[ \frac{\partial w_{\varphi}}{\partial \tau} + w_z \frac{\partial w_{\varphi}}{\partial z} \right] + v \left\{ \frac{\partial^2 w_{\varphi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_{\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_{\varphi}}{\partial z^2} - \frac{w_{\varphi}}{r^2} \right\}. \quad (1.25a)$$

Здесь, в отличие от записи для скалярных величин, в лапласиан входит слагаемое  $w_{\varphi}/r^2$ .

При переносе субстанции в шарообразных телах или технологических пространствах используют **сферические** координаты — **радиальную**  $r$  и характерные угловые координаты, широко используемые в географии, — **долготу**  $\varphi$  и **широту**  $\psi$ . Переход от декартовых координат к сферическим производится на основе соотношений  $x = r \sin \varphi \sin \psi$ ,  $y = r \cos \varphi \sin \psi$ ,  $z = r \cos \psi$ .

Технологические задачи чаще всего требуют установления температурных или концентрационных полей (при переносе теплоты или вещества соответственно) в сферическом пространстве — здесь потенциалы (температуры, концентрации) имеют *скалярную* природу. Для этого случая преобразование координат дает

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial (\cos \psi)} \left[ \sin^2 \psi \frac{\partial}{\partial (\cos \varphi)} \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \psi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (1.26)$$

Это громоздкое выражение существенно упрощается для *симметричного* (относительно центра сферы) переноса, когда производные потенциала по координатным углам  $\varphi$  и  $\psi$  обращаются в нуль:

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}; \quad (1.26a)$$

например, для симметричного переноса теплоты в сфере

$$\nabla^2 t \equiv \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial t}{\partial r}. \quad (1.26b)$$

Для величин *векторной* природы выражения лапласиана получаются весьма громоздкими и здесь не приводятся. Эти случаи могут представлять практиче-

ский интерес, например, при изучении движения жидкости в сферической капле или пузыре.

Особо подчеркнем, что при выражении уравнений в цилиндрических и сферических координатах нередко (симметричный перенос, несущественное изменение потенциала вдоль продольной оси) удастся свести задачу к **одномерной** (однонаправленный перенос). Тогда актуальным является установление закономерности изменения потенциала (температуры, концентрации) только вдоль радиальной координаты — см. уравнения (1.236), (1.266). Это существенно упрощает математическую формулировку задачи и само решение.

### 1.6.3. Анизотропные среды

До сих пор анализировались процессы переноса в средах *изотропных в смысле постоянства коэффициентов пропорциональности*  $\mu(v)$ ,  $\lambda(a)$ ,  $D$  — в законах (1.9), (1.10) и (1.11), связывающих удельные потоки субстанции с градиентами потенциалов, в самих уравнениях переноса типа (1.20) — (1.22). В этих случаях рассматриваемые соотношения являются **линейными**, что облегчает (иногда жестче: делает возможным) их аналитическое решение. В случае **анизотропных сред** возникают существенные осложнения как в формулировании задач и записи уравнений переноса, так и (особенно) в их решении.

Наиболее простыми являются случаи, когда упомянутые коэффициенты различаются только по *направлениям осей координат*, но не изменяются от точки к точке вдоль осей (физически — не зависят от уровня потенциала субстанции, например температуры или концентрации). Здесь нужно оперировать (скажем, при переносе теплоты) не единым коэффициентом теплопроводности, а коэффициентами, специфичными в направлении осей — декартовых  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$ ,  $\lambda_z$  или цилиндрических

$\lambda_r$ ,  $\lambda_\phi$ ,  $\lambda_z$  и т.п. Тогда, очевидно, вместо  $a \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right)$  в уравнение (1.21) должен входить фрагмент

$$a_x \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + a_y \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + a_z \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}. \quad (6)$$

Здесь усложнение уравнения не сопровождается нарушением его линейности. Однако на практике нередко встречаются технологические ситуации, когда упомянутые выше коэффициенты *изменяются от точки к точке и во времени*, поскольку физически зависят от изменяющегося потенциала субстанции. Так,  $\lambda$  и

$a$  могут зависеть от температуры  $t$ ; при небольших ее изменениях этой зависимостью пренебрегают и оперируют "постоянными" (*средними*) значениями  $\lambda$  и  $a$  — так зачастую и делают при анализе процессов теплопереноса; для больших изменений (диапазонов) температур игнорирование изменения  $\lambda$  и  $a$  с температурой приводит к ошибочным результатам.

При наличии существенной зависимости  $\lambda$  от  $t$  надо в ходе анализа теплопереноса (разд. 1.5.2; рис. 1.9) учитывать приращение вдоль оси  $x$  не только температуры, но и всего произведения  $\lambda \frac{\partial t}{\partial x}$ , так как изменяются одновременно  $t$  и  $\lambda$ . Иначе говоря, кондуктивный поток теплоты через *правую* грань  $dydz$  за время  $dt$  неправомерно выражать в виде  $\lambda \frac{\partial}{\partial x} \left( t + \frac{\partial t}{\partial x} dx \right) dydzdt$ ;

к потоку теплоты через *левую* грань  $-\lambda \frac{\partial t}{\partial x} dydzdt$  надо добавить

приращение  $\frac{\partial}{\partial x} \left[ -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} dx \right] dydzdt$ . Тогда разность кондуктивных

тепловых потоков вдоль оси  $x$  составит

$$\begin{aligned} + \text{Пр}_x - \text{У}_{x_x} &= -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} dydzdt - \left[ -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} dx \right) \right] dydzdt = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) dydzdt = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) dVdt. \end{aligned} \quad (\text{в})$$

После деления на  $dV$  и  $dt$  вместо первого слагаемого в лапласиане  $\lambda \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$  будет стоять более сложное — **нелинейное** — выражение:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right); \quad (\text{г})$$

аналогичные выражения будут записаны и для других осей координат. Решения таких уравнений будут существенно затруднены, так как надо знать связь  $\lambda$  с  $t$  и суметь аналитически разрешить уравнение, содержащее такую связь.

Совершенно очевидно, что при  $\lambda = \text{const}$  нелинейный фрагмент (г) переходит в линейный  $\lambda \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$ , характерный для записи  $\nabla^2 t$ .

Практически при решении задач теплопереноса весьма часто  $\lambda$  и  $a$  можно считать не зависящими от температуры. Но вот при переносе импульса в движущейся среде встречаются ситуации, когда пренебрегать нелинейностью нельзя: значения  $\mu$  и  $\nu$  могут существенно зависеть от градиентов скоростей. Это происходит, когда нарушается связь  $\tau$  и  $\partial w / \partial \eta$ , заданная формулой Ньютона: либо  $\mu$  не является постоянной величиной из-за происходящих в жидкости структурных деформаций, так что  $\mu$  зависит от градиента скоростей, либо осуществляется намеренная подмена задачи, когда нелинейные эффекты вихреобразования в жидкости выражают в терминах и символах нормального переноса импульса, т.е. в манере формулы (1.9). Такие случаи будут освещены в главе "Гидравлика". При переносе вещества коэффициенты диффузии  $D$  также нередко зависят от уровня концентраций  $C$ . С этим встречаются, например, при массопереносе в твердых телах (процессы адсорбции, сушки), когда с изменением концентрации вещества в твердом теле изменяются скоростные характеристики диффузии, а иногда и сам механизм массопереноса (по крайней мере, изменяется вклад различных механизмов в перенос вещества). Тогда вместо

фрагмента  $D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$  в уравнение будет входить слагаемое  $\frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial C}{\partial x} \right)$ ; аналогич-

ные замены надо будет сделать и для осей  $y$  и  $z$ . В целом уравнение переноса получится более сложным и возникнут уже упомянутые затруднения: надо будет знать (установить) зависимость  $D$  от  $C$ ; надо суметь разрешить усложненное дифференциальное уравнение. Чаще всего в таких ситуациях (в равной мере при переносе импульса, теплоты, отдельного компонента) приходится привлекать численные методы.

## 1.7. УСЛОВИЯ ОДНОЗНАЧНОСТИ

При решении основных уравнений переноса — типа (1.20) — (1.22), а также ряда других, менее общих дифференциальных уравнений, встречающихся в курсе ПАХТ, необходимо отыскать постоянные интегрирования (или установить пределы интегрирования), дабы полученное в общем виде решение конкретизировать применительно к определенному интересующему нас технологическому процессу. С этой целью должны быть зафиксированы **условия однозначности**, выделяющие конкретное решение из более общего, записанного для группы сходных процессов. В широком смысле к условиям однозначности относят физические свойства рабочих тел (среды и др.), конфигурацию и размеры рабочей зоны аппарата. Без этого не удастся сформулировать начальное и граничные условия.

В случае *нестационарных* (периодических) процессов в качестве одного из условий однозначности используют **начальное условие** (НУ), фиксирующее ситуацию в начальный момент времени ( $\tau = 0$ ) — до начала процесса. Так, могут быть заданы начальная температура или же начальное распределение темпе-

ратур в теле, в технологическом пространстве (если исходные температуры в разных точках различны), начальная концентрация, начальный уровень жидкости и т.п.

В случае *стационарных* (непрерывных) процессов начальное условие, естественно, не задается, поскольку ситуация во времени не изменяется. Уменьшение числа условий однозначности на единицу (по сравнению с периодическим процессом) не ведет к потерям в математических решениях, поскольку отвечает уменьшению на единицу числа переменных: отсутствуют частные (в ряде задач — обыкновенные) производные по времени.

Наличие в уравнениях переноса и других дифференциальных уравнениях пространственных изменений (они отражены производными различных порядков по пространственным координатам) приводит к необходимости установления **граничных условий** (ГУ), т.е. ситуации на границе рабочей зоны, технологического аппарата.

Так, при движении сплошной среды в канале общепринятой является "*концепция прилипания*", согласно которой скорость среды относительно поверхности в точках контакта с ней равна нулю. Другой пример: при записи уравнений движения нормальная составляющая скорости среды на границе с любой непроницаемой для нее поверхностью тоже равна нулю. В случае теплообмена в качестве граничного условия может, например, быть задана температура (или распределение температур), поддерживаемая на границе тела, рабочей зоны. В случае массообмена при течении среды в канале поток вещества на границе со стенками канала по нормали к ним также равен нулю (если, конечно, стенки непроницаемы для вещества и не вступают с ним в химическую реакцию), а вот в случае теплопереноса тепловой поток вполне возможен и, как правило, существует (кстати, его интенсивность тоже может быть задана в качестве граничного условия, если эту интенсивность возможно зафиксировать — например, в случае регулируемого электрообогрева).

В самом общем плане используется следующая **классификация** граничных условий (в качестве примера ниже приводится терминология и символика переноса *теплоты* как наиболее наглядная).

**ГУ I рода** — задано *распределение потенциалов субстанции на границе* тела, рабочей зоны — постоянное или изменяющееся во времени (например, распределение температур на границе тела). В простейшем случае распределение потенциала на границе не изменяется во времени и однородно (например, температура одинакова на поверхности тела, на границах рабочей зоны) — тогда задача решается наиболее просто.

**ГУ II рода** — задано *распределение удельных потоков субстанции* (либо постоянный удельный поток) *через границу* тела, рабочей зоны [например, величина  $q$  по (1.10) на границе тела].

**ГУ III рода** — заданы *распределение потенциала субстанции* (либо постоянное его значение) *в среде*, окружающей тело, рабочую зону (скажем, температура среды вокруг тела) и *коэффициент обмена* (коэффициент теплоотдачи  $\alpha$ ) тела со средой.

**ГУ IV рода** — задано распределение удельных потоков субстанции (либо постоянный ее поток) на границе двух соприкасающихся тел — твердых, жидких, твердого и жидкого или газообразного и т.д. [например, величина  $q$  по (1.10) с разными значениями  $\lambda$  по разные стороны границы раздела — соответственно различиям в свойствах этих тел].

Наконец, возможны условия (таковы свойства тела или специфика рабочей зоны аппарата), при которых *не существует градиента* потенциала субстанции в теле, рабочей зоне: в этом случае говорят о **безградиентном** переносе субстанции. Например, при отсутствии температурного градиента температура тела будет одинакова во всех его точках в каждый момент времени, хотя, разумеется, она может в периодическом процессе изменяться во времени, а в непрерывном процессе возможен подвод или отвод теплоты.

Заметим, что формулирование начальных и граничных условий необходимо не только для решения дифференциальных уравнений, но в ряде случаев и при описании технологических процессов, когда составляющие уравнений конечны.

Формулирование условий однозначности — весьма ответственная процедура при математическом описании технологических процессов. Зачастую именно от правильности представлений об условиях однозначности — в особенности о граничных условиях — зависит адекватность модели реальному объекту. Особые трудности нередко возникают при оценке технологической ситуации как раз на границах объекта — с ограничивающей его поверхностью, с окружающей средой и т.п.

Более детально НУ и ГУ различных видов будут рассмотрены и использованы в общих главах "Гидравлика", "Основы теплопереноса", "Теплопередача и теплообмен", "Основы массопереноса", а также в ряде других глав — для решения конкретных научных и технологических задач.

## 1.8. ФИЗИЧЕСКОЕ ПОДОБИЕ

### 1.8.1. Обобщенные переменные

Теоретические построения могут быть широко и последовательно использованы в технологической практике чаще всего лишь при условии представления их в форме количественных соотношений. Различные возможности установления таких соотношений показаны в разд.1.3.3. При этом многообразие связей между свойствами объектов и параметрами процессов, осложненное часто недостаточным проникновением в механизм

происходящих явлений, приводит к существенным затруднениям в установлении количественных закономерностей, иногда — к получению весьма громоздких расчетных соотношений.

Здесь следует указать на разрыв в уровне ряда технологических задач и в возможностях аналитических решений уравнений (первоначально зачастую достаточно точных). Возникающие трудности вынуждают идти на упрощения (самых уравнений и условий однозначности), а это нередко приводит к потере точности решений. Численные методы могут быть свободны от этого недостатка, но они привязаны к конкретным условиям процесса, ограничены принятым диапазоном изменения переменных; кроме того, они не обходят внутренних связей явления, процесса — такова цена, уплачиваемая нами за их использование. Существуют попытки снизить отмеченные недостатки, получая сначала численные решения теоретических уравнений в достаточно широких диапазонах изменения переменных (условий), а затем — подбирая приближенные уравнения связи; это по существу полуэмпирический метод разработки расчетных соотношений. Разумеется, при большом числе переменных реализация этого метода отличается высокой трудоемкостью, причем прогнозируемость получаемых расчетных соотношений не всегда может быть гарантирована.

К успеху в создавшейся проблемной ситуации может привести переход к обобщенным переменным, когда натуральные переменные (их число зачастую достаточно велико) объединяют в существенно меньшее число **безразмерных комплексов**, имеющих определенный физический смысл. В результате устанавливаются связи не между натуральными переменными, а между обобщающими комплексами. Расчетные соотношения в обобщенных переменных обладают следующими особенностями:

- выглядят менее громоздко (более компактно), нежели соотношения, использующие натуральные (размерные) переменные;

- оказываются полезными на тех стадиях исследования явления, процесса, пока задачу не удастся решить строгими аналитическими методами;

- позволяют представить в лаконичной форме строгие аналитические решения;

- позволяют вести расчеты и интерпретировать их результаты в любой системе единиц, поскольку численные значения безразмерных комплексов не зависят от выбранной системы единиц.

Возможность перехода к обобщенным переменным обусловлена тем, что влияние отдельных переменных (факторов) в технологическом процессе проявляется *не порознь, а совместно*, поэтому и рассматривать их влияние на процесс надо *не раздельно, а в совокупности*. Использование обобщенных переменных, каждая из которых включает несколько натуральных, повышает общность описания процесса, поскольку одно значение обобщенной переменной может быть реализовано при многих сочетаниях численных значений входящих в него натуральных пере-

менных. Отсюда следует, что полученные безразмерные комплексы могут характеризовать *не единичное* явление или процесс, а *группу сходных* явлений и процессов, для которых такие комплексы имеют *одинаковые численные значения* — это положение лежит в основе понятия о **физическом подобии**.

Существуют различные пути формирования безразмерных обобщенных комплексов. Наиболее обоснованный — на базе аналитических выражений, описывающих процесс (в том числе — в дифференциальной форме). Другой путь имеет феноменологическое происхождение — здесь исходят из общих представлений о факторах, влияющих на протекание процесса, и о его закономерностях. При этом действуют на чисто интуитивной основе либо используют теорию размерностей (см. разд. 1.1.4), формируя перечень переменных также интуитивно. Естественно, в обоих последних случаях обоснованность получаемых безразмерных комплексов существенно ниже, чем установленных на основе моделей, представлений о механизме процесса, его теоретического описания. В ряде случаев новая обобщенная переменная может быть получена путем комбинации уже известных.

После формирования обобщенных переменных необходимо установить между ними количественные связи, позволяющие вести инженерные расчеты с целью определения искомых натуральных переменных, входящих в безразмерные комплексы.

## 1.8.2. Геометрическое и физическое подобие.

### Масштабные преобразования.

#### Критерии подобия

Как указано выше, математические описания, представленные в обобщенных переменных, охватывают группы сходных объектов, явлений, процессов — их называют **подобными**. Понятие геометрического подобия (фигур, тел) введено в средней школе. Но термин "подобие" в термодинамике, физике, химии, технологии имеет более широкое толкование. В курсе ПАХТ рассматривается и используется **физическое подобие** применительно к переносу различных субстанций для очень широкого круга задач — от общетеоретических описаний до прикладных расчетных формул.

Приведем определение физически подобных явлений и проиллюстрируем его на примере течения жидкостей.

*Два физических явления подобны, если в сходственных точках геометрически подобных систем одноименные характеристики различаются только постоянными коэффициентами (множителями подобия). Математические описания подобных систем идентичны.*



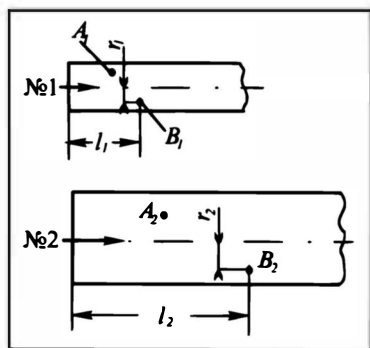


Рис. 1.13. Подобные течения: модель (№ 1) и образец (№ 2)

Пусть имеются два геометрически подобных канала (рис. 1.13) — малого (его обычно называют "модель") и большого ("образец") размеров; в этих каналах текут жидкости с разными свойствами (плотность, вязкость, теплоемкость и т. п.). Выберем в малом (система 1) и большом (система 2) каналах две пары сходственных точек  $A_1$  и  $A_2$ ,  $B_1$  и  $B_2$ , причем для каждой пары характерно свое геометрическое соответствие типа  $r_1/l_1 = r_2/l_2$ . Отношение  $r_1/r_2 = l_1/l_2 = \dots = m_r$  представляет собой множитель геометрического подобия, постоянный для любой пары сходственных точек в рассматриваемых каналах. По определению физического подобия как для пары точек  $A_1$  и  $A_2$ , так и для  $B_1$  и  $B_2$  (вообще — для любой пары сходственных точек в модели и образце) характерны равенства

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = m_\rho; \quad \frac{\mu_1}{\mu_2} = m_\mu; \quad \frac{c_1}{c_2} = m_c; \quad \frac{p_1}{p_2} = m_p; \quad \frac{w_1}{w_2} = m_w \text{ и т. д., (a)}$$

причем  $m_i$  — множители подобия, разные для разных характеристик, но одинаковые в пределах одной характеристики для каждой пары сходственных точек. Иначе говоря, значения, скажем, вязкостей  $\mu_1$  и  $\mu_2$  или скоростей  $w_1$  и  $w_2$  могут быть разными в сходственных точках модели и образца, но численные значения отношений  $\mu_1/\mu_2$  или  $w_1/w_2$  для всех пар сходственных точек ( $A_1$  и  $A_2$ ,  $B_1$  и  $B_2$  и др.) в модели и образце — одни и те же:  $m_\mu$ ,  $m_w$  и т. д. (разумеется, в общем случае  $m_\mu \neq m_w \neq \dots$ ). При переходе от одной пары сходственных точек к другой значения  $m_\mu$ ,  $m_w$ , ... не изменяются. В этом смысле каждый множитель подобия выступает в качестве масштабной характеристики соответствующей физической величины.

Понятие о множителях подобия служит основой получения обобщенных переменных. Путь их формирования с помощью таких множителей именуется *масштабными преобразованиями*. Продемонстрируем поначалу получение одной из обобщенных переменных на весьма простом примере уравнений неразрывности (1.15).

Запишем эти уравнения для двух подобных течений, отмечая их принадлежность к модели либо образцу индексами 1 и 2:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \tau_1} + \frac{\partial (\rho_1 w_1)}{\partial x_1} + \dots = 0, \quad 1) \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial \tau_2} + \frac{\partial (\rho_2 w_2)}{\partial x_2} + \dots = 0; \quad (2)$$

остальные слагаемые в левой части здесь опущены, поскольку по своей структуре они совпадают со вторыми слагаемыми.

Применим к (1) и (2) масштабные преобразования:

$$\rho_1 = m_\rho \rho_2; \quad \tau_1 = m_\tau \tau_2; \quad w_1 = m_w w_2; \quad x_1 = m_l x_2, \quad (б)$$

причем множитель подобия для координат обозначен  $m_l$  — он *общий* для всех координат (в том числе  $y_1$  и  $y_2$ ,  $z_1$  и  $z_2$ ) и линейных размеров  $l_{1,2}$ .

Подставим теперь в уравнение (1) значение  $\rho_1 = m_\rho \rho_2$ , а также всех других параметров процесса в *модели*, выражая их через соответствующие **множители подобия** и параметры процесса в *образце*. Тогда, имея в виду, что постоянные множители могут быть вынесены за знаки производных, получим новую запись *для модели*:

$$\frac{m_\rho}{m_\tau} \frac{\partial \rho_2}{\partial \tau_2} + \frac{m_\rho m_w}{m_l} \frac{\partial (\rho_2 w_2)}{\partial x_2} + \dots = 0. \quad (1')$$

Обращаем внимание на то, что (1') *описывает систему 1* (модель), но с множителями подобия и в *символах системы 2* (образца).

Согласно определению физического подобия, уравнения (1') и (2) для систем 1 и 2 должны быть идентичны. Это возможно,

если комплексы, содержащие множители подобия, —  $\frac{m_\rho}{m_\tau}$  и

$\frac{m_\rho m_w}{m_l}$  — *сокращаются*, а возможность сокращения этих ком-

плексов означает их равенство:

$$\frac{m_\rho}{m_\tau} = \frac{m_\rho m_w}{m_l}. \quad (в)$$

Разумеется, в данном примере множитель  $m_\rho$  можно сократить:

$$\frac{1}{m_\tau} = \frac{m_w}{m_l}. \quad (г)$$

Теперь значения множителей подобия по (а), (б) —  $m_\tau = \tau_1/\tau_2$ ,  $m_w = w_1/w_2$ ,  $m_l = l_1/l_2$  — подставим в выражение (г):

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{w_1 l_2}{w_2 l_1}. \quad (д)$$

Собирая величины с одинаковыми индексами (т.е. относящиеся к каждой из систем) в разные части равенства, находим

$$\frac{w_1 \tau_1}{l_1} = \frac{w_2 \tau_2}{l_2} = \frac{w \tau}{l} = \text{idem}, \quad (е)$$

причем последний комплекс не снабжен индексом, что означает справедливость рассматриваемого равенства (одинаковые чис-

ленные значения полученного комплекса  $w\tau/l$  для всех подобных течений. Этот комплекс, как и другие обобщенные переменные, безразмерен.

Совпадение численного значения безразмерного комплекса (в рассмотренном примере —  $w\tau/l$ ), или в других ситуациях — нескольких комплексов, является *необходимым и достаточным условием подобия* группы систем, объектов, течений, процессов. Комплекс  $w\tau/l$  называют **критерием гомохронности** и обозначают символом  $No$ . Чаще обобщенным безразмерным комплексам присваивают фамилии крупных ученых, обозначая комплексы первыми двумя буквами фамилий этих ученых.

Физический смысл комплекса  $No \equiv w\tau/l$  ясен из предпосылок анализа: сравнивались (см. вывод уравнения неразрывности) два конкурирующих эффекта — вынужденный перенос массы жидкости (под действием перепада давления, разности уровней и т. п.) и ее накопление в выделенном объеме. Специально подчеркнем, что численное значение безразмерного комплекса (здесь  $No$ ; однако замечание относится к любой обобщенной переменной) *не есть прямое отношение конкурирующих эффектов, факторов*. Это их *соотношение* (т. е. отношение в каком-то масштабе; говорят: "масштаб отношений"), поскольку все постоянные коэффициенты, выражающие связи количественно, в комплексах, как правило, опускаются. Можно лишь утверждать, что при увеличении комплекса возрастает влияние фактора, стоящего в числителе (для  $No$  — переноса массы за счет вынужденной конвекции), а при уменьшении комплекса — фактора, стоящего в знаменателе (для  $No$  — накопления массы во времени). В частности, для стационарных процессов, где отсутствует накопление массы в рабочей зоне, критерий  $No$  вырождается, его численное значение стремится к бесконечности.

Конкретизация значения обобщенной переменной, при которой тот или иной эффект (фактор) становится доминирующим, обусловлена постановкой конкретной задачи; иногда это значение устанавливается экспериментально.

Метод масштабных преобразований может быть реализован в *упрощенной* форме, что, конечно, приводит к тем же результатам. Будем вести *сопоставление* (его принято обозначать символом  $\circ - \bullet$ ) конкурирующих эффектов, не принимая во внимание операцию дифференцирования, поскольку масштабные множители безразличны к этой операции. Тогда сопоставление эффектов накопления массы и ее продольного конвективного переноса изобразится в форме

$$\frac{\rho}{\tau} \circ - \bullet \frac{\rho w}{l}. \quad (\text{ж})$$

Сокращая на  $\rho$  и собирая все величины в одной части равенства, сразу получим критерий гомохронности; для всех по-

добных течений он в сходственных точках имеет одинаковое значение:

$$\frac{w\tau}{l} \equiv \text{Ho} = \text{idem.} \quad (3)$$

В целях экономии места и времени при последующем изложении курса, как правило, используется упрощенный метод масштабных преобразований.

В тех случаях, когда безразмерные комплексы, определяющие протекание процесса, *заданы* по условию технологической задачи, их обычно называют **критериями подобия**. Комплексы, содержащие *текущие* значения переменной (часто — *искомые* значения), принято называть **безразмерными числами**. Заметим, что в зависимости от постановки технологической задачи одна и та же обобщенная переменная может выступать в роли критерия или числа.

Нередко приходится иметь дело с безразмерными переменными, записанными в виде отношения *одноименных* величин, например  $x/l$ , где  $x$  — координата, а  $l$  — основной (характерный, определяющий) линейный размер, или  $C/C_0$ , где  $C$  — текущая, а  $C_0$  — начальная концентрация. Такие параметрические безразмерные переменные в силу их простоты в сравнении с комплексами называют **симплексами**. Заметим, что с помощью масштабных преобразований не всегда удается в полной мере выявить симплексы, влияющие на процесс.

При установлении понятия физического подобия говорилось о соблюдении *геометрического* подобия. Для многих технологических задач полное геометрическое подобие не является необходимым — достаточно *приближенного*. Здесь две главные причины. Первая обусловлена разумной точностью инженерных решений: в ряде задач отказ от строгого геометрического подобия не приводит к существенным погрешностям, точность остается практически приемлемой. В основе второй причины лежит достаточно очевидный (и экспериментально подтвержденный) факт *разного влияния* отдельных геометрических характеристик системы (рабочей зоны) на ход технологического процесса. Ясно, например, что толщина стенки трубопровода  $\delta_{\text{ст}}$  в подавляющем большинстве случаев не сказывается на характере течения в нем жидкости или газа, поэтому не требуется геометрического подобия типа  $\delta_1/l_1 = \delta_2/l_2$ . Менее очевиден пример, касающийся формирования поля скоростей потока, поступившего в канал. Это формирование происходит на начальных участках канала; на некотором расстоянии от входа в канал оно практически завершается, после чего поле скоростей сколько-нибудь заметно не изменяется. При этом на входном участке поле ско-

ростей зависит как от продольной координаты в направлении потока (т. е. расстояния до входного сечения), так и от нормальной к этому направлению (диаметра, ширины или глубины канала и т. п.). Но за пределами входного участка влияние продольной координаты вырождается, влияет лишь поперечный размер канала (диаметр и т. п.). Поэтому для каналов достаточно большой протяженности во многих задачах обобщенные переменные (безразмерные комплексы и симплексы) формируются на основе только характерного нормального (к направлению течения) размера: диаметра канала, толщины зазора и т. д. Установление определяющего размера — задача исследователя, инженера.

### 1.8.3. Обобщенные переменные на базе основных уравнений переноса

Ниже рассмотрено формирование обобщенных переменных на основе дифференциальных уравнений переноса импульса, теплоты и вещества, а также некоторых соотношений иного происхождения и вида. По ходу изложения курса в дальнейшем будут вводиться и использоваться и другие обобщенные переменные.

#### *Гидродинамическое подобие*

Для иллюстрации достаточно сложного случая (в сравнении с уравнением неразрывности) проведем по уже известной канве подробные масштабные преобразования уравнения Навье—Стокса для стационарного течения. Выберем одну из осей координат, например ось  $z$  (во избежание громоздкости записи индекс " $z$ " опустим); тогда имеем для *подобных* течений в модели и образце (индексы 1 и 2)

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial z_1} = P_1 - \left( w_1 \frac{\partial w_1}{\partial z_1} + \dots \right) + \nu_1 \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial z_1^2} + \dots \right), \quad (1)$$

$$\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial z_2} = P_2 - \left( w_2 \frac{\partial w_2}{\partial z_2} + \dots \right) + \nu_2 \left( \frac{\partial^2 w_2}{\partial z_2^2} + \dots \right), \quad (2)$$

причем выражения в скобках записаны в усеченном виде, поскольку структура опущенных слагаемых та же, что и оставленных (поэтому в аспекте множителей подобия и операций с ними потери информации здесь не будет).

Выразим характеристики системы 1 через множители подобия и характеристики системы 2:  $\rho_1 = m_\rho \rho_2$ ;  $p_1 = m_p p_2$ ;  $z_1 = m_z z_2$ ;  $P_1 = m_m P_2$  (индекс "м" означает, что множитель  $m_m$  одинаков для всех массовых сил);  $w_1 = m_w w_2$ ;  $\nu_1 = m_\nu \nu_2$ .

Подставим полученные произведения в уравнение (1):

$$\frac{m_p}{m_p m_l} \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial z_2} = m_m P_2 - \frac{m_w^2}{m_l} \left( w_2 \frac{\partial w_2}{\partial z_2} + \dots \right) + \frac{m_v m_w}{m_l^2} v_2 \left( \frac{\partial^2 w_2}{\partial z_2^2} + \dots \right) \quad (1')$$

Заметим: вторая производная по смыслу математической операции есть частное от *повторенного дважды* деления дифференцируемой величины на аргумент (именно поэтому в знаменателе записывается "квадрат" аргумента); вот почему в последнем слагаемом выражения (1')  $m_w$  получается в первой степени, а  $m_l$  — в квадрате.

Математические описания (1') для системы 1 и (2) для системы 2 по условию подобия должны быть идентичны. Этому условию отвечает равенство комплексов, составленных из множителей подобия (тогда эти комплексы можно сократить):

$$\frac{m_p}{m_p m_l} = m_m = \frac{m_w^2}{m_l} = \frac{m_v m_w}{m_l^2} \quad (a)$$

силы да-
массо-
силы
силы  
вления
вые силы
инерции
вязкости

Здесь под каждым из комплексов записаны силы (могут быть записаны потоки импульсов), за которые по смыслу слагаемых уравнения Навье—Стокса "отвечают" соответствующие комплексы.

Сравнивая попарно рассматриваемые эффекты (в принятой трактовке — силы), можно получить 6 равенств, из коих три являются *независимыми* и дают три "основные" обобщенные переменные (остальные 3 равенства приводят к производным обобщенным переменным, которые могут быть также получены комбинацией трех основных). Выбор равенств в качестве основных обусловлен более всего историческими причинами (традицией); в настоящее время в качестве базы приняты силы инерции, выражаемые комплексом  $m_w^2/m_l$ .

**Сопоставление сил давления и инерции.** Здесь  $m_p/(m_p m_l) \circ - \bullet$   $\circ - \bullet m_w^2/m_l$ . После сокращения на  $m_l$  и подстановки значения множителей  $m_p = p_1/p_2$ ,  $m_p = \rho_1/\rho_2$  и  $m_w = w_1/w_2$  имеем

$$\frac{p_1 \rho_2}{p_2 \rho_1} = \frac{w_1^2}{w_2^2},$$

откуда, разводя величины с одинаковыми индексами в разные части равенства, получаем для всех подобных течений в сходственных точках

$$\frac{p_1}{\rho_1 w_1^2} = \frac{p_2}{\rho_2 w_2^2} = \frac{p}{\rho w^2} \equiv Eu = \text{idem}$$

— критерий (число) Эйлера.

Смысл  $Eu$  ясен из названия процедуры сопоставления: это **соотношение сил давления и инерции**.

В технологических процессах нас чаще всего интересует не давление  $p$  в какой-либо точке или сечении аппарата (канала, трубы), а *перепад давлений*  $\Delta p$  между определенными точками или сечениями (при рассмотрении подобных течений — между сходственными сечениями). Поэтому используют несколько иное выражение  $Eu$ :

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho w^2}. \quad (в)$$

**Сопоставление массовых сил с силами инерции.** В этом случае  $m_m \circ - \bullet m_w^2/m_l$ . После подстановки значений  $m_m = P_1/P_2$  (при этом вдоль оси  $z$ , если она направлена вертикально, речь может идти о единичной массовой силе тяжести, численно равной ее ускорению  $g$ ),  $m_w$  и  $m_l$  имеем

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{w_1^2 l_2}{w_2^2 l_1},$$

откуда, повторяя проведенную выше операцию, получаем для всех подобных течений в сходственных точках

$$\frac{g_1 l_1}{w_1^2} = \frac{g_2 l_2}{w_2^2} = \frac{gl}{w^2} \equiv Fr = \text{idem} — \text{критерий (число) Фруда.} \quad (г)$$

Смысл  $Fr$  ясен из названия процедуры сопоставления: это **соотношение массовых сил и инерции**. Заметим, что в разных учебниках и монографиях дается *разное* написание  $Fr$ :  $gl/w^2$ ;  $w^2/gl$ ;  $w/\sqrt{gl}$  и др.; поэтому каждый раз надо оговаривать, о каком написании  $Fr$  идет речь.

Разумеется, если рассматривается течение не в поле сил тяжести, а в каком-либо ином внешнем силовом поле, то во  $Fr$  вместо ускорения свободного падения  $g$  войдет характерное ускорение соответствующего поля (например, центробежного или др.).

**Сопоставление сил инерции и вязкости.** Сопоставляются комплексы  $m_w^2/m_l \circ - \bullet m_l m_w/m_l^2$ . После сокращения на  $m_w/m_l$  и подстановки значений всех множителей подобия (включая  $m_v = \nu_1/\nu_2$ ) имеем

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\nu_1 l_2}{\nu_2 l_1},$$

откуда, разводя величины с одинаковыми индексами в разные части равенства, получаем для всех подобных течений в сходственных точках

$$\frac{w_1 l_1}{\nu_1} = \frac{w_2 l_2}{\nu_2} = \frac{wl}{\nu} \equiv Re = \text{idem} — \text{критерий (число) Рейнольдса.} \quad (д)$$

Смысл числа  $Re$ , крайне широко используемого при описании процессов переноса, ясен из названия процедуры сопоставления: это **соотношение сил инерции и сил вязкости**. Заранее нельзя с определенностью сказать, при каких именно численных значениях  $Re$  будут доминировать силы инерции либо силы вязкости. Это зависит от типа рассматриваемой системы и особенностей течения. Конкретные численные значения  $Re$ , отвечающие преобладанию тех или иных сил, зачастую можно установить только экспериментально. Априори можно лишь утверждать, что увеличение  $Re$  означает *относительное возрастание* сил инерции, уменьшение  $Re$  — *возрастание* сил вязкости (внутреннего трения).

Технологический процесс может протекать в условиях, когда численное значение  $Re$  очень велико (можно считать, стремится к бесконечности) или очень мало (стремится к нулю). Это означает, что один из конкурирующих факторов (в гидравлике — одна из сил, для  $Re$  — сила инерции или сила вязкости) становится исчезающе мал в сравнении с другим. Тогда критерий перестает контролировать процесс; говорят, что он сам (здесь —  $Re$ ) и его влияние *вырождаются*.

Продемонстрируем, как можно получить  $Re$ , используя *упрощенные* масштабные преобразования. С этой целью применим к стационарному течению сопоставим второе и третье слагаемые в правой части уравнения (1.20), например для оси  $z$ , опуская символы дифференцирования:

$$\omega \frac{w}{l} \circ \bullet \nu \frac{w}{l^2}. \quad (е)$$

Произведя очевидные сокращения и собрав все величины в одну часть равенства, приходим к числу Рейнольдса:

$$\frac{\omega l}{\nu} \equiv Re = idem. \quad (ж)$$

Равенство численных значений каждой из обобщенных переменных —  $Eu$ ,  $Fr$ ,  $Re$  — является *необходимым и достаточным признаком подобия* для широкой группы стационарных течений. Аналогичные равенства численных значений соответствующих обобщенных переменных служат признаками подобия в процессах переноса других субстанций. В качестве линейного размера в  $Re$ ,  $Fr$  был введен некий конечный характерный размер  $l$  (его конкретный смысл устанавливается при анализе конкретного процесса). В ряде задач технологическая ситуация зависит от *координаты* точки, и тогда число Рейнольдса может быть представлено, например, в виде  $Re_x = \omega x / \nu$ . Такое написание критерия не всегда удобно, так как обобщенная переменная содержит сразу две натуральные переменные, контролирующие процесс:  $x$  и  $\omega$ . В этом случае иногда удобна замена  $Re_x$  на две обобщенные



переменные:

$$\text{Re}_x \equiv \frac{wx}{\nu} = \frac{wl}{\nu} \frac{x}{l},$$

т.е. на  $\text{Re} \equiv wl/\nu$  и симплекс  $x/l$  — относительную координату.

Выше было указано, что сравнение других пар эффектов может привести к другим обобщенным переменным. Так, сопоставление сил тяжести и вязкости (или соответствующих им потоков импульса) дает

$$\left\{ \frac{\text{силы тяжести}}{\text{силы вязкости}} \right\} = \left\{ \frac{\text{силы тяжести}}{\text{силы инерции}} \right\} \cdot \left\{ \frac{\text{силы инерции}}{\text{силы вязкости}} \right\} = \text{Fr} \cdot \text{Re} \equiv \frac{gl^2}{\nu v}; \quad (3)$$

здесь фигурные скобки означают, что речь идет не об отношениях сил, а об их соотношениях (в некоем масштабе).

Можно получить и другие комбинации критериев (безразмерных чисел), также имеющие четкий физический смысл.

### *Тепловое подобие*

Применим к уравнению Фурье—Кирхгофа (1.21а) упрощенные масштабные преобразования.

**Сопоставление локальной накопленной теплоты с теплотой, перенесенной путем теплопроводности.** Сопоставим первые слагаемые в левой и правой частях уравнения:

$$\frac{t}{\tau} \sim a \frac{t}{x^2}. \quad (\text{и})$$

Сокращая на  $t$  и перенося все величины в одну часть равенства, переходим к безразмерному комплексу  $a\tau/x^2$ , содержащему две переменные  $\tau$  и  $x$ , а потому — не всегда удобно для анализе и решении технологических задач. Простые преобразования, аналогичные показанным выше для  $\text{Re}_x$ , приводят к двум обобщенным переменным, содержащим каждая по одному натуральному параметру ( $\tau$  или  $x$ ):

$$\frac{a\tau}{x^2} \frac{l^2}{l^2} = \frac{a\tau}{l^2} \frac{l^2}{x^2}.$$

Первый из полученных комплексов  $a\tau/l^2 \equiv \text{Fo}$  носит название **критерия (числа) Фурье**, второй  $x/l$  является параметрическим критерием (относительной координатой). Число Фурье широко используется в задачах, где основными в переносе теплоты являются принятые для сопоставления локальное накопление и кондуктивный поток теплоты (в их соотношении и заключается физический смысл  $\text{Fo}$ ), в частности — в периодических процессах нагревания (охлаждения) твердых тел.

**Сопоставление конвективного (перенос с движущейся средой) и кондуктивного потоков теплоты.** Сравниваются второе и т.п. слагаемые в левой части уравнения Фурье и первое слагаемое в

правой его части:

$$w \frac{t}{x} \circ - \bullet a \frac{t}{x^2}. \quad (\kappa)$$

После преобразований, аналогичных выполненным ранее, приходим к не всегда удобному безразмерному комплексу  $w\lambda/a$ ; умножая его на  $l/l$ , получаем уже известный симплекс  $x/l$  и обобщенный комплекс, называемый **числом (критерием) Пекле**:  $wl/a \equiv \text{Pe}$ . Этот комплекс широко используется в задачах, где основу процесса составляют конвективный и кондуктивный тепловые потоки (в их соотношении и заключается физический смысл  $\text{Pe}$ ), в частности — во многих задачах непрерывного и периодического теплообмена с участием жидкостных и газовых потоков.

Сопоставление первого и второго слагаемых в левой части (1.21a) приведет к уже знакомому нам критерию гомохронности. Можно, конечно, проследить результаты сопоставления и других пар слагаемых в уравнении переноса теплоты, получив критерии, характеризующие соотношения соответствующих тепловых потоков. Численные значения полученных критериев в сходственных точках систем для всех подобных процессов теплопереноса — одинаковы.

### *Диффузионное подобие*

**Сопоставление потоков вещества, накопленного и перенесенного диффузией.** Здесь  $\frac{C}{\tau} \circ - \bullet \frac{DC}{x^2}$  приводит к параметрическому

критерию  $x/l$  и диффузионному критерию Фурье, иначе — **критерию Фика**  $\text{Fi} \equiv D\tau/l^2$ . Физический смысл этого комплекса — в соотношении потоков вещества, указанных в заголовке процедуры сопоставления. Как и в случае теплообмена, эта обобщенная переменная широко используется в задачах, связанных с описанием периодической диффузии в твердых телах. Заметим: аналогичный критерий используется и при описании нестационарных гидродинамических процессов:  $\text{Zh} = \nu\tau/l^2$  — **число Жуковского**.

**Сопоставление потоков вещества, переносимых конвекцией (с движущейся средой) и диффузией.** Здесь операция сопоставления

$w \frac{C}{x} \circ - \bullet \frac{DC}{x^2}$  приводит, наряду с симплексом  $x/l$ , к диффузи-

онному критерию Пекле  $\text{Pe}_d \equiv wl/D$ . Его физический смысл — в соотношении потоков вещества, указанных в заголовке процедуры сопоставления. Как и в случае теплообмена, эта обобщенная переменная используется в задачах непрерывного и периодического массопереноса с участием потоков сплошной среды.

Разумеется, сопоставление других пар потоков вещества (слагаемых уравнения Фика) приведет к формированию соответ-

ствующих комплексов, характеризующих соотношение рассматриваемых эффектов. Все эти обобщенные переменные имеют одинаковые численные значения в подобных процессах массопереноса.

В заключение заметим, что обобщенным переменным нередко присваивают название натуральных, но выраженных в безразмерной форме. Так,  $Re$  трактуют как безразмерную скорость,  $Fo$  — как безразмерное время,  $Eu$  — как безразмерный перепад давлений и т. п.

#### *Подобие в переносе различных субстанций*

До сих пор подобие явлений анализировалось в пределах переноса *отдельной* субстанции — импульса, теплоты или вещества. Однако сходство уравнений переноса (а в его основе, конечно, — сходство в физических явлениях, в механизмах переноса разных субстанций) позволяет сопоставлять сходные эффекты для различных субстанций — независимо от их природы. Особенно плодотворным оказалось сопоставление потоков субстанций, выражаемых слагаемыми с лапласианом. Эти слагаемые, изначально сформулированные на основе удельных потоков импульса, теплоты, вещества и градиентов соответствующих потенциалов, характеризуют в конечном итоге поля скоростей, температур, концентраций.

Если отвлечься от природы субстанции, то сопоставление указанных потоков импульса и теплоты дает безразмерный комплекс  $Pr \equiv \nu/a$  — **число (критерий) Прандтля**, характеризующий связь скоростного и температурного полей. Заметим, что  $Pr$  может быть получен также как отношение чисел  $Pe$  и  $Re$ , сформулированных при сопоставлении сходных пар слагаемых в уравнениях Навье—Стокса и Фурье—Кирхгофа:

$$\frac{Pe}{Re} = \frac{wl}{a} \bigg/ \frac{wl}{\nu} = \frac{\nu}{a} \equiv Pr. \quad (л)$$

Проведенное в этой манере сопоставление для таких же потоков импульса и вещества приводит к безразмерному **числу (критерию) Шмидта**, характеризующему связь скоростного и концентрационного полей:  $Sc \equiv \nu/D$ . Этот критерий также может быть получен как отношение  $Pe_d$  и  $Re$ . Заметим, что в отечественной литературе число Шмидта нередко называют диффузионным критерием Прандтля и обозначают  $Pr_d$ .

Значительно реже используют **критерий Льюиса**  $Le \equiv a/D$ , получаемый при сопоставлении кондуктивного потока теплоты и диффузионного потока вещества и характеризующий связь температурного и концентрационного полей.

#### **1.8.4. Обобщенные переменные на базе других уравнений и представлений**

Обобщенные переменные могут быть сформированы на основе различных модельных представлений и теоретических

соотношений; обоснованность таких переменных определяется достоверностью предпосылок, на которые опираются эти представления и соотношения. Продемонстрируем упомянутые возможности на некоторых примерах.

В разд. 1.3.2 на основе понятия о пограничном слое было получено выражение (1.12), согласно которому  $\alpha = \lambda / \delta_T$ . Это выражение, за очень редким исключением, не является расчетным ввиду неопределенности толщины тепловой пограничной пленки  $\delta_T$ . Однако масштабные преобразования позволяют и здесь путем замены  $\delta_T$  на определяющий линейный размер  $l$  сформировать безразмерный комплекс, имеющий вполне определенный физический смысл:

$$\alpha \circ - \cdot \frac{\lambda}{\delta_T} \rightarrow \frac{\alpha l}{\lambda} \equiv \text{Nu} - \text{число Нуссельта}, \quad (\text{м})$$

представляющее собой соотношение интенсивностей теплового потока *по одну сторону* поверхности теплообмена, выраженных в форме конвективного ( $\alpha$ ) и кондуктивного ( $\lambda$  и  $l$ ) эффектов.

В той же манере получается и выражается аналогичная обобщенная переменная для массоопереноса:

$$\beta \circ - \cdot \frac{D}{\delta_d} \rightarrow \frac{\beta l}{D} \equiv \text{Sh} - \text{число Шервуда}, \quad (\text{н})$$

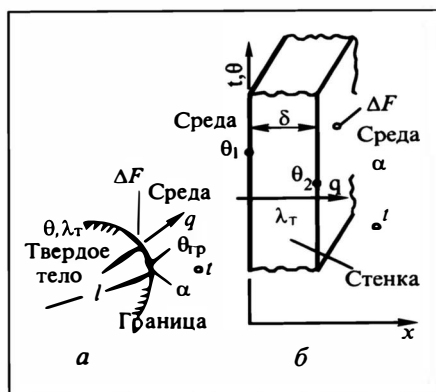
имеющее тот же физический смысл, только не для тепло-, а для массоотдачи. В отечественной литературе Sh иногда именуют диффузионным критерием Нуссельта и обозначают  $\text{Nu}_d$ .

Обобщенная переменная может быть сформирована на базе граничных условий. Покажем это на примере ГУ III рода. Детально это условие будет рассмотрено в разд. 7.10.3; здесь мы воспользуемся самыми общими представлениями. Рассмотрим некий участок поверхности  $\Delta F$  на границе твердого тела (пусть горячего) и омывающей его холодной жидкости (рис. 1.14). Удельный поток теплоты из внутренних зон твердого тела к его границе согласно (1.10) составляет

$$\lambda_T \left| \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{\text{гр}}, \quad \text{где } x - \text{нормаль}$$

Рис. 1.14. К формированию критерия Био:

*а* — нестационарный режим (выпуклое тело), *б* — стационарный режим (плоская стенка)



к площадке  $\Delta F$ . Поскольку на границе теплота накапливаться не может, то она *целиком* отводится конвекцией, причем удельный конвективный поток равен  $\alpha \Delta t$ , где  $\Delta t = \theta - t$  — разность температур поверхности тела и среды (движущая сила конвективной теплоотдачи). Для поверхности  $\Delta F$  полные потоки теплоты (изнутри тела на его границе и снаружи) запишутся в виде равенства

$$\lambda_{\tau} \left| \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{\text{гр}} \Delta F = \alpha \Delta t \Delta F. \quad (\text{o})$$

После сокращения на  $\Delta F$ , путем упрощенных масштабных преобразований  $\lambda_{\tau} \frac{l}{l} \circ \text{---} \bullet \alpha l$  получаем безразмерный комплекс  $\alpha l / \lambda_{\tau} \equiv \text{Bi}$  — **критерий Био**. Важно: поскольку речь идет о потоке теплоты *на границе* [индекс "гр" в выражении (o)], то в  $\text{Bi}$  входит не переменная координата  $x$ , а определяющий линейный размер  $l$ .

Несмотря на *внешнее* сходство, критерий  $\text{Bi}$  не является аналогом числа  $\text{Nu}$ . (Внимание: в знаменателе  $\text{Nu}$  стоит теплопроводность *среды*, омывающей твердое тело, в знаменателе  $\text{Bi}$  — теплопроводность этого *тела*.) Число Нуссельта возникло как результат разной формы записи потока теплоты от тела к сплошной среде (в терминах и символах конвекции и теплопроводности). Но это *один и тот же поток снаружи тела*; в этом смысле  $\text{Nu}$  — формален. Критерий Био сформирован на основе анализа тепловых потоков *по разные стороны от границы* тела и омывающей его среды. Поэтому  $\text{Bi}$  — физически обоснованный критерий, выражающий соотношение тепловых потоков *снаружи и внутри* тела.

По ходу изложения курса будут вводиться и использоваться также другие обобщенные переменные.

### 1.8.5. Критериальные уравнения

Количественные связи обобщенных переменных устанавливаются путем теоретического анализа (это удастся далеко не всегда) или с помощью специально поставленного эксперимента. Эти связи носят название **критериальных уравнений**, например типа  $\text{Eu} = f(\text{Re}, \text{Fr}, \dots)$  или  $\text{Nu} = f(\text{Re}, \text{Pr}, \dots)$ . Полученные уравнения справедливы ("работают") для подобных процессов (в гидравлике — течений, в теплообмене — процессов теплопереноса определенного типа и т.д.) *в найденных теоретически или проверенных экспериментально диапазонах изменения обобщенных переменных*. Поскольку здесь устанавливаются диапазоны в обобщенных переменных, то составляющие их натуральные переменные могут варьироваться более широко (кстати, и более

узко), лишь бы обобщенные переменные в своем изменении не выходили за обусловленные границы. Важно понимать, что критериальные уравнения за пределами установленных диапазонов теряют надежность, точность, прогнозность в количественном смысле, а в ряде случаев — и в качественном.

Вид критериальных уравнений при теоретическом отыскании количественных связей вытекает из математического анализа. При эмпирическом подходе эти связи чаще всего представляют в виде степенных функций, например  $Nu = aRe^n Pr^m$ , причем параметры уравнения  $a$ ,  $n$ ,  $m$  определяются обработкой экспериментальных данных. Степенной вид критериальных формул в общем случае, конечно, не отражает какого-либо физического закона (природа совсем не отдает предпочтения степенным зависимостям). Просто степенные зависимости удобны, поскольку в логарифмических координатах они изображаются прямыми линиями (это, кстати, облегчает определение параметров уравнения); кроме того, такая манера представления опытных данных в какой-то мере еще и дань традициям.

Надежность полученных критериальных уравнений определяется правильностью физических представлений и построенных на их основе моделей (если речь идет о теоретических зависимостях), обоснованностью выбора переменных и достаточной широтой эксперимента (если зависимости — эмпирические). Во всех случаях должны быть указаны **границы применимости** критериальных зависимостей.

Различные критериальные зависимости будут качественно обоснованы и представлены в количественной форме (с указанием диапазонов их правомерного использования) при изложении соответствующих разделов курса.

### 1.8.6. Обобщенные переменные и пропускные способности

Обобщенные переменные (безразмерные числа, критерии подобия — комплексы и симплексы) представляют собой соотношения конкурирующих факторов, эффектов. В качестве таких факторов могут выступать потоки субстанции (или их коренные фрагменты), определяющие сущность технологических процессов. В этом аспекте обобщенные переменные (по крайней мере многие из них) вполне могут трактоваться как *соотношения пропускных способностей* тех или иных *стадий процесса*.

При таком подходе яснее очерчиваются диапазоны условий, в которых та или иная стадия процесса становится доминирующей или, наоборот, ее влияние будет исчезающе малым (так что ее можно игнорировать при описании процесса) — выше такие ситуации мы связывали с вырождением критериев подобия.

Продemonстрируем высказанные положения некоторыми примерами.

Рассмотрим сначала перенос теплоты от горячей плоской стенки (см. рис. 1.14, б) к потоку омывающей ее (пусть справа) холодной среды. Будем рассматривать две последовательные стадии теплопереноса: через стенку (ее теплопроводность  $\lambda_\tau$ , толщина  $\delta$ ) и от стенки к среде (интенсивность теплообмена определяется коэффициентом теплоотдачи  $\alpha$ ). Кондуктивный поток теплоты внутри тела через поверхность  $F$  составляет

$$\lambda_\tau \left| \frac{\partial \theta}{\partial x} \right| F; \text{ очевидно, что для плоской стенки } \left| \frac{\partial \theta}{\partial x} \right| = \frac{\Delta \theta}{\delta}, \text{ где } \Delta \theta =$$

$= \theta_1 - \theta_2$  — разность температур на левой и правой сторонах стенки (детально описание кондуктивного теплопереноса будет рассмотрено в главе 6). Пропускная способность *кондуктивной стадии* теплопередачи (согласно определению пропускных спо-

собностей) составляет  $\frac{Q}{\Delta \theta} = \frac{\lambda_\tau}{\delta} F$ . Тот же поток теплоты, отво-

димый к среде путем конвективной теплоотдачи, согласно выражению (о) в разд. 1.8.4, равен  $Q = \alpha \Delta t F$ , причем здесь  $\Delta t = \theta_2 - t$ . Тогда пропускная способность *конвективной стадии* теплопередачи составляет  $Q/\Delta t = \alpha F$ . Отношение пропускных способностей конвективной (снаружи стенки) и кондуктивной (внутри нее) стадий теплопередачи приводит к уже полученному ранее критерию Био:

$$\frac{\alpha F}{(\lambda_\tau / \delta) F} = \frac{\alpha \delta}{\lambda_\tau} \equiv \text{Bi}.$$

При таком подходе к формированию критерия четко видны как его *физический смысл*, так и *условия вырождения*. Действительно, если теплопроводность стенки высока, да еще мала толщина ее  $\delta$ , а теплообмен со средой затруднен (низкие  $\alpha$ ), то пропускная способность кондуктивного потока много больше, нежели конвективного. В этих условиях интенсивность теплопередачи *всего определяется стадией конвекции*: сколько на этой стадии будет пропущено теплоты (от стенки к среде), столько вообще будет передано теплоты в ходе теплопередачи (т.е. на обеих стадиях вместе). А кондуктивный перенос теплоты в этом случае может протекать очень интенсивно, поэтому он совсем не сдерживает (*не лимитирует*) интенсивность теплопередачи. Можно считать, что здесь кондуктивная пропускная способность  $(\lambda_\tau / \delta) F \rightarrow \infty$  (характерный температурный напор  $\Delta \theta \rightarrow 0$ ); критерий Био  $\text{Bi} \rightarrow 0$ , т.е. его влияние на процесс теплопереноса вырождается. В обратной ситуации крайне интенсивен конвективный теплоперенос, т.е.  $\alpha F \rightarrow \infty$  (при этом  $\Delta t \rightarrow 0$ ), а вот теплоперенос в стенке будет малоинтенсивным — в силу низкой теплопроводности стенки  $\lambda_\tau$  и (или) большой ее толщины  $\delta$ .

Тогда теплопередача *контролируется* (еще говорят: *определяется, лимитируется*) *кондуктивной стадией*,  $Bi \rightarrow \infty$  и его влияние на процесс также вырождается.

Вырождение критериев Био означает, что в обоих рассматриваемых случаях  $Bi$  не войдет в уравнения, описывающие эти крайние случаи теплопередачи. Однако *при сопоставимости пропускных способностей* конвективной и кондуктивной *стадий* пренебрегать интенсивностью какой-либо одной из них относительно другой нельзя — тогда критерий Био будет (прямо или в завуалированной форме) входить в расчетные соотношения теплопередачи.

Аналогичным образом, применительно, например, к трубе диаметром  $d$  и длиной  $l$ , могут быть сформированы критерии Пекле  $Pe$  и  $Pe_d$  — как соотношения пропускных способностей *продольного* переноса теплоты (соответственно, вещества) путем

вынужденной конвекции  $\frac{Q}{t'' - t'} = Gc = \rho w f c = \rho w \frac{\pi d^2}{4} c$  (либо  $G = \rho w f$  — в случае массопереноса) и *нормального* к направлению движения среды кондуктивного теплового потока  $\frac{\lambda}{d} F = \frac{\lambda}{d} \pi d l$  (либо диффузионного  $\frac{D}{d} F = \rho \frac{D}{d} \pi d l$ ). С точностью до постоянных множителей

$$\frac{Gc}{\frac{\lambda}{d} F} = \frac{wd}{a} \frac{d}{l} = Pe \frac{d}{l} \quad \text{и} \quad \frac{G}{\rho \frac{D}{d} F} = \frac{wd}{D} \frac{d}{l} = Pe_d \frac{d}{l}.$$

Специально подчеркнем, что сопоставление пропускных способностей *продольного* конвективного потока (теплоты или вещества) и *нормального* кондуктивного (соответствующей субстанции) приводит к *произведению*  $Pe$  или  $Pe_d$  на симплекс  $d/l$ . Заметим: при строгом геометрическом подобии множитель  $d/l$  принял бы для подобных явлений постоянное значение; в критерии он просто не был бы включен. При сопоставлении пропускных способностей *продольных* конвективного и кондуктивного потоков множители  $d/l$  отсутствовали бы.

В той же манере формируется, например, число Нуссельта  $Nu$  — как соотношение пропускных способностей  $\alpha F$  и  $\frac{\lambda}{d} F$ , а

также ряд других обобщенных переменных. В частности, при сопоставлении пропускных способностей конвективных тепловых потоков — нормального к поверхности теплообмена  $\alpha F = \alpha \pi d l$  и *продольного* вынужденного  $Gc = \rho w \frac{\pi d^2}{4} c$  — получается для теплооб-



менной трубы диаметром  $d$  и длиной  $l$  безразмерное число

$$\frac{\alpha F}{Gc} = \frac{\alpha \pi d l}{\rho w \frac{\pi d^2}{4} c} = \frac{\alpha}{wrc} \frac{l}{d},$$

причем безразмерный комплекс  $\alpha/wrc$  используется при описании теплообменных процессов.

Аналогичная обобщенная переменная получается при анализе массопереноса:

$$\frac{\beta F}{V} = \frac{\beta \pi d l}{w \frac{\pi d^2}{4}} = \frac{\beta}{w} \frac{l}{d},$$

причем безразмерный комплекс  $\beta/w$  используется при описании массообменных процессов.

Из приведенных выше примеров видно, что сопоставление пропускных способностей стадий позволяет (помогает) выявить определяющий линейный размер, входящий в критерии подобия для конкретного анализируемого явления, процесса.

Сопоставление пропускных способностей нередко приводит к обобщенным переменным, не используемым (обычно или пока еще) в качестве безразмерных чисел и критериев подобия. Иногда выражение отношений пропускных способностей стадий указывает на необходимость корректировки общепринятого написания критериев подобия или объясняет появление поправок в критериальных и других соотношениях. В целом метод пропускных способностей расширяет возможности использования обобщенных переменных для решения технологических задач. При этом в ряде случаев существенно яснее становятся физический смысл явлений и процессов, а также границы (диапазоны) целесообразности использования того или иного расчетного метода.

#### ЛИТЕРАТУРА к главе 1

1. Берд Р., Стюарт В., Лайтфут Е. Явления переноса: Пер. с англ./ Под ред. Н.М. Жаворонкова, В.А. Малюсова. М.: Химия, 1974. 688 с.
2. Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика: Пер. с англ./ Под ред. Д.Н. Зубарева. М.: Мир, 1964. 456 с.
3. Патрашев А.Н. Гидродинамика. М.: Военно-морское изд-во, 1953. 720 с.

### ГИДРАВЛИКА

Гидравлика — часть механики, изучающая равновесие и движение жидкостей, в более широком смысле — также газов и твердых тел. Учебник ПАХТ включает элементы технической гидравлики:

- проблемы теоретического характера, составляющие базу для подходов к некоторым задачам этой главы и разнообразным проблемам ряда других глав;

- некоторые прикладные вопросы, имеющие существенное значение для освоения общего подхода к анализу процессов, для решения групп задач гидравлики, для практических расчетов в других разделах курса.

Как указано в гл.1, гидравлика изучает проблемы, связанные с переносом импульса (количества движения). В основе многих построений настоящей главы лежат уже введенные ранее понятия о сплошной среде, идеальной жидкости, ряд других понятий, а также полученные выше уравнения неразрывности, расхода, Навье—Стокса.

Гидравлика включает несколько разделов, из коих здесь рассматриваются два основных: весьма кратко — **гидростатика** (равновесие жидкостей и других рабочих тел) и более подробно — **гидродинамика** (движение жидкости, газа и т.п.). Ряд вопросов, имеющих меньшее значение для химической технологии, оставлен за пределами учебника\* (например, истечение на водосливах, струи, течение при высоких скоростях, потенциальное течение или же такой специфический раздел, как плавание тел).

#### 2.1. ГИДРОСТАТИКА

Гидростатика изучает жидкость в *абсолютном и относительном* покое. Кардинальная проблема этого раздела, лежащая в основе ряда конкретных задач, — определение давления в произвольной точке технологического пространства:

$$p = p(x, y, z) . \quad (a)$$

---

\* Эти вопросы см. [1, 18, 22, 25 и др.].

В задачах гидростатики давление в точке не зависит от пространственной ориентации площадки, на которую оно действует.

Признаком, позволяющим отнести решаемую задачу к гидростатике, является *неподвижность отдельных слоев (частиц) жидкости относительно друг друга и относительно границ технологического пространства* (стенок аппарата). При этом сам аппарат, сосуд, совсем не обязательно должен быть неподвижным — важно лишь отсутствие относительного перемещения жидкости внутри сосуда. Иногда говорят: если удастся выбрать систему координат (жестко связанную с аппаратом, сосудом), относительно которой не происходит движения жидкости, то задача относится к гидростатике. А сам рассматриваемый сосуд может находиться в покое или перемещаться по отношению к неподвижному наблюдателю (при этом возникают поля внешних массовых сил).

### 2.1.1. Основные уравнения гидростатики и поверхностей уровня

К закону распределения давления (а) можно прийти, сопоставляя силы, отвечающие постановке задач гидростатики: нормальные поверхностные (давления) и внешние массовые. Однако нам проще воспользоваться уже выведенным уравнением Навье—Стокса (1.20), отбросив в нем слагаемые, связанные с перемещением жидкости относительно зафиксированной на сосуда системы координат. При этом все скорости жидкости (их производные — тоже, конечно) *относительно этой системы координат* обращаются в нуль. Это означает, что в (1.20):

$dw_j/d\tau = 0$  — ведь ситуация в принципе стационарная ( $\partial w_j/\partial \tau = 0$ ), и значения  $w_j$  и  $\partial w_j/\partial j$  равны нулю ( $j = x, y, z$  — координатные оси, относительно которых жидкость неподвижна);

$v\nabla^2 w_j = 0$ , так как под знаком  $\nabla^2$  каждое слагаемое  $\partial^2 w_j/\partial j^2 = 0$ ; при этом совсем не обязательно рассматривать идеальную жидкость с  $\mu, \nu = 0$  — все последующие рассуждения справедливы и для реальной жидкости (напомним, что она практически несжимаема, так что ее плотность постоянна): сила вязкости не проявляется ( $\tau_T = 0$ ) и не влияет на ситуацию не вследствие  $\mu = 0$ , а из-за отсутствия градиента скоростей.

Таким образом, в (1.20) остаются лишь слагаемые, отвечающие *силам давления и внешним массовым силам* — эти силы взаимно уравновешены. В этом случае уравнения (1.20) существенно упрощаются; например, для оси  $x$ :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = P_x. \quad (6)$$

Аналогичные соотношения, называемые уравнениями Эйлера для гидростатики, записываются и для других осей. Иногда их преобразуют, перенося  $\rho$  в правую часть равенства и домножая

обе части равенства на приращение координаты вдоль соответствующей оси:

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx = \rho P_x dx. \quad (в)$$

Такая форма записи позволяет путем суммирования выражений типа (в) для всех осей координат получить полный дифференциал давления  $dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz$ .

$$dp = \rho(P_x dx + P_y dy + P_z dz). \quad (2.1)$$

Это выражение называют **основным уравнением гидростатики в дифференциальной форме**. Его физический смысл обозначен выше: *равенство сил давления и внешних массовых сил*. С позиций переноса импульса: импульс нормальных поверхностных сил равен импульсу внешних массовых сил.

Интегрирование выражения (2.1) должно привести к **закону распределения давления (а) в интегральной форме**. Для несжимаемых жидкостей (теоретически — для идеальных, практически — для реальных в диапазонах давлений, используемых химической технологией):

$$\int_{p_0}^p dp = p - p_0 = \rho \left( \int_{x_0}^x P_x dx + \int_{y_0}^y P_y dy + \int_{z_0}^z P_z dz \right). \quad (2.2)$$

Для нахождения интегралов в правой части (2.2) надо знать законы изменения единичных массовых сил  $P_x, P_y, P_z$  по соответствующим осям координат  $x, y, z$ , а также значение координат какой-либо точки  $x_0, y_0, z_0$ , давление в которой  $p_0$  известно.

В результате выполнения операций интегрирования выражения (2.2) получаются значения давления в разных точках. Точки пространства с одинаковым давлением образуют поверхности равного давления, называемые **поверхностями уровня**. Вдоль каждой такой поверхности давление не изменяется ( $p = \text{const}$ ), так что  $dp = 0$ . Тогда из (2.1), после сокращения на  $\rho \neq 0$ , получается **уравнение поверхности уровня в дифференциальной форме**:

$$P_x dx + P_y dy + P_z dz = 0. \quad (2.3)$$

Зная законы изменения  $P_j$  по соответствующим координатам  $j = x, y, z$ , после операции интегрирования

$$\int P_x dx + \int P_y dy + \int P_z dz = C \quad (2.4)$$

получаем **уравнение поверхностей уровня в интегральной форме** (с постоянной интегрирования  $C$ ):

$$f(x, y, z) = C, \text{ или } f(x, y, z, C) = 0. \quad (г)$$

Пусть среди бесконечного множества поверхностей уровня (соответственно бесконечному числу значений  $C$ ) есть поверхность, на которой известно давление (выделим параметры, отвечающие этой поверхности, индексом "0"):

$$f(x_0, y_0, z_0) = C_0; \quad (2.5)$$

тогда можно подставить в выражение (2.2) сопряженные значения  $p_0$  и  $x_0, y_0, z_0$ , и задача отыскания давления  $p$  в точке с координатами  $x, y, z$  — решена.

Обычно в качестве известной выступает **свободная поверхность** — поверхность раздела фаз (чаще всего — между жидкостью и газом); именно она далее отмечена индексом "0". Конкретное значение  $C_0$  определяется объемом жидкости  $V$  в технологическом аппарате (иначе: материальным балансом по объему жидкости) и, разумеется, его конфигурацией.

Последовательность (алгоритм) расчета давления в точке запишем в следующем виде:

$$V \rightarrow C_0 \xrightarrow{(2.5)} x_0, y_0, z_0 \xrightarrow[(P_x, P_y, P_z; p_0)]{(2.2)} p. \quad (д)$$

Некоторые примеры реализации этого алгоритма представлены ниже.

### 2.1.2. Давления и поверхности уровня в покоящемся сосуде

Пусть жидкость находится в неподвижном сосуде (рис. 2.1). Координатные оси удобно зафиксировать, совместив плоскость  $xy$  с дном сосуда; ось  $z$  направим вертикально вверх. В качестве внешних массовых сил здесь выступает только сила тяжести (ее ускорение — ускорение свободного падения — равно  $g$ ), направленная против оси  $z$ . Для произвольной точки  $A$  (ее вертикальная координата  $z$ ), очевидно,  $P_x = 0, P_y = 0, P_z = -g$ ; и если известно  $z_0$ , то из (2.2)

$$p - p_0 = \rho(-g)(z - z_0) = \rho gh$$

или

$$p = p_0 + \rho gh, \quad (2.6)$$

где  $h \equiv (z_0 - z)$  — глубина погружения точки  $A$  (под свободной поверхностью)

Координата свободной поверхности  $z_0$  принята постоянной; это отвечает повседневному опыту (поверхность покоящейся жидкости — горизонтальна) и логике анализа (как и любая поверхность уровня, она нормальна к единственной внешней массовой силе — силе тяжести).

Величина  $p$  называется **полным давлением**,  $p_0$  — **внешним**,  $\rho gh$  — **гидростатическим**. Если сосуд соединен с атмосферой, то

Рис.2.1. Давление в точке и свободная поверхность в неподвижном сосуде

$p_0$  равно **атмосферному** давлению  $p_a$ , а величина  $\rho gh$  будет трактоваться как **избыточное** давление (сверх атмосферного).

В практических задачах координата  $z$  точки, где нужно отыскать давление  $p$ , задана; однако  $z_0$  (а с ней и  $h$ ) надо найти — до этого формула (2.6) дает лишь алгоритм (способ, путь) решения. Чтобы довести ее до "расчетного состояния", необходимо воспользоваться уравнением поверхности уровня (2.4):

$$\int (-g) dz = C; \text{ иначе } z = (-C/g) = \text{const.} \quad (2.7)$$

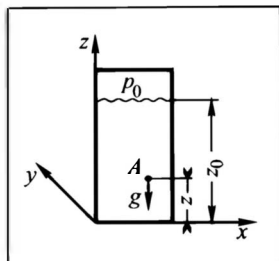
Последнее выражение отвечает горизонтальной плоскости, что теоретически подкрепляет принятый ранее постулат о  $z_0 = \text{const}$ . Заметим, что этот факт, как и отсутствие в формулах (2.6) и (2.7) координат  $x$  и  $y$ , обусловлен действием массовых сил только по оси  $z$ .

Величина  $z_0$  либо задана изначально как уровень жидкости в сосуде, либо ее находят по объему жидкости  $V$ . Например, для сосуда постоянного поперечного сечения  $f$  при отсчете  $z$  от дна сосуда  $z_0 = V/f$ .

Формула (2.6) является математическим выражением закона Паскаля, устанавливающего связь полного давления с внешним. Эта же формула демонстрирует возможность измерения давления в метрах жидкостного столба:

$$h = \frac{p - p_0}{\rho g}, \quad (e)$$

что находит свое отражение в названии правой части (e) или ее составляющих  $p/\rho g$ ,  $p_0/\rho g$ : **пьезометрическая высота**. Это выражение лежит в основе измерения давления пьезометрами, манометрами и вакуумметрами (см. рис. 2.2, а): правая трубка — **пьезометр**, измеряющий избыточное давление  $(p - p_a)/\rho g$  в  $m$  столба рабочей жидкости плотностью  $\rho$ ; левая —  $U$ -образная трубка — **манометр**, измеряющий избыточное давление (в данном примере — в пространстве над жидкостью)  $h_m = (p_0 - p_a)/\rho_m g$  в  $m$  столба манометрической жидкости плотностью  $\rho_m$ . Заметим, что расположение жидкости в коленях манометра на рисунке отвечает неравенству  $p_0 > p_a$ . При  $p_0 < p_a$  уровень жидкости в левом колене будет ниже, чем в правом; такая  $U$ -образная трубка, показывающая разрежение в аппарате по сравнению с атмосферным давлением, называется **вакуумметром**.



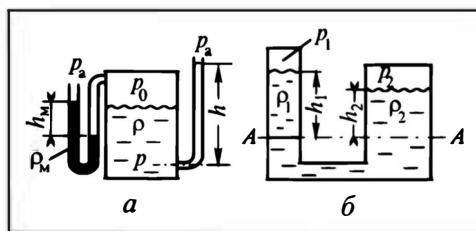


Рис.2.2. Практические приложения (а, б) уравнения (2.6)

Соотношения типа

$$p = \rho gh \text{ и } h = p/\rho g ,$$

а также получаемые на их основе широко используются в последующих разделах.

Исходя из уравнения (2.6) можно записать **закон сообщающихся сосудов** в общем виде. Пусть в двух сообщающихся сосудах находятся несмешивающиеся жидкости (их плотности  $\rho_1$  и  $\rho_2$ ), над свободными поверхностями которых давления равны  $p_1$  и  $p_2$  (см. рис. 2.2, б). Жидкости в сосудах относительно границы их раздела  $A-A$  (жирная линия в левом сосуде) устанавливаются на уровнях  $h_1$  и  $h_2$ . Если рассматривать равновесие жидкостей для сечения  $A-A$  (ниже этого сечения столбы тяжелой жидкостью плотностью  $\rho_2$  уравновешены), то, согласно (2.6), легко выразить давление  $p$  в этом сечении и установить связи между свойствами и параметрами жидкости в сосудах:

$$p = p_1 + \rho_1 gh_1 = p_2 + \rho_2 gh_2 . \quad (\text{ж})$$

Отсюда нетрудно получить выражения для различных частных случаев ( $p_1 = p_2$ ;  $\rho_1 = \rho_2$  и др.), в том числе найти условия, при которых жидкости в сообщающихся сосудах устанавливаются на одинаковом уровне.

### 2.1.3. Давления и поверхности уровня в случае относительного покоя

Основная характерная особенность здесь в том, что сосуд может перемещаться относительно неподвижного наблюдателя; но *относительно системы координат, зафиксированной на движущемся сосуде*, жидкость остается неподвижной, поскольку в каждой ее точке внешние массовые силы уравновешены силами давления. Основная проблема — в выражении единичных массовых сил  $P_x$ ,  $P_y$ ,  $P_z$ .

Рассмотрим отдельные примеры — соответственно различным вариантам формирования внешних массовых сил.

*Цистерна, движущаяся с постоянным ускорением  
по горизонтальной плоскости*

Здесь (рис. 2.3, а) единичные массовые силы *не изменяются* вдоль осей координат. Наряду с силой тяжести (ее ускорение по оси  $z$ , как и в случае абсолютного покоя, равно  $-g$ ) действует еще и массовая сила вдоль оси  $x$ : единичная сила, численно равная ускорению, составляет  $-a$  (знак "минус" показывает, что в системе координат, закрепленной на сосуде, массовая сила направлена против ускорения  $a$ ). Массовые силы вдоль оси  $y$  отсутствуют, поэтому в решение координата  $y$  не войдет.

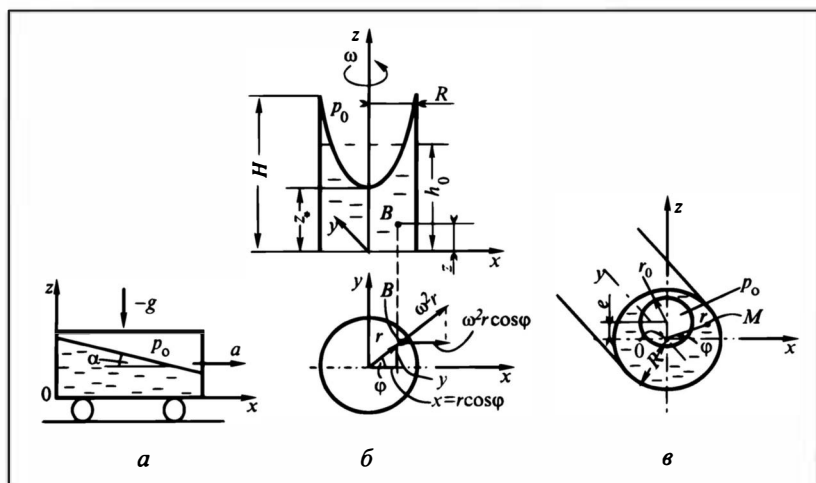
Ограничим задачу нахождением положения свободной поверхности жидкости в цистерне. Подставим в (2.4) значения  $P_x = -a$  и  $P_z = -g$  и проинтегрируем:

$$\int (-a)dx + \int (-g)dz = C; \quad -ax - gz = C.$$

Обозначив  $-C/g \equiv C' = \text{const}$ , придем к уравнению *плоской* поверхности:

$$z = -(a/g)x + C', \quad (3)$$

наклоненной к горизонту под углом  $\alpha$ , тангенс которого  $\text{tg} \alpha = -a/g$ . Значения постоянных  $C, C'$  для свободной поверхности зависят от количества жидкости, первоначально залитой в цистерну (они определяются из материального баланса по жидкости). Зная  $C' = C_0$  и  $\text{tg} \alpha$ , найдем координату любой точки на свободной поверхности; определение далее по (2.2) давления  $p$  в произвольной точке с координатами  $x, z$  затруднений не вызывает.



**Рис. 2.3.** Давление в точке и свободная поверхность — относительный покой:

*а* — цистерна с ускорением на горизонтальной плоскости, *б* — вертикальный сосуд, вращающийся вокруг своей оси, *в* — горизонтальный сосуд, вращающийся вокруг своей оси



*Вертикальный цилиндрический сосуд,  
вращающийся вокруг своей оси*

Здесь (и в следующем примере) единичные массовые силы *изменяют* свои значения вдоль некоторых осей координат (рис. 2.3, б). Определим положение свободной поверхности и давление в произвольной точке *B* в сосуде радиусом *R*, вращающемся вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$  (напомним:  $\omega = 2\pi n$ , где *n* число оборотов сосуда в секунду;  $[\omega] = c^{-1}$ ). Первоначальный уровень жидкости в сосуде  $h_0$ .

Поместим начало координат в центре дна сосуда, ось *z* (ось вращения) направим вверх. Решение задачи начнем с выражения единичных массовых сил, обозначив координаты точки *B* — *x*, *y*, *z* или, переходя к цилиндрическим координатам, *r*,  $\varphi$  и *z*. Радиальная (центробежная) единичная массовая сила на координате *r* составляет  $\omega^2 r$ . Тогда (см. рисунок):

$$P_x = \omega^2 r \cos\varphi = \omega^2 x; \quad P_y = \omega^2 r \sin\varphi = \omega^2 y; \quad \text{как и ранее, } P_z = -g.$$

Подставим эти значения в (2.2) и проинтегрируем:

$$\begin{aligned} p - p_0 &= \rho \left[ \int_{x_0}^x \omega^2 x dx + \int_{y_0}^y \omega^2 y dy - \int_{z_0}^z g dz \right] = \\ &= \rho \left[ \frac{\omega^2}{2} (x^2 - x_0^2) + \frac{\omega^2}{2} (y^2 - y_0^2) - g(z - z_0) \right]. \end{aligned} \quad (\text{и})$$

Поскольку  $x^2 + y^2 = r^2$  и  $x_0^2 + y_0^2 = r_0^2$ , то (и) можно записать компактнее:

$$p - p_0 = \rho \left[ \frac{\omega^2}{2} (r^2 - r_0^2) - g(z - z_0) \right], \quad (2.8)$$

где *r*, *z* — координаты точки, где определяется давление *p*;  $r_0$ ,  $z_0$  — координаты *любой* точки на свободной поверхности — там постоянно (и известно) давление  $p_0$ .

До тех пор, пока координаты  $r_0$ ,  $z_0$  какой-либо точки на свободной поверхности не найдены, задача не может считаться решенной, так как уравнение (2.8) для конкретной ситуации использовать еще нельзя. Для определения пары сопряженных значений  $r_0$ ,  $z_0$  необходимо найти уравнение свободной поверхности. На основании (2.4) имеем

$$\begin{aligned} \int \omega^2 x dx + \int \omega^2 y dy - \int g dz &= C; \\ \frac{\omega^2}{2} x^2 + \frac{\omega^2}{2} y^2 - gz &= C; \quad \frac{\omega^2}{2} r^2 - gz = C. \end{aligned} \quad (\text{к})$$

Последнее из соотношений (к) позволяет найти уравнение

поверхности уровня в общем виде (здесь обозначено:  $C' \equiv -C/g = \text{const}$ ):

$$z = C' + \frac{\omega^2}{2g} r^2. \quad (\text{л})$$

Таким образом, поверхности уровня представляют собой параболоиды вращения с координатами вершины  $C'$ . Выделим среди них *свободную* поверхность:

$$z_0 = C_0 + \frac{\omega^2}{2g} r_0^2. \quad (\text{м})$$

На рис. 2.3, б координата вершины параболической свободной поверхности обозначена  $z_*$ ; при  $r_0 = 0$  имеем  $z_0 = z_*$ , тогда по (м) получается тождественная замена  $C_0 \equiv z_*$ , так что

$$z_0 = z_* + \frac{\omega^2}{2g} r_0^2. \quad (\text{н})$$

Без знания  $z_*$  нельзя найти по (н) искомую пару сопряженных значений  $z_0, r_0$ . Для определения  $z_*$  запишем материальный баланс по жидкости: сколько ее было залито в сосуд ( $V$  — до уровня  $h_0$ ), столько и находится во вращающемся сосуде:

$$V = \pi R^2 h_0 = \pi R^2 z_* + \frac{1}{2} \pi R^2 (H - z_*), \quad (\text{о})$$

причем первое слагаемое в правой части — объем цилиндрической части жидкости высотой  $z_*$ , второе — ее объем выше уровня  $z_*$  (известно, что объем параболоида вращения равен половине объема цилиндра той же высоты). Из (о) после сокращения на  $\pi R^2$  имеем

$$H + z_* = 2h_0, \quad H = 2h_0 - z_* \quad \text{и т. п.} \quad (\text{п})$$

Величину  $H$  можно найти не только из материального баланса (о), но и из соотношения сил по (н):  $z_0 = H$  при  $r_0 = R$  (стенка сосуда):

$$H = z_* + \frac{\omega^2}{2g} R^2. \quad (\text{р})$$

Приравнявая величины  $H$  по (п) и (р), получим

$$z_* = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g}. \quad (\text{с})$$

Подставив это значение  $z_*$  в (н), приходим к расчетному выражению для свободной поверхности:

$$z_0 = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g} + \frac{\omega^2}{2g} r_0^2. \quad (2.9)$$

Теперь, задаваясь произвольно значением  $r_0$ , находим по (2.9) отвечающее ему значение  $z_0$ . Для отыскания давления  $p$  в точке с координатами  $r, z$  необходимо в (2.8) подставить эти сопряженные значения  $r_0, z_0$ .

Из полученных соотношений следует:

— по выражениям (с) и (п) либо (р) можно найти выражение для высоты подъема жидкости у стенок вращающегося сосуда:

$$H = h_0 + \frac{\omega^2 R^2}{4g}; \quad (\text{т})$$

— высота  $H$  растет, а  $z_*$  понижается с увеличением скорости вращения сосуда  $\omega$ . При этом сопоставление (с) и (т) показывает, что подъем жидкости у стенок и опускание вершины параболоида (относительно первоначального уровня  $h_0$ ) выражаются одинаковыми высотами:  $\omega^2 R^2 / (4g)$ .

Важно, что соотношение сил (центробежных и тяжести), вне зависимости от параметров вращения и геометрических характеристик ( $R, h_0$ ), всегда выражается соотношением (н); кстати, именно по этой причине величины  $z_*$  и  $H$  не зависят от плотности жидкости  $\rho$ . А вот материальный баланс по жидкости (о) ранее записан лишь для случая, когда вершина параболоида остается *выше* дна сосуда (или его касается). Значение  $\omega$ , при котором происходит касание дна, легко определяется из (с) при  $z_* = 0$ :  $\omega = (2/R)\sqrt{gh_0}$ . При *больших*  $\omega$  ( $z_* < 0, H > 2h_0$ ) материальный баланс по (о) неправилен, его надо составлять заново.

При расчете давления по (2.8) может получиться  $p < p_0$ , иначе:  $p - p_0 < 0$ . Это означает, что точка  $B$  оказалась над свободной поверхностью, и в действительности давление в ней равно  $p_0$ .

Заметим, что при  $\omega = 0$  задача сводится к покоящейся жидкости, и выражения (2.8), (2.9) закономерно обращаются в (2.6) и (2.7). Но (2.8) также обращается в (2.6), если точку на свободной поверхности взять *над* точкой  $B$ :  $r_0 = r$ . Надо, однако, понимать, что в этом случае в отличие от (2.6) локальная глубина  $h$  погружения точки  $B$  для вращающегося сосуда будет зависящей от параметров вращения, так как координата  $z_0$  по (2.9) связана с  $\omega$ .

### *Горизонтальный сосуд, вращающийся вокруг своей оси*

Ограничимся получением уравнения свободной поверхности. Совместим (рис.2.3, в) ось  $y$  с горизонтальной осью вращения сосуда (вдоль этой оси массовые силы не действуют). Выразим единичные массовые силы, действующие в точке  $M$ :

$$P_x = \omega^2 r \cos\varphi = \omega^2 x; \quad P_y = 0; \quad P_z = -g + \omega^2 r \sin\varphi = -g + \omega^2 z.$$

Подставим эти значения в (2.4), выполним операцию интегрирования и перейдем к записи уравнения *свободной* поверхности. В ходе вывода заменим постоянную интегрирования  $C$ , обозначив  $\frac{C}{\omega^2/2}$  через  $C'$ , а для свободной поверхности —

через  $C_0$ . Тогда

$$\int \omega^2 x dx + \int (-g + \omega^2 z) dz = C; \quad \frac{\omega^2}{2} x^2 + \frac{\omega^2}{2} z^2 - gz = C;$$

$$x^2 + z^2 - \frac{2g}{\omega^2} z = C' \quad \text{и} \quad x_0^2 + z_0^2 - \frac{2g}{\omega^2} z_0 = C_0.$$

Добавив к обеим частям последнего равенства постоянную величину  $(g/\omega^2)^2$ , получим

$$x_0^2 + \left[ z_0^2 - 2 \frac{g}{\omega^2} z_0 + \left( \frac{g}{\omega^2} \right)^2 \right] = C_0 + \left( \frac{g}{\omega^2} \right)^2 \equiv C'_0,$$

или

$$x_0^2 + \left( z_0 - \frac{g}{\omega^2} \right)^2 = C'_0 \quad (y) \quad (9)$$

— уравнение окружности (в пространстве — цилиндра) радиусом  $r_0 = \sqrt{C'_0}$ , не соосной с цилиндром, конкретно — с центром, поднятым над осью вращения сосуда (точка 0) на высоту  $e = g/\omega^2$ . Для сосуда радиусом  $R$  и длиной  $l$  при объеме первоначально залитой жидкости  $V$  значение  $r_0$  определяется из материального баланса по жидкости  $V = \pi(R^2 - r_0^2)l$ , причем, очевидно,  $r_0^2 = x_0^2 + z_0^2$ . Итак, поверхности уровня (в их числе — свободная поверхность) представляют собой цилиндры, оси которых смещены вверх относительно оси вращения сосуда на величину эксцентриситета  $e$ . Из выражения (9) видно, что с увеличением скорости вращения сосуда  $\omega$  эксцентриситет  $e$  уменьшается; при высоких значениях  $\omega$  (теоретически — при  $\omega \rightarrow \infty$ ) получается  $e \rightarrow 0$ , и свободная поверхность становится практически соосной с цилиндрическим сосудом.

Задачи на абсолютный покой или относительный — для цистерны, вертикального вращающегося сосуда и ряд других — принадлежат к гидростатике с полным основанием — теоретически и практически. Задачу для горизонтально вращающегося сосуда к гидростатике можно отнести лишь умозрительно: в действительности же для поддержания найденной выше цилиндрической формы свободной поверхности необходимо постоянное (мгновенное) перетекание жидкости из верхних зон в нижние. Реально это протекание не успевает за вращением сосуда, и практически эксцентриситет  $e$  получается менее рассчитанного, равного  $g/\omega^2$ .

#### 2.1.4. Силы давления на дно и боковые стенки сосуда

Будем решать задачу определения сил давления для покоящегося сосуда, жидкость в котором находится под действием *силы тяжести*.

**Сила давления на дно сосуда.** Пусть в сосуде, площадь дна которого  $F_{\text{дн}}$ , находится жидкость плотностью  $\rho$ ; уровень жидкости в сосуде  $h$ , давление над свободной поверхностью  $p_0$ . Тогда во всех точках дна давление одинаково и, согласно (2.6), равно  $p = p_0 + \rho gh$ . Сила полного давления на дно сосуда по второму из выражений (1.5) составляет:

$$P_{\text{дн}} = pF_{\text{дн}} = (p_0 + \rho gh)F_{\text{дн}} = p_0F_{\text{дн}} + \rho ghF_{\text{дн}}. \quad (2.10)$$

Первое из слагаемых в правой части представляет собой силу *внешнего* давления, второе — *гидростатического*. Подчеркнем, что сила давления на дно сосуда *не зависит* от его конфигурации — важны лишь площадь дна  $F_{\text{дн}}$  и уровень жидкости в сосуде  $h$  (разумеется, также плотность жидкости  $\rho$  и внешнее давление  $p_0$ ).

**Сила давления на боковые стенки сосуда.** Ограничимся решением задачи применительно к плоской вертикальной стенке\* — она показана в изометрической проекции на рис.2.4. Необходимо найти силу давления, действующую на интересующий нас фрагмент поверхности  $F$ , и точку приложения ее равнодействующей. Поскольку глубина погружения различных точек площадки  $F$  относительно свободной поверхности (ее уровень обозначен  $x - x$ ) различна ( $h = \text{var}$ ), то найдем сначала элементарную силу давления  $dP$ , действующую на бесконечно малую поверхность  $df$ , находящуюся на некоторой *текущей* глубине  $h$ . Для этого воспользуемся выражением (2.6) и первой из формул (1.5):

$$dP = (p_0 + \rho gh)df.$$

Проинтегрируем это уравнение по всей поверхности  $F$ :

$$P = p_0F + \rho g \int\limits_{(F)} h df. \quad (\Phi)$$

Второе слагаемое в правой части содержит статический момент площади  $\int\limits_{(F)} h df$ ; по теореме о среднем он равен произведе-

нию некой "средней" глубины погружения  $h_{\text{ц}}$  площадки  $F$  на величину этой площадки  $F$ :

$$\int\limits_{(F)} h df = h_{\text{ц}} F.$$

---

\* Для плоской наклонной и криволинейной стенок задача рассмотрена в [6].

Рис.2.4. К определению силы давления на боковую стенку и центра давления:

ЦТ — центр тяжести (массы), ЦД — центр давления

При этом координата  $h_{ц}$  представляет собой глубину погружения центра масс площади  $F$ . Тогда сила полного давления на боковую стенку

$$P = p_0 F + \rho g h_{ц} F. \quad (2.11)$$

Первое слагаемое в правой части есть сила внешнего давления, второе — гидростатического. Заметим, что во многих практических задачах (прежде всего для открытых аппаратов) сила внешнего давления уравнивается аналогичной силой снаружи аппарата, так что в расчетном плане иногда интерес может представлять только сила избыточного давления.

В отличие от днища, для боковой поверхности сила давления (гидростатического, полного) изменяется с глубиной. Поэтому возникает проблема отыскания точки приложения ее равнодействующей; эту точку называют **центром давления**. Найдем координату центра гидростатического давления  $h_{д}$ , для чего применим теорему механики, гласящую, что относительно некоторой оси момент равнодействующей силы равен сумме моментов составляющих. Моменты будем брать первоначально относительно оси  $x - x$ , совпадающей с положением свободной поверхности в плоскости боковой стенки:

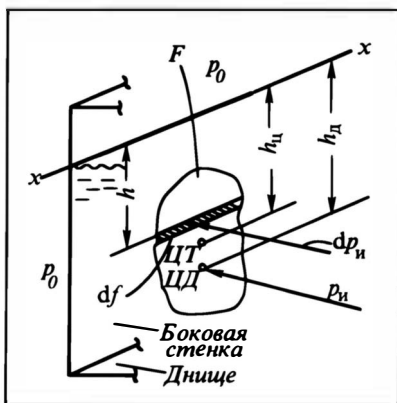
$$P_{г/с} h_{д} = \int\limits_{(F)} h dP_{г/с}. \quad (x)$$

Раскроем смысл полной силы гидростатического давления  $P_{г/с}$  по (2.11) и элементарной  $dP_{г/с}$  по (1.5):  $P_{г/с} = \rho g h_{ц} F$ ;  $dP_{г/с} = \rho g h d f$ ; подставим эти значения в (x). После сокращения на  $\rho g$  получим

$$h_{ц} h_{д} F = \int\limits_{(F)} h^2 d f \equiv I_{xx}, \quad (ц)$$

где  $I_{xx}$  называется **моментом инерции площадки  $F$  произвольной формы относительно оси  $x - x$** .

Если подставить в (ц) значение  $h_{ц}$  через статический момент площадки  $F$ , то получится, что  $h_{д}$  есть отношение моментов этой площадки 2-го (инерции) и 1-го (статического) порядков относительно оси  $x - x$ . Обычно удобнее оперировать моментом



инерции  $I_0$  относительно горизонтальной оси  $0 - 0$ , проходящей через центр масс площадки  $F$  (его легче рассчитать; он приводится в справочниках). Формула определения моментов для параллельного переноса осей известна из теоретической механики:  $I_{xx} = I_0 + h_{ц}^2 F$ . Подставим это значение  $I_{xx}$  в (ц):

$$h_{ц} h_{д} F = I_0 + h_{ц}^2 F ,$$

откуда

$$h_{д} = h_{ц} + \frac{I_0}{F h_{ц}} . \quad (2.12)$$

Из (2.12) следует, что точка приложения равнодействующей для вертикальной (наклонной — тоже) поверхности находится *ниже* центра тяжести площади — это следствие нарастания давления по мере увеличения глубины.

Определение  $I_0$  при известной конфигурации площадки  $F$  принципиальных затруднений не вызывает.

Приведем пример расчета  $I_0$  для прямоугольной площадки основанием  $a$  и высотой  $b$ . Очевидно, что горизонтальная ось  $0 - 0$  проходит через середину площадки и делит ее пополам, так что для каждой половины высоты  $h$  изменяются от 0 до  $b/2$ . Элементарная площадка равна  $adh$ . Тогда момент  $I_0$  для обеих площадок вместе равен

$$I_0 = 2 \int_0^{b/2} h^2 adh = 2a \left. \frac{h^3}{3} \right|_0^{b/2} = \frac{ab^3}{12} .$$

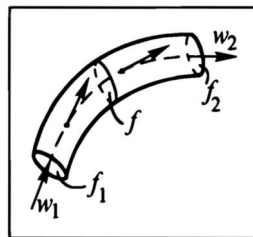
Для случая, когда  $a = a(h) = \text{var}$ , его нельзя выносить из-под знака интеграла, но общий подход к определению  $I_0$  сохраняется.

## 2.2. ГИДРОДИНАМИКА (ОБЩИЕ ПРОБЛЕМЫ)

Кардинальная задача гидродинамики, как указывалось в разд. 1.5, состоит в определении взаимосвязанных давления и скорости в какой-либо точке технологического пространства в произвольный момент времени. При этом в отличие от гидростатики давление в точке (его называют **гидродинамическим**) здесь по разным направлениям — *различно*. Решение кардинальной задачи позволяет проследить траектории и характеристики движения жидкости в зависимости от конфигурации канала и условий течения — это зачастую отправная точка для решения конкретных технологических задач.

Общий характер течения жидкости наглядно представляется в виде **линий тока**, в каждой точке которых вектор скорости движения совпадает с касательной к этой линии (рис. 2.5). При установившемся движении линии тока сохраняются неизменны-

Рис.2.5. Линия тока и трубка тока



ми, при неустановившемся — это мгновенная характеристика, изменяющаяся во времени. В непосредственной близости к рассматриваемой проходят другие линии тока, создавая совместно **трубку тока**. Совокупность трубок тока в канале образует **поток** рабочего тела (жидкости, газа и т. п.). Ряд гидродинамических соотношений, справедливых для трубки тока (ее живое сечение можно трактовать как бесконечно малое), в практических целях нередко распространяют на поток в целом — это *загрубляет* анализ, делая полученные соотношения в известной мере приближенными, но зато позволяет использовать выявленные закономерности для решения некоторых инженерных задач.

Различают **внутренние** и **внешние** задачи гидродинамики. Первая группа задач относится к течениям *внутри* каналов, труб, аппаратов — поток ограничен наружной стенкой, закономерности течения определяются взаимодействием потока с этими стенками. Вторая группа задач изучает течение *снаружи* тел, его закономерности зависят от взаимодействия обтекаемых тел с невозмущенной (в идеале — неограниченной) средой. Более сложными являются **смешанные** задачи, когда движущаяся среда (жидкости, газы, твердые тела, их смеси) гидродинамически взаимодействует со стенками канала и обтекаемыми телами — посторонними (при движении однофазных сред) либо составляющими поток (при движении многофазных систем). Здесь нередко вводятся термины "стесненное движение", "стесненное обтекание" и т.п.

Заметим: в основе закономерностей движения потоков в условиях внутренних и внешних задач лежат общие предпосылки, в частности устанавливаемые законом (1.9). Поэтому при решении упомянутых задач возможны *общие* подходы; в ряде случаев к успеху приводит подмена одной задачи другою.

В химической технологии достаточно часто встречаются все три вида задач. Ниже последовательно анализируются сначала внутренние задачи гидродинамики (разд. 2.2.1 — 2.6), а затем внешние (разд. 2.7) и кратко — смешанные (разд. 2.8).

### 2.2.1. Уравнение Бернулли

Уравнение Навье—Стокса (1.20) чаще всего весьма сложно для аналитического решения инженерных задач (даже в случае стационарных течений) — из-за многочисленности связей (часто — нелинейных) между входящими в уравнение величинами.



нами, трудностей в достаточно точном формулировании граничных условий и возникающих чисто математических осложнений. За довольно редким исключением решить эти уравнения аналитически не удастся, причем наибольшие трудности представляет операция двойного интегрирования фрагментов уравнения, включающих лапласиан. Чтобы создать основу для инженерных решений, уравнение Навье—Стокса значительно упрощают, проводя анализ первоначально для *идеальной* жидкости, т. е. отбрасывая слагаемые, содержащие  $\nu, \mu = 0$ . Это, однако, может привести к существенным погрешностям при описании и расчете течения *реальных* жидкостей. Поэтому в дальнейшем в полученные решения вводят поправки, призванные учесть сделанные ранее допущения, т. е. скомпенсировать слагаемые, отброшенные в уравнении Навье—Стокса.

### *Уравнение Бернулли для идеальной жидкости*

Будем рассматривать частный, но наиболее часто встречающийся случай течения *в поле сил тяжести*.

Уравнение Навье—Стокса (1.20) может быть записано для любого направления. Выберем (рис. 2.6) бесконечно малый участок трубки тока  $dl$ , наклоненный к горизонту под углом  $\alpha$ , и запишем применительно к этому участку уравнение Навье—Стокса для идеальной жидкости — в направлении  $l$ :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} = -g \sin \alpha - \frac{dw}{dt}. \quad (2.13)$$

Здесь  $-g \sin \alpha$  — единичная массовая сила вдоль оси  $l$  (ось  $z$  по-прежнему направлена вертикально вверх, единичная массовая сила вдоль нее равна  $-g$ ),  $w$  — скорость потока вдоль оси  $l$ .

Пусть течение является стационарным:  $\partial w / \partial \tau = 0$ ; поскольку движение — *однонаправленное\**, то  $dw/dt = w(\partial w / \partial l)$ . В результате в уравнении остается одна независимая переменная  $l$ , так что частные производные можно заменить обыкновенными:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dl} = -g \sin \alpha - w \frac{dw}{dl}.$$

Домножим каждое слагаемое на  $dl$ , произведем замены  $(dl) \sin \alpha = dz$ ,  $w dw = dw^2/2$  и соберем все слагаемые в одну часть равенства:

$$g dz + \frac{1}{\rho} dp + \frac{dw^2}{2} = 0 \quad (a)$$

---

\* Это утверждение является приближенным, поскольку в общем случае не обязательно  $f_i = f_j$ , так что составляющие этих скоростей вдоль других направлений не строго равны нулю. Заметим, что точный анализ, требующий весьма громоздких преобразований, приводит к *тем же* конечным результатам.

Рис.2.6. К выводу уравнения Бернулли

или

$$dz + \frac{dp}{\rho g} + \frac{dw^2}{2g} = 0. \quad (2.14)$$

Эти выражения представляют собой **уравнения Бернулли в дифференциальной форме**.

Поскольку сумма дифференциалов равна дифференциалу суммы, то для несжимаемой жидкости ( $\rho = \text{const}$ )

$$d\left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{w^2}{2g}\right) = 0,$$

откуда получается **уравнение Бернулли в интегральной форме**:

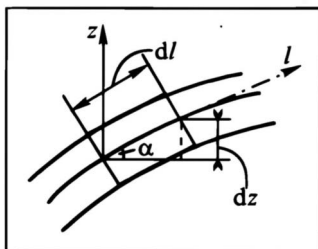
$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{w^2}{2g} = \text{const}. \quad (2.15)$$

Уравнение пока что записано для *трубки тока*. Чтобы это уравнение можно было применять для инженерных расчетов, его распространяют на течение в *канале в целом* (потери в точности при таком загроублении невелики), относя характеристики течения к полному живому сечению потока  $f$ ; тогда скорость  $w$  принимает смысл **средней скорости** в сечении потока.

Нередко удобно анализировать изменение характеристик течения между двумя сечениями  $f_1$  и  $f_2$ . Пусть между этими сечениями нет дополнительных Приходов и Уходов жидкости (помимо Прихода поступающей жидкости через сечение  $f_1$  и Ухода через  $f_2$  жидкости, покидающей рассматриваемый участок). В этом случае выражение (2.15) можно записать для сечений  $f_1$  и  $f_2$  прямого канала:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{w_2^2}{2g}. \quad (2.15a)$$

В выражениях (2.15) и (2.15a) все слагаемые имеют размерность длины (в СИ измеряются в м) и представляют собой в *геометрической* интерпретации некие высоты. При этом  $z_1$  и  $z_2$  — расстояния центров сечений канала от некоторой произвольно выбранной горизонтальной **плоскости отсчета**. Подчеркнем, что ее расположение — безразлично (обусловлено лишь соображениями удобства), поскольку для течений существенна *разность* уровней  $z_1 - z_2$ . Каждое из этих слагаемых на-



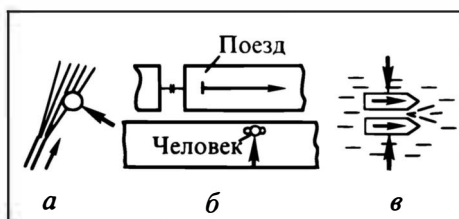


Рис.2.7. Иллюстрация эффекта Бернулли:

*а* — легкий шарик в потоке воздуха, *б* — человек на платформе вблизи мчащегося поезда, *в* — два параллельно движущихся корабля

зывается **геометрической**, или **нивелирной** высотой. Слагаемые вида  $p/(\rho g)$  называются **пьезометрическими** высотами (см. разд. 2.1.2); на такую высоту поднимается жидкость плотностью  $\rho$  под давлением  $p$ . Подчеркнем, что и здесь уровень отсчета давлений безразличен (можно вести отсчет от нуля, от атмосферного или какого-либо иного давления), так как для течения существенна *разность* давлений  $p_1 - p_2$ . Наконец, слагаемые вида  $w^2/(2g)$  называются **скоростными** (реже — **кинетическими**) высотами.

Наряду с термином "высота" в гидравлике для этих слагаемых используют термин **напор**. Высоты, напоры измеряются в *м* столба движущейся (рабочей) жидкости. Сумма трех рассматриваемых слагаемых называется **полным**, или **динамическим** напором (высотой).

Из выражений (2.15) и (2.15а) следует, что при течении идеальной жидкости геометрическая, пьезометрическая и скоростная высоты могут изменять свои значения от сечения к сечению, но сумма их (при отсутствии дополнительных Приходов и Уходов жидкости между сечениями) есть величина постоянная. Это означает, что при уменьшении (увеличении) какого-либо одного из слагаемых обязательно увеличится (уменьшится) какое-нибудь из остальных (или они оба). Так, при увеличении скорости (особенно — при сильном) уменьшается давление (на этом принципе работают инжекционные устройства).

Наглядная иллюстрация эффектов Бернулли представлена на рис. 2.7: легкий шарик не выпадает из наклонной газовой струи (внутри нее — область высоких скоростей и пониженных давлений); нельзя находиться на платформе близко к быстро идущему поезду (человека может притянуть к мчащемуся составу); не допускается быстрое параллельное движение двух рядом идущих кораблей (скорость воды между ними больше, чем снаружи, так что возникающая разница в давлениях может привести к их бортовому столкновению). На использовании уравнения Бернулли основано применение **напорных трубок** для измерения

скоростей: очевидно, что пьезометр, присоединенный к трубке, отверстие которой выставлено *против* потока, покажет суммар-

ный напор  $\frac{p}{\rho g} + \frac{w^2}{2g}$ , откуда нетрудно, зная давление, найти ско-

рость  $w$ . Примерами практических приложений уравнения Бернулли могут также служить инжекторы и эжекторы (см. разд. 3.4.2, 4.6 и 9.6.7).

Для **энергетической** интерпретации уравнения Бернулли надо представить слагаемые в форме, аналогичной (а), и домножить их на  $\text{кг}/\text{кг}$ . Тогда слагаемые приобретают смысл, ясный из со-

поставления размерностей; например:  $[z \cdot g] \frac{\text{м} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \frac{\text{кг}}{\text{кг}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \frac{\text{м}}{\text{кг}} =$

$= \frac{H \cdot \text{м}}{\text{кг}} = \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$  — это **удельная энергия** (т.е. отнесенная к 1  $\text{кг}$

жидкости). При этом  $z \cdot g$  — **удельная потенциальная энергия жидкости, поднятой на высоту  $z$** ;  $p/\rho$  — **удельная потенциальная энергия давления**;  $w^2/2$  — **удельная кинетическая энергия**. Сумма этих энергий представляет собой **полную** энергию потока. В этом аспекте уравнение Бернулли означает, что потенциальные энергии и кинетическая энергия могут изменяться от сечения к сечению, но суммарно их энергия (при отсутствии дополнительных Приходов и Уходов энергии между рассматриваемыми сечениями) остается неизменной. Таким образом, уравнение Бернулли является одним из выражений **Закона сохранения энергии**.

Заметим, что слагаемые уравнения Бернулли в его энергетической интерпретации, будучи умножены на плотность  $\rho$ , приобретают смысл соответствующих удельных энергий, отнесенных к **единице объема**.

### *Уравнение Бернулли для реальной жидкости*

Анализ течения идеальной жидкости проведен при игнорировании сил трения, что позволило отбросить слагаемые  $\nu \nabla^2 w$  в уравнении Навье — Стокса. При течении реальных жидкостей необходимо внести поправки, отражающие действие сил трения, т.е. учитывающие затраты энергии на преодоление этих сил, и тем самым компенсировать отброшенные члены уравнения, выражающие силы вязкости (вязкостные члены).

Пусть реальная жидкость в сечении 1 характеризуется теми же составляющими напора и полным напором (или энергией),

что и идеальная:  $z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g}$ ; к сечению 2 этот напор (энер-

гия)  $z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{w_2^2}{2g}$  будет для реальной жидкости *меньше*, нежели

для идеальной, поскольку часть энергии по пути от сечения 1 к сечению 2 затрачена на преодоление сил трения — происходит рассеяние (диссипация) энергии, часть ее переходит в теп-

лоту. В результате для реальной жидкости  $z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{w_2^2}{2g} < z_1 +$

$+\frac{p_1}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g}$ . Чтобы вернуться к записи в форме *равенства*, необ-

ходимо для сечения 2 ввести дополнительное слагаемое, выражающее упомянутые потери энергии. В терминах геометрической интерпретации говорят о **потерянном напоре (потерянной высоте)**, обозначаемом символом  $h_n$  и измеряемом (как и другие слагаемые) в  $m$  жидкостного столба. Таким образом, для реальной жидкости

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{w_2^2}{2g} + h_n. \quad (2.16)$$

Итак, при течении идеальной жидкости полный напор в сечении 2 был равен зафиксированному в сечении 1, а при течении реальной жидкости — он в сечении 2 стал меньше. Важно установить, за счет какой составляющей произошло уменьшение напора в сечении 2 при переходе от идеальной жидкости к реальной. Величина  $z_2$  (как и  $z_1$ ) — характеристика канала, она от свойств протекающих по нему жидкостей не зависит и потому на переход к реальной жидкости повлиять не может. Величина  $w_2$  при заданном объемном расходе  $V$  также не изменяется при переходе от идеальной жидкости к реальной, поскольку жидкость несжимаема (идеальная — теоретически, реальная — практически); это следует из уравнения расхода  $w_2 = V/f_2$  (площадь живого сечения  $f_2$  от свойств жидкости, естественно, не зависит). Значит, при переходе от идеальной жидкости к реальной изменение претерпевает *давление*  $p_2$ . Если сопоставить правые части уравнений (2.16) и (2.15а), обозначив давление для идеальной жидкости  $p_2^n$ , то при одинаковых левых частях уравнений имеем

$$z_2 + \frac{p_2^n}{\rho g} + \frac{w_2^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{w_2^2}{2g} + h_n. \quad (б)$$

Отсюда видно, что  $\frac{p_2^n}{\rho g} = \frac{p_2}{\rho g} + h_n$ , так что *потери давления*

(напора) при течении реальной жидкости от сечения 1 к сечению 2 составляют:

$$h_{\Pi} = \frac{p_2^{\text{н}} - p_2}{\rho g} = \frac{\Delta p_{\Pi}}{\rho g}. \quad (\text{в})$$

Таким образом, введение  $h_{\Pi}$  позволяет обойти сложности решения уравнения Навье—Стокса, связанные с учетом (интегрированием) вязкостных членов. Теперь все трудности расчета перенесены на определение  $h_{\Pi}$ . Расчет этой величины является одной из важнейших проблем гидродинамики: знание  $h_{\Pi}$  необходимо при расчете напорных устройств (насосов и т.п.), определении основных параметров течения в трубопроводах (задачи эксплуатации и проектирования), выборе режимных характеристик при осуществлении ряда процессов и т.д. Значительная часть последующих разделов этой главы (включая и внешние задачи гидродинамики) связана с определением потеряннго напора.

### 2.2.2. Уравнение Дарси—Вейсбаха

Для определения потерь напора  $h_{\Pi}$  при течении жидкости рассмотрим прямолинейный участок трубопровода длиной  $l$  с произвольной (но постоянной) формой поперечного сечения  $f$ ; пусть периметр этого сечения равен  $\Pi$ , причем канал *заполнен* движущейся жидкостью, так что речь идет о *смоченном периметре*.

Воспользуемся общим приемом, нередко применяемым в курсе ПАХТ для определения неизвестной величины: приравняем два выражения, первое из которых *содержит* искомую величину и *формально* описывает некое явление, процесс, а второе дает *физически обоснованное* описание того же явления, процесса.

Потеря давления  $\Delta p_{\Pi}$  обусловлена силой трения. Выразим эту силу формально — по (1.5) и (в) через потеряннй напор  $h_{\Pi}$ :  $\Delta p_{\Pi} f = h_{\Pi} \rho g f$ . Эта же сила может быть записана, согласно (1.6), как произведение напряжения трения *на стенках* канала  $\tau_{\text{т}} \equiv \tau_s$  и поверхности трения — боковой поверхности канала  $\Pi l$ :  $\tau_s \Pi l$ . Таким образом,

$$h_{\Pi} \rho g f = \tau_s \Pi l, \quad (\text{г})$$

откуда

$$h_{\Pi} = \frac{\Pi \kappa_s}{f \rho g}. \quad (\text{д})$$

Это выражение демонстрирует характер влияния отдельных параметров потока на  $h_{\Pi}$ . Преобразуем (д) к виду, более удобному для инженерных расчетов.

Отношение **живого сечения** потока  $f$  к смоченному периметру  $\Pi$  характеризует форму канала и называется **гидравлическим ра-**

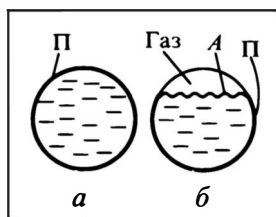


Рис. 2.8. К расчету эквивалентного диаметра живого сечения (П — смоченный периметр; тонкая линия А в смоченный периметр не включается)

диусом живого сечения:

$$R_r \equiv f/\Pi. \quad (\varepsilon)$$

Существенно, что речь здесь идет о сечении и периметре *не* канала, а живого сечения потока — эти понятия совпадают только для каналов, в которых все сечение занято жидкостью (рис. 2.8, а). Если же живое сечение потока составляет некоторую долю сечения канала (рис. 2.8, б), то часть периметра потока, соприкасающегося не со стенкой, а с газом, не включается в смоченный периметр. (Молчаливо предполагается, что трением потока на границе с газом можно пренебречь.) Смоченный периметр потока на рис. 2.8, б обозначен более жирно.

Для наиболее часто встречающихся заполненных потоком *круглых* сечений радиусом  $R$  имеем по (е):  $R_r = (\pi d^2/4)/(\pi d) = d/4$ , т.е. гидравлический радиус не совпадает с геометрическим:  $R_r = R/2$ . Это создает неудобства при расчетах; поэтому вводят **эквивалентный диаметр**  $d_e$ , равный учетверенному гидравлическому радиусу:

$$d_e = 4R_r = 4f/\Pi. \quad (\text{ж})$$

Для круглых сечений  $d_e = d$ .

Введение  $R_r$  и  $d_e$  обусловлено предположением, что в случае канала с произвольной формой сечения можно воспользоваться расчетными соотношениями, установленными для круглого сечения, если вместо диаметра подставить в эти соотношения величину  $d_e$ . Это предположение не является строгим, но для ряда задач (прежде всего для округлых сечений без внутренних выступов и острых углов) оно существенно упрощает расчеты, не снижая сколько-нибудь заметно их точности.

Подставив в (д)  $4f/\Pi = d_e$ , получим

$$h_n = \frac{l}{d_e} \frac{4\tau_s}{\rho g}. \quad (\text{з})$$

Трудноопределимым в этом выражении является напряжение трения на стенках канала  $\tau_s$ . От него избавляются, подставляя вместо  $4\tau_s/(\rho g)$  пропорциональную ей иную величину той же размерности:  $m$ . В качестве такой величины не следует выбирать  $\tau$  или  $p/\rho g$ : из-за неопределенности начала отсчета; из-за изменения значений  $\tau$  и  $p/\rho g$  по длине канала; из-за того, что характеристики течения вообще зависят не от значений  $\tau$  и  $p/\rho g$ , а от их разностей  $\Delta\tau = \tau_1 - \tau_2$  и  $\Delta p = p_1 - p_2$ . Комплекс  $4\tau_s/(\rho g)$  принимается пропорциональным скоростному напору:

$$\frac{4\tau_s}{\rho g} = \lambda_r \frac{w^2}{2g}. \quad (\text{и})$$

Это удобно, поскольку в каналах постоянного сечения скорость  $w$  не изменяется по их длине; а при изменении сечения —

$w$  легко пересчитывается по уравнению расхода. Однако не соображения удобства являются здесь определяющими. Напомним, что член  $h_n$  появился в результате перехода от реальной жидкости к идеальной и обратно, чтобы избежать трудностей интегрирования уравнения Навье—Стокса; конкретно речь шла о слагаемых  $\nu \nabla^2 w_j$ . Поэтому  $h_n$  должен структурно включать величины, изначально содержащиеся в отброшенных членах уравнения Навье—Стокса — скорость и др. К тому же заключению приводит рассмотрение формулы Ньютона (1.9) для напряжения трения  $\tau_T$  (и  $\tau_s$  — тоже). Наконец, скорость  $w$  масштабно связана с внутренней характеристикой течений  $\sqrt{\tau_s / \rho}$ , называемой **динамической скоростью** (см. разд. 2.2.5), что является еще одним доводом к использованию  $w^2 \sim \tau_s / \rho$ .

Подставив значение рассматриваемого комплекса по (и) в выражение (з), приходим к расчетному соотношению

$$h_n = \lambda_\Gamma \frac{l}{d_e} \frac{w^2}{2g}, \quad (2.17)$$

называемому **уравнением равномерного движения**, или чаще — **уравнением Дарси—Вейсбаха**. В практике технологических расчетов это уравнение нередко используется в форме

$$\Delta p_n = h_n \rho g = \lambda_\Gamma \frac{l}{d_e} \frac{w^2}{2} \rho. \quad (2.17a)$$

Для круглых труб в эти выражения вместо  $d_e$  входит геометрический диаметр  $d$ .

Коэффициент пропорциональности  $\lambda_\Gamma$  носит название **коэффициента гидравлического сопротивления** (или **коэффициента внутреннего трения**). Этот безразмерный коэффициент для каналов с конкретными значениями  $l$  и  $d$  (или  $d_e$ ) однозначно связан с числом Эйлера. Форма связи ясна из (2.17a):

$$\frac{\Delta p_n}{\rho w^2} \equiv Eu = \lambda_\Gamma \frac{l}{2d_e}, \quad (к)$$

причем симплекс  $l/d_e$  не был выявлен в ходе масштабных преобразований, приводящих к написанию  $Eu$ , поскольку геометрический множитель подобия  $m_\Gamma$  считается одинаковым по всем линейным координатам.

Коэффициент гидравлического сопротивления имеет вполне определенный физический смысл. Согласно феноменологическому подходу, обусловившему появление  $\lambda_\Gamma$ , можно записать соответственно (и):

$$\lambda_\Gamma = 8 \frac{\tau_s}{\rho w^2}. \quad (л)$$

Это же выражение получается из физических соображений — путем сопоставления потоков импульса и количества движения



(т.е. соответствующих пропускных способностей). Действительно, поток импульса в единицу времени, отвечающий диссипации энергии за счет трения жидкости о стенки канала, равен  $\tau_s \Pi l$ ; количество движения массового потока жидкости  $G$  может быть записано как  $Gw = (\rho wf)w = \rho w^2 f$ . Из выражения (г)  $\Delta p_{\Pi} f = \tau_s \Pi l$ . Тогда по (2.17а) применительно к круглой (в целях простоты) трубе, где  $\Pi = \pi d$  и  $f = \pi d^2/4$ , имеем

$$\tau_s \pi d l = \lambda_r \frac{l}{d} \frac{w^2}{2} \rho \frac{\pi d^2}{4},$$

откуда приходим к выражению (л).

Таким образом, по физическому смыслу коэффициент  $\lambda_r$  представляет собой соотношение потока импульса к стенкам канала (т.е. нормально к направлению движения скорости) и количества движения жидкостного потока вдоль канала.

Ввод скоростного члена  $w^2/2g$  в выражение для  $h_{\Pi}$  позволяет (правда, еще не доказано, что в полной мере) установить связь сил трения со скоростью. Но согласно уравнению Навье—Стокса (1.20) и формуле Ньютона (1.9), в  $h_{\Pi}$  должно еще быть отражено влияние вязкости  $\mu$ ,  $\nu$  (кстати, и линейного размера, входящего в производные в указанных формулах). Пока можно лишь предполагать, что от этих характеристик должен зависеть  $\lambda_r$ .

Уравнение Дарси—Вейсбаха является формальным соотношением, широко используемым в технологических расчетах для определения  $h_{\Pi}$ ,  $\Delta p_{\Pi}$ . Его формальность обусловлена принятой заменой в форме (и), так как в общем на тех же основаниях можно было бы предложить и другие замены, например  $\tau_s/(\rho g) \sim \nu/w$ , причем  $\nu/w$  тоже имеет размерность  $h_{\Pi}$  (м) и отвечает отброшенному слагаемому в (1.20) или формуле (1.9). Но исторически был принят путь (и), и в гидравлике традиционно используется именно уравнение Дарси — Вейсбаха. Законченность (надежность, прогнозность) это уравнение получает, когда удается установить физически обоснованные качественные и количественные связи  $\lambda_r$  с определяющими параметрами течения.

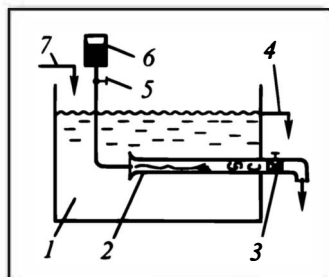
### 2.2.3. Режимы течения жидкости

Расчетное выражение для  $\lambda_r$  (и численное значение коэффициента) зависит от **режима течения жидкости**. Понятие о режимах течения утвердилось в гидравлике после исследований английского ученого О.Рейнольдса в конце XIX в.

Экспериментальная установка Рейнольдса состояла (рис. 2.9) из прозрачного резервуара 1, заполняемого рабочей жидкостью (уровень ее в ходе опыта поддерживался постоянным с помощью подпитки 7 и сливного устройства 4), прозрачной горизонтальной трубы 2 с плавным входом, регулировочного вентил 3 и сосуда с жидкой темной краской 6. Из сосуда 6 краска по капилляр-

**Рис.2.9. Опыт Рейнольдса:**

1 — резервуар с рабочей жидкостью, 2 — экспериментальная труба, 3 — регулирующий вентиль, 4 — слив избытка жидкости, 5 — кран, 6 — сосуд с краской, 7 — линия подачи рабочей жидкости



ной трубке могла подводиться в какую-либо точку входного сечения трубы 2 (поток краски регулировали краном 5). В ходе опытов варьировали диаметр труб 2, скорости жидкости (их рассчитывали по расходу) и ее свойства (плотность, вязкость). Индикатором характера течения служила краска.

Опыты с гладкими трубами показали, что в трубах малого диаметра при небольших скоростях жидкости подаваемая во входное сечение струйка краски проходила по всей длине трубы не размываясь. Такое параллельно-струйчатое (слоистое) течение было названо **ламинарным** (по латыни *lamina* — полоска, пластинка). В трубах большого диаметра и при высоких скоростях частицы жидкости (а с нею и краски) перемещались хаотически по различным траекториям — с визуально наблюдаемыми завихрениями; в результате поток интенсивно перемешивался и на некотором расстоянии от входа в трубу равномерно окрашивался. Такое бурное течение с нестационарным возникновением и разрушением жидкостных образований было названо **турбулентным** (*turbulentus* означает бурный, беспорядочный). Рейнольдс установил, что склонность жидкости к ламинарному течению возрастает при увеличении ее вязкости  $\mu$  и понижении плотности  $\rho$ , к турбулентному течению — с ростом  $\rho$  и снижением  $\mu$ . Позднее было найдено, что характер течения определяется значением безразмерного комплекса  $wd\rho/\mu = wd/\nu \equiv Re$ , названного впоследствии числом Рейнольдса. При значениях  $Re$  ниже некоторой критической величины ( $Re_{кр}$ ) течение жидкости — ламинарное; для круглых труб  $Re_{кр} \approx 2300$ . При увеличении  $Re$  (для изотермического течения в прямых круглых трубках — сверх  $10^4$ ) течение становится существенно турбулентным, причем с ростом  $Re$  интенсивность турбулентности повышается.

В гл.1 было показано, что  $Re$  представляет собой соотношение сил инерции и вязкости. В случае ламинарного режима (малые значения  $Re$ ) доминируют силы вязкости (они — в знаменателе  $Re$ ), влияние сил инерции вырождается. При этом использование числа  $Re$ , вообще говоря, теряет смысл (или приобретает формальный характер). В случае турбулентного режима (высокие  $Re$ ) в целом преобладают силы инерции. Од-

нако вблизи стенок канала (в очень тонком слое), где скорости малы, течение остается близким к ламинарному; поэтому силы вязкости продолжают оказывать некоторое влияние на характер течения — использование  $Re$  для характеристики таких течений сохраняет смысл. Лишь при очень высоких  $Re$  (для круглых труб — свыше  $2 \cdot 10^7$ ) пристенный слой оказывается практически сорванным — доминируют силы инерции, а влияние сил вязкости вырождается. Значит, вырождается и число  $Re$  — его использование становится формальным. В обоих случаях доминирования сил вязкости либо инерции течения именуют **автомоделными** относительно критерия Рейнольдса (см. разд. 2.2.4 и 2.2.5). При значениях  $Re$ , несколько превышающих  $Re_{кр}$  (от 2300 до 10000), силы инерции и вязкости сопоставимы по величине: здесь уже нарушено слоистое течение, но неупорядоченность (хаотичность) выражена еще слабо. Эти режимы течения называются **переходными** (в зарубежной литературе — **промежуточными**).

На практике возможно некоторое смещение указанных диапазонов. Так, при очень плавном входе жидкости в круглую трубу и отсутствии каких-либо внешних возмущений удается сохранить ламинарный режим при  $Re$ , заметно превышающих 2300. Наоборот, при неблагоприятных условиях входа (наличии вибрации, турбулизующих вставок, шероховатости стенок канала) течение становится турбулентным при  $Re$  значительно ниже  $10^4$ . Особенно сильное влияние внешние условия оказывают на течение в переходном режиме — его характеристики могут смещаться в сторону ламинарного либо турбулентного. В этом смысле переходный режим плохо воспроизводится, так что расчетные формулы для различных эффектов переноса в переходном режиме (не только в гидравлике, в тепло- и массообменных процессах — тоже) обычно весьма ненадежны и пригодны лишь для определения качественных связей между различными факторами и приближенной оценки численных значений характеристик процесса.

Физические предпосылки возникновения и поддержания ламинарного или турбулентного режима можно представить следующим образом. В жидкостном потоке под влиянием постоянно действующих случайных возмущений непрерывно возникают **отклонения** от характерных (для данного течения) параметров движения жидкости. Но при доминировании *сил вязкости* упомянутые отклонения *подавляются*, и движение остается упорядоченным, т.е. *ламинарным*. Этого не происходит, когда преобладают *силы инерции*: возникшие возмущения здесь развиваются, распространяются по объему потока (подробнее см. разд. 2.2.5) — движение становится неупорядоченным, т.е. *турбулент-*

ным. Переход к неупорядоченному течению стимулируется внешними (по отношению к потоку жидкости) причинами: преградами в канале, шероховатостью его стенок, вибрацией каналов и т.п.

Проследим общую связь коэффициента  $\lambda_r$  с режимными характеристиками течения жидкости. Для этого в уравнении Навье—Стокса, записанном для какой-нибудь оси, разделим все слагаемые на силу инерции. Поскольку соотношение сил давления и инерции есть  $Eu$ , внешних массовых сил и инерционных —  $Fr$ , а сил инерции и вязкости —  $Re$ , то

$$\{Eu\} = \{Fr\} - 1 + \frac{1}{\{Re\}}. \quad (м)$$

Здесь фигурные скобки означают, что речь идет не о значениях  $Eu$ ,  $Fr$ ,  $Re$ , а о величинах, им пропорциональных (т.е. о соотношениях сил в каком-то масштабе). Выражение (м) не является расчетным; оно лишь устанавливает наличие связи между обобщенными переменными  $Eu$ ,  $Fr$  и  $Re$  для группы подобных течений:

$$Eu = f(Re, Fr). \quad (н)$$

Массовые силы (реально это чаще всего силы тяжести) обычно играют подчиненную роль в практических задачах гидродинамики, поскольку основной вклад в большинстве случаев приходится на долю перепадов давлений, под действием которых происходит движение жидкостей (тем более — газов). В необходимых случаях влияние силы тяжести всегда можно учесть, заменив его соответствующим перепадом давлений ( $\Delta p = \rho g \Delta h$  — см. разд. 2.1.2). Поэтому выражение (н), как правило (не всегда!), можно упростить:

$$Eu = f(Re). \quad (о)$$

Но в предыдущем разделе была показана связь (к) числа Эйлера с коэффициентом  $\lambda_r$ . Следовательно,  $\lambda_r$  должен быть представлен также в зависимости от числа Рейнольдса:

$$\lambda_r = f(Re). \quad (п)$$

Заметим, что применительно к конкретным технологическим задачам в выражениях типа (о), (п) в правой их части могут появиться параметрические критерии (симплексы) вида  $l/d_c$ .

Определив  $\lambda_r$ , можно далее по уравнению Дарси—Вейсбаха рассчитать  $h_n$  и  $\Delta p_n$ .

Характер и численное выражение связи (п) зависят от режима течения. Ниже эта связь количественно устанавливается применительно к изотермическому движению жидкости в *прямой круглой трубе*: это обусловлено широким практическим применением таких труб, а в методическом отношении — про-

стотой анализа. В последующих разделах задача анализа поставлена шире: рассматриваются закономерности ламинарного и турбулентного течений, а в ходе общего анализа получаются зависимости для определения  $\lambda_\Gamma$  и  $h_\Pi$ .

#### 2.2.4. Законы ламинарного течения ньютоновских жидкостей

Первоочередная задача анализа ламинарного течения — установление закономерностей распределения напряжений трения и скоростей в сечении канала. Это позволит в дальнейшем подойти к определению  $\lambda_\Gamma$  и  $h_\Pi$ ,  $\Delta p_\Pi$ .

В основу анализа может быть положено уравнение Навье—Стокса (1.20). Записанное в цилиндрических координатах для *симметричного* течения вдоль оси круглой трубы, оно, согласно (1.24), при условии  $dp/dx = \Delta p/l$  принимает вид

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw_r}{dr} \right) = - \frac{\Delta p}{\mu l},$$

где  $\Delta p$  — падение давления на участке трубы длиной  $l$ .

Двойное интегрирование этого уравнения (с граничными условиями:  $w_\Gamma = 0$  при  $r = R$  и  $dw_\Gamma/dr = 0$  при  $r = 0$ ) позволяет прийти к распределению скоростей по сечению трубы. Здесь вполне удастся справиться со сложностями решения дифференциального уравнения второго порядка (в силу простоты (линейности) связей между основными параметрами течения (эти связи будут продемонстрированы ниже)). Но по той же причине здесь вполне можно обойтись *без* уравнения Навье — Стокса, т.е. без решения дифференциальных уравнений второго порядка, существенно упростив анализ. Используем этот путь применительно к течению жидкости в *круглой* трубе.

Будем анализировать закономерности течения ньютоновской жидкости на участке длиной  $l$  горизонтальной трубы постоянно-го радиуса  $R$  (рис. 2.10). Пусть жидкость движется стационарно слева направо под действием разности давлений  $\Delta p = p_1 - p_2$  ( $p_1 > p_2$ ). Трубу выбрали *горизонтальной*, дабы исключить из рассмотрения влияние сил тяжести (т. е. разность геометрических напоров, критерий Фруда); *постоянство радиуса* позволяет исключить из анализа изменение скоростей вдоль трубы и появление сил инерции при перемещении жидкости от точки к точке. Таким образом, напор  $\Delta p$  целиком расходуется на преодоление сил трения.

Выделим внутри трубы соосный цилиндр текущим радиусом  $r$ ; задача анализа состоит в определении текущей (локальной) скорости  $w_\Gamma$  на этом радиусе. Поскольку движение является

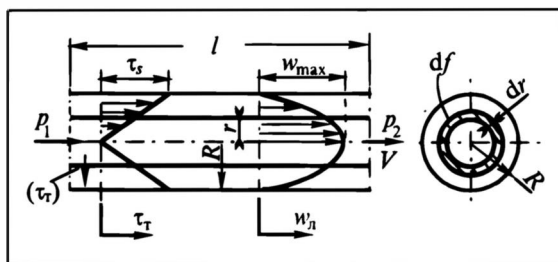


Рис. 2.10. К закономерностям ламинарного течения ньютоновской жидкости в круглой трубе

установившимся и равномерным, то силы давления (они действуют по торцевым площадкам  $\pi r^2$  выделенного цилиндра – в противоположных направлениях) уравниваются силами трения (по боковой поверхности цилиндра  $2\pi r l$ ). Тогда

$$p_1 \pi r^2 - p_2 \pi r^2 - \tau_T 2\pi r l = 0, \quad (p)$$

откуда получаем распределение (эпюру, профиль) напряжений трения по радиусу (сечению) трубы, характерное для *всех* течений в круглой трубе, когда *преобладают силы вязкости*:

$$\tau_T = \frac{\Delta p}{2l} r. \quad (2.18)$$

Из этого выражения следует:

– на оси трубы  $\tau_T = 0$ : приосевые слои жидкости движутся с одинаковой скоростью, радиальный градиент скоростей при  $r = 0$  отсутствует, так что, согласно (1.9), силы трения здесь не возникают;

– на стенках трубы ( $r = R$ ) напряжение трения – наибольшее:  $\tau_T \equiv \tau_s = \frac{\Delta p}{2l} R$ ;

–  $\tau_T$  линейно возрастает с радиусом  $r$ ; это обстоятельство отражено эпюрой напряжений на рис.2.10 в левой части рассматриваемого участка трубы.

Подставим теперь в (2.18) значение  $\tau_T$  по (1.9), имея в виду, что нормаль направлена радиально и скорость  $w_\lambda$  изменяется только по радиусу:

$$\tau_T = -\mu \frac{\partial w_\lambda}{\partial n} = -\mu \frac{dw_\lambda}{dr} \quad (c) \quad \text{и} \quad -\mu \frac{dw_\lambda}{dr} = \frac{\Delta p}{2l} r. \quad (т)$$

Разделяем переменные и интегрируем (при  $\mu = \text{const}$  – для ньютоновских жидкостей) в пределах от  $r = R$  (соответственно концепции прилипания, на стенках трубы  $w_\lambda = 0$ ) до текущего

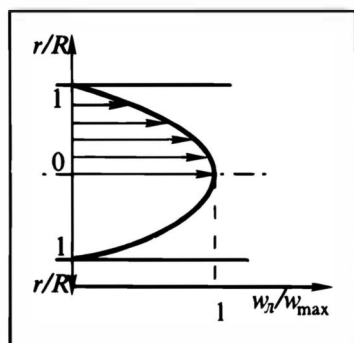


Рис.2.11. Эпюра скоростей в обобщенных координатах для ламинарного течения жидкости в круглой трубе

радиуса  $r$ , где надо найти скорость  $w_l$ :

$$\int_0^{w_l} dw_l = -\frac{\Delta p}{2\mu l} \int_R^r r dr. \quad (y)$$

Отсюда

$$w_l = \frac{\Delta p}{4\mu l} (R^2 - r^2) = \frac{\Delta p}{4\mu l} R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \quad (2.19)$$

Из (2.19) следует, что при ламинарном течении ньютоновской жидкости в круглой трубе скорость в ее сечении распределяется по параболюиду вращения. Параболический профиль скоростей показан на рис. 2.10 в правой части прямого участка трубы. Согласно (2.19), на стенке трубы (при  $r = R$ ) закономерно (это предопределено нижними пределами интегрирования) получается  $w_l = 0$ . При  $r = 0$  скорость принимает максимальное значение

$$w_{\max} = \frac{\Delta p}{4\mu l} R^2. \quad (2.19a)$$

С этим значением  $w_{\max}$  можно записать

$$\frac{w_l}{w_{\max}} = 1 - \frac{r^2}{R^2} \quad \text{и} \quad w_l = w_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \quad (2.19b)$$

Последние выражения показывают (рис.2.11), что распределение скоростей в обобщенных (безразмерных) координатах не зависит от свойств жидкости и параметров течения (следовательно, и от числа  $Re$ ) — для всех ламинарных течений в круглой трубе профиль скоростей выражается единым соотношением (2.19b). Такие течения называются **автомоделными** по  $Re$ . Применительно к ламинарному течению говорят о **нижнем** автомодельном режиме, имея в виду, что оно реализуется при низких значениях  $Re$ .

В расчетных уравнениях удобно оперировать не локальной, а **средней** скоростью  $w$  течения жидкости в трубе. Усреднение скорости по сечению трубы  $f$  можно провести непосредственно, применяя известную из математики теорему о среднем:

$$w = \frac{1}{f} \int_0^f w_l df = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R w_l 2\pi r dr \quad (\Phi)$$

либо найти предварительно расход жидкости  $V$ , а затем среднюю скорость по уравнению расхода (1.18). Используем здесь второй путь.

Выделим в поперечном сечении трубы элементарное кольцевое живое сечение потока  $df$  (см. рис. 2.10) радиусом  $r$  и шириной  $dr$ ; очевидно:  $df = 2\pi r dr$ . Элементарный расход через это сечение (жидкость движется через него со скоростью  $w_r$ ) составит по (1.2):  $dV = w_r df = w_r 2\pi r dr$ . Подставив значение  $w_r$  по (2.19б), найдем после интегрирования полный расход:

$$V = \int_0^R w_r 2\pi r dr = \int_0^R w_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi r dr = 2\pi w_{\max} \int_0^R \left(r dr - \frac{r^3}{R^2} dr\right) = \frac{2\pi w_{\max} R^2}{4}.$$

После подстановки значения  $w_{\max}$  по (2.19а) приходим к уравнению Гагена—Пуазейля:

$$V = \frac{\pi \Delta p}{8\mu l} R^4. \quad (2.20)$$

И тогда средняя по сечению скорость жидкости

$$w = \frac{V}{\pi R^2} = \frac{\Delta p}{8\mu l} R^2. \quad (2.21)$$

Сравнение выражений для скоростей — максимальной (2.19а) и средней (2.21) — показывает, что для круглой трубы при ламинарном течении средняя скорость равна половине максимальной:  $w = w_{\max}/2$ .

Важно подчеркнуть простую линейную связь  $w$  и  $\Delta p$  при ламинарном режиме течения: *потеря давления пропорциональна скорости потока в первой степени*. Такого рода закономерность присуща всем ламинарным течениям (живое сечение потока различной формы, обтекание тел и т. п.):  $\Delta p \sim w^1$ .

Для горизонтального канала движущая сила равна потере давления:  $\Delta p = \Delta p_n$ ; соответственно (2.21)

$$\Delta p_n = \frac{8\mu l}{R^2} w = \frac{32\mu l}{d^2} w, \quad (2.21a)$$

где  $d = 2R$  — диаметр трубы.

Для вертикального канала и наклонных труб необходимо вычленить значение  $\Delta p_n$  из общего перепада давления, учитывая разность уровней жидкости соотношением типа  $\Delta p = \rho g \Delta h$  (см. разд. 2.12).

В случае ламинарных течений принципиально нет необходимости в использовании формальных выражений типа Дарси—Вейсбаха, а значит и в определении  $\lambda_r$ . Здесь для расчета  $\Delta p_n$  и  $h_n = \Delta p_n/(\rho g)$  вполне достаточно полученных из физических пред-



*посылок* уравнений: для круглой трубы — уравнения Гагена—Пуазейля и вытекающего из него (2.21а). Однако в практических расчетах нередко традиционно пользуются именно уравнением Дарси—Вейсбаха не только для турбулентного, переходного, но и для ламинарного режима течения (в том числе — и в круглых трубах). Поэтому (именно поэтому! — иного обоснования нет) целесообразно установить выражение для  $\lambda_r$ , но только в такой постановке: как определять  $\lambda_r$ , если расчет  $\Delta p_n$  и  $h_n$  вести в манере уравнения Дарси—Вейсбаха?

Здесь возможны различные подходы. Можно, например, прямо исходить из соотношения (и) в разд. 2.2.2, выразив  $\tau_s = -\mu(dw/dr)$  и определив из (2.19) производную  $dw/dr$  при  $r = R$ . Несколько проще приравнять  $\Delta p_n$  по уравнениям (2.21а) и Дарси—Вейсбаха в форме (2.17а):

$$\Delta p_n = \frac{32\mu l}{d^2} w = \lambda_r \frac{l}{d} \frac{w^2}{2} \rho,$$

откуда после очевидных сокращений

$$\lambda_r = \frac{64}{wd\rho/\mu} = \frac{64}{Re}. \quad (2.22)$$

Подчеркнем, что такой характер зависимости:  $\lambda_r = A/Re$  — присущ *всем* ламинарным течениям, но значение  $A$  зависит от конкретных условий (формы живого сечения потока, внутренней или внешней задачи гидродинамики и т. п.). Вместе с тем выражение (2.22) еще раз подчеркивает формальный характер использования здесь уравнения Дарси—Вейсбаха. Действительно, *при ламинарном режиме течения силы инерции подавлены* (для круглых труб — при  $Re < 2300$ ) *силами вязкости*; поэтому критерий Рейнольдса, выражающий соотношение указанных сил, физически перестает характеризовать течение. Он и не входит в полученные теоретическим анализом выражения типа (2.21) — (2.21а). Таким образом, в *случае ламинарного течения* использование уравнения Дарси—Вейсбаха с определением  $\lambda_r$  по формулам типа (2.22) — лишь расчетный прием, обусловленный даже не удобством, а скорее традициями расчетов.

Характерный профиль скоростей в ламинарном потоке устанавливается не сразу после входа жидкости в трубу; распределение скоростей асимптотически приближается к параболическому, описываемому уравнением (2.19). Трансформация скоростного профиля от начального до характерного происходит на *участке гидродинамической стабилизации*. Очевидно, что его длина  $l_{\text{стаб}}$ , в силу асимптотического характера преобразования профиля скоростей, зависит от приемлемой погрешности, с которой скоростной профиль можно считать сформировавшимся.

Теоретически удастся получить лишь приближенные решения, описывающие развитие профиля скоростей жидкости от начального (например, рав-

номерного:  $w_d = w$ ) до параболического. Согласно этим решениям, с погрешностью порядка 2% скоростной профиль можно считать сформировавшимся на относительном расстоянии от входа в трубу:

$$l_{\text{стаб}}/d \approx 0,05 \text{Re}. \quad (\text{х})$$

Если ввести понятие о времени стабилизации  $\tau_{\text{стаб}} = l_{\text{стаб}}/w$ , за которое вошедший в трубу поток деформируется до характерного профиля скоростей, и выразить  $\text{Re} \equiv wd/\nu$ , то

$$\tau_{\text{стаб}} \approx 0,05 \frac{d^2}{\nu}. \quad (\text{ц})$$

Иначе: число Жуковского  $Zh$  для участка стабилизации

$$Zh \equiv \frac{v \tau_{\text{стаб}}}{d} \approx 0,05 \quad (\text{ч})$$

при ламинарном течении равно постоянной величине, не зависящей от значения  $\text{Re}$ .

Потери напора на участке стабилизации отличаются от рассчитываемых на стабилизированных участках по двум основным причинам:

— из-за постепенной деформации поля скоростей и их градиента от входного сечения до конца участка стабилизации (здесь необходима корректировка изменяющихся значений  $\lambda_r$ );

— из-за изменения кинетической энергии потока: переход от равномерного профиля к параболическому сопровождается ее увеличением, а значит — снижением потенциальной энергии давления.

Потери напора на участке стабилизации принято представлять в виде полуэмпирического соотношения в манере уравнения Дарси—Вейсбаха с поправкой  $k_{\text{стаб}}$ :

$$h_n = \left( \lambda_r \frac{l_{\text{стаб}}}{d} + k_{\text{стаб}} \right) \frac{w^2}{2g}, \quad (\text{ш})$$

причем по разным опытным данным  $k_{\text{стаб}}$  находится в пределах 2–3.

## 2.2.5. Законы турбулентного течения

### *Общая картина течения*

При движении жидкости в каналах, трубопроводах, технологических аппаратах значения  $\text{Re}$  обычно исчисляются десятками и сотнями тысяч, иногда — миллионами, так что течение происходит в условиях достаточно развитого турбулентного режима. В отличие от ламинарного, течение здесь — неупорядоченное, оно характеризуется пульсационным хаотическим нестационарным движением частиц жидкости и их образований (при сохранении общего направления потока). Эти образования часто (и не очень удачно) именуют "комками", "вихрями"; может быть, удачнее термины "пакеты", "ансамбли". Ансамбли представляют собой совокупности близко расположенных частиц жидкости, совместно (т.е. с близкими скоростями) перемещающихся в каком-то направлении из точки в точку. Ансамбли неустойчивы;

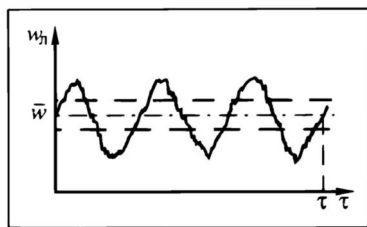


Рис.2.12. Пульсации скорости в турбулентном потоке

время их существования и пройденный ими путь (до смешения с другими ансамблями и остальной массой жидкости) достоверно не фиксируется. Можно считать, что частицы жидкости, относящиеся к одному ансамблю, *гидродинамически связаны*, движутся единым "комком"; за пределами его существования или **пути смешения** эта связь утрачивается.

Типичная диаграмма локальных абсолютных скоростей жидкости в направлении ее движения  $x$  представлена на рис. 2.12. Осредненное (за достаточный интервал времени  $\tau$ ) значение локальной скорости  $\bar{w}$  в рассматриваемой точке показано штрих-пунктиром; штриховыми линиями отмечены границы области осредненных значений пульсационных скоростей  $w'$  (чаще используют среднеквадратичные значения  $\sqrt{w'^2}$ ). Отношение  $\sqrt{w'^2} / \bar{w}$  является показателем интенсивности турбулентности. Разумеется, в турбулентном потоке существуют также пульсационные составляющие скоростей  $v'$  и в направлении оси  $y$ , нормальной к  $x$  (и к стенке канала).

Из рисунка видно существование двух групп пульсаций: крупномасштабных низкочастотных (они характеризуют перемещение жидкостных пакетов в целом) и мелкомасштабных высокочастотных (они относятся к пульсациям более мелких частиц жидкости внутри пакетов).

Вблизи стенок канала течение жидкости является *ограниченным*, а значит и более упорядоченным: с приближением к стенке все более гасятся пульсационные составляющие скорости, уменьшается и осредненная скорость (на стенке в соответствии с концепцией прилипания она равна нулю). Таким образом, при турбулентном течении вблизи стенок движется достаточно тонкая жидкостная пленка, в которой из-за влияния стенок канала существенно подавлены пульсации — говорят о тонком упорядоченном **ламинарном слое** (его толщина оценивается долями миллиметра). Именно здесь в условиях турбулентного режима

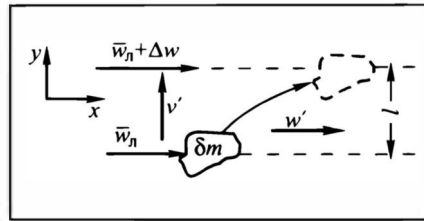


Рис. 2.13. Модель переноса импульса в турбулентном потоке

продолжают играть роль силы вязкости. За пределами ламинарного слоя (часто используют термин "вязкий подслой") развиваются турбулентные пульсации. Разумеется, все это модельные представления, так как реально не существует резкой границы между ламинарным слоем и **турбулентным ядром** потока. Заметим: иногда используют более сложную — трехслойную — модель течения, вводя между ламинарным слоем и турбулентным ядром еще **переходный подслой**, в котором и начинается развитие турбулентных пульсаций. С увеличением  $Re$  толщина ламинарного слоя  $\delta_l$  и переходного подслоя уменьшается.

В турбулентном ядре перенос импульса осуществляется преимущественно за счет пульсационного движения упомянутых выше неустойчивых ансамблей. Перемещаясь из одной области течения в другую, они стремятся *по инерции* сохранить свою первоначальную скорость в направлении движения. Смешиваясь с остальной жидкостью, "быстрые" ансамбли увеличивают ее скорость, медленные — уменьшают. В результате в поперечном сечении турбулентного ядра происходит существенная *nivelirovka осредненных скоростей* в направлении движения потока. Именно в этом проявляется преобладающая роль сил инерции в турбулентных течениях.

Модель переноса импульса в турбулентном потоке представлена на рис. 2.13. Пусть поток на координате  $y$  имеет осредненную скорость в направлении течения  $\bar{w}_l$ . Ансамбль (пакет) частиц массой  $\delta m$  за счет пульсационной составляющей скорости  $v'$  перемещается по оси  $y$  в новое положение (оно находится правее благодаря направленному движению вдоль оси  $x$ ). Введем *модельное* представление: по пути из исходного положения пакет перемещается как единое целое, *не обмениваясь* импульсом с потоком (не смешиваясь с ним), и попадает в новое положение, отстоящее от исходного на расстоянии  $l$  по оси  $y$  (где осредненная скорость в направлении  $x$  равна  $\bar{w}_l + \Delta w$ ). Здесь ансамбль *полностью* теряет импульс (т. е. свою индивидуальность), смешиваясь с окружающей жидкостью. Импульс, потерянный паке-

том массой  $\delta m$  в направлении оси  $x$ , равен изменению количества движения  $\delta m \Delta w$ . Произведем *подмену задачи*, полагая, что обмен количеством движения (импульсом) происходит за счет вязкого трения при движении совокупности (пакета) частиц в направлении  $y$ . Пусть продолжительность этого акта переноса равна  $\Delta \theta$ . Тогда изменение количества движения за единицу времени будет трактоваться как сила трения  $\delta m \Delta w / \Delta \theta$ . Если площадь, на которой действует эта сила, равна  $\Delta f$ , то модельное касательное напряжение (обозначим его  $\tau_{и}$ , фиксируя, что речь идет о **переносе импульса**) составит

$$\tau_{и} = \frac{1}{\Delta f} \frac{\delta m \Delta w}{\Delta \theta}. \quad (\text{ш})$$

Фрагмент этой формулы  $\delta m / \Delta \theta$  есть приращение массового расхода за счет пульсационной скорости  $v'$ . Тогда соответственно уравнению расхода в среднем за  $\Delta \theta$ :

$$\frac{1}{\Delta f} \frac{\delta m}{\Delta \theta} = \rho \bar{v}'. \quad (\text{э})$$

Поскольку  $l$  — мало, то, согласно правилам дифференциального исчисления,  $\Delta w \approx \left| \frac{dw_{л}}{dy} \right| l$ .

Подставив это значение  $\Delta w$  в (ш), получим с учетом (э)

$$\tau_{и} = \rho \bar{v}' l \left| \frac{\partial w_{л}}{\partial y} \right|. \quad (\text{ю})$$

Эту удельную (на  $1 \text{ м}^2$ ) поверхностную силу, обусловленную переносом импульса, можно формально трактовать в терминах (и в символах) касательных напряжений:

$$\tau_{и} = \mu_{и} \left| \frac{\partial w_{л}}{\partial y} \right| \quad \text{или} \quad \frac{\tau_{и}}{\rho} = v_{и} \left| \frac{\partial w_{л}}{\partial y} \right|. \quad (\text{я})$$

Здесь **турбулентная вязкость**  $\mu_{и} = \rho \bar{v}' l$  не является (в отличие от вязкости  $\mu$ ) только индивидуальным свойством жидкости, а зависит от характеристик ее пульсационного течения. Молекулярная вязкость  $\mu$  отражает вклад теплового движения молекул в рассеяние (диссипацию) энергии; турбулентная вязкость выражает вклад пакетов (ансамблей) при их пульсационном движении. Отдельные молекулы переносят количество движения на длину их свободного пробега; турбулентные пульсации — на значительно большие расстояния, характеризуемые длиной пути смешения  $l$ .

Такие представления позволяют выразить совместное действие вязкостных и инерционных (перенос импульса) сил в манере формулы (1.9):

$$\tau_T = (\mu + \mu_n) \left| \frac{\partial w_\lambda}{\partial y} \right| \quad \text{или} \quad \frac{\tau_T}{\rho} = (v + v_n) \left| \frac{\partial w_\lambda}{\partial y} \right|. \quad (2.23)$$

В ламинарном слое (вблизи стенки канала), где пульсации подавлены,  $\mu_n \ll \mu$ ,  $v_n \ll v$  и доминируют силы вязкости. В турбулентном ядре потока, наоборот,  $\mu_n \gg \mu$ ,  $v_n \gg v$  и преобладают силы инерции (перенос импульса пакетами). В некоторой области (переходный подслой)  $\mu_n$  и  $\mu$ ,  $v_n$  и  $v$  сопоставимы по величине. Очевидно, что отношения  $\mu_n/\mu$ ,  $v_n/v$  имеют смысл критерия Рейнольдса, так как выражают соотношение конкурирующих сил инерции и вязкости.

### *Распределение скоростей в турбулентном потоке*

Совершенно очевидно, что характер распределения скоростей должен быть *качественно различным* в ламинарном слое и турбулентном ядре потока.

Для *ламинарной (пристенной) области течения* характерно  $v \gg v_n$ , так что выражение (2.23) может быть записано в привычной форме (1.9). Поскольку речь идет о *тонком* пристенном слое, можно положить, что здесь  $\tau_T \approx \tau_s$ , и тогда

$$\frac{\tau_s}{\rho} = v \frac{dw_\lambda}{dy}, \quad (\text{aa})$$

где  $y$  — нормаль к поверхности (в случае круглой трубы  $y = R - r$ ).

Разделение переменных и интегрирование дает скорость в ламинарном слое; сначала в общем виде:

$$w_\lambda = \frac{\tau_s}{\rho v} y + C.$$

Поскольку при  $y = 0$  имеем  $w = 0$ , то  $C = 0$ , так что

$$w_\lambda = \frac{\tau_s}{\rho v} y. \quad (\text{аб})$$

Это выражение удобно записать в безразмерной форме, введя представление о *динамической скорости*  $w_d \equiv \sqrt{\tau_s / \rho}$ ; легко убедиться, что  $\left[ (\tau_s / \rho)^{1/2} \right] = \text{м/с}$ . Подставив в (аб)  $\tau_s / \rho = w_d^2$ , получим:  $w_\lambda = (w_d^2 / v) y$ . В обобщенных переменных:

$$\frac{w_\lambda}{w_d} = \frac{w_d y}{v}; \quad (2.24)$$

обозначив безразмерную скорость  $w_n/w_d \equiv w^*$  и безразмерное расстояние  $w_d y/\nu \equiv y^*$  в более лаконичной форме, получим

$$w^* = y^*. \quad (2.24a)$$

Таким образом, для тонкого ламинарного слоя характерен плоский профиль скоростей  $w_n = f(y)$ .

Для *турбулентного ядра потока* задача о распределении скоростей решается приближенно, с определенными (модельными) допущениями. Наиболее распространенным является подход Л. Прандтля; несмотря на известную нестрогость некоторых допущений, получаемые результаты (скорректированные некоторыми эмпирическими константами) достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными.

В основе анализа — уравнение (2.23), причем для турбулентного ядра  $\nu_n \gg \nu$ . Вводим следующие основные допущения:

1) поскольку речь идет об областях течения, не слишком далеко отстоящих от стенки канала, то можно приближенно принять, что и в этой области  $\tau_T = \tau_n \approx \tau_s = \text{const}$ ;

2) поскольку все же эти области находятся на известном удалении от стенки, то ее влияние на характеристики турбулентности проявляется крайне слабо, так что турбулентность вполне можно считать изотропной ( $w' \approx v'$ );

3) изменение скорости  $\Delta w$  обусловлено переносом ансамбля (пакета) за счет пульсационной скорости  $v'$ ; связь этих скоростей очевидна, можно считать  $\Delta w \sim \bar{v}$  или  $\Delta w = k_1 \bar{v}$ ;

4) длина пути смешения  $l$  прямо пропорциональна расстоянию от стенки  $y$ :  $l = k_2 y$ ; при этом коэффициент  $k_2$  призван учесть некоторую неопределенность величины  $l$ , а также неточности, связанные с другими допущениями.

Согласно принятым допущениям,  $\bar{v} = \frac{\Delta w}{k_1}$ ; но  $\Delta w = l \left( \frac{\partial w_n}{\partial y} \right)$ ,

а  $l = k_2 y$ , так что  $\bar{v} = \frac{k_2}{k_1} l \left( \frac{\partial w_n}{\partial y} \right)$ . Подставляя это значение  $\bar{v}$  в

(ю) и полагая  $\tau_n = \tau_s$ , получим, заменив частные производные обыкновенными:

$$\frac{\tau_s}{\rho} = \kappa^2 y^2 \left( \frac{dw_n}{dy} \right)^2, \quad (\text{ав})$$

где  $\kappa \equiv k_2/\sqrt{k_1}$  — коэффициент пропорциональности, вобравший в себя ранее введенные трудноопределимые коэффициенты.

Отсюда 
$$\frac{dw_n}{dy} = \frac{1}{\kappa y} \sqrt{\frac{\tau_s}{\rho}} = \frac{1}{\kappa y'} w_a.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем распределение осредненных скоростей в турбулентном ядре потока; сначала в общем виде:

$$\bar{w}_\lambda = \frac{w_d}{\kappa} \ln y + C. \quad (2.25)$$

Это выражение тоже удобно представить в форме связи обобщенных переменных. В этих целях в правую часть добавим и вычтем постоянную для данного течения величину  $\frac{w_d}{\kappa} \ln \frac{w_d}{v}$ :

$$w_\lambda = \frac{w_d}{\kappa} \left( \ln y + \ln \frac{w_d}{v} \right) - \frac{w_d}{\kappa} \ln \frac{w_d}{v} + C.$$

Иначе:

$$\frac{w_\lambda}{w_d} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{w_\lambda y}{v} + C' \quad \text{или} \quad w_\lambda^* = \frac{1}{\kappa} \ln y^* + C', \quad (2.25a)$$

где  $C' = -\frac{w_d}{\kappa} \ln \frac{w_d}{v} + C.$

Таким образом, для турбулентного ядра на не очень большом удалении от стенки канала характерен логарифмический профиль скоростей — соответственно выражению (2.25a), получившему название **закона стенки**.

Специально подчеркнем, что граничное условие для определения постоянной  $C'$  сформулировать непросто: надо располагать значением скорости на границе турбулентного ядра, а также толщины последнего. Теоретические оценки здесь крайне приближенные, и поэтому значения  $\kappa$  и  $C'$  находят из эксперимента; он же позволяет определить границы применимости логарифмического закона. Наиболее часто в литературе приводятся значения  $\kappa = 0,4$  и  $C' = 5,5$ .

Эксперимент подтверждает справедливость закона (2.24) — (2.24a) в пристенной зоне, т.е. в области малых значений  $y^*$ . При увеличении  $y^*$  находит подтверждение и закон стенки. Однако для некоторой промежуточной области значений  $y^*$  (ее называют **буферной зоной**), где значения  $v_\lambda$  и  $v$  сопоставимы по величине, при качественном сохранении логарифмического закона требуется количественная корректировка, отражающаяся на численных значениях коэффициентов  $\kappa$  и  $C'$ .

Полный универсальный профиль скоростей при турбулентном течении по трехслойной модели описывается следующими



соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} y^* < 5 & \quad w_{л}^* = y^*; & (\text{Лам.}) \\ 5 < y^* < 30 & \quad w_{л}^* = 5,0 \ln y^* - 3,05; & (\text{Буф.}) \\ y^* > 30 & \quad w_{л}^* = 2,5 \ln y^* + 5,5, & (\text{Турб.}) \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

причем для круглых труб  $y^* = \frac{w_d R}{v} \left(1 - \frac{r}{R}\right) = \frac{Re}{2} \left(1 - \frac{r}{R}\right)$ .

Заметим: приравнивая значения  $w^*$  для первого и третьего выражений (2.26), можно оценить порядок значений  $y^*$  для буферной зоны:  $y^* = 2,5 \ln y^* + 5,5$ . Численное решение дает  $y^* \approx 11 \div 12$ , что хорошо согласуется с принятым в (2.26) диапазоном  $y^*$  для этой зоны.

Для основной зоны реальных течений в каналах характерно последнее из выражений (2.26). Опыт показывает, что оно хорошо работает не только около плоских стенок, но и для круглых труб, хотя логарифмическому профилю здесь сопутствует "излом" на оси потока (т.е. не соблюдается физически очевидное при  $r = 0$  равенство  $d\bar{w}/dy = 0$ ).

Полагая, что основную долю сечения занимает турбулентное ядро, распространим профиль (2.26 — Турб.) на всю область турбулентного течения и найдем среднюю скорость потока. Воспользуемся в этих целях выражением (ф) из разд.2.2.4, произведя предварительно замену:  $r = R - y$  (где  $y$  отсчитывается от стенок трубы). Будем искать среднюю скорость сразу в обобщенном виде:

$$w^* = \frac{w}{w_d} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R w_{л}^* 2\pi r dr = \frac{1}{\pi R^2} \int_R^0 \left( 2,5 \ln \frac{w_d y}{v} + 5,5 \right) 2\pi (R - y) (-dy). \quad (\text{ар})$$

При проведении операции интегрирования имеем в виду:

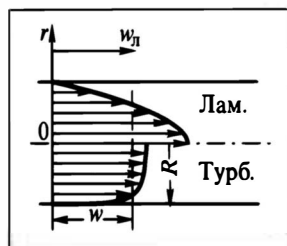
$$\int \ln(ax) dx = x \ln(ax) - x \quad \text{и} \quad \int x \ln(ax) dx = \frac{x^2}{2} \ln(ax) - \frac{x^2}{4};$$

в рассматриваемом случае  $a = w_d/v$ .

Итак,

$$\begin{aligned} w^* &= \frac{2}{R^2} \int_0^R [2,5 \ln(ay) + 5,5] (R - y) dy = \\ &= \frac{2}{R^2} \left[ 2,5 R [y \ln(ay) - y] + 5,5 R y - 2,5 \left[ \frac{y^2}{2} \ln(ay) - \frac{y^2}{4} \right] - 5,5 \frac{y^2}{2} \right] \Bigg|_0^R = \\ &= \frac{2}{R^2} \left\{ R^2 \left[ \frac{1}{2} \left( 2,5 \ln(aR) - 2,5 \frac{3}{4} \right) + \frac{5,5}{2} \right] \right\} = 2,5 \ln \frac{w_d R}{v} + 1,75. \quad (\text{ад}) \end{aligned}$$

Рис.2.14. Сопоставление скоростных профилей для ламинарного (Лам.) и турбулентного (Турб.) течений жидкости в круглой трубе



Таким образом, выражение для средней скорости  $w$ , представленное в безразмерной форме, имеет вид

$$w^* \equiv \frac{w}{w_d} = 2,5 \ln \sqrt{\frac{\tau_s}{\rho}} \frac{R}{v} + 1,75. \quad (2.27)$$

Типичный профиль скоростей в круглой трубе показан на рис.2.14: для ламинарного режима — по уравнению (2.19), для турбулентного режима — по уравнениям (2.26); там же штриховой линией обозначен уровень средней скорости  $w$ . Из сравнения распределений скоростей при разных режимах течения видно, что пристеночный градиент скоростей (в пределах ламинарного пограничного слоя) в случае турбулентного режима значительно выше, нежели для ламинарного, а сам профиль в турбулентном ядре существенно выровнен (говорят: *заполнен*). Средняя скорость в круглой трубе при турбулентном режиме обычно колеблется в пределах от 0,7 до 0,85 от максимальной (эта цифра, отражающая степень выравнивания скоростей в ядре потока, возрастает с повышением  $Re$ ); при переходе к верхнему автомобильному режиму ( $Re \geq 2 \cdot 10^7$ ) естественно  $w/w_{\max} \rightarrow 1$ .

В практических расчетах обоснованное модельными представлениями Л.Прандтля, но достаточно сложное распределение скоростей по (2.26) иногда заменяют более простым степенным профилем. Наиболее часто используют "закон  $1/7$ ", неплохо соответствующий логарифмическому профилю (особенно при  $y^* > 30$ ):

$$w_d^* \sim (y^*)^{1/7} \text{ или } w = w_0 (y^*)^{1/7}, \quad (\text{ae})$$

где  $w_0$  — скорость за пределами пограничного ламинарного слоя, близкая к  $w_{\max}$ . Применительно к круглым трубам "закон  $1/7$ " нередко записывают в форме

$$w = w_{\max} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/7}. \quad (\text{аж})$$

Существуют и другие аппроксимации логарифмического профиля скоростей.

### Коэффициент гидравлического сопротивления

Из соотношений (ад) и (2.27) можно теоретически получить расчетную формулу для коэффициента  $\lambda_r$ . Для этого выразим радиус через диаметр  $R = d/2$  и преобразуем выражение под логарифмом:

$$\frac{w_d R}{v} = \frac{w d}{v} \frac{1}{2} \frac{w_d}{w} = \frac{Re}{2} \frac{w_d}{w}. \quad (\text{аз})$$

Согласно формуле (л) из разд.2.2.2,  $\lambda_r/8 = \tau_s/(\rho w^2) = (w_d/w)^2$ . Подставим теперь отношение  $w_d/w = \sqrt{\lambda_r/8}$  в левую и правую — преобразованные соответственно (аз) — части выражения (2.27):

$$\sqrt{\frac{8}{\lambda_r}} = 2,5 \ln \left( \frac{\text{Re}}{2} \sqrt{\frac{\lambda_r}{8}} \right) + 1,75.$$

С учетом входящих в это равенство численных значений величин имеем для гладких труб:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} = 0,88 \ln(\text{Re} \sqrt{\lambda_r}) - 0,91. \quad (2.28)$$

Это выражение получено из логарифмического профиля скоростей (2.26 — Турб.) в предположении о его справедливости по всей области течения. Но для ламинарного слоя, градиент скоростей в котором существенно зависит от сил трения, этот профиль неточен. Поэтому можно ожидать некоторого расхождения формулы (2.28) с опытными данными. Действительно, с экспериментом лучше согласуется скорректированная зависимость

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} = 0,87 \ln(\text{Re} \sqrt{\lambda_r}) - 0,80. \quad (2.28a)$$

Расчет  $\lambda_r$  по трансцендентным теоретическим формулам типа (2.28), (2.28a) ведется численными методами, что не вызывает затруднений при наличии хотя бы программируемого калькулятора. Для упрощения расчетов можно воспользоваться некоторыми формулами, аппроксимирующими теоретические формулы для гладких круглых труб, что подтверждено экспериментально в ограниченных диапазонах изменения числа Re:

— для  $\text{Re} = 10^4 - 10^5$  — формула Блазиуса:

$$\lambda_r = 0,316/\text{Re}^{0,25}, \quad (2.28б)$$

— для  $\text{Re} = 10^5 - 3,4 \cdot 10^6$  — формула Никурадзе:

$$\lambda_r = 0,0032 + 0,221 \text{Re}^{-0,237}. \quad (2.28в)$$

Менее точна, хотя и охватывает всю практически интересную для химической технологии область турбулентных течений (вплоть до  $\text{Re} = 2 \cdot 10^7$ ), формула Женера:

$$\lambda_r = 0,16/\text{Re}^{0,16}. \quad (2.28г)$$

Можно показать, что формула Блазиуса отвечает эмпирическому скоростному профилю по "закону  $1/7$ ", т.е. формулам (ae) — (аж).

При очень высоких значениях  $\text{Re} > 2 \cdot 10^7$  силы вязкости, как указывалось в разд. 2.2.3, пренебрежимо малы; пограничный ламинарный слой можно считать полностью сорванным. Здесь модель Прандтля уже не работает, перенос импульса (коли-

чества движения) обусловлен исключительно интенсивным движением пакетов. Поэтому диссипация энергии (значит, и потери напора) пропорциональна количеству движения  $(\rho w f)w$ , т.е. действует квадратичный закон сопротивления:  $h_p \sim w^2$ . При выражении потеряннго напора в форме уравнения Дарси—Вейсбаха это должно означать, что  $\lambda_r$  перестает зависеть от  $Re$ , он принимает *постоянное* значение. Профиль скоростей для такого режима становится *плоским*: во всех точках поперечного сечения скорости одинаковы и равны средней скорости  $w$  — независимо от свойств жидкости и параметров течения (числа  $Re$  и др.). Это **верхний автомодельный (по  $Re$ ) режим** (термин "верхний" означает высокие значения числа  $Re$ ).

Согласно выражениям (2.28), коэффициент гидравлического сопротивления  $\lambda_r$  сравнительно медленно уменьшается с ростом  $Re$ . Соответственно уравнению Дарси—Вейсбаха это означает увеличение потеряннго напора с повышением скорости потока, что обусловлено наличием квадратичного множителя  $w^2/(2g)$ . Физически рост  $h_p$ ,  $\Delta p_p$  со скоростью вызван возрастанием пристеночного градиента скоростей в формуле (1.9) — из-за увеличения скорости потока и одновременного уменьшения толщины ламинарного пограничного слоя  $\delta_l$ , на который приходится наиболее значимая (см. рис. 2.14) часть изменения скорости в сечении канала.

Приведенные выше соотношения для расчета  $\lambda_r$  относятся к трубам с *гладкими* стенками. Внутренняя поверхность большинства промышленных труб обладает той или иной *шероховатостью* — в зависимости от материала труб, способа их изготовления, условий и срока службы.

Количественная характеристика — **степень шероховатости** — представляет собой среднее отношение высоты выступов к внутреннему диаметру трубы:  $\epsilon_{ш} = \delta_{ш}/d$ .

При *ламинарном* течении шероховатость не влияет на потери напора, поскольку жидкость плавно обтекает выступы. Та же картина наблюдается на начальных стадиях турбулентного течения, когда при небольших  $Re$  толщина ламинарного пограничного слоя  $\delta_l > \delta_{ш}$ . Однако при увеличении  $Re$  величины  $\delta_l$  и  $\delta_{ш}$  становятся близкими, а при дальнейшем развитии турбулентности  $\delta_{ш}$  становится больше толщины  $\delta_l$ , уменьшающейся с ростом  $Re$ . При достаточно больших значениях  $Re$  (их тоже называют "критическими" и обозначают  $Re_{кр2}$ ) роль выступов в возникновении пульсаций, образовании ансамблей и развитии турбулентности становится определяющей, а роль вязкого (ламинарного) пограничного слоя вырождается — осуществляется переход к **автомодельному** течению. Значения  $Re_{кр2}$ , начиная с которых  $\lambda_r$  зависит исключительно от степени шероховатости  $\epsilon_{ш}$ , быстро понижаются с ростом  $\epsilon_{ш}$ . Наличие шероховатости приводит к возрастанию потерь напора, что обычно отражается увеличением значения  $\lambda_r$  в зависимости\* типа

$$\lambda_r = f(Re, \epsilon_{ш}). \quad (2.29)$$

---

\* См., например, [6, 10, 22, 25].



Рис.2.15. Общий график зависимости  $\lambda_r$  от  $Re$  при различных относительных шероховатостях  $\epsilon_{ш}$

Общий график зависимости  $\lambda_r$  от  $Re$  для полного диапазона практически интересных течений в круглых трубах приведен на рис. 2.15. График выполнен в логарифмических координатах — это позволяет искусственно расширить область малых  $Re$  и проследить характерные закономерности; для повышения наглядности ось ординат дана в *большем* масштабе.

В области ламинарного режима ( $Re < 2300$ )  $\lambda_r$  следует зависимости (2.22) — в логарифмических координатах это падающая прямая. В турбулентной области ( $Re > 10^4$ ) нижняя кривая относится к трубам с гладкими стенками; выше расположены кривые  $\lambda_r = f(Re)$  для различных степеней шероховатости  $\epsilon_{ш}$ : для *больших* значений  $\epsilon_{ш}$  (они указаны в правой части графика) кривые располагаются выше. Жирной штриховой линией обозначена кривая  $Re_{кр2}$ ; правее нее — область автомодельного течения ( $\lambda_r$  не зависит от  $Re$ ). Вертикальными тонкими штрихами ограничена область переходного режима ( $2300 < Re < 10000$ ), где режим неустойчив, плохо воспроизводится и зависимости  $\lambda_r = f(Re)$  — ненадежны.

Заметим, что по данным разных исследователей кривые  $\lambda_r = f(Re)$  для шероховатых труб различаются и не обязательно совпадают с показанными на рис. 2.15. Это объясняют различием в геометрических характеристиках шероховатости (равномерная — неравномерная; зернистая или какая-либо иная).

В условиях турбулентного режима также имеется *участок гидродинамической стабилизации*, на котором постепенно устанавливается характерный профиль скоростей. Длина его для гладких труб  $l \approx (40+50)d$ , для шероховатых — несколько меньше (причем она уменьшается с ростом  $\epsilon_{ш}$ ). Значения  $\lambda_r$  на этом участке примерно в 1,5 — 2 раза выше, чем в условиях стабилизированного скоростного профиля.

### 2.2.6. Местные сопротивления

При взаимодействии потока жидкости с какой-либо расположенной в канале преградой наблюдается "отрыв" потока от стенок и возникновение за преградой особой ("вдоворотной") зоны с резко выраженным неупорядоченным характером течения жидкости (рис. 2.16, а). Направление движения отдельных струек жидкости в этой зоне — различно (вплоть до обратного в отдельных точках), а скорости изменяются по величине; пульсации скоростей — весьма интенсивны; зона постоянно обменивается количеством движения с основным потоком. Затраты энергии на дополнительную турбулизацию в вдоворотной зоне обуславливают потери давления на участке  $l_{вз}$  от преграды до некоторого сечения, ограничивающего протяженность этой зоны (обычно  $l_{вз}$  не более чем на порядок превышает поперечный размер препятствия  $b$ ). Такие потери напора трактуются как **местные сопротивления** в канале. В дальнейшем они рассматриваются применительно к круглым трубам, представляющим наибольший технологический интерес.

К местным сопротивлениям относятся: внезапное расширение и внезапное сужение канала; плавный или резкий изгиб труб (соответственно "отвод" или "колено"); диафрагмы; краны, вентили или задвижки различных типов; клапаны; распределительные устройства и т.п.

Существуют два основных подхода к учету местных сопротивлений, позволяющие определить потери напора  $h_m$  при взаимодействии потока с препятствием.

Первый из них постулирует, что местное сопротивление *практически полностью турбулизует поток*, так что его течение на участке действия препятствия является автомодельным. Это позволяет считать местное сопротивление пропорциональным скоростному напору  $w^2/(2g)$ ; коэффициент пропорциональности  $\xi$  называется **коэффициентом местного сопротивления**:

$$h_m = \xi \frac{w^2}{2g}. \quad (2.30a)$$

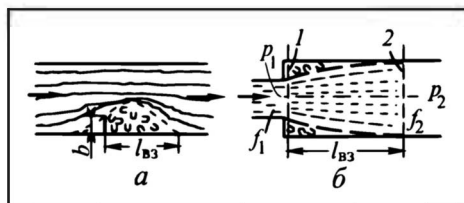


Рис. 2.16. Местные сопротивления:

а — характер течения жидкости в окрестности препятствия, б — к расчету местного сопротивления при внезапном расширении канала

Достоинство такого подхода — простота, поскольку  $\xi$  (*свой* для каждого вида местных сопротивлений) в силу автомодельности в идеале не зависит от  $Re$ . Однако, как показывают исследования, принятый постулат справедлив не для всех местных сопротивлений и не во всех диапазонах изменения числа  $Re$ ; в ряде случаев приходится учитывать зависимость  $\xi$  от  $Re$ , что усложняет расчеты (заметим, что как и  $\lambda_T$  в случае прямых каналов, коэффициент  $\xi$  уменьшается с ростом  $Re$ ).

Второй подход пытается учесть влияние  $Re$  на  $h_m$ : вводится понятие об эквивалентной длине  $l_e$ . Потери напора на *прямом участке* такой длины соответствуют данному местному сопротивлению (каждому его виду отвечает *свое* значение  $l_e$ ). Такой подход позволяет представить  $h_m$  в форме уравнения Дарси — Вейсбаха (2.17а):

$$h_m = \lambda_T \frac{l_e}{d} \frac{w^2}{2g}, \quad (2.306)$$

причем влияние  $Re$  отражено в  $\lambda_T$ , который рассчитывается по формулам, приведенным в предыдущих разделах. Однако, в силу значительной турбулизации потока при взаимодействии с препятствиями, в действительности влияние  $Re$  на  $h_m$  существенно слабее, чем это следует из формул  $\lambda_T = f(Re)$ , поэтому и здесь необходима коррекция.

В расчетном аспекте важно, что при изменяющейся на местном сопротивлении скорости потока (расширение или сужение канала, разделение потока и др.) коэффициенты  $\xi$  и  $l_e/d$  в таблицах и эмпирических формулах обычно относят к зоне *большой* скорости.

На практике чаще отдают предпочтение первому способу выражения местных сопротивлений, так как справочные значения величин  $\xi$  обычно доступнее, нежели  $l_e$ . Численные значения  $\xi$  (а также  $l_e$ ) для различных видов местных сопротивлений приводятся в литературе\*. В большинстве случаев они получены экспериментально; теоретически определить  $\xi$  удастся лишь в некоторых наиболее простых случаях. Одним из них является внезапное расширение потока.

Пусть стационарно движущийся горизонтальный поток переходит из узкого сечения трубы  $f_1$  в широкое  $f_2$  (рис.2.16, б); в результате внезапного увеличения сечения поток движется в форме расширяющейся струи, окаймленной на некотором участке  $l_{вз}$  кольцевой водоворотной зоной. Потери энергии на вязкое трение на этом участке будем считать незначимыми (вследствие преобладания переноса импульса за счет турбулентных пульсаций). Выделим контур, ограниченный стенками трубы и сечениями: левым 1, расположенным на *участке большего диаметра*, но в непосредственной близости к узкому сечению  $f_1$ , и правым 2 (на конце участка  $l_{вз}$ ). Запишем для этого контура баланс количества

\* См., например, [17, 25] и особенно [12].

движения и импульса для единицы времени, имея в виду, что массовый поток равен  $\rho w_1 f_1 = \rho w_2 f_2$ , а Накопление равно нулю (движение — стационарное):

$$(\rho w_2 f_2) w_1 + p_1 f_2 - (\rho w_2 f_2) w_2 - p_2 f_2 = 0.$$

Здесь два первых слагаемых относятся к левому сечению 1 (подчеркнем: это сечение находится уже в *широкой* трубе, поэтому оно равно  $f_2$ , среднепотоковая скорость в нем  $w_2$ , а давление здесь равно  $p_1$ , поскольку сечение примыкает к узкой трубе); два последних слагаемых относятся к правому сечению 2. Отсюда *реальный* перепад давления между сечениями 1 и 2

$$\delta p_p = p_1 - p_2 = \rho w_2 (w_2 - w_1) = \rho (w_2^2 - w_1 w_2). \quad (\text{аи})$$

При отсутствии обмена импульсом и количеством движения между сечениями 1 и 2 тоже должен был бы возникать перепад давления — *идеальный*, обусловленный изменением скоростных напоров (силы трения на коротком участке  $l_{\text{вз}}$  будем считать пренебрежимо малыми). Тогда изменение пьезометрических напоров в соответствии с уравнением Бернулли (2.15а) для *идеальной* жидкости при  $z_1 = z_2$  (горизонтальная труба) составил бы:

$$\delta p_n = p_1 - p_2^n = \rho g \left( \frac{w_2^2}{2g} - \frac{w_1^2}{2g} \right) = \rho \left( \frac{w_2^2}{2} - \frac{w_1^2}{2} \right); \quad (\text{ак})$$

индекс "и" означает гипотетическую ситуацию при движении идеальной жидкости.

В разд. 2.2.1 показано, что  $h_n$  и  $\Delta p_n$  обусловлены различием давлений  $p_2$  при течении по каналу реальной и идеальной жидкостей:  $\Delta p_n = p_2^n - p_2$ . Согласно выражениям (аи) и (ак) это различие равно разности перепадов давлений  $\delta p - \delta p_n$ . Итак,

$$h_m = \frac{\Delta p_n}{\rho g} = \delta p_p - \delta p_n = \frac{\rho (w_2^2 - w_1 w_2 - w_2^2/2 - w_1^2/2)}{\rho g} = \frac{(w_1 - w_2)^2}{2g}. \quad (\text{ал})$$

Полученное соотношение будем сопоставлять с выражением потери напора

по первому подходу:  $h_m = \xi \frac{w^2}{2g}$ . При этом надо условиться, какую из скоростей —

$w_1$  или  $w_2$  (соответственно, какое из сечений —  $f_1$  или  $f_2$ ) принять за расчетную базу. Если воспользоваться уравнением расхода  $f_1 w_1 = f_2 w_2$  и принять в качестве базовой скорость в *малом*  $f_1$  или *большом*  $f_2$  сечении, то из (в) получим

$$h_m = \frac{w_1^2}{2g} \left( 1 - \frac{w_2}{w_1} \right)^2 = \frac{w_1^2}{2g} \left( 1 - \frac{f_1}{f_2} \right)^2 \quad (\text{ам})$$

или

$$h_m = \frac{w_2^2}{2g} \left( \frac{w_1}{w_2} - 1 \right)^2 = \frac{w_2^2}{2g} \left( \frac{f_2}{f_1} - 1 \right)^2. \quad (\text{ам}')$$

Сравнивая эти формулы с выражением  $h_m$  по (2.30а), найдем значение для расчетов на основе сечений  $f_1$  и  $f_2$  соответственно:

$$\xi_1 = \left( 1 - \frac{f_1}{f_2} \right)^2; \quad \xi_2 = \left( \frac{f_2}{f_1} - 1 \right)^2. \quad (\text{ан})$$

Практически удобнее основывать величину  $\xi$  (и не только для внезапного расширения) на малом сечении, где жидкость течет с большей скоростью; поэтому в справочной литературе обычно приводится значение  $\xi_1$ . Очевидно, что при безграничном расширении потока (теоретически при  $f_2 \rightarrow \infty$ , практически при  $f_2 \gg f_1$ ) получается  $\xi_1 = 1$ ; такая ситуация встречается, скажем, при вытекании жидкости из трубопровода в резервуары больших размеров.



### 2.2.7. Характер изменения напора по длине трубопровода

При движении жидкости по трубопроводу полный напор уменьшается вследствие сопротивления движению на прямых участках трубопровода и на местных сопротивлениях. На рис.2.17 показаны характерные случаи изменения давления по длине горизонтального трубопровода.

На прямом участке трубопровода постоянного сечения (а) давление изменяется линейно, продольный его градиент  $dp/dx = \text{const}$  (здесь  $x$  — текущая координата вдоль трубопровода).

При увеличении диаметра (б, в) градиент  $dp/dx$  понижается. При этом плавный переход от одного постоянного диаметра к другому (б) сопровождается плавным переходом от одного линейного участка падения давления к другому линейному участку (с меньшим  $dp/dx$ , если диаметр увеличивается). Для постепенного расширения трубопровода (в) характерно криволинейное изменение давления по длине с понижением продольного градиента  $dp/dx$ .

Наличие местного сопротивления (кран на виде з) вызывает в точке его расположения скачкообразное падение напора. Местное сопротивление, возникающее при изменении диаметра трубопровода, характеризуется (д) изменением градиента  $dp/dx$  на участке за местным сопротивлением (после скачкообразного падения давления).

Наконец, установка на трубопроводе напорного устройства (источник напора, например насос) сопровождается (е) скачкообразным повышением давления.

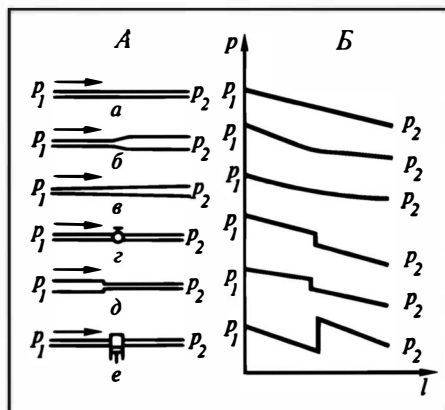


Рис.2.17. Падение напора по длине трубопровода:

А — схемы трубопроводов, Б — профили давлений; а — трубопровод постоянного диаметра, б — два трубопровода разных диаметров с плавным переходом, в — трубопровод с плавно изменяющимся диаметром, з — трубопровод с внезапным изменением диаметра, д — трубопровод с напорным устройством

Реальное производство включает не только рассмотренные выше случаи, но и многие другие, а также их разнообразные сочетания.

### 2.3. ТРУБОПРОВОДЫ

Транспортировка жидкостей (а также газов, твердых материалов, смесей жидкостей и газов с твердыми частицами) является одной из наиболее распространенных технологических операций. Чаще всего ее осуществляют по закрытым каналам — **трубопроводам** — в самых различных условиях и вариантах. Подчеркнем: стоимость трубопроводов на химических предприятиях составляет примерно 5% от общих капитальных затрат — это немало. Отсюда — практическая важность решения задач проектирования (расчета, выбора) и эксплуатации (установления параметров работы) трубопроводов. Ниже мы ограничимся общим подходом к расчету трубопроводов и некоторыми типичными примерами, иллюстрирующими общий подход.

Различают **простые и сложные трубопроводы**. Простым называется трубопровод, соединяющий источник жидкости с ее потребителем и не имеющий между ними никаких дополнительных Приходов и Уходов жидкости, Источников и Стоков. Массовый поток  $G$  (в случае несжимаемой жидкости — также и объемный  $V$ ) без каких-либо количественных изменений доставляется по простому трубопроводу от источника к потребителю. Сложными называются одиночные трубопроводы с различным образом организованными подводами или отводами жидкости по пути от источника к потребителю либо сети, составленные из каких-либо сочетаний простых трубопроводов (параллельные, разветвленные, закольцованные и др.). Простые и сложные трубопроводы включают прямые участки и местные сопротивления.

В числе основных задач гидравлического расчета трубопроводов:

- определение эксплуатационных характеристик готового (существующего в натуре или в проекте) трубопровода с известными геометрическими и конструктивными параметрами, а также с определенными условиями на границах — это **задачи эксплуатации**;

- определение геометрических характеристик трубопровода (прежде всего его диаметра) либо конечных (начальных) параметров течения (напора, давления на одном из концов трубопровода и т. п.) при заданной скорости течения жидкости в трубопроводе или ее расходе — это **задачи проектирования**.

В основе расчета трубопроводов лежат понятия и соотношения, составляющие содержание предыдущих разделов. При их использовании иногда удается выразить искомую величину в

явном виде (остальные составляющие расчетной формулы известны) — тогда говорят о **прямых** задачах расчета трубопроводов. В других случаях в явном виде искомую величину выразить не удастся, она остается в обеих частях уравнения (иногда в завуалированном виде) — тогда говорят об **обратных** задачах; их решение часто отыскивается с помощью итерационных процедур.

Наименее сложными являются решения задач о простом трубопроводе. Методы и результаты этих решений используются при расчете сложных трубопроводов. Поэтому первоначально рассмотрим методы расчета простого трубопровода.

### 2.3.1. Простой трубопровод

Будем здесь анализировать течение жидкости по трубопроводу под действием перепада давлений, возникающего за счет разницы напоров — геометрических, пьезометрических и скоростных (рис.2.18); работа других побудителей движения изучается в последующих разделах учебника. Пусть длина прямых участков трубопровода  $l$ , сечения резервуаров и трубопровода (соответственно  $f_1$ ,  $f_2$  и  $f$ ), вид и число местных сопротивлений — известны. Требуется связать расход жидкости  $V$  (или ее скорость в трубопроводе  $w$ ) с напором и геометрическими характеристиками трубопровода.

Положим для определенности, что жидкость плотностью  $\rho$  течет из сосуда 1 в сосуд 2. Уровень жидкости в сосуде 1 расположен на расстоянии  $z_1$ , а в сосуде 2 — на  $z_2$  от некоторой горизонтальной плоскости отсчета (на схеме не показана; ее положение несущественно: для течения важна лишь разность уровней  $z_1 - z_2$ ). Давления над свободными поверхностями в сосудах равны  $p_1$  и  $p_2$ . Для сечений 1 и 2, совпадающих со свободными поверхностями в сосудах, может быть записано уравнение Бернулли (2.16):

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{w_2^2}{2g} + h_n, \text{ или } H_1 = H_2 + h_n, \quad (a)$$

где  $H_{1,2} = z_{1,2} + \frac{p_{1,2}}{\rho g} + \frac{w_{1,2}^2}{2g}$  — полные напоры на уровнях  $z_{1,2}$  в сосудах № 1 или № 2.

Заметим, что скоростные напоры в резервуарах на уровне свободных поверхностей  $w_1^2/(2g)$  и  $w_2^2/(2g)$ , как правило, пренебрежимо малы в сравнении с другими составляющими уравнения (а), поскольку  $f_1, f_2 \gg f$ ; часто при анализе напоры  $w_{1,2}^2/(2g)$  опускают.

Соотношение (а) показывает, что разность полных напоров (движущая сила) затрачивается на преодоление сопротивления

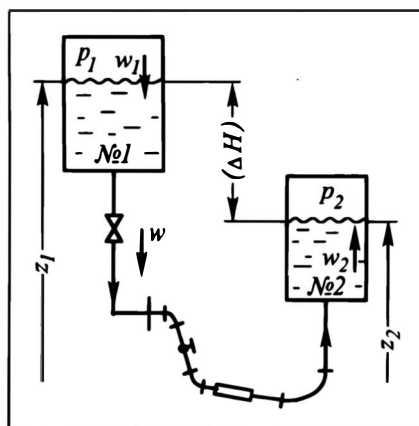


Рис. 2.18. Схема простого трубопровода

движению жидкости по трубопроводу:  $\Delta H \equiv H_1 - H_2 = h_n$ ; эту разность  $\Delta H$  называют **располагаемым напором** (она условно изображена на рис. 2.18 в скобках).

Потери напора складываются из сопротивлений движению жидкости на *прямых участках* трубопровода и на *местных сопротивлениях*. Первые могут быть записаны в форме уравнений Дарси — Вейсбаха, а вторые — по-разному (в зависимости от используемого подхода — см. разд. 2.2.6).

Если воспользоваться первым подходом, то *суммарное сопротивление* течению жидкости со скоростью  $w$  по трубопроводу диаметром  $d$  при общей длине прямых участков  $l$  выразится как

$$h_n = \lambda_r \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g} + \xi_{\text{вх}} \frac{w^2}{2g} + \xi_z \frac{w^2}{2g} + \xi_d \frac{w^2}{2g} + \xi_{\text{кр}} \frac{w^2}{2g} + \xi_p \frac{w^2}{2g} + \dots + \xi_{\text{вых}} \frac{w^2}{2g}. \quad (6)$$

Здесь индекс при  $\xi$  соответствует виду местного сопротивления (вход в трубу, задвижка, диафрагма, кран, расширение, . . . , выход из трубы). Разумеется, при наличии прямых участков разного диаметра необходимо фиксировать разные скорости жидкости на этих участках (пересчет скоростей — по уравнениям расхода).

В более краткой форме:

$$\Delta H = h_n = \left( \lambda_r \frac{l}{d} + \sum_i \xi_i \right) \frac{w^2}{2g}, \quad (2.31)$$

где символом  $\sum_i \xi_i$  обозначена сумма всех коэффициентов местного сопротивления.

Если воспользоваться вторым подходом, то

$$\Delta H = h_{\text{п}} = \lambda_{\text{г}} \frac{l + \sum_i l_{ei}}{d} \frac{w^2}{2g}, \quad (2.32)$$

причем  $\sum_i l_{ei}$  — сумма эквивалентных длин для всех местных сопротивлений на трубопроводе.

При расчете простого трубопровода необходимо установить связь следующих характеристик:  $V$ ,  $w$ ,  $\Delta H$ ;  $\text{Re}$ ,  $\lambda_{\text{г}}$ ,  $\sum \xi_i$  (или  $\sum l_{ei}$ );  $\rho$ ,  $\mu$ . Уравнений связи — четыре:

$$(2.31) \text{ или } (2.32); \quad V = w \frac{\pi d^2}{4}; \quad \text{Re} = \frac{wd\rho}{\mu} \quad \text{и} \quad \lambda_{\text{г}} = f(\text{Re}).$$

При этом значения  $\rho$  и  $\mu$  известны; в практических задачах обычно задана длина трубопровода  $l$ ; известен и набор местных сопротивлений, а значит без особых затруднений определяются суммы  $\sum_i \xi_i$  либо  $\sum_i l_{ei}$  — нередко в форме  $\sum_i (l_{ei}/d)$ .

Задачи, чаще всего встречающиеся в практической постановке, приведены ниже:

Известны (заданы)	Требуется определить	Вид задачи	Характеристика решения
1) $d$ и $w$	$\Delta H$ и $V$	Прямые задачи	Прямое определение $\text{Re}$ , по нему — $\lambda_{\text{г}}$ и т. д.
2) $d$ и $V$	$\Delta H$ и $w$		
3) $V$ и $w$	$\Delta H$ и $d$		
4) $\Delta H$ и $d$	$V$ и $w$	Обратные задачи	$\text{Re}$ и $\lambda_{\text{г}}$ прямо не определяются требуется итерационная процедура
5) $\Delta H$ и $V$	$d$ и $w$		
6) $\Delta H$ и $w$	$d$ и $V$		

Заметим: задачи 1—3 и 5, как правило, выступают в качестве проектных, задача 4 — в качестве эксплуатационной; задача 6 на практике встречается редко, это преимущественно учебная задача.

Расчетные соотношения в форме (2.31), (2.32) позволяют решать *прямые* задачи: при известных потоках  $G$  или  $V$  и диаметре трубопровода  $d$  легко найти (по уравнению расхода) скорость  $w$ , далее — число  $\text{Re}$  и  $\lambda_{\text{г}}$ , отыскать значения  $\xi_i$  или  $l_{ei}$  и рассчитать потерянный  $h_{\text{п}}$  или равный ему располагаемый  $\Delta H$  напор (при необходимости —  $H_1$  либо  $H_2$  или какую-либо из составляющих полного напора). Алгоритм расчета:

$$\text{Известно } V, d \rightarrow w \rightarrow \text{Re} \rightarrow \lambda_{\text{г}} \xrightarrow[\xi_i, l_{ei}]{(2.31), (2.32)} h_{\text{п}} = \Delta H. \quad (\text{в})$$

По-иному решаются *обратные* задачи. Пусть, например, нужно определить  $V$  и  $w$  при известных  $\Delta H$  и  $d$  (задача эксплуа-

тации) или  $d$  при заданных  $V$  и  $\Delta H$  (одна из задач проектирования).

Попытка использовать уравнение (2.31), предварительно выразив  $\lambda_r$  через  $Re$  (и записав выражение для  $Re$ ), приводит для турбулентных режимов к громоздким уравнениям дробных степеней, аналитически не разрешимым. Рациональным представляется следующий путь решения обратных задач (продемонстрируем его применительно к использованию коэффициентов  $\xi_i$ ; при использовании  $l_{ei}$  — подход аналогичен).

Пусть, например, необходимо определить скорость в трубопроводе  $w$  (эксплуатационная задача). Представим (2.31) решенным относительно скорости:

$$w = \sqrt{\frac{2g\Delta H}{\lambda_r \frac{l}{d} + \sum \xi_i}}. \quad (2.31a)$$

Это выражение в скрытой форме содержит  $w$  и в правой части:  $\lambda_r$  зависит от  $Re$ , а в  $Re$  входит пока еще не известная скорость  $w$ . Поэтому для определения  $w$  по (2.31a) следует применить итерационную процедуру — здесь эффективна простая итерация, когда сначала задаются стартовым значением скорости  $w$  "в разумных пределах" (некое нулевое приближение) и далее определяют  $w$  по (2.31a). Алгоритм расчета:

$$\begin{array}{c} \text{Задались } w \rightarrow Re \rightarrow \lambda_r \rightarrow w' \\ \quad \quad \quad \circ - \bullet \quad \quad \quad \xi_i \end{array} \quad (г)$$

При сопоставлении ( $\circ - \bullet$ ) полученного значения  $w'$  со взятым в качестве стартового  $w$  принимается решение, является ли их расхождение приемлемым с точки зрения точности расчета. Если ДА, то расчет закончен; если НЕТ, то в качестве исходного берется теперь значение  $w'$ , и процедура расчета повторяется — до тех пор, пока получаемое значение скорости с приемлемой точностью не совпадет с исходным для последнего итерационного акта. Важно: поскольку  $\lambda_r$  для турбулентного режима весьма слабо изменяется с  $Re$ , итерационная процедура является короткой — решение получается с приемлемой точностью за 3—5 итерационных актов.

Аналогично решается задача проектирования, когда расчету подлежит диаметр трубопровода.

Заметим, что для ламинарных течений (на практике — несчастный случай) итерационных расчетных проблем нет, поскольку прямо можно воспользоваться линейной формулой Гагена—Пуазейля.

Нередко при постановке задачи в ее условии задается расход жидкости  $V$  (или расход является определяемой величиной). Тогда наряду с выражением (2.31а) к расчету привлекаются уравнения расхода (1.17), (1.18); например,  $V = w(\pi d^2/4)$ . Можно и прямо связать расход с диаметром:

$$V = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2g\Delta H}{\lambda_r \frac{l}{d} + \sum \xi}} \quad (2.31б)$$

и провести итерационную процедуру по изложенной выше канве, сравнивая стартовое (исходное) и рассчитанное значения  $V$ .

Иногда в целях упрощения пренебрегают слагаемым  $\sum \xi_i$  в сравнении с  $\lambda_r(l/d)$  (на практике на долю  $\sum \xi_i$  приходится обычно от 5 до 15% величины знаменателя под радикалом); в иной интерпретации (второй подход к учету местных сопротивлений) это означает, что в качестве расчетной длины  $l$  принята сумма геометрических  $l_i$  и эквивалентных  $\sum l_{ei}$  длин. Тогда (2.31б) принимает вид

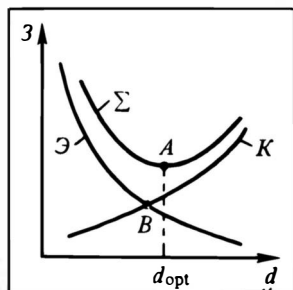
$$V = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2g\Delta H d}{\lambda_r l}} \quad \text{или} \quad \frac{\Delta H}{l} = a \frac{\lambda_r V^2}{d^5}, \quad (2.32а)$$

где  $a = 16/(\pi^2 \cdot 2g)$ ; при использовании СИ  $a = 0,0827 \text{ c}^2/\text{м}$ .

На основе этих уравнений решаются прямые задачи (определение  $\Delta H$ , в редких случаях  $l$ ) и обратные (определение  $V$  и  $d$ ). Решение обратных задач по (2.32а) также ведется итерационными методами.

### 2.3.2. Наивыгоднейший диаметр трубопровода. Диапазоны рекомендуемых скоростей

Проблема оптимизации диаметра трубопроводов, аппаратов и выбора рациональных режимных характеристик их функционирования в химической технологии ставится и решается весьма часто. Прежде всего с ней встречаются при проектировании (при эксплуатации — редко), когда задача не полностью определена: не хватает значения  $d$  или  $w$ , чтобы замкнуть при решении систему уравнений связи. В расчетном плане эта проблема возникает и при осуществлении итерационных расчетов — это вопрос о стартовых значениях параметра: скажем, в каких "разумных пределах" целесообразно задаться скоростью, начиная итерационную процедуру расчета трубопровода.



Подход к решению проблемы является *общим* для многих гидродинамических, тепло- и массообменных процессов. Он базируется на сопоставлении капитальных и эксплуатационных затрат.

В основу анализа применительно к трубопроводам положим уравнения расхода и Дарси

Рис. 2.19. Подход к определению наивыгоднейшего диаметра трубопровода:

$Z$  — затраты,  $\mathcal{E}$  — эксплуатационные затраты,  $K$  — капитальные затраты,  $\Sigma$  — суммарные затраты

— Вейсбаха:

$$V = f_w \quad (1.17); \quad G = \rho f_w \quad (1.18);$$

$$\Delta p_n = \lambda_r \frac{l}{d} \frac{w^2}{2} \rho. \quad (2.17a)$$

С увеличением диаметра трубопровода возрастают капитальные затраты, причем ускоренно: пропорционально  $d$  растет не только периметр трубы  $\pi d$ , но, как правило, еще и толщина ее стенок. На рис.2.19 изменение **капитальных** (точнее — **амортизационных**) затрат с  $d$  описывается некоторой кривой  $K$ . Но с увеличением  $d$  при заданных расходах  $G$  или  $V$  по (1.17), (1.18) снижается скорость потока  $w$ , а с ней по (2.17a) — энергия, затрачиваемая на преодоление гидравлического сопротивления (энергия составляет значительную долю эксплуатационных затрат). **Эксплуатационным** (прежде всего — **энергетическим**) затратам отвечает кривая  $\mathcal{E}$ . Технологию интересует диаметр трубопровода, при котором **суммарные** затраты (кривая  $\Sigma$ ) минимальны. На рисунке минимуму кривой  $\Sigma$  отвечает точка  $A$ ; значит, следует подбирать трубопровод, близкий по диаметру к оптимальному:  $d_{\text{опт}} = d_A$ .

Заметим: в учебниках иногда ошибочно определяют  $d_{\text{опт}}$  как абсциссу точки  $B$ ; несмотря на возможную близость в каких-то случаях к  $d_{\text{опт}}$ , диаметр  $d_B$ , отвечающий равенству капитальных и эксплуатационных затрат, вообще говоря, никакого технологического интереса не представляет.

Практика реальных расчетов показывает, что для относительно невязких жидкостей (типа воды, низкомолекулярных углеводородов, таких как бензин и керосин, низшие спирты, не очень концентрированные растворы и др.) при выборе диаметра вблизи  $d_{\text{опт}}$  скорости жидкости в трубопроводах получаются в диапазоне 0,5 — 3 м/с. При течении газов рекомендуется брать скорости на порядок выше — в диапазоне 5—30 м/с; при этом энергетические затраты по (2.17a) остаются приемлемыми, поскольку у газов значения плотности  $\rho$  на 2 — 3 порядка ниже, чем у жидкостей. Именно в указанных диапазонах целесообразно принимать стартовые значения скоростей (или на их основе — стартовые значения  $V$  и  $d$ ) при итерационном решении обратных задач.

При проектировании аппаратов чаще всего (если нет специальных ограничений) скорости рекомендуется выдерживать в 3 — 5 раз ниже, чем для трубопроводов.

В качестве примеров сложного трубопровода рассмотрим:

- сеть, составленную из нескольких простых трубопроводов;
- одиночный трубопровод со специфическим течением жидкости.

### 2.3.3. Разветвленный трубопровод

Простейшая схема **разветвленного** трубопровода с одной точкой раздачи и двумя потребителями жидкости приведена на рис. 2.20. Значения полных напоров заданы: в резервуаре — источнике жидкости —  $H_0$ , у потребителей в точках 1 и 2 —  $H_1$  и  $H_2$  соответственно; в точке раздачи  $M$  напор  $H_*$  неизвестен. Пусть для определенности  $H_0 > H_1, H_2$ , так что жидкость течет из резервуара по магистральному трубопроводу (его характеристики обозначены индексом "0") к точке раздачи  $M$  и далее — к потребителям 1 и 2.

Будем решать наиболее интересные (практически и методически) обратные задачи эксплуатации и проектирования. В обо-



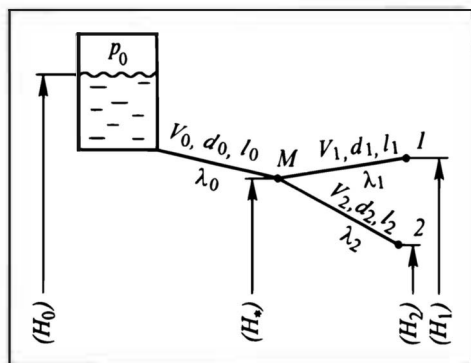


Рис. 2.20. Схема разветвленного трубопровода

их случаях необходимые связи могут быть заданы либо системой уравнений (для отдельных участков трубопровода) типа (2.31а) и соответствующих им уравнений расхода (1.17), либо системой уравнений типа (2.32а). Используем здесь второй путь.

Обозначив располагаемые напоры на соответствующих участках как разности полных напоров на их концах, запишем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{H_0 - H_*}{l_0} &= a \frac{\lambda_0 V_0^2}{d_0^5} & (0) \\ \frac{H_* - H_1}{l_1} &= a \frac{\lambda_1 V_1^2}{d_1^5} & (1) \\ \frac{H_* - H_2}{l_2} &= a \frac{\lambda_2 V_2^2}{d_2^5} & (2) \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

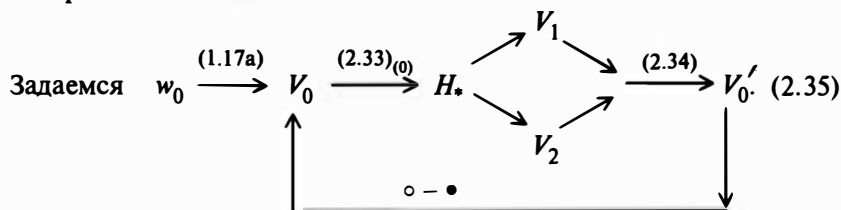
В задаче эксплуатации заданы диаметры  $d_0, d_1, d_2$  (длины участков  $l_0, l_1, l_2$  будем считать также известными) и напоры у источника и потребителей жидкости  $H_0, H_1, H_2$ . Требуется найти расходы на отдельных участках  $V_0, V_1$  и  $V_2$ ; к этим неизвестным добавляется четвертое —  $H_*$ . Чтобы замкнуть систему уравнений, в дополнение к (2.33) нужна четвертая связь; ее дает уравнение материального баланса для точки раздачи  $M$ :

$$V_0 = V_1 + V_2. \quad (2.34)$$

Значения  $\lambda_0, \lambda_1$  и  $\lambda_2$  тоже поначалу неизвестны, но они должны определиться в процессе расчета. При этом полагаем, что методикой расчета отдельных участков мы владеем вполне: это ведь уже рассмотренные простые трубопроводы, их надо только состыковать.

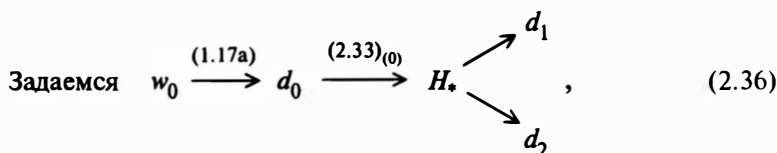
Процедуру расчета удобно (хотя не обязательно) начать с выбора какого-нибудь расхода, предпочтительно в магистрали: задавшись скоростью в ней  $w_0$  (в разумных пределах), находим по уравнению расхода стартовое значение  $V_0$ . Далее, по верхнему

уравнению системы (2.33), решая *прямую* задачу для магистрального трубопровода (в ходе ее решения получается  $\lambda_0$ ), находим  $H_*$ . После этого по отдельности решаем *обратные* задачи для *простых* трубопроводов — участков № 1 и № 2 (в ходе их решения получаются  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ ); итерационная процедура такого решения подробно рассмотрена в разд.2.3.1; в результате определяются расходы  $V_1$  и  $V_2$ . Сумма этих расходов согласно (2.34) должна дать расчетный расход в магистральном трубопроводе  $V_0'$ . Его надо сравнить со стартовым значением  $V_0$  и при неприемлемом расхождении повторить круг расчета, приняв теперь за стартовое значение величину  $V_0'$ . Последовательность расчета изображена схемой ниже:



**В задаче проектирования** заданы  $V_0$ ,  $V_1$ ,  $V_2$  (длины участков  $l_0$ ,  $l_1$  и  $l_2$  тоже известны) и напоры  $H_0$ ,  $H_1$ ,  $H_2$ . Требуется найти диаметры  $d_0$ ,  $d_1$  и  $d_2$ . В отличие от задачи эксплуатации здесь равенство (2.34) не является уравнением; это *тождество*, поскольку  $V_0$ ,  $V_1$  и  $V_2$  могут быть заданы только так, чтобы это равенство соблюдалось. Получается, что число неизвестных (все диаметры и  $H_*$ ) на единицу больше числа уравнений. Появляется одна степень свободы: один из диаметров может быть выбран произвольно.

Продemonстрируем процедуру расчета, базируя его (в качестве примера) на значении  $d_0$ . Это значение устанавливается из уравнения расхода для магистрали на основе  $w_0$  (скоростью этой задаются *в разумных пределах*). Последовательность расчета:



причем значения  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  определяются в ходе решения — *прямой* задачи (для магистрального трубопровода) и *обратных* (для участков № 1 и № 2).

Существенно, что в отличие от (2.35) расчет по схеме (2.36) не требует каких-либо заключительных итерационных коррекций в связи со стартовым значением  $d_0$ : найденные диаметры

участков, вообще говоря, являются окончательными. Повторный расчет может потребоваться в силу каких-то привходящих (сугубо практических) обстоятельств — например, отсутствия труб найденных диаметров  $d_0$ ,  $d_1$  или  $d_2$  (в сортаменте или на складе завода). Тогда надо повторить расчет, приняв иное значение  $d_0$  (получатся иные значения  $d_1$  и  $d_2$ ). Таким образом, задача проектирования может быть реализована при *различных наборах* диаметров (но в пределах одного набора — значения  $d_0$ ,  $d_1$  и  $d_2$  связаны между собой однозначно).

Специально подчеркнем, что при решении задач на разветвленный трубопровод совсем не обязательно основываться на усеченном уравнении (2.32a); к тем же результатам приводит использование уравнения (2.31a) совместно с уравнениями расходов (1.18) для каждого из участков сложного трубопровода — в этом случае строже учитываются местные сопротивления. Число неизвестных и уравнений возрастает, что, однако, не вызывает никаких дополнительных затруднений, поскольку итерационные процедуры расчета остаются прежними (последовательно используются те же самые расчетные связи).

Наконец, решение возможно вести, задаваясь первоначально полным напором  $H_*$  в точке  $M$  (выбрав его, разумеется, больше  $H_1$  и  $H_2$  и меньше  $H_0$ ) и продолжая дальше итерационную процедуру до приемлемой сходимости.

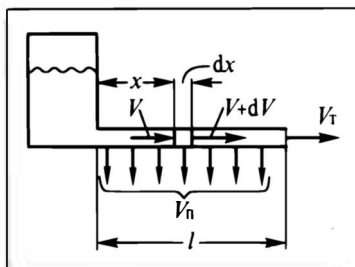
При разветвлении трубопровода на большее число потребителей (три, четыре и т.д.) в равной мере возрастает число уравнений и неизвестных — в процедуре расчета нет принципиальных изменений. А вот при появлении каждой *новой точки раздачи* (скажем, еще одной на участке 1) *дополнительно* появляется новая неизвестная величина — напор в упомянутой точке. Система уравнений в задаче эксплуатации, конечно, все равно будет замкнутой (добавится материальный баланс в новой точке раздачи). Но в задачах проектирования будут уже две степени свободы, и придется произвольно задаваться двумя диаметрами (в случае  $n$  точек раздачи —  $n$  произвольными диаметрами).

Сложные сети трубопроводов могут содержать различные ветвления, их сочетания, закольцованные схемы и т.п. При понимании общих подходов к расчету простых трубопроводов и их схем анализ сложных сетей принципиальных затруднений не вызывает.

### 2.3.4. Трубопровод с путевым и транзитным расходами

Согласно схеме на рис. 2.21 движение жидкости по трубопроводу происходит с постепенным (в простейшем случае — равномерным) отводом жидкости по мере ее течения — это *путевой расход* (для всего участка длиной  $l$  он равен  $V_n$ ); в общем случае

Рис.2.21. Схема трубопровода с путевым и транзитным расходами



из трубопровода по длине  $l$  отводится не весь поток, часть его — **транзитный** расход  $V_T$ , — пройдя весь трубопровод, отводится с правого его торца. Такие схемы в различных вариантах нередко используются в химической технологии для устройств (или элементов устройств) при распределении жидкости в поперечном сечении или по длине технологического аппарата.

Рассмотрим некоторые возможные постановки задач расчета таких трубопроводов и наметим общие подходы к их решению. При любой постановке необходимо найти связь между падением напора (задан обычно располагаемый напор на всей длине  $l$ ), расходом и геометрическими характеристиками (размерами отверстий и способом их распределения по длине  $l$ ). Задача **эксплуатации** состоит в установлении изменения путевого расхода по длине трубопровода — *готового* или *спроектированного* (часто — с равномерным распределением одинаковых отверстий по длине участка  $l$ ). **Проектные** задачи приходится решать в случае *заданного* закона отвода жидкости по длине трубопровода (равномерного или неравномерного): здесь необходимо установить распределение отверстий по длине  $l$  (конструктивно менее удобно варьировать размеры отверстий). Определенную роль во всех этих задачах играет транзитный расход; в частном случае он может быть равен нулю.

С расчетной точки зрения основная проблема связана с *переменным* по длине потоком жидкости по трубопроводу. Это означает (см.рис.2.21), что на некотором удалении  $x$  от начала трубопровода поток по нему  $V$  меньше существовавшего в начальном сечении  $V_n = V_n + V_T$ , причем, естественно,  $V = \text{var}$ . Потерянный напор на участке  $dx$  (будем считать, что этому участку свойственны все характерные особенности трубопровода) может быть записан в форме (2.32):

$$dh_n = \left( \lambda_r \frac{d \left( l + \sum_i l_{ei} \right)}{d} \right) \frac{w^2}{2g} \quad (\text{д})$$

причем  $\sum l_{ei}$  здесь относится к местным сопротивлениям в точках отвода порций жидкости по пути ее течения (через отверстия, насадки и подобные устройства).

Совместно с (д) будем использовать уравнение расхода в форме (1.18); важно, что в этом уравнении для рассматриваемой задачи расход изменяется от сечения к сечению:  $V = V(x)$ .

В более простой форме величина  $dh_n$  (или равное ей элементарное падение напора –  $dH$ ) соответственно выражению (2.32а) выразится:

$$\frac{dh_n}{dx} = a \frac{\lambda_r V^2}{d^5}; \quad dh_n = -dH = a \frac{\lambda_r V^2}{d^5} dx. \quad (е)$$

Такая форма записи часто бывает здесь удобнее, поскольку при постановке задачи обычно предусматривается отыскание связи между  $V$  и другими характеристиками течения в транспортном трубопроводе. Используем в дальнейшем эту форму записи.

Поток жидкости в произвольном сечении  $x$  найдем из материального баланса для элементарного участка  $dx$  в единицу времени (режим – стационарный); согласно ОБС (1.8), в отсутствии Источников, Стоков и Накопления

$$V - (V + dV) - V_0 dx = 0,$$

где  $V_0$  – удельный (на единицу длины трубопровода) путевой расход, в общем случае – переменный.

Отсюда

$$dV = -V_0 dx. \quad (ж)$$

Очевидно, что поток жидкости в произвольном сечении  $x$  составит

$$V = V_n - \int_0^x V_0 dx, \quad (з)$$

а в простейшем случае равномерного путевого расхода ( $V_0 = \text{const}$ ):

$$V = V_n - V_0 x = V_T + V_n - V_0 x = V_T + V_0 l - V_0 x = V_T + V_0 (l - x). \quad (и)$$

Подстановка значения  $V$  по (з) в выражение (е) дает после интегрирования искомую связь в общем виде:

$$\Delta H = h_n = a \int_0^l \frac{\lambda_r \left( V_n - \int_0^x V_0 dx \right)^2}{d^5} dx. \quad (2.37)$$

Дальнейшие операции с уравнением (2.37) определяются постановкой задачи. Важно: здесь каждому значению  $x$  отвечает свое значение  $V$ , а значит, и свои  $Re$  и  $\lambda_r$ . Решение для наиболее простого случая  $V_0 = \text{const}$  с упрощающим допущением  $\lambda_r \approx$

$\approx \text{const}$  приводится в литературе\* (там же рассмотрен частный случай  $V_T = 0$ ).

Установленные аналитические связи типа (2.37) позволяют конкретизировать постановку задачи. В *прямых* задачах, когда требуется рассчитать  $h_n$  или необходимый напор  $\Delta H$  (это задачи проектирования), непосредственно используется решение в форме (2.37). Заметим: в простейших случаях — типа (и) — решения получаются достаточно простыми. В случае *обратной эксплуатационной* задачи необходимо установить закон изменения расхода по длине  $V = V(x)$ . В случае *обратной проектной* задачи определению подлежит диаметр трубопровода  $d$ , обеспечивающий при известном  $\Delta H$  значения  $V_n$  и  $V_T$ , либо решается более тонкая задача — обеспечения заданного закона отвода жидкости по длине трубопровода. Например, при необходимости равномерного путевого расхода на решение следует наложить дополнительное ограничение:  $dV/dx = \text{const} = V_n/l = V_0$  — и далее искать закон распределения отверстий по длине трубопровода (расстояния между отверстиями, очевидно, придется уменьшать из-за снижения напора вдоль  $x$ ).

В случае обратных задач решение уравнения (2.37) ведется с помощью итерационных процедур, иногда — достаточно громоздких.

### 2.3.5. Газопровод

В основе расчета газопровода (прямые и обратные задачи; задачи эксплуатации и проектирования) лежит уравнение Бернулли для реальных рабочих тел, согласно которому движение происходит за счет располагаемого напора, расходуемого на преодоление гидравлического сопротивления. При движении *жидкостей* изменение напора (давления) по длине трубопровода не сопровождается изменением плотности (жидкость практически несжимаема), а в отсутствие дополнительных Прихода и Ухода на рассматриваемом участке — также и объемного расхода  $V$ . При движении *газов* (они *сжимаемы*) их плотность (а она входит в уравнение Бернулли) *изменяется* в силу изменения давления; одновременно вследствие расширения газа при уменьшении давления в направлении движения увеличивается объемный расход  $V$ . Эти различия в свойствах газа и жидкости должны быть учтены при расчете газопровода.

Прежде всего, для газопроводов следует оперировать не объемным, а *массовым* расходом  $G$ , поскольку в отсутствие Приходов и Уходов газа между двумя рассматриваемыми сечениями для стационарного движения именно  $G$  остается неизменным.

---

\* См. [6, 25].

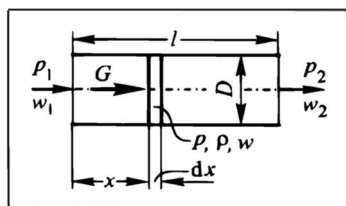


Рис.2.22. Схема газопровода

Далее: уравнение Бернулли для газового потока может быть записано только в дифференциальной форме — по типу (2.14), но с учетом потерь напора  $dh_n$  на элементарном участке газопровода. При этом плотность  $\rho$  пере-

менна и зависит от давления  $p$  в данном сечении.

В целях иллюстрации подхода к расчету газопровода будем рассматривать изотермическое течение газа на прямом участке длиной  $l$ , по которому газ движется (пусть слева направо) под действием разности давлений  $p_1 - p_2$  (рис. 2.22); диаметр газопровода обозначим  $D$ . Выделим на расстоянии  $x$  от входа в газопровод элементарный участок  $dx$ , для которого характерны текущие значения давления  $p$ , плотности  $\rho$ , скорости  $w$ .

Запишем уравнение Бернулли для участка  $dx$ :

$$dz + \frac{dp}{\rho g} + \frac{dw^2}{2g} + dh_n = 0. \quad (2.38)$$

В этом уравнении не все слагаемые равнозначны, что обусловлено низкими значениями плотностей газа (обычно на 2—3 порядка ниже, чем для жидкости). По этой причине:

— слагаемым  $dz$  можно пренебречь в сравнении с  $dp/\rho g$  (не из-за горизонтального расположения газопровода на рисунке —  $dz$  мало и для вертикального, и для наклонного, а из-за малого гидростатического давления газового столба высотой  $dz$  или  $\Delta z$ ; исключение могут составить газы с большой молярной массой при высоких давлениях — этот случай здесь не рассматривается);

— слагаемым  $dw^2/(2g)$  можно пренебречь в сравнении с  $dp/(\rho g)$  из-за малого вклада скоростного напора (исключением являются высокоскоростные потоки тяжелых газов, когда значения  $w$  далеко превосходят рекомендованные в разд. 2.3.2; эти случаи здесь также не рассматриваются).

С этими предпосылками и выражением  $dh_n$  на элементарном участке  $dx$  по Дарси — Вейсбаху уравнение (2.38) принимает вид

$$\frac{dp}{\rho g} + dh_n = 0 \quad \text{и} \quad -dp = \rho g dh_n = \lambda_r \frac{dx}{D} \frac{w^2}{2} \rho. \quad (2.38a)$$

Заменим переменную по длине газопровода скорость  $w$  через массовый расход  $G$  согласно (1.17):  $w = G / \left( \rho \frac{\pi D^2}{4} \right)$ ; тогда

$$-dp = \lambda_r \frac{dx}{D} \left( \frac{4G}{\rho \pi D^2} \right)^2 \frac{1}{2} \rho = \lambda_r \frac{8G^2}{\pi^2 D^5 \rho} dx. \quad (\kappa)$$

Перенесем  $\rho$  в левую часть равенства (поскольку физически  $\rho$  зависит от  $p$ , а не от  $x$ ) и установим связь  $\rho$  и  $p$ . Будем считать, что в относительно небольшом диапазоне давлений  $p_1 - p_2$  газ ведет себя как идеальный:  $p\nu = p/\rho = RT$  (здесь  $R = R_y/M$ , причем  $R$  и  $R_y$  — удельная и универсальная газовые постоянные,  $M$  — молярная масса газа). Отсюда  $\rho = p/(RT)$ . Подставим это значение  $\rho$  в (к):

$$-\frac{p}{RT} dp = \lambda_r \frac{8G^2}{\pi^2 D^5} dx. \quad (л)$$

Прежде чем интегрировать выражение (л) от начального до конечного сечения, выясним закономерность изменения  $\lambda_r$  по длине газопровода. Для этого необходимо установить закон изменения по  $x$  числа  $Re$ , поскольку  $\lambda_r = f(Re)$ . Вдоль оси  $x$  одновременно изменяются скорость  $w$  и его плотность  $\rho$  — по одному и тому же закону (по уравнению Клапейрона — Менделеева, например, если газ принят идеальным), но в противоположных направлениях. Поэтому произведение  $w\rho$ , входящее в  $Re = wd\rho/\mu$ , не изменится при изменении  $p$  по длине трубопровода. Влияние давления на динамическую вязкость газа  $\mu$  чрезвычайно мало (изменению  $p$  на десятки атмосфер соответствует изменение  $\mu$  на единицы процентов). Поэтому при изотермическом движении газа изменением  $Re$  при падении давления от  $p_1$  до  $p_2$  вполне можно пренебречь. Значит, и  $\lambda_r$  можно считать *постоянным* (тем более, что  $\lambda_r$  слабо изменяется с  $Re$  в практически интересной турбулентной области течения).

Интегрируя теперь уравнение (л) от 0 до  $l$  и от  $p_1$  до  $p_2$ , получим, избавляясь от знака "минус" и меняя местами пределы интегрирования в левой части:

$$p_1^2 - p_2^2 = \frac{\lambda_r 16G^2 RT l}{\pi^2 D^5}. \quad (2.39)$$

Эта формула позволяет просто решать *прямые задачи проектирования* — с определением неизвестного  $p_1$  (или  $p_2$ ) при заданном  $p_2$  (или  $p_1$ ). Решение *обратных задач* требует итерационных процедур, аналогичных описанным в предыдущих разделах. Например, при необходимости определения  $G$  (задача *эксплуатации*) имеем из (2.39):

$$G = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{\frac{(p_1^2 - p_2^2) D}{\lambda_r l R T}}. \quad (2.39a)$$

Совместно с (2.39a) используется уравнение расхода (1.17):  $G = \rho w (\pi D^2/4)$ . Расчет начинается с выбора скорости (в "разумных пределах" — см. разд. 2.3.2); далее — круги итерации с сопоставлением стартовых  $G$  и рассчитанных  $G'$  значений потоков:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Задаем} & w & \xrightarrow{(1.17)} & G & \longrightarrow & Re & \xrightarrow{(2.39a)} & \lambda_r & \longrightarrow & G'. & (2.40) \\ & & & \uparrow & & & & & & \downarrow & \\ & & & & & & & & & \text{о - } \bullet & \end{array}$$



При получении приемлемой сходимости исходного  $G$  (для данного акта итерации) и найденного  $G'$  значений расчет считается законченным.

При *неизотермическом* течении газа выражения (2.39) — (2.39а) становятся приближенными, поскольку численное значение  $Re$  изменяется с изменением температуры по длине трубы (не за счет произведения  $\rho w$  — оно по-прежнему остается неизменным, — а за счет изменения  $\mu$  с температурой). В этом случае придется оставить  $\lambda_r$  под знаком интеграла, установить закон изменения температуры по длине газопровода и вести интегрирование с учетом этого закона, используя итерационную процедуру, сходную с (2.40). Игнорирование изменения  $\lambda_r$  по длине газопровода и прямое использование для этого случая выражения (2.39) приведет к приближенным оценкам.

### 2.3.6. Гидравлический удар

На современных химических заводах существует разнообразная система трубопроводов, по которым движутся — нередко с весьма высокой скоростью — жидкости (до 3 м/с, иногда и более) и газы. В ходе производственных процессов может возникнуть необходимость быстро перекрыть поток (аварийная ситуация; специфика технологического процесса и т.п.). Такая операция сопровождается возникновением больших механических усилий — **ударного давления** (*сверх* существующего в трубопроводе). Чтобы не допустить разрыва трубопровода, необходимо выявить факторы, влияющие на величину ударного давления  $p_{уд}$ , и установить количественные соотношения для его расчета.

Пусть на участке трубопровода длиной  $l$ , радиусом  $R$ , толщиной стенки  $\delta$  движется поток жидкости плотностью  $\rho$  со скоростью  $w$  (рис.2.23). Все необходимые свойства жидкости и материала трубы известны. В какой-то момент времени мгновенно закрывают задвижку на правом конце участка, и скорость в трубе падает до нуля. При этом кинетическая энергия потока  $L_{кин}$  переходит в работу деформации стенок  $L_{деф}$  и сжатия жидкости  $L_{сж}$ . Подчеркнем: здесь приходится учитывать эффекты, которые ранее мы игнорировали: деформацию стенок трубы и сжимаемость жидкости под действием возникающего ударного давления. Значение  $p_{уд}$  можно определить из энергетического баланса — запишем его в форме (1.8г):

$$L_{кин} = L_{деф} + L_{сж}. \quad (м)$$

Выразим каждую из составляющих баланса.

Изменение кинетической энергии потока (на участке  $l$  масса жидкости  $m = \rho \pi R^2 l$ ) при полном закрытии задвижки и прекра-

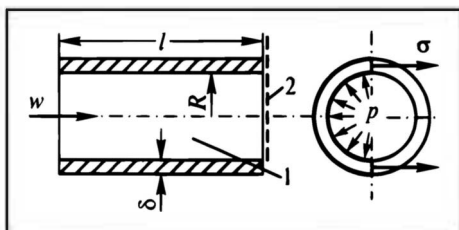


Рис. 2.23. К расчету ударного давления при гидравлическом ударе:  
1 — участок трубопровода, 2 — задвижка

щении движения составит

$$L_{\text{кин}} = \frac{mw^2}{2} = \frac{\rho\pi R^2 lw^2}{2}. \quad (\text{н})$$

**Работа деформации стенок трубы** (ее материал характеризуется модулем упругости  $E$ )  $L_{\text{деф}}$  может быть представлена как произведение сил давления (при развитии ударного давления от 0 до  $p_{\text{уд}}$ ) на путь деформации (приращение радиуса  $\Delta R$  в ходе деформации). Элементарная работа деформации при текущем значении ударного давления  $p$  ( $0 \leq p \leq p_{\text{уд}}$ ) запишется как  $dL = (p \cdot 2\pi R l) dR$ . Полная работа будет выражена интегралом на всем пути деформации, т.е. при абсолютном приращении радиуса  $\Delta R$ :

$$L_{\text{деф}} = \int_{(\Delta R)} p \cdot 2\pi R l dR. \quad (\text{о})$$

Найдем связь  $p$  и  $R$ . По закону Гука относительная деформация

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\sigma}{E}, \quad (\text{п})$$

где  $\sigma$  — напряжение, возникающее под действием ударного давления.

В то же время из равновесия сил (см. правый фрагмент рис.2.23) следует: проекция равнодействующей сил давления на левую боковую полуповерхность цилиндра (или, что то же самое: произведение давления на диаметрально плоскость) уравновешивается силой, возникшей в результате появления напряжения  $\sigma$ :  $p \cdot 2Rl = \sigma \cdot 2\delta l$ . Если отсюда выразить  $\sigma = pR/\delta$  и подставить в (п), то абсолютная деформация

$$\Delta R = \frac{\sigma R}{E} = \frac{pR^2}{E\delta}. \quad (\text{р})$$

В дифференциальной форме

$$dR = \frac{R^2}{E\delta} dp + \frac{p}{E\delta} 2R dR \approx \frac{R^2}{E\delta} dp; \quad (\text{с})$$

второе слагаемое, очевидно, пренебрежимо мало в сравнении с первым, так как деформация невелика ( $R$  весьма слабо изме-

няется с  $p$ ,  $dR/dp \rightarrow 0$ ); поэтому в конечном выражении осталось только первое слагаемое. Подставим в (о) значение  $dR$  по (с) и возьмем пределы в соответствии с новым параметром интегрирования ( $dp$ ). Тогда с учетом основных эффектов:

$$\dot{L}_{\text{деф}} = \int_0^{p_{\text{уд}}} p \cdot 2\pi R l \frac{R^2}{E\delta} dp = \pi R^3 \frac{l}{E\delta} p_{\text{уд}}^2. \quad (\text{т})$$

Элементарная удельная **работа сжатия рабочего тела**, как известно из термодинамики, составляет  $-pdv$ ; элементарная работа для массы  $m$  (на участке трубы длиной  $l$ ) будет равна:

$$dL_{\text{сж}} = m(-pdv) = -\rho\pi R^2 l (pdv). \quad (\text{у})$$

Связь  $v$  и  $p$ , необходимую для последующего интегрирования выражения (у), найдем, введя понятие о **коэффициенте сжимаемости**  $k_c$ , представляющем собой относительное изменение объема при изменении давления на единицу:

$$k_c \equiv -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} = -\frac{1}{v} \frac{dv}{dp}. \quad (\text{ф})$$

Отсюда  $dv = -k_c v dp$  и, поскольку  $\rho v = 1$ , то

$$dL_{\text{сж}} = -\rho\pi R^2 l (-pk_c v dp) = \pi R^2 l k_c p dp. \quad (\text{х})$$

Интегрируя по полному диапазону развития ударного давления и полагая, что в этом диапазоне  $k_c \approx \text{const}$ , получим

$$L_{\text{сж}} = \int_0^{p_{\text{уд}}} \pi R^2 l k_c p dp = \frac{\pi R^2 l k_c}{2} p_{\text{уд}}^2. \quad (\text{ц})$$

Записывая теперь энергетический баланс (м) с найденными значениями его составляющих по (н), (т) и (ц), имеем

$$\frac{\rho\pi R^2 l w^2}{2} = \frac{\pi R^3 l}{E\delta} p_{\text{уд}}^2 + \frac{\pi R^2 l k_c}{2} p_{\text{уд}}^2,$$

откуда после сокращения на  $\pi R^2 l$  и замены оставшегося радиуса  $R$  на  $d/2$ , окончательно:

$$p_{\text{уд}} = \sqrt{\frac{\rho w^2}{\frac{d}{E\delta} + k_c}}. \quad (2.41)$$

Анализ формулы (2.41) показывает:

— ударное давление  $p_{\text{уд}}$  не зависит от длины выбранного участка трубопровода  $l$ , поскольку каждая из составляющих энергетического баланса пропорциональна  $l$ ;

— наибольшее влияние на  $p_{\text{уд}}$  оказывает исходная скорость потока  $w$ ; очевидно, если задвижку закрыть не полностью, так

что конечная скорость жидкости в трубе окажется  $w_k > 0$ , то  $p_{уд}$  будет меньше, поскольку в числителе выражения (2.41) под радикалом вместо  $w^2$  будет стоять  $(w^2 - w_k^2)$ ;

— чем сильнее материал стенки трубы сопротивляется деформации (т.е. чем больше модуль упругости и толще стенка), тем выше получается  $p_{уд}$ ; значит, в резиновой трубе при прочих равных условиях  $p_{уд}$  будет заведомо ниже, чем в металлических;

— чем выше сжимаемость жидкости (т.е. чем больше  $k_c$ ), тем ниже  $p_{уд}$ ; поскольку для газов значения  $k_c$  примерно в  $10^3 - 10^4$  раз больше, нежели для жидкостей, то ударное давление в газопроводах существенно ниже, чем в жидкостных трубопроводах.

В реальных условиях ударное давление достигает десятков атмосфер. Для уменьшения негативных воздействий гидравлического удара рекомендуется *медленно* закрывать задвижки на трубопроводах (если, конечно, речь не идет об аварийных ситуациях) или устанавливать на трубопроводах (до задвижек) амортизирующие устройства (газовые полости — "колпаки", специальные клапаны с гибкими мембранами и т.п.).

## 2.4. ГРАВИТАЦИОННОЕ ТЕЧЕНИЕ ТОНКИХ ПЛЕНОК

Пленочное течение жидкостей по поверхностям различной конфигурации под действием сил тяжести весьма перспективно для многих химико-технологических процессов, поскольку движется жидкостная *тонкая* пленка; оно обладает рядом особенностей:

— интенсивно прогревается и передает тепло, что важно для ряда экзо- и эндотермических реакций;

— обеспечивает стабильное и достаточно интенсивное протекание ряда тепло- и массообменных процессов (испарения, дистиляции, абсорбции и др.);

— обеспечивает достаточно малое время контакта со стенкой (например, горячей, что важно для термолабильных жидкостей);

— занимает малый объем из-за малой толщины, что существенно при проведении процессов с большими тепловыми эффектами, а также с взрывоопасными веществами (нитрование, сульфирование и др.); здесь в отличие от реакций в объемах (даже с интенсивным перемешиванием) лучше отводится тепло и на 2—3 порядка меньше единовременный объем реакционной смеси в промышленном аппарате (выше безопасность процесса).

Среди основных задач гравитационного течения тонких пленок — определение расхода жидкости  $V$ , обеспечивающего заданную (технологическим регламентом, интенсивностью теплопереноса и т.п.) толщину пленки  $\delta$ , либо расчет толщины пленки,

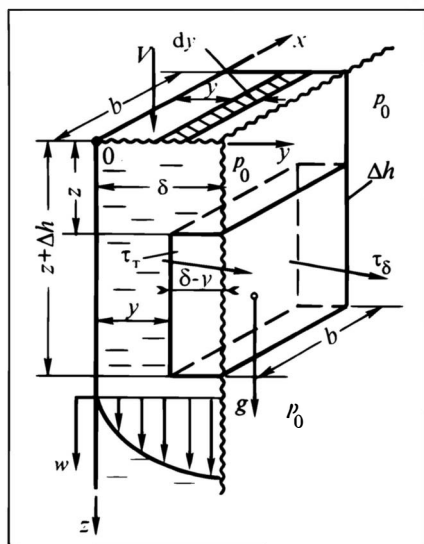


Рис.2.24. Схема гравитационного течения тонких пленок

соответствующей заданному объемному расходу. Разумеется, встречаются и иные постановки задач. Во всех этих случаях надо знать связь между  $V$  и  $\delta$ , а также их зависимость от свойств жидкости и условий течения.

Расчетная схема представлена на рис.2.24. Тонкая пленка постоянной толщины  $\delta$  стационарно движется под действием собственного веса по плоской вертикальной стенке — вдоль оси  $z$  (здесь она направлена *вниз*). Введем ряд упрощающих допущений.

1. Толщина пленки мала (практически это доли миллиметра, редко миллиметры); поэтому чаще всего скорость течения из-за тормозящего действия близко расположенных стенок по всей толщине пленки (на любом расстоянии  $y$  от стенки) — *невелика*. Это позволяет предположить, что течение пленки будет *ламинарным* или близким к нему.

2. В силу малой толщины пленки ее течение можно считать *плоским*, даже если поверхность искривлена по нормали к оси  $z$  (при течении внутри вертикальных труб и т.п.): толщина пленки мала в сравнении с радиусом кривизны.

3. Начальные участки течения, где происходит формирование характерных толщины пленки и профиля скоростей, не рассматриваются; это допустимо: расчеты показывают, что протяженность этих участков не превышает 20—30 мм.

4. Будем анализировать наиболее простой случай течения пленки — *без взаимодействия* ее свободной поверхности с газом; это правомерно, когда скорость газового потока около поверхности пленки невелика либо движение газа вообще отсутствует.

Решать задачу можно исходя из уравнения Навье — Стокса: как указано в разд.2.2.4, в случае ламинарных течений в силу простоты (линейности) связей это уравнение часто (при наличии упрощений, подобных сформулированным выше) удастся проинтегрировать.

Путь решения в рассматриваемом случае достаточно прост:

— записывают уравнение Навье — Стокса (2.20) для оси  $z$ , вдоль которой движется пленка;

— выражают единичные массовые силы  $P_z = g$ ; выделяют из лапласиана фрагмент  $\partial^2 w_z / \partial y^2$ ; остальные фрагменты лапласиана и все другие слагаемые уравнения обращаются в нуль (вдоль оси  $x$  движения нет; вдоль оси  $z$  при постоянном  $y$  не происходит изменения скоростей; движение стационарное; давление вдоль оси  $z$  не изменяется);

— полученное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$\frac{d^2 w_z}{dy^2} = -\frac{\rho g}{\mu} \quad (\text{а})$$

решают\* с граничными условиями:  $w_z = 0$  при  $y = 0$  (концепция прилипания) и  $dw_z/dy = 0$  при  $y = \delta$  (отсутствие взаимодействия с газовым потоком, омывающим пленку).

В результате приходят к распределению скоростей  $w_z$  по толщине пленки  $w_z = w_z(y)$  и далее — к искомой связи  $V$  и  $\delta$ .

Однако для ламинарного течения можно проще сформулировать задачу и свести ее к дифференциальному уравнению 1-го порядка. С этой целью на стабилизированном участке (координата  $z$ ) выделим умозрительно в пленке примыкающий к свободной поверхности прямоугольный параллелепипед шириной  $b$ , высотой  $\Delta h$  и толщиной  $(\delta - y)$ . Рассмотрим *поток импульса* через отдельные грани (вдоль оси  $x$  такого потока, естественно, нет), записывая его соответственно ОБС (1.8) и учитывая, что Накопление равно нулю. При этом напряжение трения на левой грани  $b\Delta h$  равно  $\tau_T$  (это составит Приход импульса), на правой  $\tau_\delta = 0$  (это — Уход); Источник — на базе внешней единичной массовой силы вдоль оси  $z$ : гравитационное ускорение  $g$ , масса жидкости  $\rho b\Delta h(\delta - y)$ ; Стоков нет. Тогда для единицы времени

$$\tau_T b\Delta h - 0 + g\rho b\Delta h(\delta - y) = 0, \quad (\text{б})$$

откуда после сокращения на  $b\Delta h$  имеем

$$\tau_T + \rho g(\delta - y) = 0. \quad (\text{в})$$

Подставим значение  $\tau_T = -\mu(\partial w_z / \partial y)$ , заменим частные производные обыкновенными (оперируем единственной независимой переменной  $y$ ) и обозначим  $w_z \equiv w_n$ , подчеркивая, что речь идет о *локальной* скорости  $w_z$  на расстоянии  $y$  от стенки:

$$\frac{dw_n}{dy} = \frac{\rho g}{\mu}(\delta - y). \quad (\text{г})$$

Разделим переменные и проинтегрируем по толщине пленки в пределах от стенки (где  $y = 0$ ,  $w = 0$ ) до текущей координаты  $y$  и текущей скорости  $w_n$ :

$$\int_0^y dw_n = \frac{\rho g}{\mu} \int_0^y (\delta - y) dy. \quad (\text{д})$$

---

\* См. [6, 22].

В результате

$$w_{\text{л}} = \frac{\rho g}{\mu} \left( \delta y - \frac{y^2}{2} \right). \quad (2.42)$$

Отсюда нетрудно определить максимальную скорость — очевидно, она будет на свободной поверхности, т.е. при  $y = \delta$ :

$$w_{\text{max}} = \frac{\rho g}{\mu} \frac{\delta^2}{2}. \quad (2.42a)$$

Таким образом, для вертикального ламинарного гравитационного течения пленки без взаимодействия с газовым потоком характерен параболический скоростной профиль жидкости с максимумом на свободной поверхности (см. эпюру скоростей на рис. 2.24).

Из сопоставления (2.42) и (2.42a) видно, что в обобщенных координатах профиль скоростей в пленке не зависит от свойств жидкости:

$$\frac{w_{\text{л}}}{w_{\text{max}}} = 2 \frac{y}{\delta} - \left( \frac{y}{\delta} \right)^2,$$

т.е. налицо **нижний автомоделный** (по Re) **режим** течения.

Для определения расхода  $V$  запишем поток жидкости через элементарное сечение шириной  $b$  и толщиной  $dy$  соответственно уравнению расхода (1.14):  $dV = w_{\text{л}} b dy$ . Подставляя значение  $w_{\text{л}}$  по (2.42) и интегрируя, получаем

$$V = \int_0^{\delta} \frac{\rho g}{\mu} \left( \delta y - \frac{y^2}{2} \right) b dy = \frac{\rho g}{\mu} b \left( \delta \frac{\delta^2}{2} - \frac{1}{2} \frac{\delta^3}{3} \right).$$

Окончательно:

$$V = \frac{\rho g h \delta^3}{\mu 3} \quad \text{и} \quad V_{\text{уд}} \equiv \frac{V}{b} = \frac{\rho g}{\mu} \frac{\delta^3}{3}. \quad (2.43)$$

Второе из этих выражений записано для *удельного* расхода жидкости, т.е. приходящегося на единицу ширины пленки; величину  $V_{\text{уд}}$  называют **линейной плотностью орошения**. Заметим: при течении пленки внутри круглой вертикальной трубы  $b = \pi d$ .

Из (2.43) легко определить **среднюю скорость** течения пленки. Имея в виду, что величина сечения составляет  $b\delta$ , получим по уравнению расхода (1.18):

$$w = \frac{V}{b\delta} = \frac{\rho g}{\mu} \frac{\delta^2}{3}. \quad (2.44)$$

Сопоставление  $w$  и  $w_{\text{max}}$  показывает, что при ламинарном течении тонких пленок (и это вообще характерно для плоских ламинарных течений)  $w/w_{\text{max}} = 2/3$ .

При необходимости определения толщины пленки по заданному расходу  $V$  или  $V_{y,l}$  решаем (2.43) относительно  $\delta$ :

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{3\mu V}{b\rho g}} = \sqrt[3]{\frac{3\mu V_{y,l}}{\rho g}}. \quad (2.43a)$$

Если рассматривать гравитационное течение пленки по *наклонной* плоскости (угол к горизонту  $\alpha$ ), то изменится лишь внешняя массовая сила: вместо  $g$  в исходном уравнении будет фигурировать составляющая силы тяжести вдоль стенки  $g \sin\alpha$ .

Полученные соотношения справедливы для ламинарных пленочных течений, соответствующих небольшим значениям числа  $Re$ . Его верхняя граница устанавливается экспериментом. Поскольку речь идет о *плоском* течении, предварительно необходимо установить определяющий линейный размер  $d_e$ , входящий в  $Re$ . Соответственно выражению (ж) из разд. 2.2.2 здесь

$$d_e = \frac{4f}{\Pi} = \frac{4\delta b}{b} = 4\delta, \quad (ж)$$

поскольку смоченный периметр для рассматриваемого фрагмента пленки равен  $b$  (свободная поверхность пленки, контактирующая с газом, "смоченной" не считается). Таким образом, для пленочного течения  $Re_{пл} \equiv w(4\delta)\rho/\mu$ .

Опыты показывают, что режим остается ламинарным, а полученные выше выражения — справедливыми при  $Re_{пл} \leq \approx 20$ . Однако *качественно* характер установленных связей сохраняется и при *бóльших* значениях  $Re_{пл}$ , когда движение пленки становится **волновым** (его еще именуют **псевдоламинарным**). Этот режим, наблюдаемый в диапазоне  $20 \leq Re \leq 1500$ , отличается образованием продольных волн на свободной поверхности пленки. Показано, что такой режим течения оказывается энергетически выгодным: при одинаковых расходах  $V$  средняя скорость течения повышается, средняя толщина пленки уменьшается — в сравнении с рассчитанными по формулам для ламинарного режима. Для указанного диапазона  $Re_{пл}$  установлено: чтобы формулы типа (2.43) — (2.43a) сохранили необходимую точность, в них следует заменить множитель 3 на 2,4.

При  $Re_{пл}$  свыше  $\approx 1500$  режим течения становится *переходным*, а при  $Re_{пл} > \approx 2000$  — *турбулентным*. В этом случае распределение скоростей следует "закону стенки" (2.26); анализ течения необходимо вести по приведенной выше канве, исходя из этого закона.

Специально подчеркнем, что прямая задача определения  $h_{пл}$  при рассматриваемом течении тонких пленок *не возникает*; поэтому не требуется вывода уравнений типа Гагена — Пуазейля (2.20) — (2.21), не нужно искать зависимости  $\lambda_r = f(Re_{пл})$  в



уравнении Дарси — Вейсбаха (2.17). Дело в том, что при течении тонких пленок вес пленки, движущейся по поверхности высотой  $h$ , в точности уравнивается силой взаимодействия жидкости со стенкой (при ламинарном течении — силой трения); поэтому изначально  $h_n = h$  (для наклонной плоской стенки при угле  $\alpha$  с горизонтом  $h_n = h \sin \alpha$ ).

В тех случаях, когда взаимодействием газа со свободной поверхностью пленки пренебречь нельзя (из-за его течения с достаточно высокими скоростями — на уровне нескольких метров в секунду), скоростной профиль ламинарно стекающей пленки деформируется (по-разному — в зависимости от направления и скорости газового потока). Причина — появление напряжения трения  $\tau_\delta$  на свободной поверхности пленки (при восходящем движении газа считается  $\tau_\delta > 0$ , при нисходящем —  $\tau_\delta < 0$ ). Для разных значений безразмерного комплекса  $\tau_\delta / (\rho g \delta)$ , выражающего соотношение сил трения на свободной поверхности и веса пленки, получаются различные профили скоростей. Детально характеристики пленочного течения при взаимодействии с газовым потоком рассмотрены в литературе\*.

Влияние воздействия газового потока на пленку (т.е. условие  $\tau_\delta \neq 0$ ) должно быть учтено\*\*:

— при решении на базе уравнения Навье — Стокса граничными условиями на свободной поверхности пленки являются: при  $y = \delta$  теперь не  $dw_n/dy = 0$ , а  $dw_n/dy = -\tau_\delta/\mu$ ;

— при решении с помощью баланса импульсов Уход через правую стенку (был равен нулю) теперь составит  $\tau_\delta b \Delta h$ .

Решения уравнения типа (г), скорректированного с учетом этого слагаемого, затруднений не вызывает. Очевидно, вместо (2.42) будет получен профиль скоростей, учитывающий  $\tau_\delta$ :

$$w_n = \frac{\rho g}{\mu} \left[ \delta y \left( 1 - \frac{\tau_\delta}{\rho g \delta} \right) - \frac{y^2}{2} \right]. \quad (2.426)$$

Последующее определение  $w_{\max}$ ,  $w$ , связи  $V$  и  $\delta$  ведется в изложенной выше последовательности.

Значения  $\tau_\delta$  определяются либо из эксперимента (в литературе приводятся эмпирические формулы), либо на основе анализа закономерностей движения газового потока, омывающего свободную поверхность пленки.

## 2.5. ТЕЧЕНИЕ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ

### 2.5.1. Классификация и общие свойства неньютоновских жидкостей

Предшествующий анализ течения жидкостей в той или иной мере базировался на **уравнении сдвига** (1.9):

$$\tau_T = -\mu \frac{\partial w_n}{\partial n} = \mu \left| \frac{\partial w_n}{\partial n} \right|.$$

\* Подробнее — см. [6].

\*\* Строго говоря, при взаимодействии свободной поверхности пленки с газовым потоком из-за гидравлического сопротивления движению последнего уже нельзя считать  $\partial p / \partial z = 0$ ; надо учитывать упомянутое взаимодействие не только в граничных условиях, но и в исходных уравнениях.

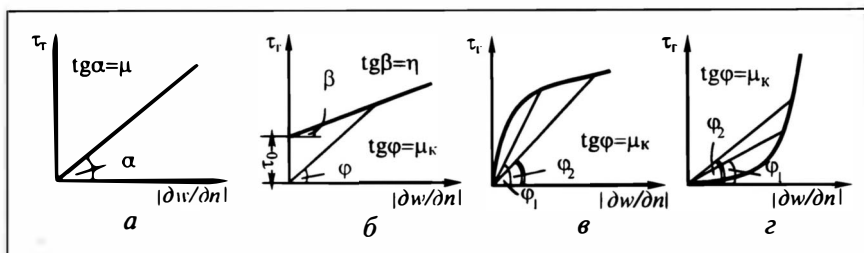


Рис. 2.25. Диаграммы сдвига:

*а* — ньютоновские жидкости, *б* — бингамовские жидкости, *в* — псевдопластичные жидкости, *г* — дилатантные жидкости

При ламинарном режиме (преобладание сил вязкости) коэффициент пропорциональности  $\mu$  является свойством жидкости, не зависящим\* от применяемых усилий или (что здесь то же самое) градиента скоростей  $\partial w_n / \partial n$ . Как было указано в разд. 2.2.4, в этом случае *линейная* связь  $\tau_T$  и  $\partial w_n / \partial n$  (1.9) именуется формулой Ньютона,  $\mu$  называется динамической вязкостью, а жидкости, следующие формуле (1.9), носят название **ньютоновских**. Для таких жидкостей диаграмма сдвига изображена на рис. 2.25, *а*, причем для данной температуры  $\mu = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{const}$ . При турбулентных течениях выражение (1.9) приобретает формальный характер, его линейность нарушается, поскольку коэффициент пропорциональности становится зависящим от характеристик течения; в разделе 2.2.5 это было отражено заменой постоянного коэффициента  $\mu$  суммой  $\mu + \mu_n$ , где "турбулентная вязкость"  $\mu_n$  была призвана в терминах и символах динамической вязкости учесть нелинейность, вызванную турбулентными пульсациями. Однако нелинейность связи  $\tau_T$  и  $\partial w_n / \partial n$  может проявляться также в таких течениях, когда вязкостные силы доминируют над инерционными. Это характерно для жидкостей, обладающих некоей *внутренней структурой*, изменяющейся под действием приложенных усилий. Такие жидкости тоже лишь формально следуют уравнению сдвига (1.9); переменный коэффициент пропорциональности в этом случае принимает смысл **кажущейся вязкости**  $\mu_K$ , зависящей от величин  $\tau_T$  и  $\partial w_n / \partial n$ :

$$\tau_T = -\mu_K \frac{\partial w_n}{\partial n} = \mu_K \left| \frac{\partial w_n}{\partial n} \right|, \quad (2.45)$$

где  $\mu_K = \operatorname{var}$ .

\* Разумеется, вязкость  $\mu$ , как и ряд других реологических характеристик жидкости, изменяется с температурой; этот вопрос выходит за пределы анализа, поскольку в данной главе рассматриваются изотермические течения.

Раздел гидравлики, описывающий течение таких — неньютоновских — жидкостей, является частью более общей научной дисциплины, называемой **реологией** (последняя охватывает изучение механических свойств различных рабочих тел — от газов и ньютоновских жидкостей до твердых тел, следующих и не следующих закону Гука). Течение неньютоновских жидкостей в условиях преобладания сил вязкости (именно такой случай практически интересен) называется **пластичным**. Для него характерно изменение  $\mu_k$  в поперечном сечении канала.

Неньютоновские жидкости обычно делят на две основные группы:

- **реологически стационарные**: при снятии приложенных усилий структура таких жидкостей полностью восстанавливается (можно говорить об обратимости свойств этих жидкостей); значения  $\mu_k$  здесь не зависят от продолжительности действия сил (т.е. от "предыстории" жидкости);

- **реологически нестационарные**: при наложении усилий происходят структурные изменения, глубина которых увеличивается при более продолжительном действии сил, так что  $\mu_k$  зависит от времени; при снятии приложенных усилий структура здесь либо восстанавливается полностью или не полностью, либо вообще не восстанавливается.

Для математического описания поведения неньютоновских жидкостей уравнений (1.9) или (2.45) недостаточно; необходимо отразить воздействие основных факторов на  $\mu_k$  либо с помощью конкретных зависимостей выразить связи  $\tau_T$  с  $\partial w_n / \partial n$ . Такие описания (модели: они носят феноменологический или эмпирический характер) относительно просты для стационарных жидкостей (отсутствует влияние времени) и более сложны для нестационарных. Ниже будут рассмотрены *стационарные* жидкости, что позволит в дальнейшем установить закономерности их пластичного течения; нестационарные жидкости лишь качественно охарактеризованы.

Среди реологически стационарных есть группа жидкостей, которые не движутся при относительно небольших приложенных усилиях. Движение начинается только при напряжениях, превышающих некую предельную величину  $\tau_0$ , называемую **пределом текучести** (реже — **критическим напряжением**). При  $\tau_T < \tau_0$  нет относительного сдвига слоев жидкости:  $\partial w_n / \partial n = 0$ . Внутри этой группы, в свою очередь, есть жидкости, которые при  $\tau_T > \tau_0$  под действием *избытка* напряжений ( $\tau_T - \tau_0$ ) ведут себя как ньютоновские. Для них уравнение сдвига имеет вид

$$\tau_T - \tau_0 = -\eta \frac{\partial w_n}{\partial n}, \text{ или } \tau_T = \tau_0 + \eta \left( -\frac{\partial w_n}{\partial n} \right) = \tau_0 + \eta \left| \frac{\partial w_n}{\partial n} \right|. \quad (2.46)$$

Такие жидкости получили название **бингамовских**. К их числу относятся, например, густые мелкодисперсные суспензии, пасты, некоторые шламы, масляные краски.

Диаграмма сдвига для бингамовских жидкостей изображена на рис. 2.25, б. (Подчеркнем: эта и другие диаграммы на рис. 2.25 изображены *вне каких-либо масштабов*; кривые лишь иллюстрируют ход зависимостей  $\tau_T$  от  $\partial w_n / \partial n$ .) На диаграмме  $\tau_0$  — отрезок, отсекаемый на оси  $\tau_T$  при  $\partial w_n / \partial n = 0$ ; *постоянный* коэффициент  $\eta$ , выражающий наклон прямой (2.46) к оси абсцисс ( $\eta = \operatorname{tg} \beta$ ), называется **коэффициентом пластической вязкости** (кратко — **пластичностью**).

Кажущаяся вязкость, соответствующая (2.45), должна отвечать тангенсу угла секущей:  $\mu_k = \operatorname{tg} \phi$ . Из рисунка видно, что с увеличением  $\tau_T$  и  $|\partial w_n / \partial n|$  величина  $\mu_k$  *уменьшается*. В пределе (при  $\tau_T, |\partial w_n / \partial n| \rightarrow \infty$ )  $\mu_k \rightarrow \eta = \operatorname{const}$ ; это означает, что при больших приложенных усилиях бингамовская жидкость начинает вести себя как ньютоновская с постоянной вязкостью. Аналитически эти эффекты легко проследить путем сопоставления выражений (2.46) и (2.45):

$$\tau_0 + \eta \left| \frac{\partial w_n}{\partial n} \right| = \mu_k \left| \frac{\partial w_n}{\partial n} \right|,$$

откуда

$$\mu_k = \eta + \frac{\tau_0}{|\partial w_n / \partial n|}. \quad (a)$$

Из (a) ясно: с ростом  $|\partial w_n / \partial n|$  уменьшается  $\mu_k$ ; при  $|\partial w_n / \partial n| \rightarrow \infty$  будет  $\mu_k \rightarrow \eta$ .

При очень высоких усилиях и  $|\partial w_n / \partial n|$  начинают играть роль силы инерции; с их нарастанием пластичный характер течения нарушается, потом и вырождается; возникает турбулентное течение со всеми его особенностями и закономерностями.

Заметим: ньютоновские жидкости можно трактовать как частный случай бингамовских (при  $\tau_0 = 0$ ); тогда пластичность  $\eta$  приобретает смысл динамической вязкости  $\mu$ . Это означает, что аналитические выражения, характеризующие пластичное течение бингамовских жидкостей, при  $\tau_0 = 0$  (и с заменой  $\eta$  на  $\mu$ ) должны переходить в уже известные (разд. 2.2.4) закономерности ламинарного течения ньютоновских жидкостей.

Среди стационарных есть группа жидкостей, уравнение сдвига которых в области пластичного течения может быть представлено в виде степенной зависимости:

$$\tau_T = k \left( - \frac{\partial w_n}{\partial n} \right)^m, \quad (2.47)$$

где  $k$  и  $m$  — эмпирически подобранные константы, характерные для данной жидкости.

Жидкости, для которых  $m < 1$ , носят название **псевдопластичных**; диаграмма сдвига для них изображена на рис.2.25, в. К их числу относятся, например, олигомеры, низкомолекулярные полимеры, растворы высокомолекулярных полимеров, некоторые суспензии с асимметричными частицами.

Кажущаяся вязкость псевдопластичных жидкостей *уменьшается* с увеличением  $\tau_T$  и  $|\partial w_n / \partial n|$  — это видно из графика. Аналитически это легко показать сопоставлением уравнений (2.47) при  $m < 1$  и (2.45):

$$k \left| \frac{\partial w_n}{\partial n} \right|^m = \mu_k \left| \frac{\partial w_n}{\partial n} \right|,$$

откуда

$$\mu_k = k \left| \frac{\partial w_n}{\partial n} \right|^{m-1} \quad \text{при } m < 1. \quad (б)$$

Поскольку  $m < 1$ , то с ростом  $|\partial w_n / \partial n|$  величина  $\mu_k$  уменьшается. Физически это объясняется ориентацией молекул или частиц своими большими осями в направлении течения жидкости.

Жидкости, для которых  $m > 1$ , носят название **дилатантных**; диаграмма сдвига для них изображена на рис.2.25, г. К их числу относятся некоторые густые суспензии, замешанные на невязких жидкостях, клеи. Кажущаяся вязкость для них *увеличивается* с ростом  $\tau_T$  и  $|\partial w_n / \partial n|$  — это видно из графика и из сопоставления (2.47) при  $m > 1$  и (2.45):

$$\mu_k = k \left| \frac{\partial w_n}{\partial n} \right|^{m-1} \quad \text{при } m > 1. \quad (в)$$

Дилатантные жидкости менее распространены, нежели псевдопластичные и бингамовские.

Важно подчеркнуть, что уравнения сдвига (2.46) и (2.47) являются эмпирическими соотношениями, справедливыми только в ограниченной области пластичного течения; за ее пределами они теряют силу. На диаграммах сдвига в области весьма высоких значений  $\tau_T$  и  $|\partial w_n / \partial n|$  кривые переходят в прямолинейные участки. Кстати, по этой причине неправомерно анализировать характер изменения кажущейся вязкости при высоких  $|\partial w_n / \partial n|$  по формулам (б) и (в) — при таких градиентах скоростей значения  $\text{tg} \phi$  стремятся к постоянной величине (наклону прямых участков), и псевдопластичные (дилатантные) жидкости начинают вести себя как ньютоновские. Кроме того, уравнения (2.46) и (2.47) неправомерны и в непосредственной близости к началу координат; это ясно видно из выражений (б) и (в): при  $|\partial w_n / \partial n| \rightarrow 0$  получается, соответственно,  $\mu_k \rightarrow \infty$  и  $\mu_k \rightarrow 0$ , что не отвечает физике явлений и реальной ситуации.

Математические описания пластичного течения псевдопластичных и дилатантных жидкостей формально совпадают (раз-

личие — в численных значениях  $m$ ). Ньютоновские жидкости можно трактовать как частный случай псевдопластичных и дилатантных при  $m = 1$ ; тогда коэффициент  $k$  приобретает смысл динамической вязкости  $\mu$ . Это означает, что выражения, характеризующие пластичное течение таких жидкостей, при  $m = 1$  переходят в уже известные (разд. 2.2.4) закономерности ламинарного течения ньютоновских жидкостей.

Ниже мы ограничимся (на основе представленных соотношений) изучением закономерностей пластичного течения рассмотренных выше жидкостей, хотя существуют и другие модели, отражающие специфические особенности некоторых иных реологически стационарных жидкостей.

Среди наиболее часто встречающихся реологически *нестационарных* жидкостей выделим:

- **тиксотропные**, характеризуемые ограниченным понижением  $\mu_k$  во времени под воздействием постоянных приложенных усилий (к их числу относятся многие краски, из пищевых продуктов — простокваша); при снятии усилий структура этих жидкостей постепенно восстанавливается, они могут перестать течь;

- **реопектические (реопектантные)**, характеризуемые повышением  $\mu_k$  во времени (иногда — за счет химического взаимодействия компонентов, толчок которому дает наложение механических усилий), чаще всего — необратимым; примером может служить смесь воды и гипса, которая после встряхивания быстро затвердевает;

- **вязкоупругие (вязкоэластичные)**, частично возвращающиеся подобно упругим твердым телам в первоначальное состояние после снятия приложенных к ним касательных напряжений (к их числу относятся некоторые смолы, высоковязкие эмульсии и суспензии, тестообразные массы).

## 2.5.2. Пластичное течение бингамовских жидкостей

Будем анализировать закономерности движения бингамовских жидкостей в круглых трубах в области умеренных значений  $\tau_r$  и  $|\partial w_r / \partial n|$ , когда течение является пластичным. Рассмотрим сначала характер течения качественно (рис. 2.26). Анализ сил для вязких течений привел (разд. 2.2.4) к линейной зависимости (2.18) изменения  $\tau_r$  по радиальной координате  $r$  — от  $\tau_r = 0$  при  $r = 0$  до наибольшего  $\tau_r = \tau_s$  на стенке ( $r = R$ ). Прямолинейная эпюра напряжений показана в левой части рисунка.

Для жидкостей, обладающих пределом текучести  $\tau_0$  (уровень обозначен на рисунке), возможны два случая.

1. Наибольшее напряжение  $\tau_s < \tau_0$ ; это означает, что на любом текущем радиусе  $r \leq R$  также будет  $\tau_r < \tau_0$ . Тогда течения жидкости не будет, в этом смысле рассматриваемый случай является *банальным* и технологического интереса не представляет.

2. Наибольшее напряжение  $\tau_s > \tau_0$ . Это означает, что для части сечения трубы (в ее кольцевой пристенной зоне радиусом  $r \geq r_0$ ) будет характерно неравенство  $\tau_r > \tau_0$  — здесь происходит относительное перемещение слоев жидкости;  $|\partial w_r / \partial n| > 0$ . В

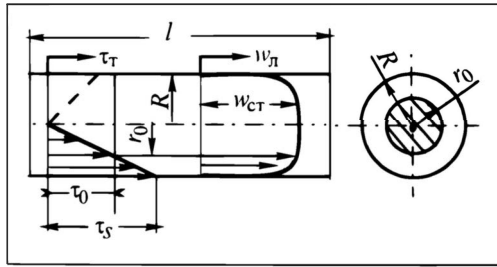


Рис.2.26. К закономерностям пластичного течения бингамовской жидкости в круглой трубе

приосевой зоне  $r \leq r_0$ , как видно из рисунка,  $\tau_T \leq \tau_0$  — здесь не будет относительного перемещения слоев жидкости; в этой области  $|\partial w_{\text{л}}/\partial n| = 0$ , и жидкость движется "стержнем", с одинаковой скоростью  $w_{\text{ст}}$  во всем сечении  $\pi r_0^2$  (см. на рисунке справа заштрихованную часть сечения трубы).

На рис. 2.26 показана характерная эпюра скоростей: пластичное течение бингамовской жидкости представляет собой сочетание ламинарного движения в кольцевой зоне и стержневого — в приосевой зоне.

**Распределение скоростей.** Количественный анализ закономерностей течения бингамовской жидкости предусматривает *те же этапы*, что были реализованы при исследовании в разд. 2.2.4 ламинарного течения ньютоновских жидкостей: распределение скоростей, расход, средняя скорость, гидравлическое сопротивление. Особенности, присущие уравнению сдвига (2.46) для бингамовских жидкостей в отличие от формулы Ньютона (1.9), приводят к необходимости проводить начало анализа *раздельно* для кольцевой и приосевой зон.

**К о л ь ц е в а я з о н а**,  $r_0 \leq r \leq R$ ,  $\tau_T \geq \tau_0$ . Для определения *скоростного профиля* подставим в (2.18) значение  $\tau_T$  по (2.46), имея в виду, что нормаль направлена по радиусу  $r$ , и заменяя частные производные обыкновенными:

$$\tau_0 + \eta \left( -\frac{dw_{\text{л}}}{dr} \right) = \frac{\Delta p}{2l} r. \quad (\Gamma)$$

Разделим переменные и сформулируем граничные условия (пределы интегрирования) аналогично ламинарному режиму, но лишь для области течения  $r \geq r_0$ :

$$\int_0^{w_{\text{л}}} dw_{\text{л}} = -\frac{1}{\eta} \int_R^r \left( \frac{\Delta p}{2l} r - \tau_0 \right) dr.$$

Отсюда для кольцевой зоны

$$w_{\text{н}} = \frac{1}{\eta} \left[ \frac{\Delta p}{4l} (R^2 - r^2) - \tau_0 (R - r) \right]. \quad (2.48)$$

Заметим, что при  $\tau_0 = 0$  получается обычный параболоид скоростей, характерный для ламинарного течения ньютоновских жидкостей по (2.19); при этом  $\eta$  приобретает смысл вязкости  $\mu$ .

О с е в а я з о н а,  $r \leq r_0$ ,  $\tau_r < \tau_0$ . Подставив в формулу (2.48) значение  $r = r_0$ , получим  $w = w_{\text{ст}}$ :

$$w_{\text{ст}} = \frac{1}{\eta} \left[ \frac{\Delta p}{4l} (R^2 - r_0^2) - \tau_0 (R - r_0) \right]. \quad (д)$$

Это выражение неудобно для использования, поскольку содержит радиус  $r_0$ , разграничивающий осевую и кольцевую зоны; этот радиус *не задан* в начале расчета (т.е. в граничных условиях), его целесообразно исключить из расчетных соотношений. Это делается с помощью уравнения (2.18) с учетом, что  $\tau_r = \tau_0$  при  $r = r_0$ :

$$\tau_0 = \frac{\Delta p}{2l} r_0 \quad \text{и} \quad r_0 = \frac{2l\tau_0}{\Delta p}. \quad (е)$$

Подставив теперь (е) в (д), получим

$$w_{\text{ст}} = \frac{1}{\eta} \left[ \frac{\Delta p}{4l} \left( R^2 - \frac{2^2 l^2 \tau_0^2}{\Delta p^2} \right) - \tau_0 \left( R - \frac{2l\tau_0}{\Delta p} \right) \right].$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, содержащие  $l\tau_0^2/\Delta p$ , имеем окончательно:

$$w_{\text{ст}} = \frac{1}{\eta} \left( \frac{\Delta p}{4l} R^2 + \frac{l\tau_0^2}{\Delta p} - \tau_0 R \right). \quad (2.49)$$

**Расход и средняя скорость бингамовской жидкости.** Расход  $V$  складывается из потоков в стержневой зоне  $V_{\text{ст}} = w_{\text{ст}} \pi r_0^2$  и в кольцевой зоне  $V_{\text{к}} = \int_{r_0}^R w 2\pi r dr$ ; при этом способ определения  $V_{\text{к}}$

аналогичен рассмотренному в разд.2.2.4, однако в качестве нижнего предела интегрирования здесь следует брать не  $r = 0$ , а радиус, разграничивающий зоны,  $r = r_0$ .

Подставим найденные выше значения  $w_{\text{ст}}$  и  $w$  в выражение для расчета  $V$ :

$$V = V_{\text{ст}} + V_{\text{к}} = \frac{\pi}{\eta} \left\{ \left( \frac{\Delta p}{4l} R^2 + \frac{l\tau_0^2}{\Delta p} - \tau_0 R \right) r_0^2 + 2 \int_{r_0}^R \left[ \frac{\Delta p}{4l} (R^2 - r^2) - \tau_0 (R - r) \right] r dr \right\}.$$



После выполнения операции интегрирования, раскрытия скобок и приведения подобных членов это весьма громоздкое выражение упрощается:

$$V = \frac{\pi}{\eta} \left( \frac{\Delta p R^4}{8l} - \frac{\tau_0 R^3}{3} + \frac{l \tau_0^2}{\Delta p} r_0^2 + \frac{\Delta p}{8l} r_0^4 - \frac{2\tau_0}{3} r_0^3 \right).$$

Здесь тоже целесообразно преобразовать три последних слагаемых в скобках, заменив по (е) неудобное для расчетов значение  $r_0$ :

$$V = \frac{\pi}{\eta} \left( \frac{\Delta p R^4}{8l} - \frac{\tau_0 R^3}{3} + \frac{l \tau_0^2}{\Delta p} \frac{2^2 l^2 \tau_0^2}{\Delta p^2} + \frac{\Delta p}{8l} \frac{2^4 l^4 \tau_0^4}{\Delta p^4} - \frac{2\tau_0}{3} \frac{2^3 l^3 \tau_0^3}{\Delta p^3} \right).$$

После приведения подобных членов (три последних слагаемых) и вынесения за скобки группы величин это выражение принимает вид

$$V = \frac{\Delta p}{8\eta l} \pi R^4 \left( 1 - \frac{8}{3} \frac{\tau_0 l}{\Delta p R} + \frac{16}{3} \frac{\tau_0^4 l^4}{\Delta p^4 R^4} \right). \quad (2.50)$$

Отсюда в соответствии с уравнением расхода (1.18) получим выражение для **средней скорости** потока:

$$w = \frac{V}{\pi R^2} = \frac{\Delta p R^2}{8\eta l} \left( 1 - \frac{8}{3} \frac{\tau_0 l}{\Delta p R} + \frac{16}{3} \frac{\tau_0^4 l^4}{\Delta p^4 R^4} \right). \quad (2.51)$$

При  $\tau_0 = 0$  выражения (2.50), (2.51) закономерно переходят в соответствующие формулы для ламинарного течения ньютоновских жидкостей.

Формула (2.50), являющаяся аналогом уравнения Гагена — Пуазейля, прямо используется при решении *задачи эксплуатации*, когда необходимо найти расход жидкости в готовом трубопроводе при известных свойствах жидкости и параметрах течения. Среди *задач проектирования* практический интерес представляет расчет потерь давления  $\Delta p_\eta$  или, что равнозначно, движущей силы, необходимой для движения жидкости с заданной средней скоростью  $w$ .

Для определения  $\Delta p$  раскроем скобки в (2.51) и заменим радиус  $R$  трубы более употребительным диаметром  $d$ :

$$w = \frac{\Delta p d^2}{32\eta l} - \frac{\tau_0 d}{6\eta} + \frac{8\tau_0^4 l^3}{3\eta \Delta p^3 d^2}. \quad (ж)$$

Уравнение (ж) в явном виде относительно  $\Delta p$  не решается. Здесь необходима итерационная процедура. Представим выражение (ж) решенным относительно первого слагаемого в правой части:

$$\frac{\Delta p d^2}{32\eta l} = w + \frac{\tau_0 d}{6\eta} - \frac{8\tau_0^4 l^3}{3\eta \Delta p^3 d^2},$$

а затем и относительно  $\Delta p$ :

$$\Delta p = \frac{32\eta lw}{d^2} + \frac{16\tau_0 l}{3d} - \frac{256\tau_0^4 l^4}{3\Delta p^3 d^4}. \quad (3)$$

Алгоритм итерационного расчета очевиден: задаемся стартовым значением  $\Delta p$ ; подставляем его в третье слагаемое в правой части, получаем новое значение  $\Delta p'$  и сравниваем его со стартовым. В случае неприемлемого расхождения повторяем расчет с новым исходным значением  $\Delta p = \Delta p'$  — до разумного совпадения.

Заметим, что для большинства практических случаев величина  $\Delta p$  весьма велика и роль последнего слагаемого мала; поэтому целесообразно принять стартовое значение  $\Delta p \rightarrow \infty$ , т.е. начинать расчет  $\Delta p$ , пренебрегая последним слагаемым.

При необходимости решения задачи проектирования с определением диаметра трубопровода решение также ведется численными методами.

### 2.5.3. Пластичное течение псевдопластичных и дилатантных жидкостей

Закономерности движения псевдопластичных и дилатантных жидкостей будем изучать для области умеренных значений  $\tau_T$  и  $|dw_n/dn|$ , когда течение является пластичным. Для этих жидкостей не существует предела текучести, поэтому анализ движения ведется для всего сечения в целом, как это было сделано в случае ламинарного движения ньютоновских жидкостей.

Чтобы установить *распределение скоростей*, подставим в (2.18) значение  $\tau_T$  по (2.47), имея в виду, что нормаль направлена по радиусу  $r$ , и заменяя частные производные обыкновенными:

$$k \left( -\frac{dw_n}{dr} \right)^m = \frac{\Delta p}{2l} r. \quad (и)$$

Разделяем переменные и интегрируем при постоянных  $k$  и  $m$  в пределах от  $r = R$  (здесь  $w_n = 0$  соответственно концепции прилипания) до текущего значения скорости  $w_n$  на текущем радиусе  $r$ :

$$\int_0^{w_n} dw_n = - \left( \frac{\Delta p}{2kl} \right)^{1/m} \int_R^r r^{1/m} dr.$$

Отсюда

$$w_n = \left( \frac{\Delta p}{2kl} \right)^{1/m} \frac{m}{m+1} \left( R^{\frac{m+1}{m}} - r^{\frac{m+1}{m}} \right). \quad (2.52)$$

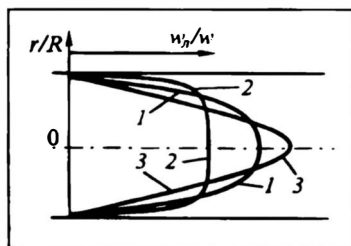


Рис. 2.27. Сопоставление обобщенных профилей скоростей:

1 — ламинарное течение ньютоновских жидкостей, 2 — пластичное течение псевдопластичных жидкостей, 3 — пластичное течение дилатантных жидкостей

Очевидно, что при  $r = 0$  скорость принимает максимальное значение:

$$w_{\max} = \left( \frac{\Delta p}{2kl} \right)^{\frac{1}{m}} \frac{m}{m+1} R^{\frac{m+1}{m}} = \left( \frac{\Delta p R}{2kl} \right)^{\frac{1}{m}} \frac{m}{m+1} R. \quad (2.52a)$$

В обобщенных переменных:

$$\frac{w_n}{w_{\max}} = 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{m+1}{m}}. \quad (2.52б)$$

Таким образом, анализ приводит к параболическому профилю скоростей, однако при  $m \neq 1$  парабола не является квадратичной. Качественно сопоставление обобщенных профилей скоростей представлено на рис.2.27 в сравнении с профилем для ламинарного течения ньютоновских жидкостей. Видно, что для псевдопластичных жидкостей ( $m < 1$ , кривая 2) профиль скоростей является более *заполненным* (выровненным в смысле распределения скоростей по сечению), а для дилатантных ( $m > 1$ , кривая 3) — менее *заполненным*, нежели для ньютоновских жидкостей ( $m = 1$ , кривая 1).

Из выражения (2.52б) следует вывод об *ограниченной автомодельности* при течении неньютоновских жидкостей: обобщенный профиль скоростей не зависит от величины коэффициента  $k$ , но остается зависящим от показателя степени  $m$ . Следовательно, автомодельность течения проявляется для групп жидкостей с одинаковыми значениями  $m$ .

Определение *расхода жидкости*  $V$  ведется уже известным способом (см. рис.2.10; элементарное сечение  $df = 2\pi r dr$ ) с использованием найденного значения скорости по (2.52):

$$\begin{aligned} V &= \int_0^R w 2\pi r dr = 2\pi \left( \frac{\Delta p}{2kl} \right)^{\frac{1}{m}} \frac{m}{m+1} R \int_0^R \left( R^{\frac{m+1}{m}} r - r^{\frac{m+1}{m}} r \right) dr = \\ &= 2\pi \left( \frac{\Delta p}{2kl} \right)^{\frac{1}{m}} \frac{m}{m+1} \left[ R^{\frac{m+1}{m}} \frac{R^2}{2} - \frac{R^{\frac{m+1}{m}+2}}{\frac{m+1}{m}+2} \right]. \end{aligned}$$

Учитывая, что выражение в квадратных скобках равно  $R^{\frac{3m+1}{m}} \left( \frac{1}{2} - \frac{m}{3m+1} \right) = R^{\frac{3m+1}{m}} \frac{m+1}{2(3m+1)}$ , имеем

$$V = \left( \frac{\Delta p}{2kl} \right)^{1/m} \frac{m}{3m+1} \pi R^{\frac{3m+1}{m}} = \left( \frac{\Delta p R}{2kl} \right)^{\frac{1}{m}} \frac{m}{3m+1} \pi R^3. \quad (2.53)$$

Соответственно уравнению расхода (1.18) **средняя скорость** выразится:

$$w = \frac{V}{\pi R^2} = \left( \frac{\Delta p R}{2kl} \right)^{1/m} \frac{m}{3m+1} R. \quad (2.54)$$

Согласно формуле (2.54) сопротивление потоку  $\Delta p \sim w^m$ , т.е. в сравнении с ламинарным течением ньютоновской жидкости  $\Delta p$  медленнее возрастает со скоростью в случае псевдопластичной жидкости и быстрее — в случае дилатантной.

Представляет интерес соотношение средней и максимальной скоростей по (2.54) и (2.52а):

$$\frac{w}{w_{\max}} = \frac{m+1}{3m+1}. \quad (2.55)$$

Нетрудно заметить, что при  $m = 1$  ( $k$  принимает смысл  $\mu$ ) выражения (2.52)—(2.55) переходят в формулы, полученные в разд. 2.2.4 для ламинарного течения ньютоновских жидкостей.

Формула (2.53) прямо используется при решении задачи *эксплуатации* для определения расхода жидкости в готовом трубопроводе при известных свойствах жидкости и параметрах течения. Очевидно, что с помощью этой формулы могут быть решены и различные задачи *проектирования* — определение  $\Delta p$  или  $d = 2R$  при прочих известных условиях течения.

Выше было указано, что пластичное течение неньютоновских жидкостей существует в области умеренных значений  $\tau_r$  и  $|dw_r/dn|$ . **Верхнюю границу пластичного течения** обычно характеризуют **приведенным числом Рейнольдса**  $Re_{пр}$ , записанным на основе параметров уравнений сдвига в предположении, что  $\lambda_r$  в уравнениях Дарси — Вейсбаха должен выражаться так же, как в случае ламинарного течения ньютоновских жидкостей:  $\lambda_r = 64/Re_{пр}$ . Опуская весьма громоздкие преобразования\*, приведем готовые выражения для  $Re_{пр}$ :

бингамовская жидкость:

$$Re_{пр} = \frac{w d p}{\eta \left( 1 + \frac{\tau_0 d}{6 w \eta} \right)}$$

---

\* См. [6].

$$\text{псевдопластичная и дилатантная жидкости: } Re_{\text{пр}} = \frac{w^{2-m} d^m 2^{3-m} \rho}{k \left( 3 + \frac{1}{m} \right)^m}$$

Очевидно, что при  $\tau_0 = 0$  (тогда  $\eta \rightarrow \mu$ ) и  $m = 1$  (тогда  $k \rightarrow \mu$ ) эти выражения приобретают обычную форму записи числа  $Re \equiv \equiv w d \rho / \mu$ .

Опыты показали, что течение рассмотренных выше неньютоновских жидкостей может считаться пластичным для  $Re_{\text{пр}} < \sim 2000$ ; при крайне высоких кажущихся вязкостях этих жидкостей на практике  $Re_{\text{пр}}$  не превосходит этой границы в очень широких диапазонах условий течения. При существенном превышении указанного граничного значения  $Re_{\text{пр}}$  особенности пластичного течения вырождаются, и неньютоновские жидкости по закономерностям движения приближаются к ньютоновским.

## 2.6. ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

Одним из часто встречающихся практических приложений уравнения Бернулли является **истечение** — явление или процесс вытекания жидкости либо газа из сосуда через отверстие (тонкое или снабженное насадком, соплом, участком трубопровода) в окружающее сосуд пространство. Варианты истечения могут быть различными: в газовую среду из заполненного жидкостью сосуда через отверстие, находящееся достаточно глубоко под свободной поверхностью; через затопленное отверстие; через преграду, находящуюся под свободной поверхностью (водослив); при различных расположениях отверстия истечения; через насадки различной формы; в стационарных и нестационарных условиях; особую проблему составляет истечение газа (в газовое пространство, в жидкую или сыпучую среду). Ниже будут рассмотрены лишь отдельные случаи истечения\*.

### 2.6.1. Истечение жидкости при постоянном напоре

Будем анализировать истечение жидкости из закрытого сосуда в стационарных условиях — при поддержании постоянными в ходе процесса давлений над свободной поверхностью ( $p_0$ ) и в среде, куда происходит истечение ( $p'$ ), а также уровня жидкости в сосуда ( $h$ ). Заметим, что форма сосуда (в частности, соотношение площадей поперечных сечений в его верхней и нижней частях) роли не играет; исключение составляют крайне редкие случаи, когда поперечные сечения отверстия  $f_0$  и сосуда  $F$  соизмеримы.

---

\* Подробно об истечении см. [1, 5, 25].

Основная задача анализа в случае истечения при постоянном напоре состоит в определении **расхода жидкости**  $V$  в зависимости от условий истечения. Разумеется, возможны постановки и обратных задач, когда для заданного  $V$  необходимо найти те или иные условия истечения или геометрические характеристики.

Рассмотрим отдельные варианты истечения.

### *Истечение через отверстие в дне сосуда*

Схема истечения показана на рис. 2.28, где обозначены условия процесса и геометрические характеристики. Поскольку в отверстие жидкость из сосуда поступает не только строго вертикально, но и из боковых соседствующих зон у дна (см. стрелки над отверстием), то под действием инерционных сил непосредственно за отверстием происходит *сжатие* (иначе – сужение) струи до минимальной площади сечения  $f_c$ , после чего струя вновь расширяется.

Выберем некоторую горизонтальную плоскость отсчета  $0 - 0$  и запишем уравнение Бернулли для сечений – совпадающих со свободной поверхностью жидкости (на расстоянии  $z_1$  над плоскостью отсчета) и с наиболее узким сечением струи (на расстоянии  $z_2$  от этой плоскости):

$$z_1 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p'}{\rho g} + \frac{w^2}{2g} + h_n, \quad (a)$$

причем  $w_1$  и  $w$  – скорости жидкости в сечениях  $F$  и  $f_c$ ,  $\rho$  – плотность жидкости.

Потерянный напор, строго говоря, складывается из потерь при трении жидкости о стенки сосуда и при прохождении ею отверстия. Первой составляющей, как правило, можно пренебречь, так как  $w_1 \ll w$ , поскольку по уравнению расхода (1.18a)  $w_1 F = w f_c$ ; и уж если  $f_c$  существенно меньше  $F$ , то подавно  $f_c^2 \ll F^2$ . Поэтому крайне мал скоростной напор, входящий в уравнение Дарси – Вейсбаха (2.17) для движения жидкости вдоль сосуда; при небольших для сосуда значениях  $l/d$  и  $\lambda_r \ll 1$  эта составляющая  $h_n$  пренебрежимо мала. Вторую составляющую учтем в форме  $h_m =$

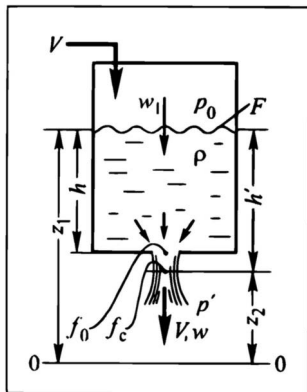


Рис.2.28. Схема истечения при постоянном напоре

$\xi \frac{w^2}{2g}$ , где  $\xi$  — коэффициент местного сопротивления при проте-

кании жидкости через отверстие.

Преобразуем выражение (а), обозначив  $h' \equiv z_1 - z_2$  — разность уровней,  $\Delta p \equiv p_0 - p'$  — разность давлений и выразив через  $w$  с помощью уравнения расхода (1.18а) скорость  $w_1 = w(f_c/F)$ . Соберем слагаемые с  $w$  в одной части равенства:

$$h' + \frac{\Delta p}{\rho g} = \left(1 + \xi - \frac{f_c^2}{F^2}\right) \frac{w^2}{2g} \quad (б)$$

В выражении (б) величиной  $f_c^2/F^2$  можно пренебречь (она мала не только в сравнении с 1, но обычно и с  $\xi$ ). Кроме того, расстояние узкого сечения (шейки) струи от сечения отверстия весьма невелико, поэтому не вполне определенную разность уровней  $h'$  без заметного ущерба для точности расчета можно заменить на известную высоту жидкости в сосуде над отверстием:  $h' \approx h$ . Тогда

$$w = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}} \sqrt{2g \left( h + \frac{\Delta p}{\rho g} \right)}.$$

С целью сокращения записи введем приведенную высоту  $h^* \equiv h + \Delta p/(\rho g)$  — она в дополнение к  $h$  включает также разность давлений  $p_0$  и противодавления  $p'$  (разумеется, при  $p_0 = p'$  будет  $h^* = h$ ). Множитель  $1/\sqrt{1+\xi} < 1$  называется **коэффициентом скорости** и обозначается  $\varphi$ . Тогда

$$w = \varphi \sqrt{2gh^*}. \quad (в)$$

В случае  $\varphi = 1$  выражение (в) определяло бы скорость свободного падения в пустоте; коэффициент скорости характеризует замедление течения жидкости вследствие гидравлического сопротивления в отверстии.

Расход жидкости найдем из уравнения (1.18):  $V = wf_c$ . Такая запись неудобна из-за неопределенности величины  $f_c$ . Последнюю заменяют:  $f_c = \alpha f_0$ , где  $\alpha$  — **коэффициент сжатия струи** (подчеркнем, что  $\alpha$  — отношение не *диаметров* струи и отверстия, а *площадей их сечений*). С этой заменой получаем формулу для расхода жидкости при истечении:

$$V = f_c w = \alpha f_0 w = \alpha \varphi f_0 \sqrt{2gh^*}. \quad (г)$$

Произведение  $\alpha \varphi$  называется **коэффициентом расхода** при истечении и обозначается символом  $\kappa_p$ . Тогда

$$V = \kappa_p f_0 \sqrt{2gh^*}. \quad (2.56)$$

Коэффициенты  $\varphi$  и  $\alpha$  определяются, как правило, опытным путем; для некоторых редких случаев возможна их теоретическая оценка.

**Коэффициент скорости** зависит в основном от толщины стенки и состояния кромок отверстия. В случае невязких (типа воды и т.п.) жидкостей для тонких стенок, в которых расположено отверстие, когда коэффициент  $\xi$  близок к 0,06, обычно  $\varphi \approx 0,97 \pm 0,02$ , т.е. сравнительно мало отличается от 1.

**Коэффициент сжатия струи** зависит от формы отверстия (для круглого отверстия он меньше, чем для щели) и его расположения относительно стенок сосуда. Вблизи стенок  $\alpha$  выше (поскольку со стороны жидкости у этих стенок действие сил инерции при формировании струи ослаблено); по мере удаления от стенок  $\alpha$  достаточно быстро приближается к своему постоянному значению; при удалении от стенок на расстояние трех диаметров отверстия и дальше — влияния стенок уже не чувствуется. Коэффициент  $\alpha$  также несколько возрастает с увеличением напора.

Более всего  $\alpha$  зависит от толщины стенки, в которой расположено отверстие. В случае тонких стенок с острыми кромками при истечении невязких жидкостей обычно  $\alpha \approx 0,62 \div 0,64$ . Истечение через отверстие в толстой стенке или через насадок (патрубок, вставленный в отверстие) увеличивает значение  $\alpha$ , поскольку на выходе из насадка существенно ослаблено действие сил, сужающих струю. Для цилиндрических насадков, длина которых втрое и больше превышает диаметр,  $\alpha$  находится на уровне 0,8 — 0,85; для сужающихся конических — может превысить 0,9, а для "conoидальных", повторяющих форму струи, естественно, близок к 1.

Истечение в большинстве практических случаев происходит в турбулентном режиме движения жидкости в отверстии; указанные выше значения  $\varphi$  и  $\alpha$  приведены для этого случая. При существенном повышении вязкости жидкости (т.е. при понижении  $Re$ ) наблюдается уменьшение  $\varphi$  и увеличение  $\alpha$  (скажем, для толстых стенок и насадков при ламинарном режиме истечения, очевидно,  $\alpha \rightarrow 1$ ).

Особенности истечения через отверстия и насадки разной формы и численные значения  $\varphi$ ,  $\alpha$  и  $\kappa_p$  для различных конкретных случаев приведены в литературе\*.

### *Истечение через отверстие в боковой стенке*

При небольших размерах отверстия и достаточно большой глубине его погружения под свободную поверхность функционирование отверстия в боковой стенке и расчет истечения практически совпадают с приведенными выше для отверстия в дне сосуда (небольшие различия возможны за счет численных значений  $\varphi$  и  $\alpha$ ). В случае отверстий *достаточно большой протяженности в вертикальном направлении, расположенных в боковой стенке*, различие может стать существенным.

Будем рассматривать истечение из крупного отверстия произвольной (но известной) формы в боковой стенке сосуда (рис.2.29). Принципиальное отличие от отверстия в дне сосуда

---

\* См. [12, 25].



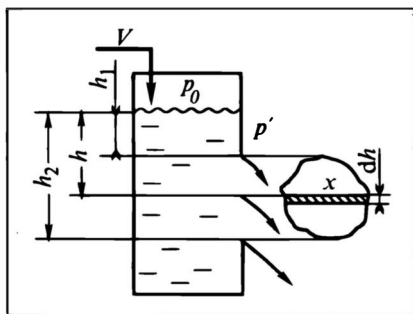


Рис.2.29. Истечение жидкости при постоянном напоре через крупное отверстие в боковой стенке сосуда

состоит в том, что здесь различные точки по высоте отверстия находятся под разным напором из-за разной глубины погружения этих точек. Иначе говоря, движущая сила истечения  $h^* = h + \Delta p / (\rho g)$  будет *переменной по высоте от-*

*верстия* вследствие изменения геометрического напора  $h$  от  $h_1$  до  $h_2$ . Совершенно очевидно, что в разных сечениях по высоте отверстия скорость истечения различна: из более верхних уровней струи жидкости выходят с меньшей скоростью, нежели из нижних (на рисунке это отражено различной длиной стрелок).

Расчет на основе некоторой средней глубины погружения центра отверстия дает приближенные результаты (к тому же не всегда ясно, где поместить "центр" отверстия); правда, в некоторых случаях такое приближение вполне приемлемо.

С целью более строгого подхода к анализу выделим в отверстии на текущей глубине  $h$  элементарное сечение высотой  $dh$ ; ширина отверстия  $x$  задана в виде функции  $x = x(h)$  в пределах от  $h_1$  до  $h_2$ . Элементарный расход жидкости  $dV$  через бесконечно малое сечение  $dV_0 = xdh$  запишем в манере полученной ранее формулы (2.56):

$$dV = \kappa_p (xdh) \sqrt{2gh^*}, \quad (д)$$

где  $h^* = \text{var}$ , поскольку  $h = \text{var}$ .

Интегрируя (д), найдем полный расход:

$$V = \kappa_p \sqrt{2g} \int_{h_1}^{h_2} x \sqrt{h^*} dh. \quad (2.57)$$

Конкретное выражение для  $V$  определяется формой отверстия, т.е. конкретным видом зависимости  $x$  от  $h$ . Для простого случая прямоугольного отверстия постоянной ширины  $x = b = \text{const}$ , величина  $b$  выносится за знак интеграла, и последующее интегрирование затруднений не вызывает. В более сложных случаях приходится выражать зависимость  $x = x(h)$ , она может оказаться непростой; в этих случаях иногда возникают технические затруднения при аналитическом выражении интеграла, и приходится прибегать к численным методам.

Проведенный анализ практически актуален только для **весьма крупных отверстий** достаточно большой вертикальной протяженности ( $h_2 - h_1$ ), соизмеримой с величинами напоров  $h_1^*$ ,  $h_2^*$ . В этом случае точное решение (2.57) может отличаться (хотя обычно и не очень значительно) от приближенного, выполненного по формуле (2.56) с подстановкой в нее некоей *средней* глубины погружения центра отверстия  $h_{cp}$ . Для *мелких* отверстий, расположенных под свободной поверхностью на достаточной глубине, без сколько-нибудь существенной погрешности можно пользоваться более простым соотношением (2.56). Возможность использования этого соотношения вместо более строгого и точного (2.57) определяется заданной точностью технологического расчета. Так, для прямоугольного отверстия при  $p_0 = p'$  критерием возможности использования простой формулы (2.56) является отношение  $\xi_*$  глубины погружения центра отверстия  $h_{cp} = (h_1 + h_2)/2$  к высоте отверстия ( $h_2 - h_1$ ). При этом приближенное значение  $V$  получается больше точно рассчитанного. Если отверстие начинается прямо от свободной поверхности (тогда  $\xi_* = 2$ ), то погрешность расчета составит 6,1%, но уже при  $\xi_* = 1$  (глубина  $h_{cp}$  равна высоте отверстия) погрешность снижается до 1,1% — в этом случае отверстие можно считать **малым (мелким)** и вести расчет по формуле (2.56) с подстановкой в качестве  $h$  величины  $h_{cp}$ .

## 2.6.2. Истечение жидкости при переменном напоре

Анализируется истечение жидкости из сосуда при изменяющихся во времени характеристиках процесса. В общем случае здесь возможно изменение уровня жидкости в сосуде  $h$  и давлений — над ее свободной поверхностью  $p_0$  и в среде, куда происходит истечение,  $p'$ . Ограничимся рассмотрением истечения при изменении  $h$ , практически наиболее интересного для химической технологии. Исследуем полное или частичное опорожнение сосуда, полагая значения  $p_0$  и  $p'$  неизменными в ходе истечения.

Основная задача — в определении **времени истечения** из сосуда известных размеров и конфигурации при заданных условиях процесса. Разумеется, возможны иные постановки задачи, когда при заданном времени необходимо определить те или иные условия истечения (реже — геометрические характеристики сосуда).

Схема истечения при переменном напоре показана на рис. 2.30. Из сосуда произвольной (но известной) формы через отверстие площадью  $f_0$  вытекает жидкость, причем коэффициент расхода равен  $\kappa_p$ . Давления  $p_0$  и  $p'$  поддерживаются постоянными. Начальный уровень жидкости в сосуде обозначен  $h_n$ , конечный —  $h_k$  (в частном случае полного опорожнения —  $h_k = 0$ ). В ходе истечения уровень жидкости изменяется; обозначим переменный уровень жидкости *над отверстием истечения*, отсчитываемый от плоскости отверстия,  $z$ , он является составляющей напора (играет ту же роль, что и постоянная величина  $h$  в случае истечения при постоянном напоре).

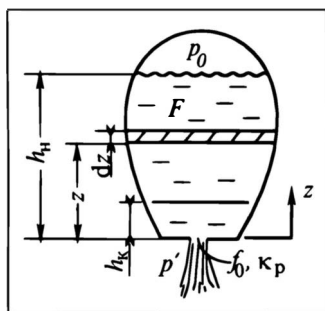


Рис.2.30. Схема истечения жидкости при переменном напоре

В основу анализа положим формулу (2.56). Однако в рассматриваемом случае эта формула пригодна лишь для описания *мгновенной* ситуации: мгновенного расхода  $V_{\text{мгн}}$  при текущем значении движущей силы (напора)  $z^* \equiv z + \Delta p/(\rho g)$ , где  $z = \text{var}$ . При этом мгновенный расход можно выразить как **объем** жидкости, вытекающей

в единицу времени:  $V_{\text{мгн}} = dV/d\tau$ . Тогда

$$V_{\text{мгн}} = \frac{dV}{d\tau} = \kappa_p f_0 \sqrt{2gz^*}, \quad (\epsilon)$$

откуда элементарное количество жидкости, вытекающей из отверстия за время  $d\tau$  (Уход), составит

$$dV = \kappa_p f_0 \sqrt{2gz^*} d\tau. \quad (\ж)$$

Накопление жидкости в сосуде (это рассматриваемый пространственный контур) за  $d\tau$  равно  $Fdz$ , где  $F$  — *текущее* поперечное сечение сосуда на высоте  $z$  (текущая площадь зеркала свободной поверхности). В случае сосуда с вертикальными стенками  $F = \text{const}$ ; в общем случае  $F = F(z)$ , причем зависимость эта задана геометрическими соотношениями. Используя теперь ОБС (1.8) и учитывая, что в ходе истечения Приход жидкости отсутствует (как и Источники и Стоки внутри контура — сосуда), запишем для времени  $d\tau$  материальный баланс по объемам жидкости, полагая ее несжимаемой:

$$\text{Пр} - \text{Ух} = \text{Нак} \quad \text{или} \quad 0 - \kappa_p f_0 \sqrt{2gz^*} d\tau = Fdz. \quad (\з)$$

Разделяя переменные и интегрируя от 0 до  $\tau$  и от  $h_n$  до  $h_k$ , получим (принимая  $\kappa_p = \text{const}$ ) связь времени истечения  $\tau$  с конечным уровнем жидкости в сосуде  $h_k$ :

$$\tau = - \frac{1}{\kappa_p f_0 \sqrt{2g}} \int_{h_n}^{h_k} \frac{F}{\sqrt{z^*}} dz; \quad (2.58)$$

можно, конечно, избавиться от знака "минус", поменяв местами пределы интегрирования.

Заметим, что по мере истечения при переменном (падающем!) напоре уменьшается во времени скорость движения жидкости; поэтому должно проявляться действие сил инерции — они не учтены в уравнении Бернулли, на котором базируется выражение (2.56), лежащее в основе анализа. Однако оценки показывают, что ускорение этой силы во всех практически интересных случаях на 3—4 порядка меньше ускорения силы тяжести (свободного падения); поэтому действием сил инерции вполне можно пренебречь.

В случае сосуда постоянного поперечного сечения при использовании (2.58)  $F$  выносится за знак интеграла, и последующее интегрирование затруднений не вызывает. В частности, для простейшего случая  $F = \text{const}$  и  $h_k = 0$ , обозначив  $h_n \equiv h$ , при  $p_0 = p'$  (так что  $z^* = z$ ) имеем:

$$\tau = - \frac{F}{\kappa_p f_0 \sqrt{2g}} \int_{h_n}^0 \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{2 F h_n^{1/2}}{\kappa_p f_0 \sqrt{2g}} = \frac{2 F h_n}{\kappa_p f_0 \sqrt{2g h_n}}.$$

В случае  $F = \text{var}$  необходимо предварительно выразить  $F$  в виде функции от  $z$ , а затем провести интегрирование\*. Связь  $F(z)$  может оказаться достаточно сложной; тогда при невозможности аналитического выражения интеграла придется прибегать к численным методам.

Не исключены ситуации, когда в условиях  $p_0 < p$  при некотором значении  $z = z_{кр} > 0$  окажется  $z^* = 0$ , что соответствует  $z_{кр} = (p' - p_0)/(\rho g)$ . Это означает, что при достижении некоторого уровня  $z_{кр}$  истечение жидкости из сосуда прекратится, так как геометрический напор будет скомпенсирован отрицательной разностью пьезометрических. В форме математической связи здесь можно записать:  $h_k \geq z_{кр}$ .

Продемонстрированные подходы позволяют решать разнообразные задачи: определение необходимой формы сосуда или величины отверстия для обеспечения заданного времени истечения  $\tau$ ; выравнивание уровней в двух соединенных сосудах при перетекании жидкости через отверстие в разделяющей их стенке; истечение через два отверстия, находящиеся на разных уровнях, и т.п. В ряде случаев при этом можно прямо воспользоваться формулой (2.58); в других случаях приходится проводить полный анализ, начиная с выражений типа (е), (ж), (з) и далее — по приведенной выше канве.

### 2.6.3. Об истечении газов

Задача анализа — определение массового расхода газа  $G$  при стационарном его истечении через отверстие, сопло или насадок из сосуда с повышенным давлением в газовую среду с более низким.

Истечение газа можно рассматривать как адиабатный процесс, поскольку на коротком участке истечения потерями теплоты можно пренебречь. Для определения скорости вытекающего газа запишем уравнение энергетического баланса для 1 кг газа на этом участке, относя индекс "1" к началу участка (сопла, патрубка), а индекс "2" — к его концу. В отсутствие механической работы в уравнение баланса войдут энтальпии  $i$  и кине-

---

\* Некоторые частные задачи приведены в [6, 22, 25 и др.].

тические энергии потоков  $w^2/2$ . Согласно ОБС в форме (1.8в):

$$i_1 + \frac{w_1^2}{2} - i_2 - \frac{w_2^2}{2} = 0. \quad (\text{и})$$

Заметим: как правило, **тепловые** балансы не учитывают удельной кинетической энергии потоков  $w^2/2$  (см. главы 6, 7), поскольку она мала в сравнении с энтальпиями  $i$  и их перепадом  $i_1 - i_2$ . Кинетическая энергия начинает вносить заметный вклад в энергетический баланс, когда значения  $w$  исчисляются сотнями метров в секунду. Именно такая ситуация возникает при истечении газов, когда  $w_2$  становится соизмеримой со скоростью звука (в некоторых случаях и превосходит ее).

Из баланса (и) следует, что за счет падения энтальпии от  $i_1$  до  $i_2$  происходит увеличение кинетической энергии. Найдем скорость газа на выходе из сопла:

$$w_2 = \sqrt{2(i_1 - i_2) + w_1^2}. \quad (2.59)$$

Чаше всего в сосуде перед соплом скорость  $w_1 \ll w_2$ ; тогда

$$w_2 = \sqrt{2(i_1 - i_2)}. \quad (2.59a)$$

Это уравнение является базовым для анализа различных случаев истечения газов\*. Здесь кратко рассмотрено лишь **истечение идеального газа из короткого сопла**, когда трением на его длине можно пренебречь.

Поскольку энтальпия в рассматриваемом случае может быть выражена как  $i = c_p T$ , то согласно (2.59a)

$$w_2 = \sqrt{2c_p(T_1 - T_2)} = \sqrt{2c_p T_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)}. \quad (\text{к})$$

Воспользуемся далее уравнениями идеального газа  $p_1 v_1 = RT_1$ ,  $p_2 v_2 = RT_2$  и адиабатного сжатия — расширения:

$$p_1 v_1^k = p_2 v_2^k; \quad (\text{л})$$

отсюда очевидно:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 v_2}{p_1 v_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{p_1^{1/k}}{p_2^{1/k}} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}. \quad (2.60)$$

Напомним:  $R$  — индивидуальная массовая (на 1 кг) газовая постоянная, выражаемая через универсальную  $R_y$ :  $R = R_y / M$ ;  $M$  — молярная масса;  $k = c_p / c_v$  — показатель адиабаты, где  $c_p$  и  $c_v$  — удельные массовые теплоемкости газа при постоянных давлении и объеме; заметим:  $R = c_p - c_v$ .

---

\* Детальное рассмотрение таких случаев приводится в курсах теплотехники [3, 23]; см. также [22].

Подставив в (к) найденное отношение  $T_2/T_1$  и значение абсолютной температуры  $T_1 = p_1 v_1 / R$ , имеем

$$w_2 = \sqrt{2c_p \frac{p_1 v_1}{R} \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]} =$$

$$= \sqrt{2 \frac{c_p}{c_p - c_v} p_1 v_1 \left[ 1 - \frac{p_2}{p_1} \right]^{\frac{k-1}{k}}} = \sqrt{2 \frac{k}{k-1} p_1 v_1 \left[ 1 - \frac{p_2}{p_1} \right]^{\frac{k-1}{k}}} \quad (2.61)$$

Массовый расход  $G$  (в разд. 2.3.5 было показано, что для газов его использование предпочтительнее, нежели объемного) через сопло сечением  $f_0$  найдем из уравнения расхода (1.17); при этом используем связь удельного объема и плотности ( $v_2 = 1/\rho_2$ ):

$$G = \rho_2 w_2 f_0 = \frac{w_2 f_0}{v_2} = f_0 \sqrt{2 \frac{k}{k-1} \frac{p_1 v_1}{v_2^2} \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}.$$

После замены по (л)  $v_2 = v_1 (p_1/p_2)^{1/k}$  и  $v_1 = RT_1/p_1 = R_y T_1/(p_1 M)$  получим

$$G = f_0 \sqrt{2 \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{v_1} \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{2}{k}} \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]} =$$

$$= f_0 \sqrt{2 \frac{k}{k-1} \frac{p_1^2 M}{R_y T_1} \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{2}{k}} - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]}. \quad (2.62)$$

Анализ показывает, что расчет  $G$  по (2.62) правомерен при сравнительно небольшом падении давления от  $p_1$  до  $p_2$ . Действительно, согласно (2.62) расход  $G$  зависит от относительного снижения давления  $\beta \equiv p_2/p_1$ , причем эта зависимость носит *экстремальный* характер. Проанализируем  $G$  на экстремум, взяв производную по  $\beta$  от последнего выражения в квадратных скобках и приравняв ее нулю:

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left( \beta^{\frac{2}{k}} - \beta^{\frac{k+1}{k}} \right) = \frac{2}{k} \beta^{\frac{2}{k}-1} - \frac{k+1}{k} \beta^{\frac{k+1}{k}-1} = 0.$$

Отсюда получается значение  $\beta$  в точке экстремума, называемое **критическим**:

$$\beta_{кр} \equiv \left( \frac{p_2}{p_1} \right)_{кр} = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (м)$$

По (м) можно рассчитать значения  $(p_2/p_1)_{кр}$  для газов разной атомности:

- одноатомные газы  $k \approx 5/3, \quad p_{кр}/p_1 \approx 0,49;$
- двухатомные газы  $k \approx 7/5, \quad p_{кр}/p_1 \approx 0,53;$
- трех- и многоатомные газы  $k \approx 9/7, \quad p_{кр}/p_1 \approx 0,55.$

На практике нередко принимают "скопом":  $p_{кр}/p_1 \approx 0,5$ .

Повторное дифференцирование с установлением знака производной в точке экстремума показывает, что речь идет о **максимумах скорости**  $w_{кр}$  и **расхода**  $G_{кр}$  при  $p_2/p_1 = p_{кр}/p_1$ . Подставив значение  $\beta_{кр}$  в (2.61), найдем значение критической скорости истечения газа:

$$w_{кр} = \sqrt{2 \frac{k}{k-1} p_1 v_1 \left[ 1 - \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \right]} = \sqrt{2 p_1 v_1 \frac{k}{k+1}} = \sqrt{2 R T_1 \frac{k}{k+1}}. \quad (н)$$

В технической термодинамике показано, что  $w_{кр}$  есть **скорость звука** в газовой среде.

По уже известной канве, подставив  $v_{2кр} = v_1 (p_{кр}/p_1)^{1/k}$ , получим

$$\begin{aligned} G_{кр} &= \frac{f_0 w_{кр}}{v_{2кр}} = f_0 \sqrt{2 \frac{k}{k+1} \frac{p_1 v_1}{v_1^2} \left( \frac{p_{кр}}{p_1} \right)^{\frac{2}{k}}} = \\ &= f_0 \sqrt{k \frac{2}{k+1} \frac{p_1}{v_1} \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}}. \end{aligned}$$

Окончательно:

$$G_{кр} = f_0 \sqrt{\frac{p_1^2 M}{R_y T_1} k \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}}. \quad (2.63)$$

Таким образом, пока давление  $p_2$  не падает ниже критического значения, определяемого формулой (м), массовый расход газа  $G$  рассчитывается по формуле (2.62). При этом уменьшению  $p_2$  или увеличению  $p_1$  (в общем — уменьшению  $\beta \equiv p_2/p_1$ ) отвечает возрастание  $G$ . Однако такое влияние  $p_2$ ,  $p_1$ ,  $\beta$  наблюдается лишь до  $\beta_{кр}$ ; при уменьшении, например, давления  $p_2$  ниже  $p_{кр}$

дальнейшего возрастания  $G_2$  не происходит, расход остается на максимальном уровне  $G_{кр}$ , определяемом формулой (2.63).

Причина рассматриваемого явления связана с тем, что волна давления распространяется в среде со скоростью звука. Пока скорость струи газа  $w_2$  меньше скорости звука ( $w_{кр}$ ), давление среды  $p_2$  передается против движения струи и устанавливается в устье сопла; тогда движущая сила истечения составляет  $p_1 - p_2$ . При скоростях струи выше скорости звука давление среды  $p_2$  не смогло бы установиться в устье сопла: скорость передачи давления  $p_2$  из среды к устью сопла была бы *ниже* скорости движения самой струи. Поэтому давление в устье сопла  $p_2$  не может упасть ниже  $p_{кр}$ , так что движущая сила будет оставаться равной  $p_1 - p_{кр}$  независимо от конкретного значения  $p_2$ , если оно ниже  $p_{кр}$ . Это означает, что и скорость газа не превысит скорости звука  $w_{кр}$ .

Подробно эти вопросы рассмотрены в курсах технической термодинамики; там же анализируются возможности преодоления рассмотренного кризиса истечения.

## 2.7. ЭЛЕМЕНТЫ ГИДРАВЛИКИ ДИСПЕРСНЫХ СИСТЕМ

К дисперсным относят системы, содержащие дискретные образования, распределенные в сплошной среде. Дискретные образования, называемые **дисперсной фазой**, представляют собой твердые зерна, частицы, не изменяющие своей формы и размера при протекании технологического процесса, либо капли или газовые пузыри, способные изменять свои размеры (диспергировать, коалесцировать) и деформироваться в ходе процесса. В качестве **сплошной среды** (ее еще называют **дисперсионной средой** или **фазой**), отделяющей дискретные образования одно от другого, используются жидкости или газы.

Интерес химической технологии к дисперсным системам обусловлен высокой поверхностью контакта дисперсной и сплошной фаз: все контактные процессы благодаря развитой межфазной поверхности протекают здесь с большой интенсивностью. В задачу *технологического* расчета входит определение интенсивности контакта фаз — *вообще* и для конкретного технологического процесса; общая задача *гидравлического* расчета состоит в установлении закономерностей переноса импульса при движении сплошной среды относительно элементов дискретной фазы — это *внешняя* (иногда *смешанная*) задача гидравлики.

Примерами дисперсных систем могут служить различные суспензии (дисперсия твердых частиц в жидкости), эмульсии (жидкости в жидкости), барботажные системы и пены (газа в жидкости) и др.



Наиболее простыми являются дисперсные системы с твердой дискретной фазой — из-за постоянства размеров и отсутствия движения вещества внутри самого зерна (тогда как в капле или пузыре может происходить внутренняя циркуляция). Ниже достаточно детально будут рассмотрены дисперсные системы именно с *твердой фазой*; в определенном смысле они часто служат упрощенной моделью для систем с жидкостями и с газовыми пузырями (некоторые аспекты гидравлики этих систем в учебнике лишь затронуты).

### 2.7.1. Общая характеристика дисперсных систем с твердой фазой

С точки зрения характера перемещения дисперсной системы в технологическом аппарате различают следующие основные разновидности: неподвижный слой (*НС*), псевдоожиженный слой (*ПС*), движущийся слой (*ДС*) и транспортные системы (*ТС*). Эти системы схематически показаны на рис. 2.31.

В **неподвижном слое** зерна дисперсной фазы неподвижны относительно друг друга и стенок аппарата; через слой проходит поток жидкости или газа (снизу — с ограниченной скоростью или сверху). Если такой поток подается снизу с достаточно высокой скоростью, то под его воздействием может нарушиться контакт между зернами (частицами), они получают возможность перемещаться относительно друг друга и стенок аппарата — возникает **псевдоожиженный слой** с хаотическим движением твердых частиц и их агрегатов. Существуют системы, в которых зерна движутся относительно стенок аппарата (под действием собственного веса) практически без нарушения контакта друг с другом (т.е. без взаимного перемещения) — это **движущийся слой**. Наконец, часто используется перемещение дисперсной системы (сплошной и дисперсной фаз) в канале, аппарате — это **транспортные системы** (конечно, и *ДС* можно отнести к таким системам); с точки зрения гидравлики анализ движения *ТС*, строго говоря, следует относить уже не к внешней, а к смешанной задаче.

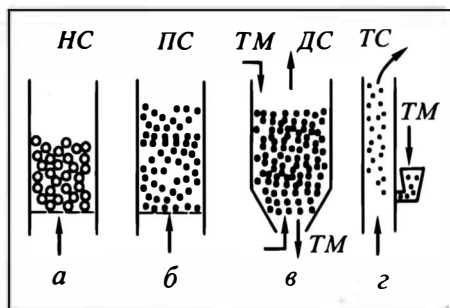
Основные проблемы гидравлики дисперсных систем состоят в определении гидравлического сопротивления (при движении сплошной среды через дисперсную фазу или дисперсной системы в целом по каналу, аппарату), в установлении гидродинамических границ между системами (скажем, диапазонов скоростей, в которых существует каждая из них) и выявлении некоторых особенностей в поведении отдельных систем.

Анализу конкретных систем предположим рассмотрение их *общих характеристик*.

Дисперсные системы занимают объем  $V$ , состоящий из объемов твердых зерен (частиц)  $V_T$  и свободного объема просветов между ними  $V_{св}$ :  $V = V_T + V_{св}$ . *Объемная доля просветов*  $V_{св}/V \equiv$

Рис.2.31. Основные дисперсные системы с твердой фазой:

*a* — неподвижный слой, *б* — псевдооживленный слой, *в* — движущийся слой, *г* — транспортная система



$\epsilon$  называется **порозностью** (не путать с **пористостью**, характеризующей долю пустот *внутри* твердых частиц). Очевидно, *доля твердой*

*фазы* (ее **объемная концентрация**) составляет  $\frac{V_T}{V} = \frac{V - V_{св}}{V} = 1 - \epsilon$ . Условимся порозность и другие характеристики *неподвижного слоя* выделять индексом "0": для *НС*  $\epsilon \equiv \epsilon_0$ . При наиболее плотной регулярной укладке сферических зерен (по тетраэдру)  $\epsilon_0 = 0,259$ ; при наиболее рыхлой (кубической, без неупорядоченных полостей) —  $\epsilon_0 = 0,476$ ; в случае часто используемых частиц округлой формы  $\epsilon_0$  обычно близка к 0,4.

Для определения **массовой концентрации** твердой фазы  $\rho$  необходимо знать плотность зерен  $\rho_T = m_T/V_T$ . Тогда, учитывая, что  $V_T = V/(1 - \epsilon)$ , получаем

$$\rho \equiv \frac{m_T}{V} = \frac{m_T}{V_T / (1 - \epsilon)} = \rho_T (1 - \epsilon). \quad (a)$$

Массовая концентрация твердой фазы в *НС* (**насыпная плотность**) составит

$$\rho_0 = \rho_T (1 - \epsilon_0). \quad (б)$$

Важной характеристикой дисперсной системы является **размер** ее элементов (зерен, частиц). Здесь различают системы **монодисперсные** (все частицы имеют одинаковые размеры, строго говоря — и форму) и **полидисперсные**, когда наблюдается распределение частиц по размерам — в небольших диапазонах размеров (**узкие фракции**) и со значительной разницей в размерах зерен (**широкие фракции**). Обычно фракцию считают *узкой*, если отношение максимального размера частиц к минимальному не превышает 2.

Если речь идет о сферических частицах, то для монодисперсной системы размер элементов однозначно характеризуется их диаметром  $d$ . Для узких фракций пользуются усредненным размером, причем вследствие узости фракции любые способы

усреднения дают близкие результаты. Принято использовать среднегеометрический размер  $d_{\text{ср}} = \sqrt{d_1 d_2}$ , где  $d_1$  и  $d_2$  — наименьший и наибольший размеры частиц в узкой фракции. Широкую фракцию рассматривают как состоящую из  $N$  узких фракций, каждая ( $i$ -я) из которых характеризуется своим средним размером  $d_i = \sqrt{d_i^{\min} d_i^{\max}}$ . Пусть массовая доля каждой фракции  $x_i$  известна (разумеется,  $\sum_i x_i = 1$ ); тогда в гидродина-

мических задачах средний размер широкой фракции принято определять как *среднегармоническую* величину:

$$\frac{1}{d} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{d_i}. \quad (\text{в})$$

Очень часто распределение частиц по размерам (а также капель, пузырей и других элементов в дисперсных системах), если не предпринято специальных мер для их выравнивания, следует *нормально-логарифмическому закону*, что отвечает некоторым модельным представлениям.

Заметим: усреднение размеров узких фракций обычно не приводит к сколько-нибудь заметной погрешности в расчетах. Усреднение размеров широкой фракции нередко является весьма грубым расчетным приемом; для ряда технологических процессов оно приводит к потере точности, так что в целях повышения строгости анализа расчет следует вести для отдельных узких фракций, а затем объединять полученные результаты.

Для характеристики зерен несферической формы указания на их размеры недостаточно, да и сам размер  $d$  становится не вполне определенным. Здесь вводят понятие об эквивалентном диаметре зерен как диаметре сферы, равновеликой (по объему частицы  $V_{\text{ч}}$ ) реальному зерну:  $d_e = \sqrt[3]{6 V_{\text{ч}}/\pi}$ . Отклонение от

сферичности характеризуется **фактором формы**  $\phi_s \equiv \sqrt{S_{\text{ш}}/S_{\text{ч}}} \leq 1$ , где  $S_{\text{ч}}$  и  $S_{\text{ш}}$  — поверхности зерна и равновеликой ему сферы.

В гидродинамических расчетах удобно пользоваться **расчетной скоростью**, определяемой из уравнения расхода (1.18):  $w = V/f$ , где  $f$  — поперечное сечение *пустого* (без твердого материала) аппарата. **Истинная скорость**  $w_{\text{и}}$  будет выше, поскольку часть сечения аппарата перекрыта твердыми частицами, так что для прохода газа (жидкости) остается живое сечение  $f_{\text{св}} < f$ ; таким образом,  $w_{\text{и}} > w$ . Реальная интенсивность технологического процесса определяется, конечно же, величиной  $w_{\text{и}}$ , но скорость  $w$  удобнее в практических расчетах.

### 2.7.2. Неподвижный слой

Размеры используемых в этой системе дискретных элементов колеблются в широких пределах: от нескольких сантиметров до долей миллиметра. Поток сплошной среды может подаваться в *НС* как сверху, так и снизу; на практике встречаются *НС* с иным направлением потока (через кольцевой *НС* и др.).

Основная гидродинамическая задача состоит в определении *гидравлического сопротивления* при движении потока сплошной среды через *НС*.

Анализ закономерностей течения среды (газа, жидкости) через полидисперсный *НС*, содержащий к тому же частицы различной формы, — чрезвычайно сложная задача. Поэтому в целях ее упрощения будем рассматривать (рис. 2.32, *а*) **идеальный слой**, составленный из одинаковых шарообразных зерен диаметром  $d$ . Пусть этот слой высотой  $H_0$ , порозностью  $\varepsilon_0$  лежит на поддерживающей решетке в аппарате поперечного сечения  $f$ . Однако и такой более простой случай весьма труден для анализа: поток, омывающий сферические зерна, движется в искривленных каналах с переменным поперечным сечением, струи газа (или жидкости) постоянно пересекаются, сливаются, расходятся. Сопротивление таких систем мы рассчитывать не умеем, но зато знакомы с подходами к расчету течения в *прямых* каналах. Поэтому перейдем от идеального слоя к некоему модельному **фиктивному** — *того же гидравлического сопротивления*, сводя внешнюю задачу гидродинамики к внутренней: будем считать, что поток (например, газа) движется по прямым каналам (их длина  $l$ , естественно, больше высоты слоя  $H_0$ , поскольку мы мысленно "выпрямили" искривленные каналы); диаметр каналов обозначим  $D_e$  (чтобы не смешивать с эквивалентным диаметром частиц  $d_e$ ; в рассматриваемом случае  $d_e = d$ ).

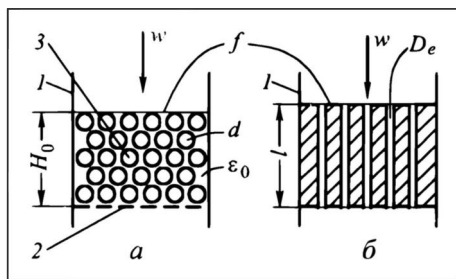


Рис. 2.32. К расчету гидравлического сопротивления неподвижного слоя:

*а* — идеальный слой, *б* — фиктивный слой;

*1* — корпус аппарата, *2* — газораспределительная решетка, *3* — неподвижный зернистый слой

На модель фиктивного слоя должны быть наложены ограничения, чтобы его гидравлическое сопротивление в самом деле было равно искомому для идеального слоя. Эти ограничения сформулируем на основе уравнения Дарси — Вейсбаха в форме (2.17а):

$$\Delta p = \lambda_{\Gamma} \frac{l}{D_{\epsilon}} \frac{w_{\text{и}}^2}{2} \rho. \quad (2.17a)$$

Элементы этого уравнения для фиктивного и идеального слоев должны совпадать:

1) длины путей газа в фиктивном и идеальном слоях должны быть одинаковыми;

2) свободные объемы  $V_{\text{св}}$  в фиктивном и идеальном слоях должны быть одинаковыми, тогда при одинаковых расчетных скоростях  $w$  будут равными и истинные скорости  $w_{\text{и}}$ ;

3) диаметры каналов в фиктивном слое должны соответствовать эквивалентным диаметрам  $D_{\epsilon}$  в идеальном; это важно и в аспекте совпадения чисел  $Re_{\text{и}} \equiv w_{\text{и}} D_{\epsilon} \rho / \mu$ , а значит и коэффициентов гидравлического сопротивления  $\lambda_{\Gamma}$  в фиктивном и идеальном слоях;

4) должны быть одинаковы поверхность трения потока о стенки каналов  $F_{\text{ф}}$  в фиктивном слое и поверхность твердых частиц  $F_{\text{ид}}$  в идеальном.

При соблюдении этих условий расчет сопротивления идеального слоя можно вести по формулам для фиктивного слоя.

В практических расчетах неудобно пользоваться величинами, входящими в уравнение Дарси — Вейсбаха для фиктивного слоя, поскольку в качестве исходных задаются характеристики идеального слоя: его высота  $H_0$ , расчетная скорость  $w$ , диаметр зерен  $d$ . Поэтому целесообразно заменить через эти характеристики величины, входящие в (2.17а):  $l$ ,  $w_{\text{и}}$  и  $D_{\epsilon}$  (проводя замену, будем снабжать характеристики фиктивного слоя индексом "ф", идеального — индексом "ид").

Замену  $l$  на  $H_0$  произведем с помощью **коэффициента извилистости**  $\zeta > 1$ , представляющего собой отношение длины пути газа в слое к высоте последнего:

$$l = \zeta H_0. \quad (г)$$

По существу  $\zeta = 1/\cos\varphi$ , где  $\varphi$  — средний угол между вертикалью и направлением потока в идеальном слое при обтекании частиц (по порядку величин он близок к  $45^\circ$ , так что  $\zeta \approx \sqrt{2}$ ).

Истинную скорость заменим на расчетную, исходя из уравнения расхода:  $V = wf = w_{\text{и}} f_{\text{св}}$ , где  $f_{\text{св}}$  — среднее живое сечение потока, т.е. не занятое твердыми частицами. Отсюда с учетом сформулированных выше ограничений

$$w_{\text{и}} = w \frac{f}{f_{\text{св}}} = w \frac{f}{f_{\text{св}}} \frac{H_0 \zeta}{l} = w \frac{V_{\text{ид}} \zeta}{(V_{\text{св}})_{\text{ф}}} = w \frac{V_{\text{ид}} \zeta}{(V_{\text{св}})_{\text{ид}}} = \frac{w}{\epsilon_0} \zeta. \quad (д)$$

Заметим: в литературе нередко представляют истинную скорость в виде  $w/\varepsilon_0$  (или же  $w/\varepsilon$  в других дисперсных системах); на самом деле — это **вертикальная составляющая истинной скорости  $w_n$**  (она также используется для анализа процессов в ряде случаев), а истинная скорость определяется формулой (д).

Эквивалентный диаметр канала был введен при получении уравнения Дарси — Вейсбаха; согласно выражению (ж) из разд. 2.2.2,  $D_e = 4f_{св}/\Pi$ , где  $\Pi$  — смоченный периметр. Преобразуем эту запись  $D_e$ :

$$D_e = \frac{4f_{св}}{\Pi} \frac{l}{l} = \frac{4(V_{св})_{\Phi}}{F_{\Phi}} = \frac{4(V_{св})_{ид}}{F_{ид}}. \quad (е)$$

Для идеального слоя  $(V_{св})_{ид} = fH_0\varepsilon_0$ . Боковую поверхность зерен в нем найдем из следующих соображений. Поверхность одной частицы равна  $\pi d^2$ ; число частиц в единице объема (т.е. в  $1 \text{ м}^3$ )  $N_{уд}$  получим делением их объема в  $1 \text{ м}^3$   $(1 - \varepsilon_0)$  на объем одной частицы  $\pi d^3/6$ :  $N_{уд} = (1 - \varepsilon_0)/(\pi d^3/6)$ . Тогда удельная поверхность частиц в слое составит (указано в СИ):

$$F_{уд} = \pi d^2 N_{уд} = \frac{\pi d^2 (1 - \varepsilon_0)}{\pi d^3/6} = \frac{6(1 - \varepsilon_0)}{d} \text{ (м}^2/\text{м}^3\text{)}. \quad (2.64)$$

Полная боковая поверхность зерен в идеальном слое определится как  $F_{ид} = F_{уд} V_{ид} = \frac{6(1 - \varepsilon_0)}{d} fH_0$ . Подставив теперь значения  $(V_{св})_{ид}$  и  $F_{ид}$  в (е), получим

$$D_e = \frac{4fH_0\varepsilon_0 d}{6(1 - \varepsilon_0)fH_0} = \frac{2}{3} d \frac{\varepsilon_0}{1 - \varepsilon_0}. \quad (ж)$$

Гидравлическое сопротивление  $HC$  будем рассчитывать по формуле Дарси — Вейсбаха (2.17а) *отдельно* для ламинарного и развитого (автомодельного) турбулентного режимов течения газа (жидкости) в неподвижном слое, подставляя в эту формулу найденные выше значения  $l$ ,  $w_n$  и  $D_e$ , выраженные через  $H_0$ ,  $w$ ,  $d$  и  $\varepsilon_0$ .

Подчеркнем: режимы течения в условиях *внешней* задачи гидродинамики характеризуются числами Рейнольдса в написании  $Re \equiv w d \rho / \mu = w d / \nu$ , базирующимися на *расчетной скорости  $w$*  и *диаметре частиц  $d$* . Для *фиктивного* слоя при этом остается прежнее написание  $Re_n \equiv w_n D_e \rho / \mu$ .

**Ламинарный режим течения газа (жидкости) в  $HC$ .** Здесь  $\lambda_r =$   

$$= \frac{64}{Re_n} = \frac{64\mu}{w_n D_e \rho}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\Delta p_n &= \frac{64\mu}{w_n D_e \rho} \frac{l}{D_e} \frac{w_n^2}{2} \rho = \frac{32lw_n\mu}{D_e^2} = \\ &= \frac{32\xi H_0 w \xi \cdot 3^2 (1 - \varepsilon_0)^2}{\varepsilon_0 \cdot 2^2 \varepsilon_0^3 d^2} = \frac{32\xi^2 \cdot 9}{4} \frac{(1 - \varepsilon_0)^2}{\varepsilon_0^3} \frac{w\mu}{d^2} H_0. \quad (3)\end{aligned}$$

Численная теоретическая оценка первого множителя в (3) при  $\xi \approx \sqrt{2}$  дает 144. Обработка многочисленных экспериментальных данных разных авторов приводит к числу 150. С этим значением получается:

$$\Delta p_n = 150 \frac{(1 - \varepsilon_0)^2}{\varepsilon_0^3} \frac{w\mu}{d^2} H_0, \text{ или } \frac{\Delta p_n}{H_0} = 150 \frac{(1 - \varepsilon_0)^2}{\varepsilon_0^3} \frac{w\mu}{d^2}. \quad (2.65)$$

Заметим: как и для всех ламинарных течений, здесь  $\Delta p \sim w^1$ .

**Развитой турбулентный режим.** Анализ проводится по той же канве, но при  $\lambda_r = \text{const}$ :

$$\Delta p_T = \frac{\lambda_r l w_{nr}^2}{D_e \cdot 2} = \frac{\lambda_r \xi H_0 w^2 \xi^2 \rho \cdot 3(1 - \varepsilon_0)}{\varepsilon_0^3 \cdot 2 d \varepsilon_0 \cdot 2} = \frac{\lambda_r \xi^3 \cdot 3}{4} \frac{1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_0^3} \frac{w^2 \rho}{d} H_0. \quad (\text{и})$$

Обработка широкого круга экспериментальных данных приводит к численному значению первого сомножителя в (и), равному 1,75. Тогда

$$\Delta p_T = 1,75 \frac{1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_0^3} \frac{w^2 \rho}{d} H_0, \text{ или } \frac{\Delta p_T}{H_0} = 1,75 \frac{1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_0^3} \frac{w^2 \rho}{d}. \quad (2.66)$$

Заметим: как и для всех турбулентных автомодельных (по Re) течений, здесь  $\Delta p \sim w^2$ .

При изучении *внутренних* задач гидродинамики (течение в трубах, каналах) мы отмечали наличие кризиса течения: при определенных значениях числа Re наблюдается резкое нарушение ламинарного режима. При этом диапазон переходного режима был сравнительно узким: число Re изменялось при переходе от ламинарного к турбулентному режиму примерно в 4 раза (в этом, кстати, причина невысокого интереса исследователей к данному диапазону). При *обтекании тел* потоком (*внешняя* задача гидродинамики) не наблюдается резкого перехода от ламинарного режима к турбулентному, переход осуществляется плавно и постепенно. Это связано с образованием турбулентных вихрей за телом и *постепенным* (плавным) перемещением области отрыва этих вихрей — от тыльных зон тела к лобовым по мере увеличения числа Рейнольдса. Очевидно, что в этом случае границы между режимами будут *условными*; приближение при низких Re к ламинарному режиму и при высоких Re — к турбулентному будет асимптотическим. Иными словами, эти границы устанавливаются в известной мере произвольно — исходя из приемлемой погрешности анализа и расчета. И диапазон переходного режима получается весьма широким: в зависимости от

устанавливаемой погрешности расчета граничные значения чисел  $Re$  различаются на 2—3 порядка. Поэтому формул (2.65) и (2.66) недостаточно; переходный режим представляет значительный практический интерес — нужны формулы для  $\Delta p$  также и для этого диапазона течения.

Задача определения  $\Delta p$  в  $HC$  для переходного режима была решена чрезвычайно просто — путем синтеза *общей формулы, охватывающей все режимы*, включая ламинарный и турбулентный. Было постулировано:  $\Delta p = \Delta p_L + \Delta p_T$ , причем  $\Delta p_L$  и  $\Delta p_T$  записаны в форме (2.65) и (2.66) для гидравлических сопротивлений, приходящихся на единицу высоты слоя:

$$\frac{\Delta p_{HC}}{H_0} = 150 \frac{(1 - \varepsilon_0)^2}{\varepsilon_0^3} \frac{w\mu}{d^2} + 1,75 \frac{1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_0^3} \frac{w^2 \rho}{d}. \quad (2.67)$$

Первое слагаемое отражает здесь влияние вязкостных сил (ламинарная составляющая), второе — инерционных (турбулентная составляющая).

При понижении скорости, как видно из (2.67), уменьшаются оба слагаемых, но первое — *медленнее*; при уменьшении диаметра частиц растут оба слагаемых, но первое — *быстрее*. Таким образом, при снижении значений  $w$  и  $d$ , входящих в  $Re$ , роль первого слагаемого возрастает, а второго — падает, доминирующими становятся силы вязкости, и из (2.67) закономерно получается формула (2.65) для ламинарного режима.

При повышении скорости возрастают оба слагаемых уравнения (2.67), но второе — *быстрее*; при увеличении диаметра частиц уменьшаются оба слагаемых, но второе — *медленнее*. Таким образом, при увеличении  $w$  и  $d$  (значит, и числа  $Re$ ) роль второго слагаемого возрастает, вклад первого — становится малым, доминирующими будут силы инерции, и из (2.67) закономерно получается формула (2.66) для турбулентного режима.

Для числа  $Re = wd/\nu$  приняты (это обусловлено обычной точностью инженерных расчетов) следующие граничные значения  $Re$ : при  $Re < 1$  течение считается ламинарным, при  $Re \geq 1000$  — турбулентным. В диапазоне  $1 < Re < 10^3$ , когда силы вязкости и инерции сопоставимы, течение считают переходным. При этом переход от ламинарного режима к турбулентному, согласно (2.67), происходит плавно: с ростом  $Re$  постепенно повышается вклад второго слагаемого в сравнении с первым\*.

В начале 50-х годов формула, структурно совпадающая с (2.67), но с несколько иными численными коэффициентами (массивы обработанных опытных данных не полностью совпадали) была опубликована М.Э. Аэровым с

---

\* Детальный анализ течения сплошной среды через неподвижный слой приведен в [2].



соавт. Но эта советская работа не была замечена за рубежом. Спустя два года формулу (2.67) независимо получил американский ученый С.Эрган; именно в этом виде ее используют, называя **формулой Эргана**.

Среди других задач гидродинамики неподвижного слоя важнейшей является определение *предела устойчивости НС*, т.е. скорости потока (если он подается снизу), при которой его воздействие на частицы становится столь значительным, что слой переходит в псевдооживленное состояние. Эта скорость (ее иногда называют **первой критической**) является одновременно **скоростью начала псевдооживления**. Ее удобно определять при изучении закономерностей псевдооживленного слоя (разд.2.7.4.).

### 2.7.3. Движущийся слой

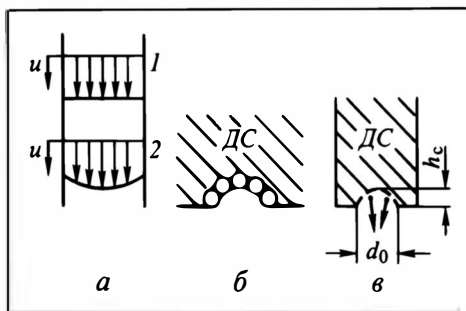
Использование *НС* предопределяет проведение процессов в периодическом режиме по твердому материалу (*ТМ*). Это вполне устраивает технологов, когда процесс реализуется без ввода твердого материала в аппарат и его вывода из аппарата: каталитические процессы (катализатор иногда может неделями и месяцами работать без замены); *ТМ* служит инертным контактом (его не надо заменять) и др. Но при непосредственном участии *ТМ* в технологическом процессе часто требуется его замена — периодическая (с операциями загрузки и выгрузки *ТМ* — это сопровождается непроизводительными затратами времени) или непрерывная, с постоянным вводом и выводом. Такой системой, сходной гидродинамически с *НС*, является **движущийся слой (ДС)**, перемещающийся в аппарате под действием собственного веса. При этом среда (газ, жидкость) движется противотоком или прямотоком по отношению к нисходящему потоку твердого материала. Закономерности *ДС* рассматривают среди *внешних*, а не *смешанных* задач гидродинамики, поскольку основным здесь является взаимодействие среды с твердым материалом (большие поверхности контакта), а не со стенками аппарата.

На рис. 2.33, *а* показано распределение скоростей твердого материала *и* по сечению аппарата — идеальное (1) с выровненным профилем и реальное (2), когда скорость у стенки на 10—15% ниже, чем по оси аппарата (заметим: "концепция прилипания" для движущегося *ТМ* не соблюдается).

При движении *ТМ* по трубе (стояку), аппарату, при его "вытекании" из отверстия возможно образование устойчивого (статического) **свода** из зерен (рис.2.33, *б*) — тогда движение *ТМ* прекращается. Это происходит при отношении диаметров отверстий и зерен менее 5. При больших отношениях (крупные отверстия, мелкие частицы) над отверстием образуется **динамический свод**, с которого частицы "стекают" вниз; здесь движение *ТМ* не прекращается.

Рис. 2.33. Движущийся слой:

*а* — эпюры скоростей твердого материала — идеальная (1) и реальная (2), *б* — образование стабильного свода (к явлению заисания), *в* — расчетная схема расхода твердого материала



**Объемный расход** твердого материала  $V_T$  через отверстие диаметром  $d_0$  определяется из следующих соображений. Динамический

свод над круглым отверстием имеет форму, близкую к эллипсоиду вращения; высота его  $h_c$  зависит от свойств материала и отношения  $d_0/d$ . Для конкретных условий  $h_c \sim d_0$ . Истечение  $ТМ$  с динамического свода происходит под действием напора  $h_c$ ; следовательно, по условиям истечения (см. разд. 2.6.1)

$$V_T \sim \frac{\pi d_0^2}{4} \sqrt{2gh_c} \sim \frac{\pi d_0^2}{4} \sqrt{2gd_0}.$$

Таким образом,  $V_T \sim d_0^{2,5}$ ; значение коэффициента пропорциональности устанавливается экспериментально.

**Массовый расход  $ТМ$**  получается с учетом его насыпной плотности  $G_T = \rho_0 V_T$ . В качестве примера приведем расчетную формулу с эмпирическим числовым коэффициентом (все размерности в СИ):

$$G_T = \frac{1,05}{\operatorname{tg}^2 \gamma_e} \rho_0 d_0^{2,5}, \quad (\kappa)$$

где  $\gamma_e$  — угол естественного откоса (угол с горизонтальной плоскостью в основании конуса, получающегося при медленном высыпании  $ТМ$  из отверстия на горизонтальную плоскость; чаще всего  $\gamma_e \approx 25 \div 40^\circ$ ).

Согласно представленной модели, высота  $H$  движущегося слоя над выпускным отверстием может влиять на объемный и массовый расходы только в редко встречающемся и практически малоинтересном случае  $H < h_0$  (согласно другим моделям — и для несколько больших высот). В реальных технологических ситуациях влияние  $H$  на  $V_T$  и  $G_T$  ощущается весьма слабо.

**Гидравлическое сопротивление  $ДС$**  определяют с помощью формулы Эргана (2.67), имея в виду ряд обстоятельств.

1. Укладка частиц в  $ДС$  более рыхлая, нежели в  $НС$ , поэтому порозность здесь выше; обычно для округлых частиц  $\varepsilon_0 \approx 0,45 \div 0,5$ .

2. Определяющей скоростью в  $ДС$  будет *относительная* скорость потока и твердых частиц (ее называют **скоростью скольжения**): сумма их *абсолютных* скоростей при противотоке (восхо-

двигаясь в движении газа или жидкости и нисходящем — твердого материала) и разность — при прямотоке (нисходящем движении обеих фаз). Пусть средняя абсолютная скорость движения зерен, частиц равна  $u$ ; вертикальная составляющая истинной скорости потока (см. разд. 2.7.2) —  $w/\epsilon_0$ . Тогда в формулу Эргана вместо  $w/\epsilon_0$  следует подставлять  $w/\epsilon_0 + u$  в случае противотока и  $w/\epsilon_0 - u$  в случае прямотока, или  $(w \pm \epsilon_0 u)/\epsilon_0$ .

3. Расчетная высота слоя  $H_0$  не равна высоте рабочей зоны  $H_p$ ; здесь необходимо учитывать путь, пройденный потоком в контакте с ТМ (иначе: число слоев твердых частиц, пересеченных потоком при его движении в рабочей зоне). В случае противотока газ (жидкость) пройдет рабочую зону за время  $\tau = H_p/(w/\epsilon_0)$ ; за это время в рабочую зону поступит дополнительно слой ТМ высотой  $u\tau$ , так что общая длина пути контакта (расчетная для формулы Эргана) составит

$$H_0 = H_p + u\tau = H_p + u \left( \frac{H_p \epsilon_0}{w} \right) = H_p \left( 1 + \frac{u \epsilon_0}{w} \right). \quad (л)$$

В случае прямотока во всех выражениях, использующих формулу (л), вместо суммы в скобках будет стоять разность:  $H_0 = H_p \left( 1 - \frac{u \epsilon_0}{w} \right)$ . Таким образом, при противотоке расчетная длина

$H_0$  будет больше геометрической высоты зоны, для которой рассчитывается  $\Delta p$ , при прямотоке — меньше. В целом расчетная формула для гидравлического сопротивления движущегося слоя имеет вид

$$\frac{\Delta p_{\text{дс}}}{H_p} = \left[ 150 \frac{(1 - \epsilon_0)^2}{\epsilon_0^3} \frac{(w \pm \epsilon_0 u) \mu}{d^2} + 1,75 \frac{1 - \epsilon_0}{\epsilon_0^3} \frac{(w \pm \epsilon_0 u)^2 \rho}{d} \right] \left( 1 \pm \frac{u \epsilon_0}{w} \right). \quad (2.68)$$

При организации процессов с ДС необходимо иметь в виду, что в случае *противотока* движущийся слой прекращает свое нисходящее движение ("зависает") при относительно невысоких скоростях сплошной фазы, часто меньших скорости начала псевдооживления. Расчет **скорости зависания** ведется по эмпирическим формулам.

#### 2.7.4. Псевдооживленный слой

Размер зерен, частиц в псевдооживленном слое обычно на порядок ниже, чем в неподвижном: от нескольких миллиметров до десятых и сотых долей миллиметра.

Псевдооживленный слой (ПС) возникает, когда вес частиц (за вычетом выталкивающей силы) уравнивается силами воз-

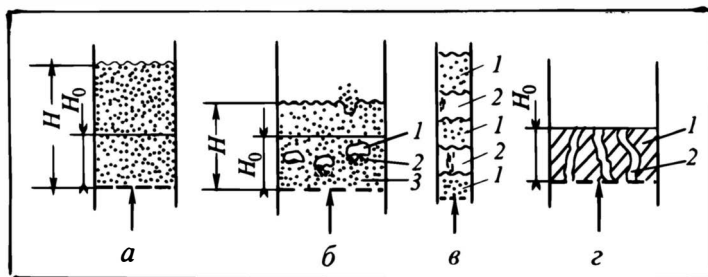


Рис. 2.34. Разновидности псевдооживленных систем:

*а* — однородный слой; *б* — неоднородный слой (кипящий слой): 1 — газовый пузырь, 2 — шлейф пузыря, 3 — плотная ("непрерывная") фаза слоя; *в* — поршневой слой: 1 — поршень твердого материала, 2 — газовая пробка; *г* — слой с каналообразованием: 1 — мало-подвижный твердый материал, 2 — канал (свищ)

действия на них восходящего потока газа или жидкости — тогда слой *расширяется* (растут его высота  $H$  и порозность  $\varepsilon$ ), частицы выходят из контакта друг с другом и получают возможность относительного перемещения. Газ или жидкость, способствующие переходу слоя в псевдооживленное состояние, в этом случае называют **оживляющим агентом (ОА)**. Скорость, при которой слой переходит в псевдооживленное состояние, называется **скоростью начала псевдооживления** и обозначается  $w_0$ . При дальнейшем повышении скорости ОА сверх  $w_0$  слой продолжает расширяться, но вес частиц и силы воздействия на них газового потока остаются уравновешенными, так что выноса частиц из слоя не происходит. Однако при наращивании скорости потока наступает момент, когда воздействие потока превышает вес неподвижной (зависшей) частицы, и она будет уноситься потоком из слоя, аппарата. Скорость, соответствующая этому моменту, называемая **скоростью уноса**  $w_y$ , представляет собой **предел устойчивости** псевдооживленного слоя. Таким образом, **ПС** устойчив в диапазоне скоростей  $w_0 \leq w \leq w_y$ ; ему соответствует диапазон порозностей  $\varepsilon_0 \leq \varepsilon \leq 1$  (причем  $\varepsilon = 1$  отвечает уносу частиц); высота псевдооживленного слоя  $H \geq H_0$ .

Основные *достоинства ПС*: развитая межфазная поверхность, обусловленная малыми размерами частиц — соответственно формуле (2.64); интенсивное перемешивание *ТМ* и выравнивание свойств (температур, концентраций и др.) по объему слоя; интенсивный теплообмен слоя с размещенной в нем поверхностью; простота конструктивного оформления. Основные *недостатки*: истирание и унос частиц (необходимость в ряде случаев весьма сложных улавливающих устройств после аппарата с *ПС*); в ряде случаев недостатком является перемешивание *ТМ*, отчасти и *ОА* (см. гл. 8).

На рис. 2.34 показаны **разновидности** псевдооживленного слоя. **Однородное** псевдооживление (рис. 2.34, *а*) возникает, как

правило, при использовании *жидкости* в качестве *ОА*; здесь при постепенном повышении скорости слой *монотонно* расширяется, частицы хаотически перемещаются в нем, расстояния между частицами статистически одинаковы. При значительно чаще встречающемся *газовом* псевдоожигении возникает **неоднородный ПС** (рис. 2.34, б): при скоростях, превышающих  $w_0$ , в слое образуются газовые пузыри, вовлекающие массы твердого материала в крупномасштабное перемещение — целыми ансамблями (агрегатами, пакетами). Эти пакеты движутся в горизонтальном направлении, когда поднимающийся пузырь расталкивает псевдоожигаемый материал; они движутся вверх вслед за пузырем (в его шлейфе) и вниз между поднимающимися пузырями. Именно в неоднородном **ПС** (он получил название **кипящего слоя**) очень интенсивно перемешивание твердого материала.

В процессе подъема в псевдоожигенном слое пузыри коалесцируют и разрушаются. При достаточной высоте слоя и сравнительно небольшом диаметре аппарата пузырь может занять все его поперечное сечение — возникает **поршневой ПС** (рис. 2.34, в), когда газовые пробки перемежаются по высоте с поршнями зернистого материала. Если материал плохо псевдоожигается (влажный материал; очень мелкие частицы, склонные к слипанию из-за большой поверхностной энергии; частицы по форме сильно отличаются от сферических и т.п.), то в слое образуются **каналы** (рис. 2.34, г). Через них и проходит основная часть газа, а твердый материал между каналами остается непсевдоожигенным; для вовлечения его в псевдоожигение приходится механическим или каким-либо иным способом разрушать эти каналы. Наконец, подвод **механической энергии\*** может частично или полностью заменить воздействие *ОА*; примером здесь может служить **вибропсевдоожигенный** слой, когда частицы перемещаются в аппарате в результате наложения вибрации, или **виброкипящий** — при одновременном наложении вибрации и воздействия потока *ОА*.

Отдельной проблемой (она особо рассматривается в разд. 8.2, 8.7.2) является равномерность распределения потока *ОА* по поперечному сечению слоя. При сильной неравномерности возможно падение скорости потока в некоторых зонах слоя ниже  $w_0$ ; тогда здесь псевдоожигение прекращается, появляются **застойные зоны**, нарушается нормальное течение технологического процесса. Для предотвращения застойных зон повышают гидравлическое сопротивление распределительной решетки (путем уменьшения живого сечения решетки или повышения средней

---

\* О системах с механическим псевдоожигением см. [24].

скорости потока); тогда потоку энергетически выгоднее более равномерно перераспределиться под решеткой и на входе в слой.

В некоторых случаях в аппаратах с псевдооживленным слоем размещают сетки (с достаточно крупными ячейками) или насадку и тому подобные элементы — возникает **заторможенный** псевдооживленный слой. Движение частиц в таком слое существует, но в сравнении со **свободным** псевдооживленным слоем оно затруднено, зато распределение потока *ОА* здесь более равномерно.

Поведение *ПС* во многом сходно с поведением капельной жидкости — говорят об их *аналогии*.\* Псевдооживленный материал текуч (легко перемещается под уклон); его свободная поверхность в поле сил тяжести — горизонтальна; интенсивность теплообмена с расположенной в нем поверхностью — весьма высока (как в жидкостных системах, в отличие от газовых); он следует законам плавания тел. Многие его свойства описываются уравнениями, установленными для жидкостей. Аналогия псевдооживленного слоя и жидкости (в более общем аспекте — дисперсных систем и сплошных сред) обусловлена их статистической общностью: в обоих случаях мы имеем дело с множеством молекул или частиц. Если свойства жидкости изменяются с температурой, то свойства дисперсных систем — со скоростью *ОА*. В этом смысле скорость начала псевдооживления может трактоваться как аналог температуры плавления, а скорость уноса — как аналог температуры кипения; тогда неподвижный слой есть "твердое тело", псевдооживленный — "жидкость", а унос — "паровая фаза". Подход к псевдооживленному слою и другим дисперсным системам по аналогии со сплошными средами весьма плодотворен: он позволяет осуществить с псевдооживленным *ТМ* ряд процессов, успешно реализованных с жидкостными системами; в свою очередь дисперсные системы иногда могут служить удобными теоретическими и экспериментальными моделями сплошных сред.

### *Кривые псевдооживления*

Псевдооживленный слой характеризуют с помощью **кривых псевдооживления**, представляющих собой зависимость сопротивления слоя (перепада давления) от расчетной скорости *w*. На рис.2.35,а изображена **идеальная кривая** для аппарата *постоянно-*го поперечного сечения *f*. На участке  $0 — A$ , где  $w < w_0$ , слой еще неподвижен, кривая  $\Delta p = \Delta p_{nc}(w)$  отвечает формуле Эргана (2.67). В точке *A* воздействие газового потока становится равным весу *ТМ* в аппарате, и слой переходит в псевдооживленное состояние. При дальнейшем повышении скорости в аппарате с  $f = \text{const}$  перепад давления  $\Delta p_{nc}$  в идеале во всем диапазоне псевдооживленного состояния (от  $w_0$  до  $w_y$ ) от скорости не зависит — участок *A — B*. При  $w > w_y$  наблюдается не воспроизводимое во времени падение  $\Delta p$ .

**Реальная кривая псевдооживления** (рис.2.35, б) отличается от идеальной:

— наличием **пика давления** вблизи начала псевдооживления (его причина — необходимость преодоления сцепления частиц

\* Подробно об аналогии между дисперсными системами и сплошными средами см. [7, 8].

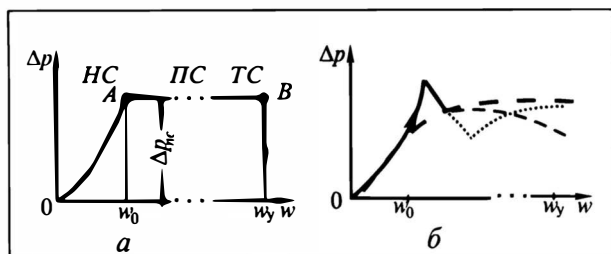


Рис. 2.35. Кривые псевдоожижения:  
а — идеальная, б — реальные

между собой и со стенками аппарата при переходе слоя в псевдоожиженное состояние);

— некоторым отклонением  $\Delta p_{\text{пс}}$  от постоянной величины на участке  $A - B$ ; при росте  $\Delta p_{\text{пс}}$  с  $w$  (пунктир) это чаще всего связано с ликвидацией застойных зон при увеличении  $w$  и более полным вовлечением  $ТМ$  в псевдоожижение; снижение  $\Delta p_{\text{пс}}$  (тонкие штриховые линии) часто обусловлено размещением каких-либо деталей в  $ПС$ ;

— наличием гистерезиса вблизи начала псевдоожижения и в области неподвижного слоя, т.е. несовпадением кривых  $\Delta p(w)$  прямого хода (опыт ведется при увеличении  $w$ ) и обратного хода (опыт при снижении  $w$ ). Дело в том, что при медленном понижении  $w$  в области  $НС$  упаковка частиц — рыхлая (выше порозность), а согласно формуле (2.67) более высоким  $\epsilon_0$  при одинаковых  $w$  отвечает меньшее значение перепада давлений  $\Delta p_{\text{нс}}$ .

Кривые псевдоожижения позволяют наметить основные направления предстоящего анализа: определение сопротивления псевдоожиженного слоя  $\Delta p_{\text{пс}}$  и значений граничных скоростей  $w_0$  и  $w_y$ .

#### Гидравлическое сопротивление псевдоожиженного слоя

Рассмотрим первоначально (рис.2.36, а) общий случай псевдоожижения твердого материала в поле внешних массовых сил, характеризуемых ускорением  $a$  (его направление показано стрелкой). Выделим в  $ПС$  элементарный участок  $dz$ , в пределах которого эффективная (с учетом сил выталкивания) масса  $ТМ$  равна  $dm_3$ . Пусть нормальное к  $a$  сечение слоя  $f = \text{var}$ , закон его изменения по высоте слоя известен. Баланс сил, удерживающих массу  $dm_3$  в состоянии равновесия (псевдоожижения), запишется (соответственно ОБС для контура, совпадающего с элементарным объемом  $f dz$ ):

$$pf - (p + dp)f - (dm_3)a = 0,$$

Рис.2.36. К определению гидравлического сопротивления псевдооживленного слоя:

*a* — общий случай, *б* — псевдооживление в поле сил тяжести

откуда в самом общем виде

$$\Delta p_{\text{пс}} \equiv p_1 - p_2 = \int_{(m_s)} \frac{a}{f} dm_s; \quad (\text{м})$$

знак "минус" учтен при смене пределов интегрирования величины  $dp$ .

В случае аппарата с  $f = \text{const}$  при псевдооживлении в поле сил тяжести (рис.2.36, б) баланс сил может быть наглядно записан для всего псевдооживленного слоя (слой — контур):

$$pf - pf + P_a - P_{\text{тм}} = 0,$$

где  $P_{\text{тм}}$  и  $P_a$  — вес и архимедова сила, действующие на все частицы *ПС*. Разумеется, практически архимедову силу следует учитывать лишь при псевдооживлении жидкостью (или очень тяжелыми газами при высоких давлениях); при псевдооживлении газами в обычных условиях вкладом выталкивающей силы здесь и в последующих соотношениях вполне можно пренебречь.

Из баланса

$$\Delta p_{\text{пс}} \equiv p_1 - p_2 = \frac{P_{\text{тм}} - P_a}{f} = \frac{(P_{\text{тм}})_{\text{э}}}{f}, \quad (2.69)$$

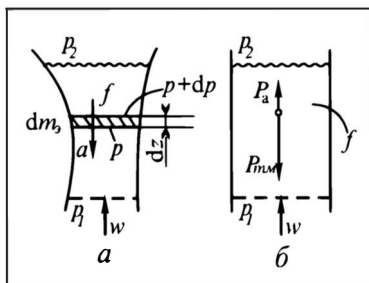
где  $(P_{\text{тм}})_{\text{э}} \equiv P_{\text{тм}} - P_a$  — эффективный вес твердых частиц в слое, т.е. их вес за вычетом выталкивающей (архимедовой) силы.

Совершенно очевидно, что если в общей формуле (м) положить  $f = \text{const}$  и  $a = g$ , то приходим к выражению (2.69).

Во всем диапазоне псевдооживленного состояния (от  $w_0$  до  $w_y$ ) эффективный вес *ТМ* не изменяется; поэтому при постоянном поперечном сечении аппарата  $f$  должно быть  $\Delta p_{\text{пс}} = \text{const}$ , что полностью соответствует горизонтальному участку на кривой псевдооживления. Вместе с тем в аппаратах переменного сечения  $f$  сопротивление псевдооживленного слоя *изменяется* со скоростью: в аппаратах с увеличивающимся снизу вверх значением  $f$  величина  $\Delta p_{\text{пс}}$  снижается, с уменьшающимся  $f$  — возрастает. При выносе части твердых частиц из аппарата с потоком *ОА* вес частиц, поддерживаемых во взвешенном состоянии, уменьшается и соответственно (2.69)  $\Delta p_{\text{пс}}$  падает; при  $P_{\text{тм}} \rightarrow 0$ , естественно,  $\Delta p_{\text{пс}} \rightarrow 0$ .

Для практических расчетов формулу (2.69) удобно преобразовать, выразив: вес твердого материала  $P_{\text{тм}} = \rho_{\text{т}} V_{\text{тг}} = \rho_{\text{т}} g f H (1 - \epsilon)$ , архимедову силу (она равна весу оживающего агента в объеме всех частиц в *ПС*)  $P_a = \rho g f H (1 - \epsilon)$ . Подставив эти значения в (2.69), получим после сокращения на  $f$

$$\Delta p_{\text{пс}} = (\rho_{\text{т}} - \rho) g (1 - \epsilon) H. \quad (2.70)$$





Подчеркнем, что при псевдооживлении в аппаратах постоянного поперечного сечения величины  $\epsilon$  и  $H$  увеличиваются с ростом скорости, но произведение  $(1 - \epsilon)H$  остается неизменным – соответственно  $\Delta p_{\text{пс}} = \text{const}$ .

Выражение (2.70) справедливо для *всего* диапазона псевдооживленного состояния, в том числе и для точки  $A$ , когда  $w = w_0$ . Но для этой точки, принадлежащей одновременно к псевдооживленному и неподвижному слоям,  $\epsilon = \epsilon_0$  и  $H = H_0$ . Тогда из (2.70)

$$\Delta p_{\text{пс}} = (p_T - p)g(1 - \epsilon_0)H_0. \quad (2.70a)$$

Для дальнейших преобразований последнее выражение удобно представить, как форму (2.67), в виде сопротивления, приходящегося на единицу первоначальной высоты слоя:

$$\frac{\Delta p_{\text{пс}}}{H_0} = (p_T - p)g(1 - \epsilon_0). \quad (2.70б)$$

В практических инженерных расчетах гидравлического сопротивления  $ПС$  выражения (2.70, а,б) удобнее, нежели (2.70), так как обычно известны значения порозности  $\epsilon_0$  и высоты неподвижного слоя  $H_0$ .

#### *Скорость начала псевдооживления*

На кривой псевдооживления (рис. 2.35, а) точка  $A$  относится как к псевдооживленному, так и к неподвижному слою. Поэтому перепад давления для этой точки может быть найден как по формуле Эргана (2.67) для  $НС$  при  $w = w_0$ , так и по формуле (2.70, б) для  $ПС$ :

$$\frac{\Delta p_{\text{пс}}(w_0)}{H_0} = \frac{\Delta p_{\text{пс}}}{H_0}. \quad (н)$$

Остается разрешить равенство (н) относительно  $w_0$ . Для этого подставим значения удельных перепадов давлений по указанным выше формулам:

$$150 \frac{(1 - \epsilon_0)^2}{\epsilon_0^3} \frac{w_0 \mu}{d^2} + 1,75 \frac{1 - \epsilon_0}{\epsilon_0^3} \frac{w_0^2 \rho}{d} = (p_T - p)g(1 - \epsilon_0).$$

Сократим обе части равенства на  $(1 - \epsilon_0)$  и изменим  $\mu = \nu \rho$ .

$$\text{Тогда } 150 \frac{(1 - \epsilon_0)}{\epsilon_0^3} \frac{w_0 \nu \rho}{d^2} + \frac{1,75}{\epsilon_0^3} \frac{w_0^2 \rho}{d} = (p_T - p)g.$$

Это равенство может быть решено относительно  $w_0$ . Однако решение целесообразно представить в форме зависимости обобщенных переменных. С целью перехода к ним домножим обе части равенства на  $d^3/(\rho \nu^2)$ :

$$150 \frac{(1 - \epsilon_0)}{\epsilon_0^3} \left( \frac{w_0 \nu \rho}{d^2} \frac{d^3}{\rho \nu^2} \right) + \frac{1,75}{\epsilon_0^3} \left( \frac{w_0^2 \rho}{d} \frac{d^3}{\rho \nu^2} \right) = (p_T - p)g \frac{d^3}{\rho \nu^2}. \quad (о)$$

В первом слагаемом после сокращений в скобке получаем фрагмент, представляющий собой **число Рейнольдса для начала псевдоожождения**  $w_0 d / \nu \equiv Re_0$ ; во втором слагаемом —  $w_0^2 d^2 / \nu^2 = Re_0^2$ . В правой части стоит безразмерный комплекс

$$\frac{g d^3}{\nu^2} \frac{\rho_T - \rho}{\rho} \equiv Ar,$$

называемый **критерием Архимеда**. Его смысл: соотношение сил, препятствующих и способствующих взвешиванию частицы в потоке:  $d^3$  — объем частицы (с точностью до постоянных множителей),  $d^3 \rho_T g$  — ее вес,  $d^3 (\rho_T - \rho) g$  — эффективный ее вес (с учетом выталкивающей силы);  $\nu$  и  $\rho$  отражают влияние сил вязкости и инерции потока, действующего на частицу.

Таким образом,

$$150 \frac{1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_0^3} Re_0 + \frac{1,75}{\varepsilon_0^3} Re_0^2 = Ar, \quad (п)$$

причем первое слагаемое в левой части — ламинарная составляющая формулы, второе — турбулентная (этот смысл слагаемых просматривается из формулы Эргана).

Ранее было указано, что для округлых частиц значение порозности неподвижного слоя (на пороге псевдоожождения)  $\varepsilon_0$  близко к 0,4. С этим значением  $\varepsilon_0$  выражение (п) принимает вид

$$1400 Re_0 + 27,3 Re_0^2 = Ar. \quad (п')$$

Величины, входящие в  $Ar$ , как правило, бывают известны: это свойства *ОА* и *ТМ*. Определив  $Re_0$ , далее находят  $w_0$ .

Решение *квадратного уравнения* (п) возможно обычными алгебраическими методами. Отечественный ученый О.М.Тодес предложил иной подход, позволяющий *линеаризовать* уравнение (п); используем этот путь.

При *развитом (автомодельном) турбулентном режиме* первым слагаемым в (п) можно пренебречь, так что

$$\frac{1,75}{\varepsilon_0^3} Re_0^2 = Ar \quad \text{и} \quad Re_0 = \sqrt{\frac{Ar \varepsilon_0^3}{1,75}}. \quad (р)$$

Подставим это значение  $Re_0$  во *второе* слагаемое в левой части (п) вместо *одного* из сомножителей:

$$150 \frac{1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_0^3} Re_0 + \frac{1,75}{\varepsilon_0^3} Re_0 \sqrt{\frac{Ar \varepsilon_0^3}{1,75}} = Ar. \quad (с)$$

Полученное *линейное уравнение* решим относительно  $Re_0$  с очевидным упрощением:  $\frac{1,75}{\varepsilon_0^3} \sqrt{\frac{\varepsilon_0^3}{1,75}} = \sqrt{\frac{1,75}{\varepsilon_0^3}}$ . Тогда получается

расчетная формула:

$$Re_0 \equiv \frac{w_0 d}{\nu} = \frac{Ag}{150 \frac{1 - \epsilon_0}{\epsilon_0^3} + \sqrt{1,75} \sqrt{Ag}}, \quad (2.71)$$

называемая **формулой Тодеса для скорости начала псевдооживления**.

Если принять конкретное численное значение  $\epsilon_0 = 0,4$ , то формула (2.71) упрощается:

$$Re_0 = \frac{Ag}{1400 + 5,22\sqrt{Ag}}. \quad (2.71a)$$

Первое слагаемое в знаменателях выражений (2.71) и (2.71a) представляет собой ламинарную составляющую, второе — турбулентную. При малых значениях  $Ag$  (мелкие и легкие частицы, высокие вязкости и т.п.) доминирует вклад первого слагаемого, при высоких (крупные и тяжелые частицы и т.п.) — вклад второго.

Полученные решения, естественно, дают точные результаты при высоких значениях  $Ag$  (турбулентный режим) — это предопределено процедурой решения: заменой по (p) и (с), правомерной именно при высоких  $Ag$ . При ламинарном режиме такая замена неправомерна, она вносит ошибку в турбулентную составляющую. Но роль этой турбулентной составляющей при ламинарном режиме мала, так как доминирует ламинарное слагаемое; поэтому в целом и при этом режиме решение остается верным. Некоторое расхождение с точным решением квадратного уравнения (п) характерно для переходного режима (оценки показывают, что максимальное расхождение — на уровне 20% — проявляется при  $Ag \approx 10^4$ ). Заметим, что погрешность расчета, обусловленная неточностями в значениях  $\epsilon_0$ , играет обычно *большую* роль, поскольку  $\epsilon_0$  входит в расчет в высоких степенях. В общем формула Тодеса подтверждена экспериментально и является в настоящее время наиболее надежным расчетным соотношением; в некоторых конкретных случаях она может потребовать корректировки.

Показательно: анализ проведен на основе формулы Эргана, т.е. с использованием подходов и терминов *внутренней* задачи гидродинамики. В результате анализа получен типичный критерий *внешней* задачи —  $Ag$ . Это еще раз указывает на условность вводимых нами классификаций.

### *Скорость уноса*

Скорость оживающего агента  $w_y$ , при которой наступает унос частиц из псевдооживленного слоя, зависит от многих факторов: размера и формы частиц; гранулометрического состава (широты фракции); взаимного влияния частиц (значения порозности  $\epsilon$ ); высоты  $ПС$ ; интенсивности барботажа газовых пузырей; конструктивного оформления аппарата (в частности, высоты и конфигурации надслоевого пространства). Учесть влияние даже от-

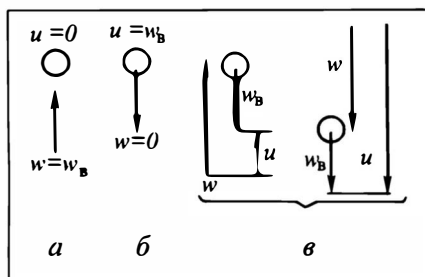


Рис. 2.37. Понятие о скорости витания единичной частицы

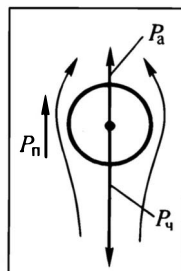


Рис. 2.38. К расчету скорости витания сферической частицы

дельных факторов, а тем более их совокупности — очень трудно. Поэтому упростим задачу и будем искать не скорость  $w_y$ , а ее приближенную оценку: **скорость витания единичной сферической частицы  $w_в$** .

Витанием будем называть состояние частицы, когда ее вес полностью уравновешен силовым воздействием газового (жидкостного) потока. Такая ситуация, вообще говоря, возникает с момента начала псевдооживления, т.е. при  $w \geq w_0$ ; но там речь идет о *стесненном витании*, когда в потоке взвешен *коллектив* частиц; здесь — о *свободном витании единичной частицы*, не взаимодействующей с другими частицами или стенками аппарата.

Равновесие указанных выше сил может быть реализовано в различных вариантах (рис. 2.37):

а) частица поддерживается потоком в неподвижном состоянии,  $u = 0$ ; тогда скорость газа, жидкости равна  $w_в$ ;

б) частица падает в неограниченном объеме неподвижной среды (газа, жидкости); тогда скорость установившегося движения частицы  $u = w_в$ ;

в) различные направления перемещения частицы и движущейся среды; тогда скорость частицы  $u$  относительно потока (скорость скольжения) в идеале равна  $w_в$ . Иными словами, частица во всех случаях *падает в потоке* (если она легче среды, то всплывает в нем) с относительной скоростью  $w_в$ , а направление абсолютного перемещения частицы зависит от знака разности  $(w - w_в)$ .

Анализ целесообразно вести для наиболее простых случаев: (а) или (б). Выберем случай (а), но будем помнить, что результаты анализа справедливы и для всех иных вариантов.

Пусть сферическая частица диаметром  $d$  и плотностью  $\rho_r$  поддерживается в неподвижном состоянии потоком среды, плотность которой  $\rho < \rho_r$ . Тогда скорость среды равна  $w_в$ . Чтобы частица находилась в равновесии, необходимо равенство действующих на нее сил (рис.2.38): веса  $P_ч$ , выталкивающей (архимедовой)  $P_а$  и

воздействия потока среды  $P_n$ . При  $\rho_T - \rho > 0$  очевидно:

$$P_\chi = P_a + P_n. \quad (\tau)$$

Здесь  $P_\chi = (\pi d^3/6) \rho_T g$ ,  $P_a = (\pi d^3/6) \rho g$ . При движении потока среды относительно частицы возникает гидравлическое сопротивление, которое можно трактовать как *местное* и записать в форме (2.30а):  $h_m = \xi \frac{w^2}{2g}$ . Коэффициент  $\xi$  при обтекании тела

называют **коэффициентом лобового сопротивления**. В терминах перепадов давления это сопротивление запишется в виде  $\Delta p_m = \rho g h_m$ , а сила сопротивления (т.е. сила воздействия потока на тело, частицу) — как  $\Delta p_m f$ , где  $f = \pi d^2/4$  — поперечное сечение сферической частицы. Тогда, имея в виду, что скорость, необходимая для поддержания частицы в равновесии, есть скорость витания  $w = w_B$ , имеем

$$P_n = \Delta p_m \frac{\pi d^2}{4} = \xi \frac{w_B^2}{2g} \rho g \frac{\pi d^2}{4} = \xi \frac{w_B^2}{2} \rho \frac{\pi d^2}{4}. \quad (\gamma)$$

При анализе варианта (б) на рис. 2.37 возможен случай, когда частица первоначально находится в неподвижном состоянии, затем она постепенно разгоняется до постоянной скорости  $w_B$ . Если интерес представляет движение частицы на участке разгона, то правую часть исходного соотношения (т) надо дополнить силами инерции:

$$P_{ин} = \frac{\pi d^3}{6} \rho_T \frac{dw}{dt}.$$

Далее этот случай не анализируется.

Подставив теперь значения слагаемых в формулу (т), получим, сократив на  $\pi$ :

$$\frac{d^3}{6} (\rho_T - \rho) g = \xi \frac{w_B^2}{2} \rho \frac{d^2}{4}.$$

Поделив обе части равенства на  $v^2 \rho$ , перейдем к обобщенным переменным (для удобства последующих преобразований поменяем местами левую и правую части равенства):

$$\frac{3\xi}{4} \frac{w_B^2 d^2}{v^2} = \frac{g d^3}{v^2} \frac{\rho_T - \rho}{\rho}. \quad (\phi)$$

Входящий в левую часть (ф) комплекс  $w_B d/v$  представляет собой **число Рейнольдса для скорости витания** —  $Re_B$ ; в правой части — критерий  $Ar$ :

$$\frac{3\xi}{4} Re_B^2 = Ar. \quad (\chi)$$

Значение коэффициента  $\xi$  зависит от режима обтекания сферы потоком. Теоретический анализ показывает\*, что для лами-

---

\* Выражение для  $\xi$  при ламинарном обтекании шара приводится без вывода ввиду его громоздкости.

нарного режима  $\xi = 24/Re$  (в рассматриваемом случае  $Re = Re_b$ ). Для развитого (автомодельного) турбулентного режима  $\xi = \text{const}$ , но о величине этой постоянной нет согласованного мнения (приводятся значения  $\xi$  от 0,43 до 0,50); для дальнейших выводов примем промежуточное (усредненное) значение  $\xi = 0,47$ . Учтем отсутствие кризиса и плавное изменение  $\xi$  при переходе от ламинарного режима к турбулентному; тогда для *любого режима* обтекания сферы потоком

$$\xi = \frac{24}{Re_b} + 0,47. \quad (\text{ц})$$

Очевидно: при малых  $Re_b$  доминирует первое слагаемое, при больших — второе.

Подставим теперь значение  $\xi$  по (ц) в выражение (х):

$$\frac{3}{4} \left( \frac{24}{Re_b} + 0,47 \right) Re_b^2 = Ar,$$

или

$$18Re_b + 0,351Re_b^2 = Ar. \quad (\text{ш})$$

Решение этого квадратного уравнения позволяет найти  $Re_b$  и далее искомую скорость  $w_b$ . Однако и здесь возможна *линеаризация* уравнения (ш) и более простое определение  $Re$  (по канве, показанной выше).

При автомодельном турбулентном режиме первое слагаемое в левой части (ш) пренебрежимо мало, так что

$$0,351Re_b^2 = Ar \quad \text{и} \quad Re_b = \sqrt{Ar/0,351}.$$

Подставим это значение  $Re_b$  во второе слагаемое левой части (ш) вместо *одного* из сомножителей:

$$18Re_b + 0,351Re_b\sqrt{Ar/0,351} = Ar. \quad (\text{ш})$$

Из полученного *линейного* уравнения (ш) найдем  $Re_b$  (с очевидным упрощением  $0,351/\sqrt{0,351} = \sqrt{0,351} = 0,59$ ):

$$Re_b \equiv \frac{w_b d}{v} = \frac{Ar}{18 + 0,59\sqrt{Ar}}. \quad (2.72)$$

Это выражение получило название **формулы Тодеса для скорости витания**. Первое слагаемое в знаменателе представляет собой ламинарную составляющую, второе — турбулентную. В случае ламинарного режима  $18 \gg 0,59\sqrt{Ar}$ , и тогда (2.72) превращается в известную **формулу Стокса**, представленную в безразмерной форме:

$$Re_b = Ar/18. \quad (2.72a)$$

В случае турбулентного режима  $18 \ll 0,59\sqrt{Ag}$ , и получается формула Ньютона:

$$Re_b = (1/0,59)\sqrt{Ag}. \quad (2.726)$$

Для переходного режима оба слагаемых в знаменателе (2.72) сопоставимы по величине. При возрастании  $Re_b$  режим обтекания частицы потоком плавно переходит от ламинарного к турбулентному.

Сравнение с экспериментальными данными показывает, что формула Тодеса (2.72) является надежным расчетным соотношением для витания шарообразных (и близких к ним по форме) частиц. Скорость витания равновеликих (того же объема и веса) несферических частиц, зерен — *меньше*, нежели сферических, и зависит от формы частиц. Вычисляется она с использованием поправочных коэффициентов (как правило — эмпирических) типа фактора формы  $\phi_s$ .

Располагая формулами для  $w_0$  и  $w_b$ , можно оценить *скоростной диапазон псевдооживленного состояния*. Воспользуемся для этого формулами (2.71a) и (2.72):

$$\frac{w_b}{w_0} = \frac{Re_b}{Re_0} = \frac{1400 + 5,22\sqrt{Ag}}{18 + 0,59\sqrt{Ag}}. \quad (2.73)$$

Если витание (начало псевдооживления — тем более) происходит в условиях *ламинарного* режима, то  $w_b/w_0 = 1400/18 \approx 78$ ; если началу псевдооживления отвечает *турбулентный режим* (витанию — тем более), то  $w_b/w_0 = 5,22/0,59 \approx 8,8$ . Таким образом, при ламинарном режиме (мелкие и легкие частицы, соответствующие свойства *ОА*) диапазон псевдооживленного состояния весьма широк: после начала псевдооживления скорость можно повышать в десятки раз, прежде чем наступит унос. Для турбулентного режима этот диапазон существенно *уже*.

#### *Стесненное витание и расширение псевдооживленного слоя*

В диапазоне от  $w_0$  до  $w_y \approx w_b$  частицы находятся в состоянии **стесненного витания**, причем порозность слоя изменяется от  $\epsilon_0$  при  $w_0$  до 1 при  $w_b$ . Каждой скорости  $w_0 \leq w \leq w_b$  отвечает своя порозность  $\epsilon_0 \leq \epsilon \leq 1$ , зависящая, разумеется, также от свойств твердого материала и оживающего агента. Связь  $\epsilon$  и  $w$  необходимо знать в различных технологических ситуациях; в гидродинамическом плане знание  $\epsilon$  необходимо для расчета высоты и объема псевдооживленного слоя в рабочем состоянии (по известным исходным характеристикам  $\epsilon_0$ ,  $H_0$ ,  $V_0$ ).

На основе связей, установленных в разд. 2.7.1, запишем объем *собственно* твердого материала (при переходе от неподвижного состояния слоя к псевдооживленному он, естественно, не изменяется):

$$V_T = V_0(1 - \varepsilon_0) = V(1 - \varepsilon).$$

Отсюда рабочий объем *ПС*

$$V = V_0 \frac{1 - \varepsilon_0}{1 - \varepsilon}. \quad (\varepsilon)$$

Для аппаратов *постоянного поперечного сечения*  $V = fH$ ,  $V_0 = fH_0$ , и тогда

$$H = H_0 \frac{1 - \varepsilon_0}{1 - \varepsilon}. \quad (\text{ю})$$

При известных  $V_0$  (или  $H_0$ ) и  $\varepsilon_0$  (например,  $\varepsilon_0 \approx 0,4$ ) формулы (э) и (ю) приобретают расчетный характер, если известна рабочая порозность  $\varepsilon$ .

**Порозность при однородном псевдооживлении.** Для определения  $\varepsilon$  рассмотрим совместно два выражения: (п), справедливое в момент начала псевдооживления при порозности  $\varepsilon = \varepsilon_0 = 0,4$ , и (ш), записанное для скорости свободного витания, т.е. при  $\varepsilon = 1$ :

$$1400Re_0 + 27,3Re_0^2 = Ag, \quad \varepsilon_0 = 0,4, \quad (\text{п}')$$

$$18Re_B + 0,351Re_B^2 = Ag, \quad \varepsilon = 1. \quad (\text{ш})$$

Можно констатировать сходство в структурах обеих формул, что отражает сходство в физике рассматриваемых явлений. В самом деле, в обоих случаях речь идет об *однородных* системах (отсутствуют дискретные образования — пузыри): неподвижный слой — в начальный момент псевдооживления; витание единичной сферической частицы. Но в случае единичной частицы мы имеем дело со *свободным витанием*, а в случае псевдооживления — со *стесненным*, причем в момент начала псевдооживления — с *самым стесненным*. Сходство в предельных ситуациях витания проявляется еще ярче (количественно!) при сопоставлении численных коэффициентов:  $1400/18 = 27,3/0,351 = 77,78$ . Если все слагаемые в формуле (п') поделить на 77,78, то получим

$$18Re_0 + 0,351Re_0^2 = 0,01286Ag, \quad \varepsilon_0 = 0,4. \quad (\text{п}''')$$

Различие в написании правых частей формул (ш) и (п''') обусловлено различием в порозностях. Можно предположить, что аналогичную структуру имеют формулы в случае стесненного витания для всех *однородных* псевдооживленных систем при любой порозности  $\varepsilon$  в промежутке от 0,4 до 1. Только в правой части в качестве множителя при  $Ag$  будет стоять некая функция



от порозности  $f(\epsilon)$ , принимающая значения 1 при  $\epsilon = 1$  и 0,01286 при  $\epsilon = \epsilon_0 = 0,4$ ;

$$18\text{Re} + 0,351\text{Re} = \text{Ar} f(\epsilon), \quad (\text{я})$$

где  $\text{Re} = wd/\nu$  базируется на скорости однородного псевдооживления (стесненного витания)  $w$ , причем  $w_0 \leq w \leq w_B$ .

В качестве искомой функции резонно выбрать  $f(\epsilon) = \epsilon^n$ , поскольку в этом случае  $f(\epsilon)$  становится равной 1 при любом значении  $n$ . А численное значение  $n$  отыскивается из условия  $0,4^n = 0,01286$ , откуда  $n = 4,75$ . Тогда

$$18\text{Re} + 0,351\text{Re}^2 = \text{Ar}\epsilon^{4,75}; \quad (\text{аа})$$

из этого соотношения определяется порозность однородного псевдооживленного слоя с известными характеристиками твердого материала и оживающего агента (критерий  $\text{Ar}$ ) при заданной скорости оживающего агента (критерий  $\text{Re}$ :  $\text{Re}_0 \leq \text{Re} \leq \text{Re}_B$ ):

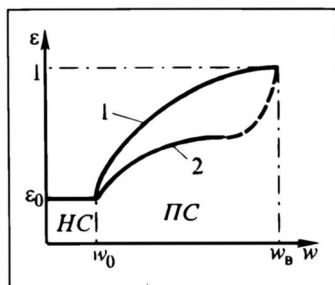
$$\epsilon = \left( \frac{18\text{Re} + 0,351\text{Re}^2}{\text{Ar}} \right)^{0,21}, \quad (2.74)$$

причем  $0,21 = 1/4,75$ .

Формула (2.74) показала хорошее согласие с рядом эмпирических формул, полученных на основе широкого эксперимента.

Выражение (аа) может быть использовано для решения обратной задачи — определения скорости, необходимой для поддержания заданной порозности однородной псевдооживленной системы с известными характеристиками твердого материала и оживающего агента (т.е. с известным критерием  $\text{Ar}$ ). С этой целью удобно провести линеаризацию квадратного уравнения (аа) — по канве, реализованной для  $\text{Re}_0$  и  $\text{Re}_B$ . Предоставляем возможность читателю проделать этот путь самостоятельно; приведем результат:

$$\text{Re} = \frac{\text{Ar}\epsilon^{4,75}}{18 + 0,59\sqrt{\text{Ar}\epsilon^{4,75}}}. \quad (2.75)$$



Характер изменения  $\epsilon$  с  $\text{Re}$  соответственно формуле (2.75) иллюстрируется на рис.2.39 (кривая 1).

Формула (2.75) вполне пригодна для определения скорости стесненного витания  $w$  при известных размерах и других свой-

Рис.2.39. Расширение псевдооживленного слоя:

1 — однородное псевдооживление, 2 — неоднородное псевдооживление

ствах частиц. Однако при необходимости определения размера  $d$  частиц, которые будут при известной скорости  $w$  однородно псевдоожигены с заданной порозностью  $\epsilon$ , возникают затруднения, поскольку диаметр частиц  $d$  входит как в  $Re$ , так и в  $Ag$ . В этом случае удобно безразмерное число Лященко  $Ly \equiv Re^3/Ag = w^3\rho/[g\nu(\rho_T - \rho)]$ , содержащее  $w$  и не содержащее  $d$ . В общем случае целесообразно использовать связь чисел  $Ly$  и  $Ag$  с порозностью  $\epsilon$ : тогда при известном размере твердых частиц ( $Ag$ ) и  $\epsilon$  легко найти  $Ly$  и скорость стесненного витания  $w$ , как и наоборот — по  $\epsilon$  и  $w$  ( $Ly$ ) определить  $Ag$  и размер частиц  $d$ . Аналитическая связь  $Ag$ ,  $Ly$  и  $\epsilon$  для однородного псевдоожигения (стесненного витания) весьма громоздка. Графически эта связь представлена на рис. 2.40.

Особо подчеркнем — вопреки ошибочным указаниям в ряде монографий и даже учебников\*: формулы (2.74) и (2.75) относятся *только к однородному псевдоожигению*. Для определения расширения неоднородных псевдоожигенных систем они *непригодны*.

Формулы (2.74), (2.75) и производные от них применяются не только для расчета процессов с *ЛС*; они в равной мере могут быть использованы в расчетах процессов *осаждения* в поле массовых сил (см. разд. 5.1.2).

Интересно, что скорость стесненного витания  $w_c$  (рассчитана на *полное* сечение аппарата) и *абсолютная* скорость стесненного осаждения частиц  $u$  в покоящейся жидкости равны между собой. Это равенство требует пояснения. Вертикальная составляющая истинной скорости жидкости относительно витающих частиц (скорость *скольжения*) запишется как  $w_c/\epsilon$ . Равенство  $w_c = u$  справедливо в том случае, когда оседающие частицы *накапливаются* на дне сосуда: в своем нисходящем движении они вытесняют соответствующее количество жидкости, создавая восходящий ее поток. Если рассматривать  $1\text{ м}^2$  поперечного сечения аппарата, то такой поток составляет  $u(1 - \epsilon)$ . Истинная скорость этого потока в просветах между частицами равна  $u(1 - \epsilon)/\epsilon$ . Тогда скорость скольжения (она при осаждении частиц должна оставаться равной  $w_c/\epsilon$ ) будет получаться как сумма скоростей нисходящего движения частиц  $u$  и восходящего движения жидкости  $u(1 - \epsilon)/\epsilon$ :

$$\frac{w_c}{\epsilon} = u + \frac{u(1 - \epsilon)}{\epsilon} = \frac{u\epsilon + u - u\epsilon}{\epsilon},$$

откуда  $u = w_c$ . Разумеется, если твердые частицы по мере поступления на дно аппарата непрерывно выводятся из него, то восходящего потока вытесняемой жидкости не будет. В такой ситуации, при сохранении скорости скольжения  $w_c/\epsilon$ , равенство  $u = w_c$  неправомерно. В покоящейся жидкости при непрерывном выводе из аппарата оседающих твердых частиц, очевидно,  $u = w_c/\epsilon$ .

**Порозность при неоднородном псевдоожигении.** Для практически более интересных (чаще встречающихся) *неоднородных* псевдоожигенных систем порозность, как правило, заметно ниже, чем для однородных (см. кривую 2 на рис. 2.39).

---

\* См. [13, 17, 20] и др.

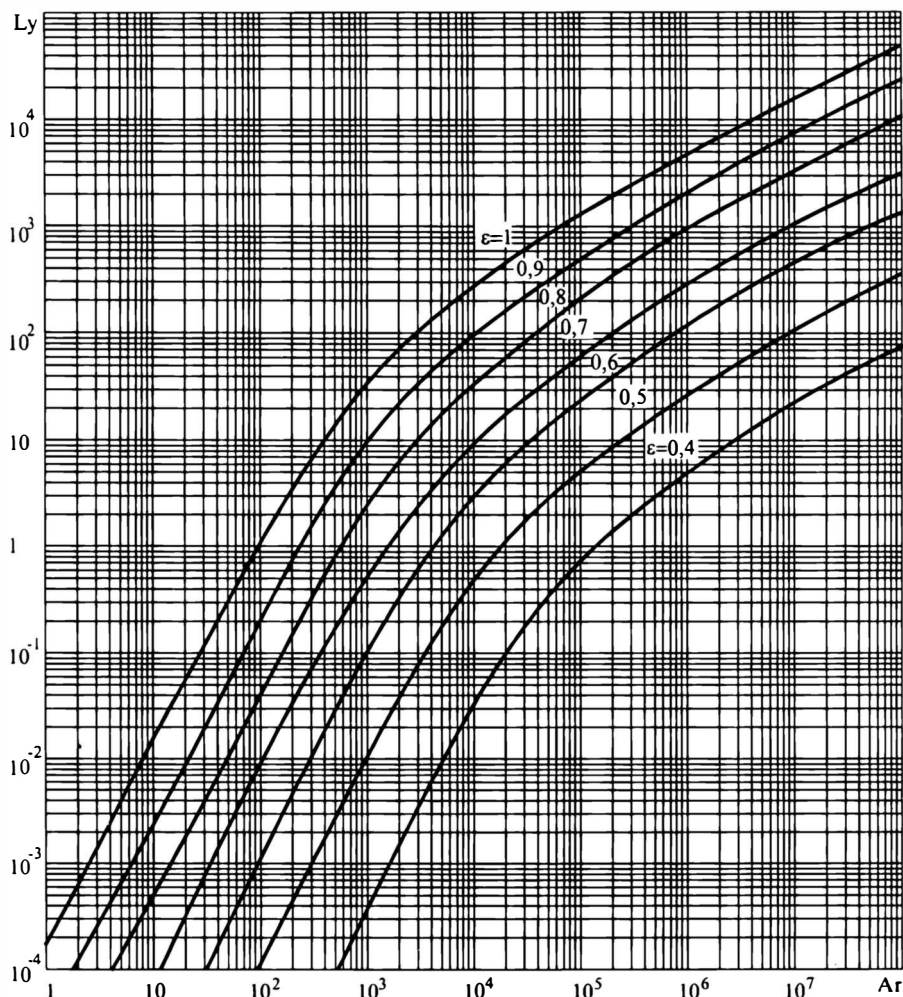


Рис.2.40. Кривые однородного расширения псевдооживленного слоя  $Ly = f(Ar)$

Можно приближенно считать, что весь избыток газа, сверх необходимого для начала псевдооживления, проходит через слой в виде пузырей. При этом в подавляющем большинстве случаев газовые пузыри поднимаются в слое с заметно большей скоростью, нежели остальной газ, движущийся в просветах между частицами. Это означает, что пузыри быстро "проскакивают" через неоднородный псевдооживленный слой, так что одновременно в нем содержится меньше газа, чем в однородном при тех же объемных расходах газа, — средняя порозность получается ниже. Для неоднородного псевдооживленного слоя, работающего без интенсивного уноса,  $\epsilon$  редко превышает 0,7 — 0,75; только вблизи скорости витания она быстро приближается к 1.

Рис. 2.41. Фонтанирующий слой:

1 — зона пневмотранспорта, 2 — зона псевдооживления, 3 — зона движущегося слоя

Теоретически возможно получить расчетные формулы для  $\epsilon$  при неоднородном псевдооживлении. Они выглядят весьма просто, но содержат такие трудноопределимые величины, как размеры и скорость подъема газовых пузырей, долю газа в виде пузырей и др. Поэтому в настоящее время используются эмпирические формулы. Приведем для ориентировки одну из них (для частиц плотностью  $\rho_T \geq 1000 \text{ кг/м}^3$ ):

$$\epsilon \approx 1,2\epsilon_0 \left( \frac{w}{w_0} \right)^k, \quad (2.76)$$

где  $k = 0,08$  для сравнительно мелких частиц ( $Ar \leq 3 \cdot 10^3$ );  $k = 0,20$  для крупных частиц ( $Ar \geq 3 \cdot 10^6$ ), а для частиц промежуточных размеров  $k = 0,08 + 4 \cdot 10^{-8} Ar$ .

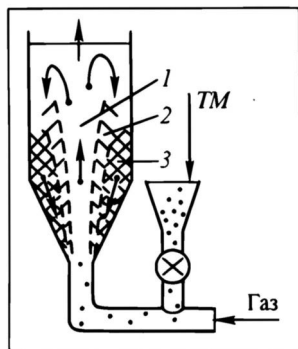
Рассмотренные выше дисперсные системы с твердой фазой не исчерпывают многообразия их *модификаций*. Встречаются, например, системы, включающие сразу несколько из рассмотренных выше. Примером может служить **фонтанирующий слой** (рис.2.41), где сосуществуют *ДС*, *ПС* (при неудачной организации процесса — больших углах конуса — и *НС*), а также *транспортная система ТС* (в приосевом канале), рассматриваемая в разд.2.8.2.

## 2.7.5. Образование и движение жидких капель и газовых пузырей

Диспергирование жидкости и газа в целях увеличения межфазной поверхности контакта широко используется в химической технологии — при проведении процессов абсорбции, ректификации, экстракции и др. Среди гидродинамических проблем наиболее важными являются проблемы образования дисперсной фазы (размера ее элементов) и движения ее в сплошной среде (скорости подъема или падения). Ввиду сложности строгого анализа ниже рассмотрим некоторые упрощенные подходы к решению упомянутых проблем.

### Оценка размеров элементов дисперсной фазы

Рассмотрим диспергируемый поток жидкости или газа при истечении из сопла в сплошную среду (рис.2.42) при *невысоких* скоростях истечения  $w$ . В общем случае одна жидкость (ее плотность  $\rho_d$ ) должна быть диспергирована в другой (плотностью  $\rho_c$ ); пусть для определенности  $\rho_d > \rho_c$  и более тяжелая жидкость диспергируется (распределяется) в более легкой — этому случаю соответствует рис.2.42,а. Диспергирование происходит при истечении тяжелой жидкости из сопла диаметром  $d$ , причем ско-



рость жидкости в нем  $w$ . Требуется определить диаметр  $D$  капли (будем считать ее сферической) в момент отрыва от сопла.

Диаметру  $D$  отвечает равновесие следующих сил: веса капли  $P_k$  (разумеется, с учетом выталкивающей силы со стороны сплошной среды  $P_a$ ), инерции движущегося потока тяжелой жидкости  $P_{\text{и}}$ , сопротивления при выходе диспергируемой фазы из сопла  $P_r$  и поверхностного натяжения  $P_{\sigma}$ . Запишем баланс сил в форме (1.8в) для направленной вниз вертикальной оси:

$$P_k + P_{\text{и}} - P_a - P_r - P_{\sigma} = 0. \quad (\text{аб})$$

С записью двух сил — веса и архимедовой — мы уже встречались:  $P_k = \frac{\pi D^3}{6} \rho_d g$ ;  $P_a = \frac{\pi D^3}{6} \rho_c g$ . Силу инерции получим как

частное от деления мощности потока дисперсной фазы (секундной кинетической энергии) в патрубке  $\frac{Gw^2}{2} = \frac{\pi d^2}{4} \rho_d w \frac{w^2}{2}$  на

скорость жидкости в нем  $w$ :  $P_{\text{и}} = \frac{\pi d^2}{4} \rho_d \frac{w^2}{2}$ . Сила сопротивления

$P_r$  запишется соответственно уравнениям разд.2.6.1 — через коэффициент местного сопротивления  $\xi$ :  $h_m = \xi \frac{w^2}{2g}$ ;  $\Delta p_m =$

$= h_m \rho_d g$ ;  $P_r = \Delta p_m \frac{\pi d^2}{4}$ ; в целом  $P_r = \xi \frac{w^2}{2} \rho_d \frac{\pi d^2}{4}$ . Наконец,

сила поверхностного натяжения, если бы она действовала по периметру среза сопла, соответственно выражению (1.7) составила бы  $P_{\sigma} = \sigma \pi d$ . Реально вблизи отверстия перед отрывом капли образуется более тонкая перемычка (**шейка**) диаметром  $\psi d$  (по экспериментальным данным  $\psi \approx 2/3$ ) — именно здесь, а не на срезе сопла действуют силы поверхностного натяжения в момент отрыва. Поэтому при невысоких скоростях  $w$  вместо  $\pi d$  более точно подставлять  $\pi d \psi$ . Итак,

$$\frac{\pi D^3}{6} \rho_d g + \frac{\pi d^2}{4} \rho_d \frac{w^2}{2} - \frac{\pi D^3}{6} \rho_c g - \xi \frac{w^2}{2} \rho_d \frac{\pi d^2}{4} - \pi d \psi \sigma = 0 ,$$

откуда отрывной диаметр капли

$$D = \sqrt[3]{\frac{6d}{(\rho_d - \rho_c)g} \left[ \sigma \psi - \frac{\rho_d w^2 d (1 - \xi)}{8} \right]}. \quad (2.77)$$

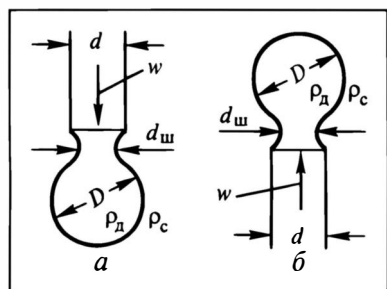


Рис.2.42. К модели диспергирования каплей и пузырей

Аналогичным образом рассчитывается отрывной диаметр капли при распылении снизу более легкой жидкости ( $\rho_d < \rho_c$ ) вверх в более тяжелую сплошную (рис.2.42, б). Баланс сил вдоль направленной вниз вертикальной оси здесь имеет вид

$$P_K + P_\sigma + P_T - P_A - P_H = 0. \quad (\text{ав})$$

Подставив значения всех сил (выражения для них даны выше), найдем

$$D = \sqrt[3]{\frac{6d}{(\rho_c - \rho_d)g} \left[ \sigma\psi - \frac{\rho_d w^2 d(1 - \xi)}{8} \right]}. \quad (2.77a)$$

В выражениях (2.77) и (2.77a) при истечении жидкости в газ или наоборот — плотностью газа ( $\rho_c$  в первом случае,  $\rho_d$  — во втором) можно пренебречь в сравнении с плотностью жидкости; расчетные формулы несколько упрощаются. Значения  $\xi$  при диспергировании жидкости в газовое пространство близки к 0,5, в другую жидкость — несколько выше. В случае очень низких  $w$  (медленное образование капель, пузырей) вкладом инерционных сил, отвечающих кинетической энергии диспергируемого потока, можно пренебречь; невелики и потери энергии на местное сопротивление. Тогда (например, при  $\rho_d > \rho_c$ )

$$D = \sqrt[3]{\frac{6d\sigma\psi}{(\rho_d - \rho_c)g}}. \quad (2.776)$$

Выражения (2.77), (2.77a) правомерно использовать при  $\sigma$  (или  $\psi\sigma$ ) заметно больше  $\rho_d w^2 d/8$ . Если же выражения в квадратных скобках в упомянутых формулах приближаются к нулю, то начинают действовать иные механизмы диспергирования, отвечающие иным физическим и математическим моделям; нередко здесь необходимо привлечение экспериментальных данных для оформления теоретических подходов в расчетные формулы. Рассмотрение этих подходов и моделей выходит за пределы курса\*.

\* См. сноску на следующей странице.

По найденным размерам капель, пузырей ( $D$ ) легко определить их частоту отрыва  $f_4$  от кромки сопла. Для секундного объемного расхода диспергируемой фазы  $V$

$$f_4 = \frac{V}{\pi D^3 / 6} = \frac{6V}{\pi D^3}. \quad (\text{ар})$$

Рассмотренные выше подходы дают удовлетворительные оценки при диспергировании из одиночного сопла, т.е. при отсутствии влияния капель и пузырей, диспергированных из соседних сопел.

*О скорости движения капель и пузырей в сплошной среде\**

Приближенная оценка скорости движения жидких капель в другой жидкости (не смешивающейся с диспергируемой) или в газе, как и движения газовых пузырей в жидкости, возможна на основе приведенных выше соотношений для твердых сфер (см. разд. 2.7.4). Однако эксперимент показывает удовлетворительное согласие с такими оценками только при достаточно малых размерах капель или газовых пузырьков. Отличие скоростей движения капель и пузырей от рассчитанных по модели твердых шариков обусловлено двумя взаимосвязанными причинами:

- возникновением циркуляции внутри капель и пузырей;
- деформацией формы капель и пузырей, т.е. отличием (нередко весьма существенным) их формы от сферической.

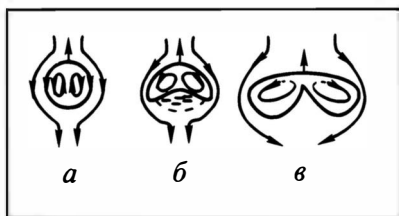
На рис. 2.43, а демонстрируются явления, сопутствующие всплыванию сферической капли (пузыря) в неограниченном объеме более тяжелой сплошной среды. При трении поверхностных слоев капли о сплошную среду они перемещаются в направлении движения этой среды относительно капли, вовлекая в циркуляционное движение жидкость внутри капли (газ внутри пузыря), — в соответствии с направлением циркуляционных токов (см. рис. 2.43, б). Вторая причина деформации обусловлена "стремлением" капли, пузыря двигаться в сплошной среде в режиме *наименьшего* гидравлического сопротивления. В самом деле: увеличение поперечного размера капли при деформации, конечно, повышает ее сопротивление, но сопутствующее существенное уменьшение скорости движения (а степень ее влияния высока — см. разд. 2.7.4) в значительной мере его снижает. В условиях деформируемости капли, пузыря на скорость их движения в сплошной среде может оказывать заметное влияние поверхностное натяжение на границе дискретного элемента и среды. Силы поверхностного натяжения стремятся минимизировать поверхность этого элемента, а значит сохранить его сферическую форму. В качестве конкурирующего фактора при малых скоростях скольжения выступают силы вязкости. Соотнесе-

---

\* Подробно эти вопросы рассмотрены в [6, 11, 15, 16].

Рис. 2.43. Движение капель и пузырей:

*a* — сферическая капля, *б* — деформированная капля, *в* — крупная капля в стадии разрушения



ние сил вязкости и поверхностного натяжения приводит к обобщенной переменной  $\eta d/\sigma$ . При более высоких скоростях конкурируют силы инерции и поверхностного натяжения, им отвечает обобщенная переменная  $\rho w^2 d/\sigma \equiv We$ , называемая **критерием Вебера**. (Заметим: безразмерное число  $\eta d/\sigma$  можно представить как отношение  $We/Re$ .)

Разумеется, при доминировании какого-либо из конкурирующих факторов приведенные обобщенные переменные вырождаются.

Циркуляция слабо выражена в мелких (порядка 1 мм и менее) каплях и пузырях из-за низкой относительной скорости дисперсной и сплошной фаз, а также из-за существенного внутреннего сопротивления циркуляции внутри мелкой капли. Деформация мелкой капли дополнительно подавлена еще действием сил поверхностного натяжения. По указанным причинам мелкие капли и пузыри движутся в сплошной среде со скоростями, достаточно близкими к рассчитанным по формуле (2.72). Однако при увеличении размеров капель и пузырей влияние внутренней циркуляции возрастает, деформация выражена все заметнее. В этих случаях необходимо вносить поправки в выражения для коэффициента лобового сопротивления  $\xi$  (см. формулу (ц) в разд. 2.7.4). В результате совместного действия рассмотренных эффектов скорость движения капель и пузырей относительно сплошной среды возрастает — по приближенным оценкам в  $\approx 1,5$  раза в сравнении с недеформируемыми твердыми шариками.

При движении весьма крупных капель и пузырей изменяется механизм их обтекания сплошной средой. Применительно к этому случаю теоретический анализ\* приводит к вполне надежной (подтвержденной опытами) зависимости для скорости  $u$  подъема капель, пузырей, у которых форма их лобовой части близка к сферической. Например, при  $\rho_d < \rho_c$

$$u = k \sqrt{g d_e \left( 1 - \frac{\rho_d}{\rho_c} \right)}, \quad (2.78)$$

где  $d_e$  — эквивалентный диаметр капли, пузыря, равный диаметру равновеликой сферы: при объеме деформированного дискретного элемента  $V = \pi d_e^3/6$

\* Анализ базируется на представлениях о потенциальном (безвихревом) течении сплошной среды в окрестности дискретного образования. Рассмотрение таких течений — за пределами курса (см. [4, 11, 18, 25]).



очевидно  $d_e = \sqrt[3]{6V/\pi}$ . Коэффициент пропорциональности  $k$  теоретически равен 0,711; опытам лучше соответствует  $k \approx 0,75$ .

При движении *газовых пузырей* в жидкости  $\rho_d \ll \rho_c$ , и выражение (2.78) упрощается:

$$u = k \sqrt{gd_e}. \quad (2.78a)$$

При движении *весьма крупных* капель и пузырей интенсивная внутренняя циркуляция, обусловленная высокими скоростями скольжения, может привести к сильной деформации и разрушению капли, пузыря — картина такого разрушения представлена на рис. 2.43, в.

Рассмотренные выше положения относятся к движению одиночных капель и пузырей. При совместном движении *множества* ("коллектива") капель и пузырей наблюдается их гидродинамическое взаимодействие. Здесь закономерности движения изменяются, общий эффект аналогичен стесненному витанию твердых частиц: движение капель и пузырей относительно сплошной среды замедляется. Одновременно ситуация осложняется постоянной коалесценцией и разрушением дискретных образований и их деформацией.

## 2.8. ДВУХФАЗНЫЕ ТЕЧЕНИЯ

### 2.8.1. Общие положения

В химической технологии многие процессы проводятся при движении двух- и многофазных потоков в аппаратах и трубопроводах. Здесь преследуются чисто транспортные цели или ведется технологический процесс, либо реализуется сочетание того и другого. При изучении и инженерных расчетах таких систем необходимо учитывать взаимодействия как внутри потока (между фазами), так и двухфазной системы со стенками канала. Математические описания течения двух- и многофазных систем — **смешанная задача гидродинамики** — весьма сложны из-за необходимости одновременного учета взаимодействий между фазами и со стенками, флуктуаций концентраций диспергированной фазы в рабочей зоне, различий в размерах, форме, а иногда и плотности диспергированных элементов. Дополнительный осложняющий момент: гидродинамические характеристики движения одной фазы зависят от характеристик движения другой фазы (других фаз). По указанным причинам теоретическое рассмотрение многофазных систем обычно приходится вести с существенными упрощениями; нередко модели строятся с привлечением экспериментальных данных; зачастую использу-

ется аппарат теории размерностей, а иногда и чисто эмпирические соотношения.

**Взаимное перемещение фаз** в аппарате возможно в одном и том же направлении (тогда это **прямоток** — **восходящий** или **нисходящий**), в противоположных направлениях (**противоток**) либо каким-нибудь иным образом (например, **перекрестным током**). Все эти схемы при простейших описаниях подразумевают движение фаз в режиме **идеального вытеснения**. Можно представить себе течение, когда в результате интенсивнейшего перемешивания удельные и интенсивные характеристики выравнены по объему рабочей зоны — говорят о движении в режиме **идеального перемешивания** (в пределах какой-либо фазы или для системы в целом). Возможно и течение фаз с заметным, но неполным выравниванием характеристик — такое движение анализируется в главе 8.

**Скорости движения сплошной фазы**  $w$  и стесненного витания  $w_c$  удобно рассчитывать на поперечное сечение *незаполненного* аппарата, как это было сделано при рассмотрении неподвижного, псевдооживленного и движущегося слоев в разд.2.7. Движение элементов **дискретной фазы** характеризуют **абсолютной скоростью** “ $u$ ” (*относительно неподвижного наблюдателя*). **Относительная скорость** движения фаз — **скорость скольжения** — в идеале равна абсолютной скорости стесненного витания  $w_c/\epsilon$  (строже — ее составляющей в направлении двухфазного течения). Существует очевидная связь между абсолютными скоростями  $w/\epsilon$ ,  $u$  и  $w_c/\epsilon$ ; приведем ее для случая более тяжелой дисперсной фазы в сравнении со сплошной:

$$\begin{aligned} \text{— для восходящего прямотока} \quad u &= \frac{w}{\epsilon} - \frac{w_c}{\epsilon}; \\ \text{— для нисходящего прямотока} \quad u &= \frac{w}{\epsilon} + \frac{w_c}{\epsilon}; \\ \text{— для противотока} \quad u &= \frac{w_c}{\epsilon} - \frac{w}{\epsilon}. \end{aligned} \quad (a)$$

Среди характеристик **проточных** двухфазных систем ( $HC$ , а также  $ПС$  без ввода и вывода твердого материала не являются проточными по дисперсной фазе) выделим их **удерживающую способность**, т.е. объемную концентрацию дисперсной фазы  $\beta$ . Удерживающая способность (еще ее называют **задержкой** при диспергировании жидкости или твердой фазы в жидкости и **газосодержанием** при диспергировании газа) и порозность связаны одна с другой просто:  $\beta = 1 - \epsilon$ .

Величина задержки может быть оценена из следующих соображений. Пусть в аппарат с поперечным сечением  $f$  подаются

массовые потоки дисперсной  $G_d$  и сплошной  $G_c$  фаз. Найдем соотношение этих потоков, подставив их выражения из уравнения расхода (1.17):

$$\frac{G_d}{G_c} = \frac{\rho_d u(\beta f)}{\rho_c w f} = \beta \frac{\rho_d u}{\rho_c w}. \quad (6)$$

Здесь в выражение  $G_d$  входит среднее живое сечение для движения дисперсной фазы, поскольку  $u$  — абсолютная скорость.

Решим (6) относительно  $\beta$ , имея в виду, что объемные расходы фаз  $V_d$  и  $V_c$  легко выражаются через массовые ( $V = G/\rho$ ):

$$\beta = \frac{G_d \rho_c}{G_c \rho_d} \frac{w}{u} = \frac{V_d}{V_c} \frac{w}{u}. \quad (2.79)$$

Подставим в (2.79) значения  $u$  по выражениям (а) и сопоставим  $\beta$  с расходной объемной долей дисперсной фазы в потоках  $V_d/(V_d + V_c)$ .

Для восходящего прямотока

$$\beta = \frac{V_d}{V_c} \frac{w}{\frac{w - w_c}{1 - \beta}} = \frac{V_d}{V_c} \frac{1 - \beta}{1 - \frac{w_c}{w}},$$

отсюда

$$\beta = \frac{V_d}{V_d + V_c - V_c \frac{w_c}{w}} > \frac{V_d}{V_d + V_c}. \quad (2.79a)$$

Для нисходящего прямотока

$$\beta = \frac{V_d}{V_c} \frac{w}{\frac{w + w_c}{1 - \beta}} = \frac{V_d}{V_c} \frac{1 - \beta}{1 + \frac{w_c}{w}},$$

отсюда

$$\beta = \frac{V_d}{V_d + V_c + V_c \frac{w_c}{w}} < \frac{V_d}{V_d + V_c}. \quad (2.79б)$$

Для противотока

$$\beta = \frac{V_d}{V_c} \frac{w}{\frac{w_c - w}{1 - \beta}} = \frac{V_d}{V_c} \frac{1 - \beta}{\frac{w_c}{w} - 1},$$

отсюда

$$\beta = \frac{V_d}{V_d + V_c \frac{w_c}{w} - V_c} = \frac{V_d}{V_d + V_c + V_c \left( \frac{w_c}{w} - 2 \right)} < \frac{V_d}{V_d + V_c}. \quad (2.79в)$$

Таким образом, при *восходящем* прямотоке дисперсная фаза в своем движении отстает от сплошной, и истинная объемная концентрация дисперсной фазы  $\beta$  превышает расходную. При *нисходящем* прямотоке, наоборот, дисперсная фаза опережает сплошную, и  $\beta$  меньше расходной объемной концентрации. Случай  $\beta = V_d / (V_d + V_c)$  наблюдается лишь при *солидарном* движении фаз, когда истинные скорости их движения одинаковы, т.е. скорость стесненного витания  $w_c = 0$ . Это теоретически возможно при равных плотностях фаз, а практически — при близких плотностях и(или) малых размерах дискретных элементов.

Поскольку при *противотоке*  $w_c/w > 1$ , то в зависимости от свойств дисперсной системы (величины  $w_c$ ) и рабочей скорости сплошной среды ( $w$ ) возможны различные соотношения  $\beta$  и расходной концентрации  $V_d / (V_d + V_c)$ . Солидарное движение фаз при противотоке, разумеется, смысла не имеет, но существует режим ( $w_c/w = 2$ ), при котором  $\beta = V_d / (V_d + V_c)$ .

Выражения (2.79) дают лишь общий подход к оценке  $\beta$  и позволяют проследить влияние на удерживающую способность основных параметров процесса. Однако они не являются расчетными, поскольку скорость  $w_c$  сложным образом зависит от различных факторов: расхода обеих фаз, размеров диспергированных элементов и распределения их по размерам, конструктивных характеристик аппаратуры. Установить эту зависимость для большинства случаев удастся пока только обобщением экспериментальных данных.

---

Различают двухфазные течения с *твердыми* дискретными элементами (их размеры и форма не изменяются в ходе движения; это, например, газовзвеси, суспензии, сюда же можно отнести и движущийся слой, рассмотренный в разд.2.7.3) и *жидкостными* либо *газовыми* элементами (здесь изменяются размеры и форма в результате коалесценции, диспергирования, деформации дискретных элементов; это эмульсии, барботажные системы и др.). Ниже подробно рассмотрены некоторые течения с твердой дисперсной фазой и затронуты отдельные аспекты течений жидкость — жидкость и газ — жидкость.

## 2.8.2. Транспортные системы с твердой фазой

Транспортные системы с твердой фазой могут быть классифицированы по разным признакам. Различают **пневмотранспортные** системы (газовзвеси), когда несущей средой, перемещающей твердые частицы, является газ, и **гидротранспортные** (несущий агент — жидкость). По *взаимному направлению движения* твердых частиц и несущей среды различают **прямоточные** и **противоточные** течения; существуют и различного рода **сложные** схемы (перекрестное течение, закрученные потоки и др.). Для прямоточков различают восходящие и нисходящие схемы движения; различие здесь в знаках действующих сил, что отражается на формировании скоростей скольжения — см. формулы (а) в разд. 2.8.1. В зависимости от *расположения* транспортного канала говорят о **вертикальном**, **горизонтальном** и **наклонном** транспорте.

Важной является градация по *концентрации* твердой фазы в потоке:

- при высокой ее концентрации говорят о транспорте в **плотной фазе**; здесь частицы находятся в непосредственной близости одна к другой, они постоянно взаимодействуют со стенками канала;

- при низкой концентрации говорят о транспорте в **разбавленной фазе**; здесь частицы перемещаются в основном ядре потока и на некотором удалении одна от другой; их контакт друг с другом и со стенками канала осуществляется за счет соударений;

- существуют и *промежуточные* ситуации, когда твердый материал транспортируется одновременно в виде плотных сгустков (ансамблей) и отдельных частиц.

Ниже будет рассмотрена одна из разновидностей транспортных систем с твердой фазой: **вертикальный прямоточный пневмотранспорт в разбавленной фазе**.

### *Общие характеристики пневмотранспортных систем*

Перечислим некоторые важные особенности таких вертикальных пневмотранспортных систем в разбавленной фазе.

1. Линейная скорость несущего газового потока  $w$  должна превышать скорость витания наиболее крупных частиц, составляющих транспортируемую смесь  $TM$ , иначе такие частицы не будут подхвачены газовым потоком. Эта особенность предопределяет весьма высокие скорости  $w$  (как правило, не менее 10 м/с), так что движение газа происходит в турбулентном режиме. И хотя эпюра скоростей газа при этом в достаточной степени выровнена, тем не менее у стенок канала существуют зоны с невысокой скоростью; в этих пристенных зонах локальная

скорость может быть меньше  $w_{в}$ , и тогда частицы *здесь* будут двигаться против несущего потока. Чтобы свести к минимуму такие *опрокинутые* потоки *ТМ*, рекомендуется брать рабочую скорость газа не ниже  $(1,5 - 2)w_{в}$  — в расчете на наиболее крупные частицы.

2. Средние расстояния между частицами, транспортируемыми в разбавленной фазе, существенно превышают их размеры (на порядок и более). Это обусловлено крайне низкой концентрацией *ТМ* в потоке (высокой порозностью  $\varepsilon = 1 - \beta$ ) — чаще всего  $\beta$  менее 1%.

3. Время пребывания твердых частиц в рабочей зоне очень невелико. Действительно: частицы движутся быстро, их скорость  $u$  лишь немного отстает от скорости несущей среды  $w$ . В результате чаще всего  $u$  — на уровне 10 м/с. Поэтому частицы проходят рабочую зону за секунды, нередко и за доли секунды — это важно для некоторых технологических процессов (может быть достоинством или ограничением в организации процесса).

Основные гидродинамические проблемы пневмотранспортных систем: закономерности, связанные с массовыми расходами газа и твердого материала, с распределением скоростей газа и твердых частиц; определение гидравлического сопротивления пневмотранспортных трубопроводов.

Важной эксплуатационной характеристикой пневмотранспортных систем является **номинальная концентрация твердой фазы**, представляющая собой отношение *массовых потоков* твердого материала  $G_T$  и газа  $G$ :

$$\mu_{ном} \equiv \frac{G_T}{G} \left( \frac{\kappa г ТМ/с}{\kappa г газа/с} \right). \quad (в)$$

Здесь в размерностях намеренно оставлены "секунды", дабы отличить  $\mu_{ном}$  от **истинной концентрации**  $\mu_{и}$ , представляющей собой отношение масс твердой фазы  $m_T$  и газа  $m$ , находящихся в данный момент в транспортном трубопроводе:

$$\mu_{и} \equiv \frac{m_T}{m} \left( \frac{\kappa г ТМ}{\kappa г газа} \right). \quad (г)$$

Связь истинной концентрации с порозностью  $\varepsilon$  или объемной концентрацией твердой фазы  $\beta$  получается путем сопоставления количеств *ТМ* и газа в 1 м<sup>3</sup> пневмотранспортной системы:

$$\mu_{и} = \frac{(1 - \varepsilon)\rho_T}{\varepsilon\rho} = \frac{\beta\rho_T}{(1 - \beta)\rho} \quad \text{или} \quad \varepsilon = \frac{\rho_T}{\rho_T + \mu_{и}\rho}, \quad \beta = \frac{\mu_{и}\rho}{\rho_T + \mu_{и}\rho}. \quad (2.80)$$

Закономерности гидродинамики и физико-химических процессов в пневмотранспортных потоках определяются, конечно,

значением *истинной* концентрации  $\mu_{\text{и}}$  (или  $\epsilon$ ,  $\beta$ ); но в технологических расчетах удобнее пользоваться величинами  $\mu_{\text{ном}}$ . Связь  $\mu_{\text{ном}}$  и  $\mu_{\text{и}}$  найдем путем сопоставления выражений (в) и (г), оперируя средней *расчетной* скоростью газового потока  $w$  и *абсолютной* скоростью движения твердых частиц  $u$ . По уравнению (1.17)  $G = \rho w f$ , где  $f$  — поперечное сечение трубопровода. Для определения потока  $G_{\text{т}}$  необходимо учесть долю сечения, занимаемую твердым материалом и в среднем равную  $\beta$ :  $G_{\text{т}} = \rho_{\text{т}}(\beta f)u$ . Отсюда, выражая величины  $\beta \rho_{\text{т}}$  и  $\rho$ , имеем

$$\mu_{\text{и}} = \frac{\beta \rho_{\text{т}}}{(1 - \beta)\rho} = \frac{G_{\text{т}} f w}{(1 - \beta) f u G} = \mu_{\text{ном}} \frac{w}{u(1 - \beta)} = \mu_{\text{ном}} \frac{w}{u\epsilon} \approx \mu_{\text{ном}} \frac{w}{u}; \quad (2.81)$$

переход к последнему выражению обусловлен тем, что в разбавленных пневмотранспортных системах  $\beta \rightarrow 0$ ,  $\epsilon \rightarrow 1$ .

При  $u \rightarrow w$  (это практически реализуется для очень мелких и легких частиц, когда значения  $w_{\text{в}}$  очень малы), т.е. при *солидарном* движении фаз,  $\mu_{\text{ном}} \rightarrow \mu_{\text{и}}$ . Реально в случае восходящего прямотока  $u < w$ , так что истинная массовая концентрация  $\mu_{\text{и}}$  всегда больше рассчитанной из баланса потоков  $\mu_{\text{ном}}$  (при нисходящем прямотоке соотношение  $\mu_{\text{и}}$  и  $\mu_{\text{ном}}$  будет, естественно, обратным).

**Распределение скорости газа в поперечном сечении транспортного трубопровода**, несмотря на низкие концентрации  $TM$ , существенно отличается от характерного для однофазного газового потока. Наличие твердых частиц вызывает деформацию скоростного профиля газа, причем в случае вертикального пневмотранспорта происходит выравнивание скоростей в сечении с одновременным увеличением пристеночных градиентов скоростей. Экспериментально доказано, что при этом изменение скоростей по нормали к поверхности в присутствии твердых частиц продолжает следовать закону стенки (2.25а).

Схема транспортного трубопровода представлена на рис.2.44. В нижнее сечение рабочей зоны (общая длина ее  $l$ ) вводится твердый материал. Его подхватывает газовый поток, и твердые частицы начинают разго-

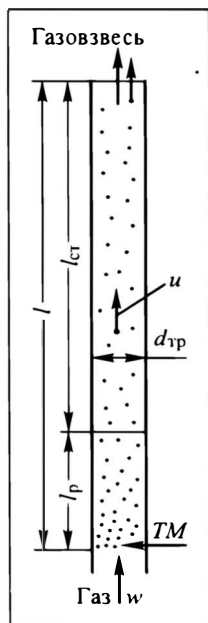


Рис.2.44. К определению сопротивления при восходящем прямоточном пневмотранспорте в разбавленной фазе

няться до некоторой **равновесной скорости** на некотором **разгонном участке**  $l_p$ . Далее (на стабилизированном участке  $l_{ст}$ ) частицы движутся с постоянной (в осредненном смысле) скоростью  $u$ . Несколько идеализируя ситуацию, обычно полагают, что они отстают от газового потока на величину скорости витания:  $u \approx w - w_b$ . На самом деле это отставание больше из-за торможения частиц за счет их частых (и не полностью упругих) ударов о стенки трубопровода.

Заметим: в стационарном режиме движения газовой взвеси значение  $\mu_{ном}$  одинаково во всех сечениях по длине трубопровода (это следует из баланса по твердому материалу в единицу времени для контура, ограниченного стенками трубопровода и поперечными сечениями — нижним и произвольным). Однако  $\mu_i$  выше в нижних сечениях, где частицы еще не приобрели равновесную скорость, — это следует из выражения (2.81): скорость частиц  $u$  нарастает снизу вверх до примерно постоянной величины.

### *Гидравлическое сопротивление*

Для рассматриваемой пневмотранспортной системы общее сопротивление  $\Delta p_{тс}$  складывается из трех основных составляющих:

- **статической**  $\Delta p_{ст}$ , обусловленной необходимостью поддержания определенной массы твердого материала  $m_t$  во взвешенном состоянии;
- **разгонной**  $\Delta p_p$ , связанной с затратами энергии на разгон твердых частиц до постоянной скорости  $u$ ;
- **гидродинамической**  $\Delta p_{г/д}$ , отражающей взаимодействие потока со стенками трубопровода:

$$\Delta p_{тс} = \Delta p_{ст} + \Delta p_p + \Delta p_{г/д}. \quad (2.82)$$

Кроме того, в ряде случаев может оказаться существенным вклад затрат (диссипации) энергии за счет неупругого соударения частиц.

Составляющая  $\Delta p_{ст}$  вызвана теми же причинами, что и для псевдоожиженного слоя; ее расчет ведется по формуле (2.70):

$$\Delta p_{ст} = (\rho_t - \rho)g(1 - \epsilon)l = (\rho_t - \rho)g\beta l. \quad (2.83)$$

Разумеется, в большинстве случаев  $\rho \ll \rho_t$ , так что слагаемым  $\rho$  в скобках можно пренебречь. Основная проблема здесь в определении  $\beta$ . Оценить эту величину можно с помощью соотношений (2.80), (2.81) при известных  $G_t$  и  $G$ ; более точные значения дает эксперимент с мгновенной **отсечкой** потока на рабочем участке трубопровода и измерением значений  $m_t$  и  $m$ .

Для определения  $\Delta p_p$  примем, что в начальном (нижнем) сечении вертикальная составляющая абсолютной скорости частиц равна  $u_n$ . Тогда затраты кинетической энергии в единицу време-



ни на разгон частиц до скорости  $u$  составят

$$G_T \left( \frac{u^2 - u_n^2}{2} \right) = \mu_{\text{ном}} G \left( \frac{u^2 - u_n^2}{2} \right) = \mu_{\text{ном}} \rho V \left( \frac{u^2 - u_n^2}{2} \right),$$

где  $V$  — объемный расход газа (в том сечении, для которого взята его плотность  $\rho$ , предпочтительнее — в начальном). Но те же затраты могут быть формально записаны в виде  $\Delta p_p V$ . Приравнявая эти величины и сокращая на  $V$ , получим

$$\Delta p_p = \rho \mu_{\text{ном}} \frac{u^2 - u_n^2}{2}. \quad (2.84)$$

При  $u_n = 0$  эта формула упрощается.

Наиболее сложной является проблема определения  $\Delta p_{Г/д}$ . Согласно формуле (2.82), эта составляющая призвана отразить деформацию скоростного поля газа в присутствии твердых частиц (возросшие пристеночные градиенты скоростей вызывают увеличение  $\Delta p$  в сравнении с однофазным потоком газа), а также затраты энергии на восполнение потерь скорости частиц из-за соударений со стенками канала. Проблема эта в настоящее время до конца не решена. Приведем один из существующих оценочных подходов к ее решению — на основе формулы Дарси — Вейсбаха в форме (2.17а).

Для однофазного газового потока

$$\Delta p = \lambda_{\Gamma} \frac{l}{d_{\text{тр}}} \frac{w^2}{2} \rho \frac{f_{\text{тр}}}{f_{\text{тр}}} = \lambda_{\Gamma} \frac{l}{d_{\text{тр}}} \frac{wG}{2f_{\text{тр}}}, \quad (д)$$

где  $f_{\text{тр}}$  — сечение трубопровода диаметром  $d_{\text{тр}}$ .

Постулируем (феноменологически), что аналогичным образом будут выражаться потери давления и при движении газозвеси; только массовый поток должен быть представлен *полностью*: вместо  $G$  надо подставить  $G + G_T = G(1 + G_T/G) = G(1 + \mu_{\text{ном}})$ . Тогда

$$\begin{aligned} \Delta p_{Г/д} &= \lambda_{\Gamma} \frac{l}{d_{\text{тр}}} \frac{wG(1 + \mu_{\text{ном}})}{2f_{\text{тр}}} = \\ &= \lambda_{\Gamma} \frac{l}{d_{\text{тр}}} \frac{w(\rho w f_{\text{тр}})(1 + \mu_{\text{ном}})}{2f_{\text{тр}}} = \lambda_{\Gamma} \frac{l}{d_{\text{тр}}} \frac{w^2}{2} \rho (1 + \mu_{\text{ном}}), \end{aligned} \quad (е)$$

причем  $\lambda_{\Gamma}$  первоначально было предложено определять по формулам для однофазных потоков. Однако такая линейная связь  $\Delta p_{Г/д}$  и  $\mu_{\text{ном}}$  не нашла экспериментального подтверждения, поскольку не учитывала деформацию скоростного поля газа в присутствии твердых частиц. Потребовалась замена "обычного"  $\lambda_{\Gamma}$

на коэффициент гидравлического сопротивления для пневмотранспортной системы  $\lambda_{тс} = f(Re_{тр}, \mu_{ном})$ , причем  $Re_{тр}$  базируется на  $w$  и  $d_{тр}$ .

Приведем пример эмпирической расчетной формулы для  $\lambda_{тс}$  в случае турбулентного течения газа:

$$\lambda_{тс} = \left[ 0,20 + \frac{0,88\mu_{ном}}{(1 + \mu_{ном})^2} \right] Re_{тр}^{-0,20}; \quad (ж)$$

эта формула носит оценочный характер и применима в случае умеренных значений  $\mu_{ном}$  — не выше 1 ( $кг\ TМ/с$ )/( $кг\ газа/с$ ).

Легко видеть, что при  $\mu_{ном} \rightarrow 0$  формула (ж) трансформируется в выражение, близкое к формуле Женера (2.28г).

Продемонстрированный выше подход к определению  $\Delta p_{тд}$  не является единственно возможным. Влияние твердого материала иногда рекомендуют учитывать с помощью уравнений типа (2.17а), записанных для *твердых частиц* — с определением коэффициента гидравлического сопротивления по эмпирическим формулам\*.

### 2.8.3. О двухфазных течениях типа *жидкость — жидкость* и *жидкость — газ*\*\*

Постоянное изменение размера и формы дискретных образований (капель, пузырей) сопровождается изменением условий их движения и контакта фаз. Именно эти причины, затрудняющие теоретический анализ, привели к распространению статистических подходов к описанию характеристик таких систем, часто — с привлечением экспериментальных данных.

Двухфазные системы используются либо при движении дискретной фазы через неподвижную сплошную, либо при движении через аппарат обеих фаз — прямотоком, противотоком или по какой-нибудь более сложной схеме взаимного перемещения. В зависимости от используемых фаз, их расходов, степени диспергирования и других условий возникают различные режимы; некоторые из них для вертикальных потоков показаны на рис. 2.45 и обозначены в подписи к рисунку.

Связь *задержки дисперсной фазы* (для рассматриваемых систем ее чаще всего обозначают  $\Phi$  — это аналог  $\beta$  для систем с твердой фазой) с параметрами процесса *в общем* определяется соотношениями типа (2.79). Однако для систем с изменяющимися размерами и формой элементов дискретной фазы, да еще при соизмеримых объемных концентрациях этих фаз в рабочей зоне, возникают большие сложности с определением скоростей  $w_c$ , а значит и  $u$ . Поэтому здесь весьма часто используют эмпирические соотношения, отвечающие конкретным условиям процесса, его конструктивному оформлению, свойствам фаз.

\* См. [8, 19, 21].

\*\* Подробнее о двух- и многофазных течениях см. [14, 16, 21] и др.

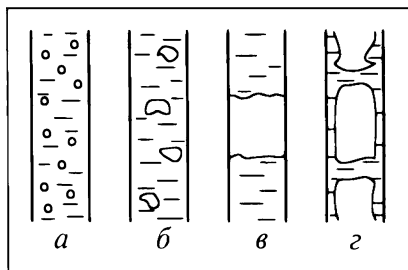


Рис.2.45. Режимы течения двухфазных систем:

*а* — дисперсный, *б* — пузырьковый, *в* — поршневой, *г* — кольцевой

Для *противоточных* двухфазных систем важной характеристикой является **скорость захлебывания**  $w_3$ , определяемая как скорость потока *сплошной* фазы, при которой он "запирает" систему, не

позволяя *дисперсной* фазе двигаться противотоком к сплошной. Явление захлебывания может также наблюдаться в насадочных и пленочных аппаратах: например, при чрезмерно высоких скоростях восходящего газового потока жидкость не может стекать вниз по насадке или по вертикальной стенке. Отметим определенное сходство явления захлебывания с зависанием твердой фазы в аппаратах с движущимся слоем (см.разд.2.7.3). Скорости захлебывания для различных процессов чаще всего рассчитываются по эмпирическим формулам\*; лишь для наиболее простых систем (типа гравитационного течения тонких пленок) они поддаются теоретическим оценкам\*\*.

К расчету **гидравлического сопротивления** двухфазных течений  $\Delta p_{дф}$  предложено много подходов. Такого рода разночтения в подходах к описанию какого-либо явления часто обусловлены отсутствием хорошей его модели (здесь — течения) и попытками найти лучший подход. Однако в рассматриваемом случае есть и иные (объективные) причины различий в подходах: многообразие режимов течения двухфазных систем должно найти свое отражение в множественности моделей. Действительно, режимы течения, представленные на рис.2.45, трудно отразить единой моделью и описать единой зависимостью. Мало того, каждая из фаз может перемещаться по транспортному трубопроводу в различных режимах (ламинарном, турбулентном и др.), и здесь возможны разные сочетания, которым должны отвечать разные расчетные формулы.

Продemonстрируем следующие основные подходы к определению  $\Delta p_{дф}$  при течении двухфазных систем.

Расчет  $\Delta p_{дф}$  строится на формальном использовании уравнения Дарси — Вейсбаха. При этом иногда двухфазный поток трактуют как однофазный с некоторыми *усредненными* характеристиками (плотностью, скоростью и др.), рекомендуя те или

\* См., например, [6, 13–15, 17].

\*\* Применительно к течению тонких пленок см. [6].

иные способы подсчета этих усредненных характеристик. В этом случае основные трудности расчета *переносят* на  $\lambda_r$ , для которого подбирают соотношения, отвечающие экспериментальным данным. В другом варианте уравнение Дарси — Вейсбаха записывают *раздельно* для дисперсной и сплошной фаз — со своими параметрами ( $\lambda_r$ ,  $w$ ,  $\rho$  и пр.). В этом случае трудности расчета заключаются в способе объединения этих составляющих — обычно подбирают формулу, позволяющую учесть вклад каждой фазы в общее сопротивление движущейся двухфазной системы.

Видимо, более перспективны и плодотворны попытки анализа двухфазных течений с учетом режимов движения фаз, с построением соответствующих физических и математических моделей (в манере уравнения Дарси — Вейсбаха или исходя из других предпосылок). Рассмотрение таких моделей выходит за пределы курса\*.

## 2.9. ОБ ОСОБЕННОСТЯХ МОЛЕКУЛЯРНОГО ТЕЧЕНИЯ

Выше рассматривалось течение *сплошных* сред, когда средняя длина пробега молекул  $L$  была много меньше характерного размера (масштаба) течения, на котором существенно изменяются параметры последнего (скорость потока, давление, температура и пр.). В качестве такого масштаба  $l$  в зависимости от постановки задачи выступают толщина пограничной пленки  $\delta$ , диаметр канала  $d$  или его длина.

Безразмерное отношение (симплекс)  $L/l$ , определяющее свойства среды и характер ее течения, называется **числом Кнудсена**  $K_n$ . При очень низких значениях  $K_n \ll 1$  (по различным данным — при  $K_n < 0,001$ — $0,01$ ) среда ведет себя как сплошная и в своем движении следует рассмотренным в предыдущих разделах уравнениям гидродинамики. Однако в ряде технологических ситуаций встречаются течения, когда длина пробега  $L$  становится *соизмеримой* с характерным размером канала  $l$  — такие течения называют **молекулярными**.

Установлено, что в интервале значений  $0,01 < K_n < 0,1$  уравнения гидродинамики сплошной среды тоже могут быть использованы, но только *для ядра* потока. А непосредственно на стенке канала (или обтекаемого средой тела) наблюдается явление "проскальзывания": говорят о скачке скоростей (при теплообмене — о скачке температур и т.д.). При  $K_n > 1$  пограничный слой на стенке канала (обтекаемого тела) не образуется, отраженные от стенки молекулы могут столкнуться с другими молекулами только на удалении от стенки, так что она практически не влияет на характеристики движения потока (поле скоростей и др.). Такой режим течения называется **свободномолекулярным**. В тех случаях, когда значение  $K_n$  заметно превышает 1 (обычно полагают — при  $K_n > 3$ ), молекулярное течение рассматривают, исходя из условия *однократного* столкновения молекул со стенкой канала. Что касается диапазона  $0,1 < K_n < 1$ , то в настоящее время он изучен слабо: в этой промежуточной области надо учиты-

---

\* См. [16, 21].

вать соударения молекул как между собой, так и со стенками канала, что создает немалые теоретические трудности.

В качестве наиболее распространенного примера молекулярного течения обычно приводят движение разреженных газов (при очень низких давлениях: произведение давления на определяющий размер канала  $p\ell$  — порядка  $1 \text{ Па}\cdot\text{м}$  и менее). С такими режимами течения на практике встречаются также при реализации некоторых процессов переноса в условиях глубокого вакуума или при движении в очень узких каналах. В качестве модельных некоторые соотношения молекулярного течения могут оказаться полезными при описании движения разреженных двухфазных дисперсных систем в каналах.

Основная цель анализа молекулярных течений в аспекте курса ПАХТ состоит в отыскании выражений для скоростей и потоков в каналах и аппаратах в зависимости от рабочих условий. Заметим, что доскональный анализ явлений здесь весьма сложен, поэтому ниже приводятся (зачастую без подробных выводов) предпосылки и соотношения, необходимые для описания процессов в ряде последующих глав.

В основе анализа лежит ряд известных соотношений молекулярной физики; приведем некоторые из них.

Средняя скорость движения молекул газа

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{8R_y T}{\pi M}}, \quad (\text{а})$$

где  $R_y$  — универсальная газовая постоянная;  $T$  — абсолютная температура;  $M$  — молярная масса.

Вязкость газа:

$$\mu = \frac{1}{2} \rho \bar{u} L, \quad (\text{б})$$

где  $\rho$  — плотность газа.

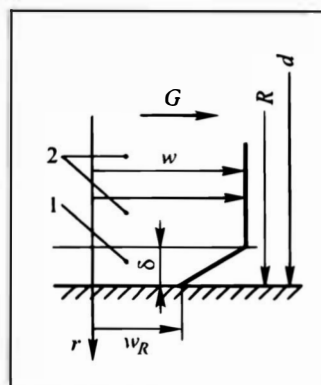
В условиях соизмеримости длины свободного пробега молекул  $L$  и толщины пограничной пленки  $\delta$  перестает оставаться справедливой "концепция прилипания" — газ движется со скольжением: непосредственно у стенки его скорость  $w_R \neq 0$ . В целях упрощения анализа примем приближенно (рис. 2.46), что течение газа в ядре потока происходит с постоянной (выровненной) по сечению скоростью  $w$ , а все падение скоростей от  $w$  до  $w_R$  наблюдается в пограничном слое, толщина которого  $\delta$  равна длине свободного пробега  $L$ . Тогда напряжение трения на стенке:

$$\tau_s = \frac{\mu(w - w_R)}{\delta}. \quad (\text{в})$$

Если подставить в (в) вязкость  $\mu$  по (б) и скорость  $\bar{u}$  по (а), то при  $\delta = L$  получим

**Рис.2.46.** К упрощенной модели молекулярного течения газа со скольжением на стенке канала:

1 — пограничная пленка, 2 — ядро потока



\* Детальный анализ различных модификаций молекулярных течений рассмотрен, например, в монографии [1], в упрощенном варианте некоторые аспекты этого течения изложены в [22].

после сокращения на  $L$

$$\tau_s = \frac{1}{2} \rho u(w - w_R) = \frac{1}{2} \rho \sqrt{\frac{8R_y T}{\pi M}} (w - w_R). \quad (г)$$

Величину  $\tau_s$  удобно выразить из очевидного равенства (равновесия сил) для участка трубы длиной  $l$  и диаметром  $d$  (см. разд. 2.2.2 и 2.2.4):  $\tau_s \pi d l = \Delta p (\pi d^2/4)$ , где  $\Delta p = p_1 - p_2$  — разность давлений на входе в трубу и на выходе из нее; тогда  $\tau_s = (\Delta p/4l)d$ . Отсюда

$$w = w_R + \frac{2\tau_s}{\rho} \sqrt{\frac{\pi M}{8R_y T}} = w_R + \frac{d}{2\rho} \sqrt{\frac{\pi M}{8R_y T}} \frac{\Delta p}{l}. \quad (д)$$

Для определения *массового* потока газа следует воспользоваться уравнением расхода (1.17):  $G = \rho w (\pi d^2/4)$ . При использовании (1.17) примем, что можно пренебречь продольным потоком газа в пограничной пленке ввиду малости ее толщины  $\delta$  и сечения  $\pi d \delta$ , т.е. слагаемым  $w_R$  в (д), полагая, что газ по всему поперечному сечению трубы движется со скоростью  $w$ :

$$G = \rho \frac{d}{2\rho} \sqrt{\frac{\pi M}{8R_y T}} \frac{\Delta p}{l} \frac{\pi d^2}{4} \quad \text{или} \quad G = \frac{\pi d^3}{16} \sqrt{\frac{\pi M}{2R_y T}} \frac{\Delta p}{l}. \quad (е)$$

Разумеется, более строгий анализ потребовал бы учета изменения скорости в ядре потока (за пределами модельной пограничной пленки), где движение ламинарное. Это нетрудно сделать по канве, изложенной в разд. 2.2.4, только в качестве значения скорости на стенке трубы (нижний предел при интегрировании) надо будет подставлять не  $w = 0$ , а  $w = w_R$ . Такой анализ позволяет вычлнить вклад составляющих: ламинарной и кнудсеновской (движения газа со скольжением на стенке канала). Но в аспекте поставленной цели здесь нам важен характер влияния параметров течения на величину массового потока газа:

$$G \sim \sqrt{M/T} (\Delta p/l). \quad (ж)$$

Обратимся теперь к **свободному молекулярному течению** газа в длинной трубе круглого сечения ( $K_n \gg 1$ ). Строгий анализ, рассматривающий отражение молекул, падающих на стенки трубы, приводит\* к следующему выражению для  $G$ :

$$G = - \frac{d}{3} \bar{u} \frac{dp}{dx} \frac{\pi d^2}{4}. \quad (з)$$

Подставляя  $\bar{u}$  по (а) и  $\rho = pM/R_y T$  (из уравнения Клапейрона — Менделеева), находим

$$G = - \frac{d}{3} \sqrt{\frac{8R_y T}{\pi M}} \frac{M}{R_y T} \frac{dp}{dx} \frac{\pi d^2}{4}. \quad (и)$$

Полагая градиент давления постоянным по длине трубы:  $-(dp/dx) = (p_1 - p_2)/l = \Delta p/l$ , получаем (после упрощений) для изотермического течения газа выражение, сходное по структуре с приближенным (е), но с иным численным коэффициентом:

$$G = \frac{d^3}{3} \sqrt{\frac{\pi M}{2R_y T}} \frac{\Delta p}{l}. \quad (2.85)$$

Удельный массовый поток, отнесенный к единице поперечного сечения  $f = \pi d^2/4$ , составляет

$$G/f = \frac{4}{3} d \sqrt{\frac{M}{2\pi R_y T}} \frac{\Delta p}{l}. \quad (2.86)$$

\* См. сноску на предыдущей странице.

Последнее выражение можно трактовать как разность противоположных нескомпенсированных потоков — от входа канала к выходу:

$$\frac{4}{3} d \sqrt{M / (2 \pi R_y T)} \frac{P_1}{l}$$

и от выхода к входу:

$$\frac{4}{3} d \sqrt{M / (2 \pi R_y T)} \frac{P_2}{l}.$$

Из этих выражений следует, что при прочих равных условиях **удельный массовый поток газа (пара) пропорционален** комплексу

$$P \sqrt{M / T}. \quad (\kappa)$$

Приведенные в этом разделе положения и полученные результаты будут использованы при анализе процессов молекулярной дистилляции и мембранного разделения.

## ЛИТЕРАТУРА к главе 2

1. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. М.: Наука, 1976. 888 с.
2. Азров М.Э., Тодес О.М. Гидравлические и тепловые основы работы аппаратов со стационарным и кипящим зернистым слоем. Л.: Химия, 1968. 512 с.
3. Баскаков А.П., Берг Б.В., Витт О.К. и др. Теплотехника. М.: Энергоиздат, 1982. 264 с.
4. Берд Р., Стюарт В., Лайтфут Е. Явления переноса: Пер. с англ./ Под ред. Н.М. Жаворонкова, В.А. Малюсова М.: Химия, 1974. 688 с.
5. Буевич Ю.А., Минаев Г.А. Струйное псевдооживление. М.: Химия, 1984. 132 с.
6. Гельперин Н.И. Основные процессы и аппараты химической технологии. М.: Химия, 1981. 812 с.
7. Гельперин Н.И., Айнштейн В.Г., Кваша В.Б. Основы техники псевдооживления. М.: Химия, 1967. 664 с.
8. Гельперин Н.И., Айнштейн В.Г. Псевдооживление, гл. XI "Аналогия между псевдооживленным слоем и капельной жидкостью" / Под ред. Дэвидсона И.Ф., Харрисона Д.: Пер. с англ./ Под ред. Н.И. Гельперина. М.: Химия, 1974. 760 с.
9. Горбис З.Р. Теплообмен и гидродинамика дисперсных сквозных потоков. М.: Энергия, 1971. 424 с.
10. Данюшевский Б.Ю. Вентиляционные и пневмотранспортные установки в нефтяной промышленности (аэродинамические основы расчета). М.: Машиностроение, 1976. 192 с.
11. Дэвидсон И.Ф., Харрисон Д. Псевдооживление твердых частиц: Пер. с англ./ Под ред. Н.И. Гельперина. М.: Химия, 1965. 184 с.
12. Идельчик И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. М.: Машиностроение, 1975. 560 с.
13. Касаткин А.Г. Основные процессы и аппараты химической технологии. М.: Химия, 1971. 784 с.
14. Кафаров В.В. Основы массопередачи. М.: Высшая школа, 1979. 440 с.
15. Козан В.Б. Теоретические основы типовых процессов химической технологии. Л.: Химия, 1977. 592 с.
16. Кутателадзе С.С., Стырикович М.А. Гидродинамика газожидкостных систем. М.: Энергия, 1976. 296 с.
17. Павлов К.Ф., Романков П.Г., Носков А.А. Примеры и задачи по курсу процессов и аппаратов химической технологии. Л.: Химия, 1987. 574 с.
18. Патрашев А.Н. Гидродинамика. М.: Военно-морское изд-во, 1953. 720 с.
19. Разумов И.М. Пневно- и гидротранспорт в химической промышленности. М.: Химия, 1979. 248 с.
20. Сажин Б.С., Сажин В.Б. Научные основы техники сушки. М.: Наука, 1977. 448 с.
21. Соу С. Гидродинамика многофазных систем: Пер. с англ./ Под ред. М.Е. Дейча. М.: Мир, 1971. 536 с.
22. Циборовский Я. Процессы химической технологии: Пер. с польск./ Под ред. П.Г. Романкова. Л.: Госхимиздат, 1958. 932 с.
23. Четечкин А.В., Зелемонец Н.А. Теплотехника. М.: Высшая школа, 1986. 344 с.
24. Членов В.А., Михайлов Н.В. Виброкипящий слой. М.: Наука, 1972. 344 с.
25. Чугаев Р.Р. Гидравлика. Л.: Энергия, 1971. 552 с.

### ПЕРЕМЕЩЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ

В гл. 2 (“Гидравлика”) закономерности течения жидкостей рассматривались безотносительно к средствам их перемещения. В настоящей главе речь пойдет о средствах перемещения.

Как было показано в гл. 2, перемещение жидкостей по трубопроводу происходит лишь при наличии разности полных напоров на его концах. Если эта разность напоров обусловлена более высоким уровнем жидкости в исходной емкости по сравнению с собирающей, то такое перемещение жидкости именуется *самотеком*. Скорость движения жидкости при этом, как правило, невелика. Для повышения скорости подачи жидкости, а также для транспортирования жидкости с *некоторого уровня на более высокий* используют *принудительное течение* за счет создания дополнительного **напора**. Этот напор может быть обеспечен путем увеличения давления газа на свободную поверхность жидкости в резервуаре, из которого откачивается жидкость (назовем его расходным), — такие устройства получили название **напорных емкостей**, или **монтежю**. Необходимое давление в последних рассчитывают на основе законов гидравлики с учетом всех гидравлических потерь в трубопроводе от монтежю до приемного резервуара. Но чаще всего необходимый напор создают путем передачи механической энергии от *движущихся рабочих органов* (поршень, колесо и т.д.) к жидкости. В последнем случае преобразование механической энергии двигателя в энергию транспортируемой жидкости с помощью рабочих органов происходит в гидравлических машинах, называемых **насосами**, или (чтобы подчеркнуть наличие движущихся рабочих органов, передающих механическую энергию к жидкости) **механическими насосами**.

К насосам относят также устройства без движущихся механических частей, обеспечивающие разность напоров жидкости или ее подъем на некоторую высоту другими способами. Назовем их **немеханическими насосами**.



### 3.1. КЛАССИФИКАЦИЯ НАСОСОВ. ТИПОВАЯ СХЕМА И ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НАСОСНОЙ УСТАНОВКИ

#### 3.1.1. Классификация насосов

Как уже было сказано, насосы подразделяются на две большие группы: механические и немеханические (табл. 3.1).

Применяемые в химической промышленности типы **механических насосов** чрезвычайно многообразны, их классифицируют по производительности и равномерности подачи, по устройству, характеру и скорости перемещения рабочих органов, а также по иным признакам. Не останавливаясь на других классификациях, будем механические насосы группировать по *принципу их действия* на объемные (насосы вытеснения), лопастные (насосы обтекания) и вихревые (насосы увлечения — за счет сил трения)\*.

Таблица 3.1. Классификация насосов

Вид	Разновидности	Номер рисун- ка	Отличительные черты
Механические	Объемные:		
	поршневые	3.1, а	Движущийся рабочий орган — поршень или плунжер
	ротационные:		
	пластинчатые	3.1, б	Рабочий орган — ротор с подвижными пластинами
	шестеренчатые	3.1, в	Рабочий орган — шестерни
	винтовые	3.1, г	Рабочий орган — винты
	шланговые	3.1, д	Рабочий орган — перемещающиеся прижимы
	Лопастные:		
	центробежные	3.1, е и 3.17	Рабочее колесо при вращении обеспечивает выброс жидкости на периферию
	пропеллерные (осевые)	3.1, ж	Лопасты на вращающемся валу обеспечивают перемещение жидкости в осевом направлении
Немеханические	Вихревые	—	Многократный выброс жидкости на периферию
	Газлифт	3.29	Создание газожидкостной смеси с плотностью меньшей, чем у жидкости
	Струйные	3.30	Большая кинетическая энергия струи
	Монтежу		Неподвижный газ под давлением

\* Место каждой группы в общей классификации насосов видно из табл.3.1.

Принцип действия **объемных** насосов заключается в отсечении рабочими органами насоса некоторого объема (порции) жидкости, поступающего по всасывающей линии, и последующем его выталкивании в нагнетательную линию с изменением при этом энергии давления.

В объемных насосах (рис. 3.1, *а — д*) рабочие органы *1* образуют замкнутые объемы, в которые из всасывающего трубопровода *2* поступают порции жидкости за счет разрежения, создаваемого при движении этих рабочих органов. Затем упомянутые порции жидкости под воздействием тех же рабочих органов выталкиваются в нагнетательный трубопровод *3*. Количество подаваемой объемным насосом жидкости определяется геометрическими размерами его рабочих органов и числом актов всасывания и выталкивания в единицу времени. Величина создаваемого напора (давления) в принципе не ограничена.

В зависимости от вида совершаемого рабочими органами движения (возвратно-поступательного или вращательного) объемные насосы подразделяются на поршневые, ротационные и шланговые.

В **поршневых** насосах (рис. 3.1, *а*) возвратно-поступательное движение совершает поршень или плунжер. Принцип действия, особенности работы и расчет таких насосов подробно рассматриваются в разд.3.2.

К **ротационным** относят насосы (рис. 3.1, *б — г*), рабочие органы которых совершают вращательное движение: пластинчатые, шестеренчатые, винтовые.

Принцип действия **пластинчатого** насоса понятен из рис. 3.1, *б*. При вращении ротора, расположенного эксцентрично по отношению к цилиндрическому корпусу насоса, под действием центробежной силы пластины частично выдвигаются из пазов в роторе и прижимаются к корпусу, образуя замкнутые объемы. За счет увеличения объема между двумя соседними пластинами в этом пространстве создается разрежение, и жидкость из всасывающего трубопровода *2* заполняет замкнутый объем между пластинами, корпусом и ротором. Затем эта порция жидкости перемещается вместе с пластинами, рабочий объем уменьшается и жидкость выталкивается в нагнетательный трубопровод *3*.

В **шестеренчатом** насосе (рис.3.1, *в*) установлены две шестерни *1*, одна из которых — ведущая, а другая — ведомая. Между корпусом *4* и соседними зубьями шестерен *1* образуются замкнутые объемы. При вращении шестерен в направлении, указанном стрелками, вследствие создаваемого разрежения (за счет выхода зубьев из зацепления) жидкость из всасывающего патрубка *2* поступает в корпус. Далее жидкость заполняет пространство между соседними зубьями и корпусом, перемещается вдоль

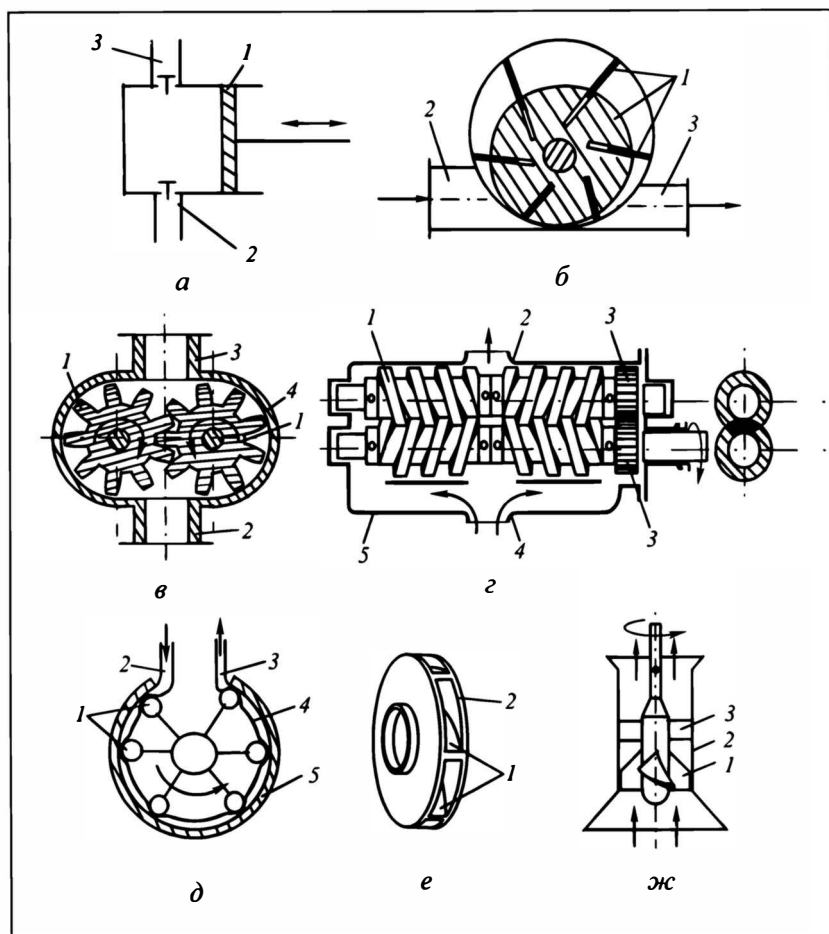


Рис.3.1. Схемы механических насосов различных типов — объемных (а — поршневой, б—д — ротационные) и лопастных (е, ж):

а — поршневой: 1 — поршень, 2 и 3 — всасывающий и нагнетательный патрубки; б — пластинчатый насос: 1 — ротор с выдвижными пластинами, 2 и 3 — всасывающий и нагнетательный патрубки; в — шестеренчатый: 1 — шестерни, 2 и 3 — всасывающий и нагнетательный патрубки, 4 — корпус; г — винтовой: 1 — винты, 2 и 4 — нагнетательный и всасывающий патрубки, 3 — шестерни, 5 — корпус; д — шланговый: 1 — прижимы, 2 и 3 — всасывающий и нагнетательный патрубки, 4 — шланг, 5 — обойма (корпус); е — центробежный: 1 — лопатки, 2 — рабочее колесо, ж — пропеллерный: 1 — рабочее колесо, 2 — корпус, 3 — направляющий аппарат

стенки корпуса по направлению вращения шестерен и вытесняется в нагнетательный трубопровод 3. Заметим, что насос является *реверсивным*, т.е. при перемене направления вращения шестерен области всасывания и нагнетания меняются местами.

**Винтовой насос** (рис.3.1, з) по принципу действия аналогичен шестеренчатому. Он состоит из двух винтов 1, вращающихся при помощи шестерен 3 в противоположных направлениях. Винты помещены в плотно охватывающий их корпус 5 с внутренней гладкой цилиндрической поверхностью. Чтобы исключить осевые нагрузки, жидкость подают с обоих торцов, а отводят — в середине насоса. Жидкость поступает в нарезку винтов с торцов корпуса, заполняет объемы между витками винтов и корпусом. При вращении винтов жидкость перемещается к середине корпуса и вытесняется в нагнетательный трубопровод 2.

К объемным насосам относятся также **шланговые** (рис.3.1, д), в которых цилиндрические прижимы 1 (колесики) сдавливают шланг 4, образуя замкнутые объемы (порции) жидкости в нем. При перекачивании прижимов порции жидкости перемещаются от всасывающей стороны 2 к нагнетательной 3 по принципу перистальтики.

В **лопастных** (лопаточных) насосах преобразование энергии двигателя происходит в процессе обтекания лопастей (лопаток) колеса при их силовом воздействии на поток. Они подразделяются на центробежные (радиальные), пропеллерные (осевые) и диагональные.

В **центробежных** насосах (рис.3.1,е) при вращении рабочего колеса возникает центробежная сила; она действует на жидкость, находящуюся между лопатками колеса, и жидкость движется от центральной его части к периферии — в целом в радиальных направлениях.

В **пропеллерных** насосах (рис. 3.1, ж) движение жидкости происходит преимущественно в аксиальном (осевом) направлении за счет подталкивания жидкости лопастями.

В **диагональных** насосах осевые и радиальные составляющие абсолютной скорости жидкости — величины одного порядка.

У **вихревых** насосов преобразование энергии двигателя в перемещение жидкости происходит в процессе интенсивного образования вихрей и их последующего разрушения при взаимодействии рабочего органа с медленно движущимися частицами жидкости. Этот весьма сложный механизм действия вихревых насосов подробно изложен в специальной литературе по насосам\*.

Среди **немеханических** насосов отметим газлифт, струйные и монтажу.

**Газлифт (эрлифт)** обеспечивает создание напора (и подъем жидкости) за счет введения в жидкость практически неподвижного газа.

---

\* См., например, [1].

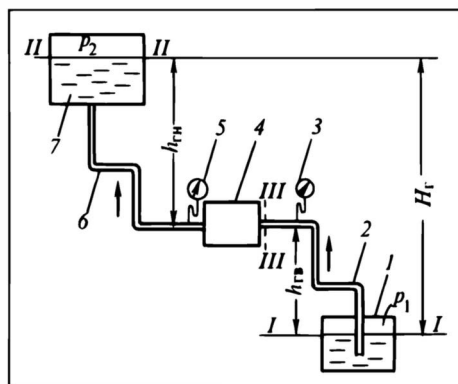


Рис.3.2. Типовая схема насосной установки:

1 — расходный резервуар, 2 — всасывающий трубопровод, 3, 5 — манометры (вакуумметры), 4 — насос, 6 — нагнетательный трубопровод, 7 — приемный резервуар

В **струйных** (в частности, **водоструйных**) насосах перепад давлений (напор) создается за счет подачи струи газа, жидкости или пара с большой кинетической энергией. При использовании энергии струи газа (жидкости или пара) такой насос называют **инжектором** (при давлениях больше атмосферного) или **эжектором** (при давлениях ниже атмосферного). Протекающие при этом процессы преобразования кинетической энергии струи рабочей жидкости (газа, пара) в потенциальную энергию давления перекачиваемой жидкости подробно рассмотрены в гл.9.

**Типовая схема** насосной установки с *механическим рабочим органом* показана на рис.3.2. Из расходного резервуара 1, где давление над свободной поверхностью составляет  $p_1$ , жидкость под действием разности напоров в сечениях I и III по трубопроводу 2, называемому **всасывающим**, поступает в насос 4. Здесь ее давление повышается до уровня, достаточного для того, чтобы жидкость поднялась по **нагнетательному** трубопроводу 6, преодолевая его гидравлическое сопротивление и противодавление в собирающем (приемном) резервуаре 7, где давление над свободной поверхностью составляет  $p_2$ . Для измерения давления до и после насоса устанавливаются манометры 3 и 5 (при абсолютных давлениях больше атмосферного). Нередко давление во всасывающем трубопроводе меньше атмосферного, тогда 3 — это вакуумметр.

Разность уровней установки насоса и жидкости в расходном резервуаре 1 называется *геометрической высотой всасывания*  $h_{гв}$ , а расстояние (по высоте) между насосом и уровнем жидкости в приемном резервуаре 7 — *геометрической высотой нагнетания*  $h_{гн}$ . Соответственно  $H_{г} = h_{гв} + h_{гн}$  — *полная геометрическая высота подъема жидкости* (см. рис.3.2).

### 3.1.2. Основные характеристики насосной установки

Основными характеристиками насосной установки являются ее производительность, создаваемый установкой напор и мощность двигателя, обеспечивающего ее работу. Рассмотрим несколько подробнее эти характеристики.

**Производительность** (подача) насоса  $V$  — объем жидкости, подаваемый насосом в нагнетательный трубопровод в единицу времени ( $\text{м}^3/\text{с}$ ). Массовая производительность насоса  $G = V\rho$ , где  $\rho$  — плотность жидкости. В задачах проектирования производительность насоса задается; тогда размеры насоса для каждого его типа определяются из геометрических соображений. В задачах эксплуатации производительность одних насосов (например, объемных) определяется параметрами работы самого насоса и не зависит от характеристик трубопровода, для других же последние оказывают значительное влияние на производительность.

**Напор**, создаваемый насосом, определяют на основе уравнения Бернулли. В гл.2 оно было записано для реальной жидкости в форме уравнения (2.16) в отсутствие источника энергии; в рассматриваемом случае наличие источника энергии (насоса) следует учесть.

Примем за плоскость отсчета поверхность  $I-I$  уровня жидкости в расходном резервуаре (см. рис.3.2) и запишем полные напоры  $H_1$  и  $H_2$  соответственно для сечений:

$I-I$ , совпадающего с плоскостью отсчета, —

$$H_1 = 0 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g}$$

и  $II-II$ , соответствующего поверхности уровня в приемном резервуаре, —

$$H_2 = H_r + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{w_2^2}{2g}.$$

При течении идеальной жидкости в отсутствие насоса  $H_1 = H_2$ . В случае течения реальной жидкости  $H_2 < H_1$ , и для сохранения равенства в *правой* части уравнения Бернулли (2.16) учитываются гидравлические потери  $h_n$  в трубопроводах. Но насос — источник энергии, он создает дополнительный напор  $H$ , увеличивающий сумму слагаемых в правой части. Чтобы сохранить знак равенства, необходимо в *левую* часть добавить этот напор:

$$0 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} + H = H_r + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{w_2^2}{2g} + H_n, \quad (3.1)$$

где  $H_n = h_{nv} + h_{nn}$  — полные гидравлические потери, т. е. сумма потерь во всасывающем ( $h_{nv}$ ) и нагнетательном ( $h_{nn}$ ) трубопроводах.

В равенстве (3.1) напор  $H$  — это воспринятый жидкостью напор  $H_T$  за вычетом гидравлических потерь в самом насосе  $h_n^{\text{нас}}$ , т.е.  $H = H_T - h_n^{\text{нас}}$ . Из (3.1) получаем

$$H = H_T + \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + \frac{w_2^2}{2g} - \frac{w_1^2}{2g} + H_n. \quad (3.2)$$

Если пренебречь скоростными напорами жидкости в резервуарах (ввиду их крайней малости в подавляющем большинстве практических случаев), а тем более — их разностью, по сравнению с другими слагаемыми уравнения (3.2), то

$$H = H_T + \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + H_n. \quad (3.3)$$

Таким образом, напор, развиваемый насосом и передаваемый жидкости, затрачивается на ее подъем на высоту  $H_1$ , на преодоление разности давлений  $p_2 - p_1$  и гидравлического сопротивления в трубопроводах  $H_n$ .

На действующих насосных установках напор обычно определяют по показаниям манометра ( $p_m$ ) и вакуумметра ( $p_v$ ), установленных на нагнетательной и всасывающей линиях непосредственно около насоса. При этом манометр всегда показывает избыточное (по сравнению с атмосферным) давление, а вакуумметр — разность между атмосферным давлением и абсолютным давлением в аппарате. В рассматриваемом случае (см. рис. 3.2) манометр показывает разность между абсолютным давлением жидкости после насоса ( $p_n$ ) и атмосферным ( $p_{\text{атм}}$ ), т.е.  $p_m = p_n - p_{\text{атм}}$ ; вакуумметр показывает разность между атмосферным давлением ( $p_{\text{атм}}$ ) и абсолютным давлением перед насосом ( $p_{\text{вс}}$ ), т.е.  $p_v = p_{\text{атм}} - p_{\text{вс}}$ .

Полный напор жидкости *после* насоса (в месте подсоединения манометра) равен

$$H_2'' = h_{гв} + \frac{p_n}{\rho g} + \frac{w_n^2}{2g},$$

а *перед* насосом (в месте подсоединения вакуумметра)

$$H_1^{\text{вс}} = h_{гв} + \frac{p_{\text{вс}}}{\rho g} + \frac{w_{\text{вс}}^2}{2g},$$

где  $w_n$  и  $w_{\text{вс}}$  — скорости жидкости в нагнетательном и всасывающем трубопроводах соответственно.

Реальный напор  $H$ , развиваемый насосом, есть разность напоров  $H_2'' - H_1^{\text{вс}}$ :

$$H = H_2'' - H_1^{\text{вс}} = \frac{p_n - p_{\text{вс}}}{\rho g} + \frac{w_n^2 - w_{\text{вс}}^2}{2g}.$$

Вводя показания манометра  $p_m = p_n - p_{атм}$  и вакуумметра  $p_v = p_{атм} - p_{вс}$ , получаем

$$H = \frac{p_m + p_v}{\rho g} + \frac{w_n^2 - w_{вс}^2}{2g}.$$

На практике чаще всего диаметры всасывающего и нагнетательного трубопроводов, а следовательно и скорости жидкости в них, одинаковы или отличаются незначительно:  $w_n \approx w_{вс}$  (да и сами значения скоростных напоров  $w_n^2/2g$  и  $w_{вс}^2/2g$  невелики). Тогда

$$H = \frac{p_m + p_v}{\rho g}. \quad (3.4)$$

Таким образом, напор насоса на действующей насосной установке равен **сумме** показаний **манометра** и **вакуумметра**. Заметим, что при использовании на всасывающей и нагнетательной линиях *одноименных* приборов (например, манометров) напор насоса будет равен **разности** их показаний.

Связь напора насоса  $H$  с его производительностью  $V$  будем называть **характеристикой насоса**  $H = H(V)$ . Ранее было указано, что для некоторых насосов (например, поршневых) эта связь вырождена:  $V$  не изменяется с  $H$ . Подчеркнем, что речь здесь идет о том, какой напор *может* развивать насос при некоторой производительности.

Работа насоса зависит от того, через какой трубопровод он прокачивает жидкость: чем больше сопротивление трубопровода (большая длина, малый диаметр, много местных сопротивлений и т.д.), тем *большой* напор  $H_{тр}$  будет развивать насос для подачи заданного потока жидкости. В этом случае речь идет о том, какой напор при данной производительности *должен* в рабочих условиях развивать насос. Такая связь  $H_{тр}$  (с учетом разности уровней  $H_r$  и давлений  $p_1$  и  $p_2$  в расходном и приемном резервуарах) и  $V$  называется **характеристикой трубопровода (сети)**. Таким образом, систему “насос—трубопровод”, или “насос—сеть”, следует рассматривать как единое целое — во взаимосвязи работы его элементов. Поэтому насос и параметры его работы следует выбирать на основании анализа *совместной* работы элементов этой системы.

Напор насоса расходуется на технологически полезные эффекты, связанные с преодолением противодавления в приемном резервуаре и поднятием жидкости на геометрическую высоту  $H_r$ , а также на компенсацию потерь за счет трения в трубопроводах  $H_n = h_{пв} + h_{пн}$  и потерь внутри насоса  $h_{п}^{нас}$ . Величина  $H_n$  зави-



сит от расхода  $V$  и при общей длине  $l$  трубопровода диаметром  $d_{\text{тр}}$  с местными сопротивлениями  $\sum \xi$  определяется по формуле типа (2.31):

$$H_{\text{п}} = \left( \lambda_r \frac{l}{d_{\text{тр}}} + \sum \xi \right) \frac{w^2}{2g} = \left( \lambda_r \frac{l}{d_{\text{тр}}} + \sum \xi \right) \frac{V^2 \cdot 4^2}{\pi^2 d^4 \cdot 2g},$$

причем коэффициент гидравлического сопротивления  $\lambda_r = \lambda_r(\text{Re}) = \lambda_r(V)$ .

Итак, в каждом рабочем режиме насос должен преодолевать сопротивление (развивать напор)

$$H_{\text{тр}} = H_{\text{г}} + \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + H_{\text{п}},$$

или

$$H_{\text{тр}} = H_{\text{г}} + \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + \left( \lambda_r \frac{l}{d_{\text{тр}}} + \sum \xi \right) \frac{4^2}{2\pi^2 d^4 g} V^2. \quad (3.5)$$

Очевидно, что при  $V = 0$  имеем  $H_{\text{тр}} = H_{\text{г}} + (p_2 - p_1)/\rho g$ , а с ростом  $V$  напор  $H_{\text{тр}}$  зависит от  $V$  почти квадратично ("почти" — из-за слабого изменения  $\lambda_r$ , а иногда и некоторых сопротивлений  $\xi$ , с ростом  $V$ ).

Точка пересечения двух кривых, выражающих характеристики сети и насоса, представляет собой **рабочую точку** насоса с характерными рабочими значениями  $H$  и  $V$ .

**Мощность двигателя** зависит от производительности и напора, создаваемого насосом при работе последнего в комплекте с всасывающим и нагнетательным трубопроводами. Расчет мощности изложен в разд. 3.1.4.

### 3.1.3. Предельная геометрическая высота всасывания насосов

При размещении технологического оборудования и насосов, его обслуживающих, всегда возникает вопрос о **геометрической высоте всасывания**  $h_{\text{гв}}$ . Ведь даже при правильно подобранном насосе (способном обеспечить требуемые производительность и напор), но *неправильно установленном (слишком большая  $h_{\text{гв}}$ )*, он не сможет всасывать жидкость, а значит — подавать ее потребителю. Более того, работа в таких условиях неблагоприятно скажется на самом насосе. Остановимся на этой проблеме более подробно.

При изменении геометрической высоты всасывания насоса  $h_{\text{гв}}$  изменяется давление жидкости на входе в него  $p_{\text{вс}}$  — соответственно уравнению Бернулли.

Аналитическая зависимость  $p_{\text{вс}}$  от  $h_{\text{гв}}$  может быть установлена с помощью уравнения Бернулли, записанного для сечений I—I и на входе в насос III—III (см. рис.3.2). При прежней плоскости отсчета I—I

$$0 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} = h_{\text{гв}} + \frac{p_{\text{вс}}}{\rho g} + \frac{w_{\text{вс}}^2}{2g} + h_{\text{пв}},$$

откуда

$$\frac{p_{\text{вс}}}{\rho g} = \frac{p_1}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} - h_{\text{гв}} - \frac{w_{\text{вс}}^2}{2g} - h_{\text{пв}}.$$

Пренебрегая скоростным напором  $w_1^2/(2g)$  ввиду его малости по сравнению с другими слагаемыми, получим

$$\frac{p_{\text{вс}}}{\rho g} = \frac{p_1}{\rho g} - h_{\text{гв}} - \frac{w_{\text{вс}}^2}{2g} - h_{\text{пв}}. \quad (3.6)$$

При установке насоса рядом с расходным резервуаром I (см. рис.3.2) ( $h_{\text{пв}} = 0$ ) и на одном с ним уровне ( $h_{\text{гв}} = 0$ ) давление жидкости на входе в насос  $p_{\text{вс}}$  практически равно давлению  $p_1$  [скоростной напор  $w_{\text{вс}}^2/(2g)$ , как правило, значительно меньше пьезометрического  $p_1/(\rho g)$ ]. С увеличением  $h_{\text{гв}}$  давление на входе в насос  $p_{\text{вс}}$  уменьшается и при некоторой геометрической высоте (назовем ее **предельной геометрической высотой всасывания**  $h_{\text{гв}}^{\text{пред}}$ ) давление  $p_{\text{вс}}$  понизится до упругости насыщенных паров  $p_t$  перекачиваемой жидкости при ее рабочей температуре  $t$ .

Как известно, условие кипения жидкости — это равенство или превышение упругости ее насыщенных паров над внешним (по отношению к ней) давлением:  $p_t \geq p_{\text{вс}}$  (когда  $p_{\text{вс}}$  станет меньше  $p_t$ , жидкость закипит). Пар, образующийся при кипении жидкости, при повышении давления (в определенный период времени — в объемных насосах; по мере попадания в зону повышенного давления — в других) будет конденсироваться. Но объем, занимаемый одним килограммом жидкости, в сотни и тысячи раз меньше объема пара, поэтому в зоне конденсации, т.е. в рабочем пространстве насоса, создается вакуум. В освобождающиеся при этом полости (“пустоты”) устремляются порции жидкости, вызывая гидравлические удары и быстрый износ рабочих органов насоса. Работа насоса в таком режиме сопровождается шумом и сотрясанием всей машины; за несколько часов такой работы образуются раковины на элементах рабочих органов, и в итоге они разрушаются.

Описанное выше явление возникновения полостей (каверн) при вскипании в зоне пониженных давлений получило название **кавитации** (“полость” по-английски — *cavity*). При работе в режиме кавитации существенно снижаются производительность насоса и его гидравлический КПД, а сам насос быстро выходит из строя.

Явление кавитации может быть вызвано также десорбцией растворенного газа или подсосом воздуха через неплотности

(при  $p_{\text{вс}}$  ниже атмосферного). Поэтому не рекомендуется регулировать производительность насоса с помощью вентиля на всасывающей линии.

Более подробно вопрос о “ненормальной” работе насосов и явлении кавитации будет рассмотрен при изучении конкретных типов насосов.

Из формулы (3.6) следует, что *теоретическая* (без учета различных гидравлических потерь во всасывающем трубопроводе) *предельная* (при условии  $p_{\text{вс}} = p_t$ ) геометрическая высота всасывания насоса равна

$$(h_{\text{гв}}^{\text{пред}})_{\text{теор}} = \frac{p_1 - p_t}{\rho g}. \quad (3.7)$$

Ее также называют максимальной “всасывающей способностью насоса”. (Этот термин не вполне удачен, так как “способность насоса” здесь не зависит от насоса, а определяется лишь давлением  $p_1$  в расходном резервуаре 1 и свойствами перекачиваемой жидкости.)

С учетом гидравлических потерь во всасывающем трубопроводе  $h_{\text{пв}}$  и создания скоростного напора  $w_{\text{вс}}^2/(2g)$  *реальная* предельная геометрическая высота всасывания насоса (также при условии  $p_{\text{вс}} = p_t$ ) равна

$$h_{\text{гв}}^{\text{пред}} = \frac{p_1 - p_t}{\rho g} - \frac{w_{\text{вс}}^2}{2g} - h_{\text{пв}}. \quad (3.8)$$

Из уравнения (3.8) видно, что предельная высота всасывания уменьшается с понижением давления  $p_1$  и увеличением  $p_t$ , т.е. с увеличением температуры жидкости. К уменьшению  $h_{\text{гв}}^{\text{пред}}$  приводят также повышенные скорости во всасывающем трубопроводе и гидравлические потери в нем.

При перекачивании горячих жидкостей, когда давление насыщенных паров  $p_t$  близко к  $p_1$ , возможно получение нулевого и даже отрицательных значений  $h_{\text{гв}}^{\text{пред}}$ . Это означает, что для перекачивания горячих жидкостей насосы должны быть установлены на одном уровне с жидкостью в расходном резервуаре 1 или даже ниже его. В последнем случае говорят, что насос работает “под заливом”.

Методика расчета предельной высоты всасывания с помощью формулы (3.8) справедлива для большинства типов насосов, хотя сами процессы всасывания для разных насосов могут существенно различаться. Так, например, у объемных насосов с *периодическим* забором жидкости в насос гидравлические потери  $h_{\text{пв}}$  возрастают на величину *инерционных потерь*, связанных с периодическими актами перевода жидкости из неподвижного

состояния в движущееся. Эти и другие особенности расчета  $h_{гв}^{пред}$  будут отражены при рассмотрении соответствующих типов насосов.

Итак, для обеспечения нормальной работы насоса он должен быть расположен на любой высоте  $h_{гв}$ , меньшей  $h_{гв}^{пред}$ . Подчеркнем: нужно четко различать величины  $h_{гв}$  и  $h_{гв}^{пред}$  при выполнении технологических расчетов. Например, в формуле (3.3) для определения напора  $H$  следует использовать реальную высоту всасывания насоса  $h_{гв}$ : она может быть разной, но не должна превышать  $h_{гв}^{пред}$ .

### 3.1.4. О мощности и КПД насосов

**Полезная мощность**  $N_n$  при работе насосной установки рассчитывается на основе следующих рассуждений. Как известно, работа равна произведению силы на путь. В данном случае сила — это вес поднимаемой жидкости, а путь — ее перемещение в направлении действия силы, т.е. расчетная высота подъема жидкости  $H$ . Количество перекачиваемой насосом жидкости характеризуется массовым расходом  $\rho V$  (кг/с), т.е. в единицу времени на высоту  $H$  поднимается жидкость, вес которой  $\rho Vg$ . Очевидно, произведение последнего на напор  $H$  дает полезную мощность в Вт:

$$N_n = \rho VgH. \quad (3.9)$$

**Мощность, потребляемая насосом** (мощность на валу насоса),  $N$  больше полезной вследствие потерь в самом насосе (гидравлические потери, утечки жидкости через клапаны ввиду невозможности их мгновенного открытия и закрытия), которые учитываются коэффициентом полезного действия насоса  $\eta_n$ :

$$N = \frac{N_n}{\eta_n} = \frac{\rho VgH}{\eta_n}. \quad (3.10)$$

Величина  $\eta_n$  характеризует совершенство конструкции и экономичность эксплуатации насоса. Ее обычно представляют как произведение трех сомножителей, каждый из которых имеет определенный физический смысл:

$$\eta_n = \eta_v \eta_r \eta_{мех}. \quad (3.11)$$

**Коэффициент подачи**  $\eta_v = V/V_t$ , где  $V_t$  — теоретическая производительность насоса. Коэффициент  $\eta_v$  учитывает потерю производительности насоса за счет утечек жидкости через зазоры, клапаны, сальники и т.д. (см. разд. 3.3.2). При этом энергия, затраченная на увеличение напора потерянной жидкости, тратится безвозвратно. Значит, в действительности энергия за-

трачивается на перекачивание потока жидкости  $V_T > V$ , и в расчетной формуле должна фигурировать величина  $V_T$  или равная ей  $V/\eta_v$ , отсюда и появление множителя  $\eta_v$  в знаменателе формулы (3.10) как составляющей  $\eta_n$  при использовании  $V$  вместо  $V_T$ .

**Гидравлический КПД**  $\eta_r = H/H_T$  учитывает потери напора  $h_{п}^{нас}$  при движении жидкости через насос. Здесь  $H_T$  — теоретический напор, он больше полезного (используемого потребителем) на величину  $h_{п}^{нас}$ . По существу,

$$\eta_r = \frac{H_T - h_{п}^{нас}}{H_T} = 1 - \frac{h_{п}^{нас}}{H_T}.$$

Строго говоря, в формуле (3.10) должна стоять величина  $H_T$  или равная ей величина  $H/\eta_r$ . Отсюда и появляется в (3.11) сомножитель  $\eta_r$  как составляющая  $\eta_n$ .

**Механический КПД**  $\eta_{мех}$  характеризует потери мощности на механическое трение в насосной установке (в подшипниках, сальниках и т.д.).

Значение  $\eta_n$  зависит от производительности насоса, его конструкции и степени износа. Для разных насосов  $\eta_n$  колеблется в весьма значительных пределах — от 0,5 до 0,95.

**КПД передачи**  $\eta_{пер}$  позволяет учесть при выборе электродвигателя к насосу потери мощности из-за механических потерь в передаче от электродвигателя к валу насоса. Величина  $\eta_{пер}$  близка к единице и составляет 0,95 — 0,99.

**Мощность, затрачиваемая двигателем**, определяется в итоге следующим образом:

$$N_{дв} = \frac{N}{\eta_{пер}} = \frac{N_{п}}{\eta_n \eta_{пер}} = \frac{N_{п}}{\eta}. \quad (3.12)$$

**КПД насосной установки**  $\eta$  равен

$$\eta = \eta_n \eta_{пер}.$$

Заметим также, что при подборе двигателя его мощность принимают на 10—50% больше рассчитанной по формуле (3.12) с учетом перегрузок в момент пуска насоса, причем больший запас берут для насосов меньшей мощности.

## 3.2. ПОРШНЕВЫЕ НАСОСЫ

### 3.2.1. Принцип действия и классификация насосов

Простейший поршневой насос изображен на рис. 3.3. В цилиндре 1, внутренняя поверхность которого хорошо обработана, совершает возвратно-поступательное движение поршень 2, установленный практически без зазора между ним и цилиндром.

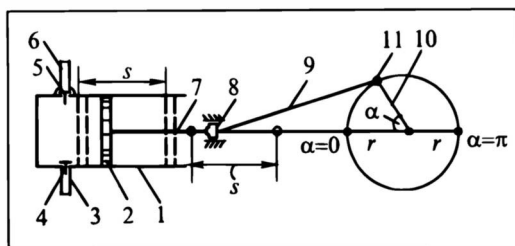


Рис.3.3. Схема и принцип действия поршневого насоса:

1 — цилиндр, 2 — поршень, 3, 6 — трубопроводы, 4, 5 — клапаны, 7 — шток, 8 — ползун, 9 — шатун, 10 — кривошип, 11 — палец кривошипа

Уплотнение осуществляется с помощью уплотнительных колец, расположенных на наружной цилиндрической поверхности поршня; для уменьшения трения колец о внутреннюю поверхность рабочего цилиндра используется смазка. Преобразование вращательного движения вала двигателя (а точнее — вала редуктора) в возвратно-поступательное движение поршня осуществляется с помощью коленчатого вала либо кривошипно-шатунного механизма (как показано на рис. 3.3). Этот механизм состоит из штока 7, ползуна 8 (он движется в направляющих плоскостях), шатуна 9 и кривошипа 10. Шатун 9 шарнирно соединен с ползуном 8 и кривошипом 10. При вращении кривошипа вместе с валом ползун 8, а с ним и поршень 2 совершают *возвратно-поступательные движения*.

За один оборот кривошипа (цикл) поршень совершает ход вправо (по рис. 3.3 — ход всасывания) и ход влево (ход нагнетания). В крайних положениях, где поршень меняет направление движения, он на мгновение останавливается (так называемые "мертвые точки"). Потом скорость перемещения поршня увеличивается от нуля до максимального значения и снова уменьшается вплоть до мгновенной остановки. Далее — вновь разгон поршня и его замедление. Затем цикл повторяется.

При таком *неравномерном* возвратно-поступательном движении поршня возникает проблема компенсации больших инерционных усилий, передающихся на фундамент под насосом. Поскольку величина последних зависит от частоты вращения (число оборотов в единицу времени) кривошипа, то закономерно ограничение частоты вращения вала (числа ходов поршня), связанное с допустимыми нагрузками на фундамент. В случае бетонных фундаментов, выдерживающих значительно *большие нормальные нагрузки* (на сжатие), чем тангенциальные (на срез), применение поршневых насосов с *вертикальным* перемещением поршня (и воздействием таких же нагрузок на фундамент) по-

Таблица 3.2. Классификации поршневых насосов

Признак	Разновидности	Отличительные черты
Способ привода	Электроприводные (с по- мощью кривошипно-шатун- ного механизма или коленча- того вала) Прямодействующие	От электродвигателя с враща- тельным движением вала через редуктор  От машины (например, паро- вой) с возвратно-поступа- тельным движением штока
Создаваемое давление	Ручные Низкого давления Среднего давления Высокого давления	— $p < 1 \text{ МПа}$ $1 < p < 2 \text{ МПа}$ $p > 2 \text{ МПа}$
Конструкция поршня	Собственно поршневые Плунжерные (скальчатые)	$S/D = 0,5 \div 1,5$ $S/D = 2 \div 8$
Частота враще- ния	Быстроходные Среднескоростные Тихоходные	$120\text{—}300 \text{ об/мин}$ $60\text{—}120 \text{ об/мин}$ $40\text{—}60 \text{ об/мин}$
Направление движения порш- ня	Горизонтальные  Вертикальные	Тангенциальная нагрузка на фундамент  Нормальная нагрузка на фун- дамент
Кратность дей- ствия	Однократного (простого) дей- ствия Двойного действия Четверного действия Тройного действия	Увеличение равномерности подачи жидкости ↓
Производитель- ность	Малой производительности Средней производительности Большой производительности	$V < 0,005 \text{ м}^3/\text{с}$ $0,005 < V < 0,08 \text{ м}^3/\text{с}$ $V > 0,08 \text{ м}^3/\text{с}$

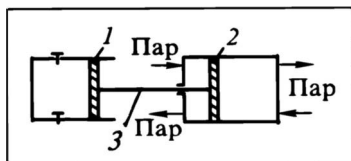
звolyет несколько увеличить верхний предел допускаемой частоты вращения кривошипа (см. табл. 3.2 и пояснения к ней).

В начале хода всасывания в рабочем объеме цилиндра создается разрежение, под действием которого жидкость из всасывающего трубопровода 3 поступает в насос, открывая всасывающий клапан 4 за счет своего напора. Нагнетательный клапан 5 при этом закрыт из-за меньшего давления под поршнем, чем в нагнетательном трубопроводе. В начале хода нагнетания вследствие повышения давления жидкости в цилиндре под поршнем всасывающий клапан 4 закрывается, открывается нагнетательный клапан 5, и жидкость выталкивается в нагнетательную линию 6. Затем ходы всасывания и нагнетания повторяются. Заметим, что при работе такого насоса в каждый данный момент он либо всасывает (нет нагнетания), либо нагнетает (нет всасывания).

Легко видеть, что ход поршня  $S$  связан с радиусом кривошипа  $r$  простым соотношением  $S = 2r$  (см. рис. 3.3 — крайние по-

Рис. 3.4. Прямодействующий (паровой) насос:

1 — поршень насоса, 2 — поршень паровой машины, 3 — шток



ложения поршня при  $\alpha = 0$  и  $\alpha = \pi$ ). В самом деле, при повороте кривошипа от  $\alpha = 0$  (левая мертвая точка) до  $\alpha = \pi$  (правая мертвая точка) ползун, а следовательно и поршень, перемещается на расстояние  $S = 2r$ .

Четкая классификация поршневых насосов весьма затруднительна ввиду значительного многообразия конструкций и признаков, по которым их можно подразделять. Частичная классификация по некоторым признакам представлена в табл. 3.2. В настоящее время широко используются *электроприводные* насосы — с приводом от электродвигателя посредством кривошипно-шатунного механизма или коленчатого вала. Наряду с ними до недавнего времени применялись *прямодействующие* (чаще всего паровые) насосы, отличающиеся легкой регулировкой производительности за счет изменения расхода пара (рис. 3.4).

Движение штока в прямодействующих насосах осуществляется за счет обратно-поступательного перемещения поршня в паровой машине путем поочередной подачи пара (с помощью золотника) то в левую (от поршня), то в правую часть цилиндра. Шток жестко соединен с поршнями паровой машины и насоса. Перемещение одного вызывает соответствующее перемещение второго. Прямодействующие насосы широко применялись в химической промышленности ввиду их взрыво- и пожаробезопасности. Использование в настоящее время электродвигателей во взрыво- и пожаробезопасном исполнении значительно сужает область применения прямодействующих насосов из-за их громоздкости.

Максимальное давление в поршневых насосах ограничено возникновением изгибающего момента, действующего на поршень при значительной разнице давлений с разных его сторон. При этом возможны деформация поршня (утрированно показана на рис. 3.5) и нарушение уплотнения между поршнем 1 и цилиндром 3. Это приводит к порче внутренней поверхности цилиндра и утечке жидкости из зоны повышенного давления в зону с меньшим давлением. Поэтому при создании давлений более 1 МПа применяют **плунжерные** (иначе — **скальчатые**) насосы (рис. 3.6), в которых поршень выполнен в виде продолговатого (часто — пустотелого) цилиндра 2, называемого плунжером (еще одно его название — скалка). К достоинствам плунжерных насосов относят также их более простое изготовление: нет необходимости в тщательной обработке внутренней поверхности все-



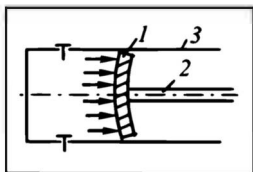


Рис.3.5. Деформация поршня:

1 — поршень, 2 — шток, 3 — корпус

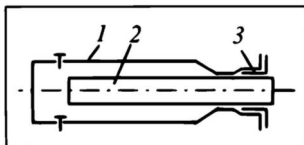


Рис.3.6. Схема плунжерного насоса:

1 — цилиндр, 2 — плунжер (скалка), 3 — сальник

го цилиндра, это требуется лишь в небольшой узкой части перехода к сальнику 3, с помощью которого обеспечивается уплотнение.

Недостаток плунжерных насосов — худшее (по сравнению с поршневыми) использование рабочего объема цилиндра. Поэтому для получения достаточных производительностей плунжерные насосы вытянуты в длину: отношение  $S/D$  доходит до 5—8 против 0,5—1,5 для поршневых (здесь  $D$  — диаметр поршня или плунжера).

Движение поршня (плунжера), как указано ранее, сопровождается возникновением инерционных сил (нагрузок на фундамент и детали насоса), поэтому максимальная частота вращения кривошипа ограничена (не более 300 об/мин)\*. При этом различают **быстроходные** насосы ( $n = 120 \div 300$  об/мин), обеспечивающие повышенную производительность и исполненные чаще всего с вертикальным (вверх—вниз) перемещением поршня; **среднескоростные** ( $n = 60 \div 120$  об/мин) и **тихоходные** ( $n = 40 \div 60$  об/мин). Последние применяют при перекачке жидкостей с высокой вязкостью, при создании больших напоров ( $> 5$  МПа) и наличии длинных трубопроводов.

Насос, изображенный на рис. 3.3, называют насосом **однократного (простого) действия**. Для увеличения производительности (подачи) применяют насосы **двойного** (двукратного) **действия**, у которых работают обе стороны поршня — попеременно на всасывание и нагнетание (рис. 3.7). Уплотнение между движущимся штоком и неподвижным корпусом насоса обеспечивают сальником 5. При движении поршня вправо жидкость через левый всасывающий клапан поступает из всасывающего трубопровода в левую полость цилиндра (акт всасывания); при

\* Здесь и в таблице 3.2 указана частота вращения в об/мин, как это принято во многих справочниках и каталогах. В расчетных формулах используется частота вращения  $n$  в  $c^{-1}$ .

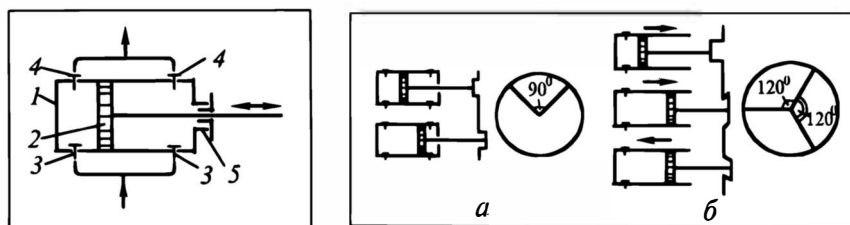


Рис.3.7. Схема работы насоса двойного действия:

1 — цилиндр, 2 — поршень, 3 — всасывающие клапаны, 4 — нагнетательные клапаны, 5 — сальник

Рис.3.8. Схема работы насосов четверного (а) и тройного (б) действия

этом из его правой полости жидкость выбрасывается через правый нагнетательный клапан в нагнетательный трубопровод (акт нагнетания). При обратном (влево) движении поршня всасывание происходит через правый всасывающий клапан, а нагнетание — через левый нагнетательный. Таким образом, за один оборот вала насос осуществляет два акта всасывания и два акта нагнетания, т.е. можно говорить об удвоении производительности. Подчеркнем, что равномерность подачи насоса двойного действия выше, чем насоса простого действия, по крайней мере, нет временных промежутков (только мгновения — точки на оси времени), когда всасывание или подача отсутствуют. Вопрос о **неравномерности подачи** поршневых насосов будет подробно рассмотрен в разд.3.2.3, 3.2.4, а пока отметим, что для повышения равномерности подачи жидкости (см. табл. 3.2) используют насосы:

— **четверного** (четырёхкратного) **действия**, представляющие собой два насоса двойного действия, работающих на один трубопровод от одного коленчатого вала (рис.3.8, а), но с запаздыванием (сдвигом по фазе) на  $1/4$  оборота ( $\pi/2$ );

— **тройного** (трехкратного) **действия** (триплексы), состоящие из трех насосов простого действия с общим коленчатым валом, кривошипы которых расположены под углом  $120^\circ$  (рис.3.8, б).

Насосы четверного и тройного действия занимают больше места и существенно дороже простых поршневых насосов. Насосы большей кратности действия не используются.

### 3.2.2. Производительность

Для насоса простого действия за один оборот кривошипа происходит один акт всасывания и один акт нагнетания (выталкивания) порции жидкости. При этом объем порции жидкости за один оборот (или ход) в идеале составляет

$$V_0 = FS,$$

где  $F = \pi D^2/4$  — площадь поршня или плунжера,  $S$  — ход.

При частоте вращения кривошипа  $n$  (в секунду!) **идеальная производительность** (подача) **насоса простого действия** составит

$$V_{\text{ид}} = FS n. \quad (3.13)$$

В реальных условиях работы поршневого насоса в самом начале стадии нагнетания (поршень только пошел влево, см. рис. 3.3) всасывающий клапан закрывается не мгновенно (ввиду конечной скорости движения тарелки клапана), и часть уже попавшей в цилиндр жидкости возвращается из него во всасывающий трубопровод. Аналогично, в момент начала всасывания нагнетательный клапан закрывается также не мгновенно, а с некоторой конечной скоростью. Поэтому “всасывание” некоторого количества жидкости под поршень цилиндра происходит *не из всасывающего, а из нагнетательного трубопровода*. Такая (с запаздыванием) работа клапанов приводит к уменьшению **реальной производительности насоса простого действия** по сравнению с идеальной:

$$V_I = V_{\text{ид}} \eta_v = FS n \eta_v, \quad (3.14)$$

где  $\eta_v < 1$  — коэффициент подачи.

Отметим также возможные потери жидкости через неплотности, сальники и т.д. Они, как правило, невелики и не сказываются существенно на величине коэффициента подачи  $\eta_v$ .

**Идеальная (теоретическая) производительность насоса двойного действия** складывается из объемов жидкости, нагнетаемых поршнем при движении справа налево —  $FS$  и при обратном движении —  $(F - f)S$ , где  $f$  — площадь поперечного сечения штока.

Таким образом, реальная производительность насоса двойного действия

$$V_{II} = V_{\text{ид}} \eta_v = (2F - f)S n \eta_v. \quad (3.15)$$

Если пренебречь площадью штока, полагая  $f \ll F$ , то производительность насоса двойного действия будет вдвое больше, чем насоса простого действия:

$$V_{II} \approx 2FS n \eta_v. \quad (3.15a)$$

В общем случае для насоса **любой кратности действия**  $i$ :

$$V_i = iFS n \eta_v \quad \text{при } i = 1; 3; \quad (3.16)$$

$$V_i = 0,5i(2F - f)S n \eta_v \quad \text{при } i = 2; 4. \quad (3.16a)$$

При  $f \ll F$  производительность насоса  $V_i$  любой кратности действия ( $i = 1; 2; 4; 3$ ) определяется по формуле (3.16).

Коэффициент подачи  $\eta_v$  зависит от производительности насоса (см. табл. 3.2) и его физического состояния. Опыт эксплуа-

тации насосов позволил установить следующие примерные значения коэффициентов подачи насосов при их нормальном рабочем состоянии:

малая производительность . . . . .  $\eta_v = 0,85 \div 0,90$   
 средняя производительность . . . . .  $\eta_v = 0,9 \div 0,95$   
 большая производительность . . . . .  $\eta_v = 0,95 \div 0,99$

Понижение коэффициента подачи  $\eta_v$  по сравнению с приведенными значениями указывает на неисправность насоса, необходимость его ремонта или замены.

### 3.2.3. Закон движения поршня. Диаграмма подачи

Производительность насоса, определяемая по формулам (3.16) и (3.16а), характеризует объем подаваемой жидкости за единицу времени. Эти формулы не отражают неравномерности ее подачи, а в случае насоса простого действия — даже прерывистого характера подачи. Неравномерность подачи связана с переменной скоростью движения поршня: нулевой — в крайних (“мертвых”) положениях поршня и максимальной — где-то в середине его хода. Однако в большинстве непрерывных производств технология требует равномерной подачи материалов, в том числе и жидких. Кроме того, пульсация жидкости неблагоприятно влияет на механическую прочность и герметичность цилиндра насоса, трубопроводов, резервуаров и т.д. Далее будет показано, что характер подачи жидкости во времени безразличен и для работы самого насоса. Вместе с тем ряд процессов тепломассопереноса протекает более интенсивно при пульсирующей подаче жидкости — в силу особенностей самих процессов переноса или возникновения сопутствующих эффектов. Так, пульсирующую подачу жидкости направленно используют при осуществлении процесса экстракции (см. гл. 13) с целью увеличения межфазной поверхности и тем самым — эффективности аппаратов.

В любом случае — как при использовании пульсационной подачи жидкости, так и при осуществлении мер, направленных на уменьшение неравномерности подачи, — необходимо знать ее закономерности, чтобы уметь управлять ею.

#### *Закон движения поршня*

Средняя скорость движения поршня  $c_{cp}$  рассчитывается из простых соображений: за 1 оборот кривошипа поршень проходит путь  $2S = 4r$ ; за 1 секунду ( $n$  оборотов) этот путь, т. е. средняя скорость, составит  $c_{cp} = 2Sn = 4rn$  (м/с). Переменный темп подачи жидкости зависит от скорости (*переменной* во времени!)

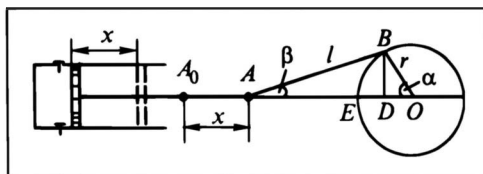


Рис.3.9. К определению зависимости перемещения поршня ( $x$ ) от угла поворота кривошипа ( $\alpha$ )

движения поршня  $s$ . Последняя определяется как производная перемещения поршня  $x$  (рис.3.9) по времени  $\tau$  и зависит от угла поворота кривошипа  $\alpha$ . Поэтому для нахождения переменной скорости движения поршня  $s(\alpha)$  надо прежде всего установить зависимость хода поршня  $x$  от угла поворота кривошипа  $x = x(\alpha)$ . Эту зависимость обычно называют “закон движения поршня”.

Поворот кривошипа на угол  $\alpha$  (от нулевого значения, когда шатун и кривошип расположены на одной линии  $A_0EO$ ) вызывает перемещение ползуна (из точки  $A_0$  в точку  $A$ , причем отрезок  $A_0A \equiv x$ ) и точно такое же перемещение поршня  $x$ . Из рис. 3.9 видно, что  $AB = A_0E = l$  — длина шатуна;  $OB = OE = r$  — радиус кривошипа. Обозначим угол шатуна с горизонталью  $\beta$  и опустим из точки  $B$  перпендикуляр  $BD$  на  $A_0O$ . Тогда из геометрического рассмотрения положений шатуна и кривошипа в начальный момент ( $\alpha = 0$ , прямая  $A_0EO$ ) и при повороте кривошипа на угол  $\alpha$  (ломаная  $ABO$ ) получаем

$$x = A_0A = A_0O - AO = A_0E + EO - (AD + DO).$$

Так как  $AD = l \cos \beta$  (из прямоугольного треугольника  $ABD$ ) и  $DO = r \cos \alpha$  (из треугольника  $OBD$ ), то

$$x = l + r - (l \cos \beta + r \cos \alpha) = l(1 - \cos \beta) + r(1 - \cos \alpha). \quad (3.17)$$

Поскольку обычно  $l:r \geq 5$ , то  $\cos \beta$  близок к 1. Поэтому закон движения поршня достаточно точно представляется зависимостью

$$x = r(1 - \cos \alpha). \quad (3.18)$$

Теперь можно найти скорость движения поршня как производную пути (перемещения)  $x$  по времени  $\tau$ , т.е.  $s = dx/d\tau$ . Так как  $x = x(\alpha)$  и  $\alpha = \alpha(\tau)$ , то по правилам дифференцирования сложной функции имеем

$$s = \frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{d\alpha} \frac{d\alpha}{d\tau} = \frac{d[r(1 - \cos \alpha)]}{d\alpha} \frac{d\alpha}{d\tau}.$$

Производная  $d\alpha/d\tau \equiv \omega$  представляет собой угловую скорость вращения кривошипа (в СИ — в  $\text{рад/с}$ ). Заметим, что  $\omega$  связана

с частотой вращения  $n$  в секунду очевидным соотношением:  $\omega = 2\pi n$ . Таким образом, выражение для скорости поршня имеет вид

$$c = \omega r \sin \alpha \quad (3.19)$$

Из (3.19) следует, что скорость поршня изменяется с  $\alpha$  по синусоидальному закону от  $c = 0$  при  $\alpha = 0$  и  $\alpha = \pi$  до  $c = c_{\max} = \omega r$  при  $\alpha = \pi/2, 3\pi/2$ .

### Диаграмма подачи

Так как скорость поршня изменяется в зависимости от угла  $\alpha$  по закону синуса, то и подача (всасывание или нагнетание) тоже изменяется по синусоидальному закону. Эту зависимость называют **диаграммой подачи**. В любой момент работы поршневого насоса его *мгновенная* (по  $\tau$ ) или *локальная* (по  $\alpha$ ) *производительность* (подача) равна

$$V = Fc \left[ \text{м}^2 \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}} \right] \text{ или } \left[ \frac{\text{м}^3}{\text{с}} \right].$$

За время  $d\tau$  объем всасываемой (подаваемой) насосом жидкости равен

$$dV = Fc d\tau = F\omega r \sin \alpha d\tau.$$

Поскольку  $\omega = d\alpha/d\tau$ ,  $\omega d\tau = d\alpha$ ,

$$dV = Fr \sin \alpha d\alpha. \quad (3.20)$$

Этот объем  $dV$  можно наглядно представить в виде элементарной площади под кривой  $Fr \sin \alpha - \alpha$  (рис.3.10) при изменении угла поворота кривошипа на  $d\alpha$ . Тогда вся площадь под синусоидой должна выражать полный (теоретический) объем жидкости  $V_0$  за один ход поршня:

$$V_0 = \int_0^\pi Fr \sin \alpha d\alpha = Fr \cos \alpha \Big|_\pi^0 = 2Fr = FS.$$

Для насоса *простого* (однократного) действия характерна прерывистая подача жидкости, связанная с чередованием актов всасывания и подачи. Степень неравномерности подачи в простейшем варианте может быть охарактеризована отношением максимальной мгновенной подачи к средней; у насосов простого

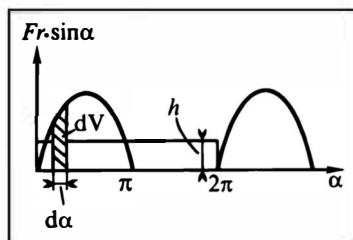


Рис.3.10. Диаграмма подачи поршневого насоса простого действия

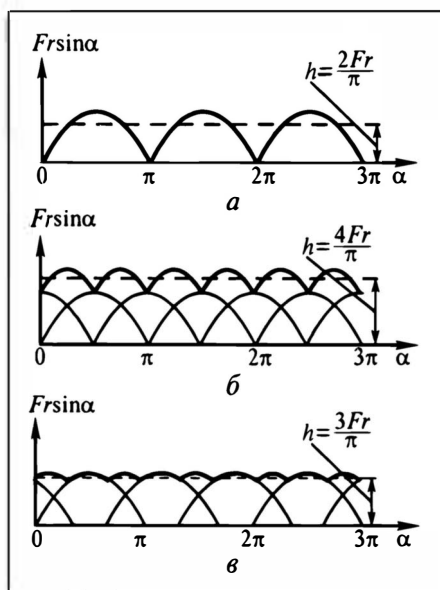


Рис.3.11. Диаграммы подачи жидкости поршневыми насосами: а — двойного действия, б — четверного действия, в — тройного действия

действия она — наибольшая. Равномерная за период  $2\pi$  подача жидкости на рис.3.10 изобразится в виде прямоугольника той же площади  $V_0 = FS$ ; высота этого прямоугольника  $h$  будет равна  $FS/(2\pi) = 2Fr/(2\pi) = Fr/\pi$ . Максимальная ордината синусоиды (при  $\alpha = \pi/2$  значение  $\sin \alpha = 1$ ) составляет  $Fr$ . Таким образом, отношение максимальной подачи к средней у насосов простого действия равно  $Fr/(Fr/\pi) = \pi \approx 3,14$ .

Для насоса *двойного* действия (рис. 3.11, а) равномерность подачи выше, чем у насоса простого действия, так как здесь нет прерывистости в подаче, нулевая подача характерна только для “мертвых” точек. Высота прямоугольника равной подачи здесь вдвое (при  $f < F$ ) больше, и степень неравномерности в этом случае в два раза меньше, т.е. равна  $\pi/2 \approx 1,57$ .

Еще меньшей степенью неравномерности характеризуются насосы *четверного* и *тройного* действия. Диаграмма подачи насоса четверного действия (два насоса двойного действия со сдвигом подачи по фазе на  $\pi/2$ ) представлена на рис.3.11, б. Сложение ординат здесь приводит к более равномерной подаче: пульсации получаются чаще, но с меньшей амплитудой; нулевая подача отсутствует. Степень неравномерности у насосов четверного действия есть отношение максимальной ординаты (она равна удвоенной ординате одного насоса при  $\alpha = \pi/4$ , т.е.  $2Fr \sin \pi/4 = \sqrt{2} Fr$ ) к средней ( $4FS/2\pi = 4Fr/\pi$ ):

$$\frac{\sqrt{2}Fr}{4Fr/\pi} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \approx 1,111.$$

Наибольшей равномерностью подачи отличается насос *тройного* действия (рис. 3.11, в), именно поэтому при классифика-

ции по кратности действия поршневых насосов принят такой ряд: 1; 2; 4; 3 (см. табл. 3.2). Здесь суммируются ординаты трех синусоид, сдвинутых одна по отношению к другой на  $120^\circ$  ( $2\pi/3$ ). Площадь диаграммы, ограниченная сверху суммарной кривой, изображает подачу всеми тремя цилиндрами. Наибольшая ордината графика равна  $Fr$  — это ордината одного насоса при  $\alpha = \pi/2$  (она же получается как сумма ординат для двух насосов при  $\alpha = \pi/6$  — в точке пересечения ординат; каждая из них составляет  $Fr \sin 30^\circ = 0,5Fr$ ). Средняя ордината в этом случае  $3FS/2\pi = 3Fr/\pi$ . Тогда степень неравномерности подачи составляет

$$\frac{Fr}{3Fr/\pi} = \frac{\pi}{3} \approx 1,047.$$

Таким образом, насос тройного действия обеспечивает приемлемую в большинстве практических случаев равномерность подачи.

На практике чаще всего используют более доступные и дешевые насосы простого и двойного действия. Для выравнивания их подачи применяют **воздушные колпаки**.

#### 3.2.4. Работа и расчет воздушных колпаков

Подача и движение жидкости по всасывающей и нагнетательной линиям будут ближе к равномерным, если удастся в ходе работы поршневого насоса поддерживать постоянной движущую силу, т.е. разность напоров — между расходным резервуаром и всасывающей стороной насоса и между нагнетательной стороной насоса и приемным резервуаром. Этой цели и служит установка непосредственно у поршневого насоса воздушных колпаков (в общем случае — газовых), аккумулирующих **избыток жидкости** сверх равномерной подачи.

Пусть давление воздуха в нагнетательном колпаке составляет  $p_{н.к}$ , а во всасывающем —  $p_{в.к}$ . Для обеспечения равномерного движения (подачи) жидкости движущие силы процесса ( $p_{н.к} - p_2$  — в нагнетательном трубопроводе и  $p_1 - p_{в.к}$  — во всасывающем) должны быть практически постоянными во времени. Но давления воздуха (газа) в колпаках  $p_{н.к}$  и  $p_{в.к}$  в принципе не могут быть абсолютно постоянными, так как вследствие аккумуляции жидкости в них изменяется занятый газом объем. Задача состоит в том, чтобы изменение давлений воздуха в колпаках было малозначимым; для этого, согласно закону Бойля—Мариотта ( $pV = \text{const}$ ), объем газа в них должен меняться незначительно. Это возможно, когда избыток (сверх равномерной подачи) жидкости и значительно меньше объема воздуха в кол-



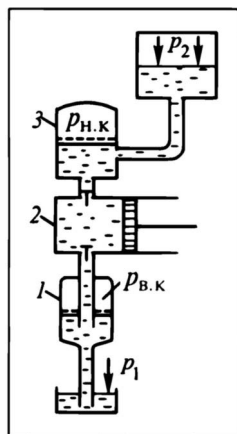


Рис.3.12. Поршневой насос с воздушными колпаками:

1 — колпак на всасывающей линии, 2 — насос, 3 — колпак на нагнетательной линии

паке  $V_{\text{возд}}$ . Это приведет к малым колебаниям разностей давлений (движущих сил) и как следствие — потоков жидкости во всасывающем и нагнетательном трубопроводах.

Таким образом, размеры (объем) воздушной части колпака связаны с объемом избытка жидкости  $u$  и допустимой неравномерностью подачи (для обеспечения абсолютно равномерной подачи потребовались бы воздушные колпаки бесконечных размеров).

Прежде чем приступить к расчету размеров воздушных колпаков, рассмотрим подробнее их работу. Воздушный колпак на всасывающей линии (рис. 3.12) обеспечивает *практически* (на приемлемом уровне) равномерную подачу жидкости на участке от расходного резервуара до колпака. Поршневой насос в период всасывания забирает из колпака жидкость, и ее уровень в нем понижается до минимального. В период нагнетания жидкость из всасывающего колпака насосом не забирается, а за счет разности давлений  $p_1 - p_{\text{в.к}} \approx \text{const}$  поддерживаются почти равномерное движение жидкости во всасывающем трубопроводе и пополнение ею колпака до максимального уровня (обозначен пунктиром). Затем цикл повторяется. Воздушный колпак на нагнетательной линии (см. также рис. 3.12) обеспечивает *практически* равномерную подачу жидкости на линии от колпака до приемного резервуара. При нагнетании поршневым насосом часть жидкости (избыток) аккумулируется в колпаке (максимальный уровень обозначен пунктиром); на стадии всасывания насос не подает, и этот избыток расходуется (уходит в приемный резервуар).

Как правило, воздушный колпак на нагнетательной линии больше, нежели на всасывающей. Дело в том, что в нагнетательном колпаке давление обычно на 1 — 2 порядка выше, чем во всасывающем. Поэтому в случае равных *относительных* колебаний давлений  $p_{\text{в.к}}$  и  $p_{\text{н.к}}$  при одинаковых объемах избытка жидкости  $u$  и колпаков  $V_{\text{в.к}}^{\text{возд}} = V_{\text{н.к}}^{\text{возд}}$  получились бы существенно различные абсолютные колебания  $p_{\text{в.к}}$  и  $p_{\text{н.к}}$ , а с ними и движущие силы  $p_1 - p_{\text{в.к}}$  и  $p_{\text{н.к}} - p_2$ . В результате движение жидкости во всасывающем и нагнетательном трубопроводах отличалось бы существенно различной неравномерностью. По-

Рис. 3.13. К определению избытка жидкости для поршневого насоса простого действия

этому чтобы выдержать в каждом из трубопроводов необходимую равномерность течения жидкости, значения  $V_{\text{возд}}$  в колпаках делают различными.

Заметим, что хотя наличие колпака на всасывающей линии и не влияет на равномерность подачи жидкости потребителю, оно создает благоприятные условия для работы насосной установки. В частности, при большой  $h_{\text{гв}}$  (см. рис.3.2) наличие колпака на всасывающей линии исключает возможность закипания жидкости в насосе из-за существенного уменьшения инерционных потерь во всасывающем трубопроводе (см. разд. 3.2.6).

Напомним: полная площадь под синусоидой (рис. 3.13) есть объем жидкости, *неравномерно* подаваемой насосом за один ход. Вертикальной штриховкой помечена равная ей площадь  $h \cdot 2\pi$ , характеризующая тот же объем жидкости, но *равномерно* подаваемой за один ход (здесь  $h$  — высота площади). Объем жидкости, аккумулируемой колпаком (иначе говоря, избыток  $u$  сверх равномерной подачи), для насоса простого действия ( $u_1$ ) изображен на диаграмме подачи площадью, помеченной кривой штриховкой. Для определения величины этой площади найдем “элементарный избыток”, т.е. разность между подаваемыми насосом элементарными объемами жидкости при повороте кривошипа на угол  $d\alpha$  — в случае неравномерной подачи ( $dV = Fr \sin \alpha d\alpha$ ) и в случае равномерной подачи  $h d\alpha = (Fr/\pi) d\alpha$ . Выражение  $h = Fr/\pi$  получено из очевидного равенства  $V_0 = F \cdot 2r = h \cdot 2\pi$ :

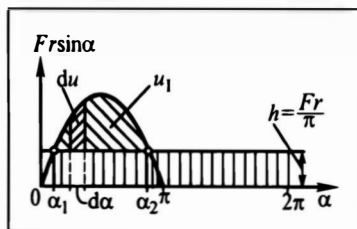
$$du = Fr \sin \alpha d\alpha - \frac{Fr}{\pi} d\alpha = Fr \left( \sin \alpha - \frac{1}{\pi} \right) d\alpha. \quad (3.21)$$

Полный избыток жидкости  $u_1$  за один оборот кривошипа найдем интегрированием (3.21) в пределах от  $\alpha_1$  до  $\alpha_2$  (для насоса простого действия):

$$u_1 = Fr \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left( \sin \alpha - \frac{1}{\pi} \right) d\alpha. \quad (3.22)$$

Углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  определяются как точки пересечения синусоиды  $V = Fr \sin \alpha$  и горизонтали  $V = Fr/\pi$ , так что  $\sin \alpha = 1/\pi$ . Отсюда  $\alpha_1 = 18^\circ 34'$  и  $\alpha_2 = \pi - \alpha_1 = 161^\circ 26'$ . Расчет по (3.22) с найденными пределами интегрирования дает

$$u_1 = 1,102 Fr, \quad (3.23) \quad \text{или} \quad u_1 = 0,551 FS. \quad (3.23a)$$



Следовательно, в случае насоса простого действия воздушный колпак в период подачи должен аккумулировать (а в период отсутствия подачи — расходовать) 55% объема жидкости, заполняющей рабочий цилиндр поршневого насоса.

Аналогичный расчет для насосов иной кратности действия требует соответствующих изменений пределов интегрирования (для насосов двойного действия), а для насосов четверного и тройного действия — еще и зависимостей  $V - \alpha$ . Приведем результаты анализа для насосов разной кратности действия:  $u_{II} = 0,225 FS$ ;  $u_{IV} = 0,042 FS$ ;  $u_{III} = 0,009 FS$ . Можно констатировать уменьшение избытка жидкости (неравномерности подачи) для насосов с кратностью действия от 1 до 4 в ряду 1; 2; 4; 3.

Опыт проектирования и эксплуатации поршневых насосов показывает, что для большинства технологических ситуаций можно считать допустимыми следующие колебания давления в колпаках (а значит, и объемов их воздушной части):

- во всасывающем — на ~10%,
- в нагнетательном — на ~2,5%.

Этому соответствуют следующие объемы воздушной части колпаков:

- всасывающего  $V \approx u/0,1 = 10u$ ,
- нагнетательного  $V \approx u/0,025 = 40u$ .

При этом разности давлений  $p_1 - p_{в.к}$  и  $p_{н.к} - p_2$  изменяются в малой степени, а потоки жидкости в трубопроводах — еще в меньшей, поскольку они пропорциональны корню квадратному из движущей силы (см. разд.2.3).

Так, например, для всасывающего колпака объем воздуха в нем равен  $10u$  (при 10%-м колебании давления). Пусть в некоем конкретном колпаке в среднем  $p_{в.к} = 0,01 МПа$ , а  $p_1 = 0,1 МПа$ . Тогда движущая сила в среднем равна  $0,1 - 0,01 = 0,09 МПа$ . За счет попадания в колпак избытка жидкости давление в нем изменится от  $p_{в.к}^{min}$  до  $p_{в.к}^{max}$ , и эта разность составит 10%, т.е.  $p_{в.к}^{min} = p_{в.к} - 0,05p_{в.к} = 0,0095 МПа$  и  $p_{в.к}^{max} = p_{в.к} + 0,05p_{в.к} = 0,0105 МПа$ . Это значит, что движущая сила на концах всасывающего трубопровода в ходе работы будет колебаться от  $0,1 - 0,0105 = 0,0895 МПа$  до  $0,1 - 0,0095 = 0,0905 МПа$ , т.е. очень мало относительно средней величины  $0,09 МПа$ .

Конструктивно принято считать, что жидкость занимает примерно 1/3 колпака, следовательно, 2/3 колпака занимает воздух. Тогда очевидно, что полный объем воздушного колпака

$$V_{колп} \approx 1,5V_{возд}.$$

Подчеркнем, что воздушный колпак обеспечивает уменьшение пульсации в трубопроводе, но не на участках между насосом и колпаком. Поэтому колпаки устанавливают как можно ближе к насосу.

### 3.2.5. Характеристика поршневых насосов

Зависимость между напором  $H$  и производительностью насоса  $V$  при постоянной частоте вращения называют **частной характеристикой поршневого насоса**. Как следует из самого принципа работы поршневых насосов, их производительность *не зависит* от напора, поскольку за один акт насос всасывает или выталкивает совершенно определенный объем жидкости (в идеальном случае  $V_0 = FS$ ), а число таких актов однозначно связано с числом оборотов (ходов)  $n$  в единицу времени. Поэтому *теоретическая* характеристика поршневого насоса в координатах  $H - V$  — вертикаль с постоянной абсциссой, отвечающей производительности насоса (рис.3.14, линия 1).

Реальная характеристика поршневого насоса обнаруживает некоторое отклонение от вертикали (линия 2): с ростом  $H$  производительность  $V$  несколько понижается. Иногда это объясняют сжимаемостью жидкости при повышении напора, однако этот эффект может сказаться лишь при очень высоких давлениях. Основная причина — понижение коэффициента подачи  $\eta_v$ : с ростом  $H$  все *большая* доля жидкости возвращается обратно (во всасывающую линию из цилиндра поршневого насоса, в цилиндр поршневого насоса из нагнетательной линии) из-за запаздывания клапанов в период их закрытия.

В принципе, поршневой насос может развивать любой напор (ограничение здесь связано лишь с мощностью двигателя и механической прочностью насоса — стенок корпуса, штока и т.д.); поэтому он развивает напор, определяемый **характеристикой трубопровода** (линия 3): **рабочая точка**  $M$  насоса лежит на пересечении характеристик насоса (линия 2) и сети (линия 3) (подробнее о характеристике сети см. разд. 3.1.2).

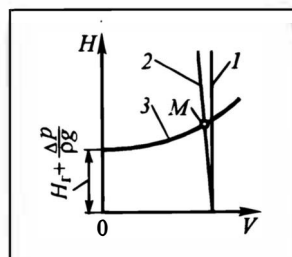


Рис.3.14. Определение рабочей точки поршневого насоса:

1 — теоретическая характеристика насоса, 2 — реальная характеристика насоса, 3 — характеристика сети,  $M$  — рабочая точка

### 3.2.6. Предельная высота всасывания

В основе расчета предельной геометрической высоты всасывания  $h_{гв}^{\text{пред}}$  лежит формула (3.8), однако для поршневого насоса она должна учитывать еще и затраты энергии на разгон жидкости (преодоление инерции — перевод ее из неподвижного состояния в движущееся) во всасывающем трубопроводе в ходе *каждого* цикла движения поршня. В геометрической интерпретации эти затраты энергии выражаются напором (высотой)  $h_{и}$ , *м жидк.ст.* (в энергетической интерпретации удельные затраты выражаются произведением  $gh_{и}$ , *Дж/кг*). Следовательно, для поршневого насоса

$$h_{гв}^{\text{пред}} = \frac{p_1 - p_t}{\rho g} - \frac{w_{вс}^2}{2g} - h_{пв} - h_{и}. \quad (3.24)$$

Для определения  $h_{и}$  воспользуемся уже известным (разд.2.2.2) приемом: приравняем формальное выражение, содержащее  $h_{и}$ , к физически обоснованному, выбрав для сопоставления силу инерции  $F_{и}$ . Формально она может быть записана в виде  $F_{и} = h_{и} \rho g f_{вс}$ , где  $f_{вс}$  — поперечное сечение всасывающего трубопровода. Здесь  $h_{и} \rho g = \Delta p_{и}$  — затраты энергии на преодоление инерционных сил, выраженные в  $H/m^2$ , а  $\Delta p_{и} f_{вс} = F_{и}$ , *Н*. Физически величину силы инерции можно записать в соответствии со вторым законом Ньютона как произведение массы жидкости  $m_{вс}$  во всасывающем трубопроводе (его длина —  $l_{вс}$ ) на ускорение  $a_{вс}$  этой жидкости:  $F_{и} = m_{вс} a_{вс}$ , причем  $m_{вс} = \rho f_{вс} l_{вс}$ .

Таким образом,

$$h_{и} \rho g f_{вс} = \rho f_{вс} l_{вс} a_{вс}, \text{ или } h_{и} = \frac{l_{вс}}{g} a_{вс}. \quad (3.25)$$

Из уравнений расхода для потоков во всасывающем трубопроводе и цилиндре поршневого насоса следует:

$$f_{вс} w_{вс} = Fc. \quad (3.26)$$

Отсюда, взяв производные по времени, можно получить связь ускорений поршня  $a$  и жидкости во всасывающем трубопроводе  $a_{вс}$ :

$$f_{вс} a_{вс} = Fa, \quad a_{вс} = a \frac{F}{f_{вс}}, \quad (3.27)$$

причем ускорение поршня  $a \equiv dc/dt$ .

Выше было установлено [см. уравнение (3.19)], что  $c = \omega r \sin \alpha$ ; поэтому

$$a \equiv \frac{dc}{dt} = \frac{d(\omega r \sin \alpha)}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} = \omega^2 r \cos \alpha. \quad (3.28)$$

Подставляя в (3.25) выражение для  $a_{\text{вс}}$  из (3.27) с учетом (3.28), получим

$$h_{\text{и}} = l_{\text{вс}} \frac{F}{f_{\text{вс}}} \frac{\omega^2 r \cos \alpha}{g}. \quad (3.29)$$

Для определения гидравлических потерь во всасывающем трубопроводе  $h_{\text{вс}}$  по формуле (2.31) необходимо располагать значением скорости  $w_{\text{вс}}$ . Последняя может быть найдена из (3.26) с учетом (3.19):

$$w_{\text{вс}} = \frac{F}{f_{\text{вс}}} c = \frac{F}{f_{\text{вс}}} \omega r \sin \alpha. \quad (3.30)$$

Тогда

$$h_{\text{пв}} = \left( \lambda \frac{l_{\text{вс}}}{d_{\text{вс}}} + \sum \xi \right) \frac{F^2}{f_{\text{вс}}^2} \frac{\omega^2 r^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (3.31)$$

Таким образом, предельная геометрическая высота всасывания поршневого насоса может быть определена по (3.24) с учетом выражений (3.29) для  $h_{\text{и}}$  и (3.31) — для  $h_{\text{пв}}$ .

Формулу (3.24) иногда записывают без скоростного напора  $w_{\text{вс}}^2/(2g)$ , добавляя единицу к сумме местных сопротивлений  $\sum \xi$ .

Из формул (3.29) и (3.31) видно, что слагаемые  $h_{\text{и}}$ ,  $h_{\text{пв}}$ , а следовательно и величина  $h_{\text{гв}}^{\text{пред}}$ , зависят от угла поворота кривошипа  $\alpha$ :

$$h_{\text{гв}}^{\text{пред}} = \frac{p_1 - p_t}{\rho g} - \left( \lambda \frac{l_{\text{вс}}}{d_{\text{вс}}} + \sum \xi \right) \frac{F^2}{f_{\text{вс}}^2} \frac{\omega^2 r^2 \sin^2 \alpha}{2g} - l_{\text{вс}} \frac{F}{f_{\text{вс}}} \frac{\omega^2 r \cos \alpha}{g}. \quad (3.32)$$

Очевидно, существует некоторое положение поршня (при соответствующем угле  $\alpha_{\text{кр}}$ ), при котором высота  $h_{\text{гв}}^{\text{пред}}$  минимальна. Это наиболее опасное (с точки зрения возможного закипания жидкости в цилиндре) положение поршня (т.е. значение  $\alpha_{\text{кр}}$ ) можно найти путем приравнивания нулю первой производной по  $\alpha$  от выражения (3.32). Но практика и опыт расчетов позволяют существенно упростить задачу.

**В отсутствие воздушного колпака на всасывающей линии** в подавляющем большинстве случаев  $h_{\text{и}} \gg h_{\text{пв}}$ , так что величиной  $h_{\text{пв}}$  можно пренебречь. Тогда наиболее опасным моментом становится начало хода поршня, когда  $\alpha = 0$ ,  $\cos \alpha = 1$  и инерционные потери — максимальны:

$$h_{\text{и}} = l_{\text{вс}} \frac{F}{f_{\text{вс}}} \frac{\omega^2 r}{g}. \quad (3.29a)$$

Заметим, что при этом “мертвом” положении поршня  $w_{\text{вс}} = 0$  и, соответственно,  $h_{\text{пв}} = 0$ . В этот момент

$$(h_{\text{гв}}^{\text{пред}})_{\text{б/к}} = \frac{p_1 - p_t}{\rho g} - l_{\text{вс}} \frac{F}{f_{\text{вс}}} \frac{\omega^2 r}{g}. \quad (3.33)$$

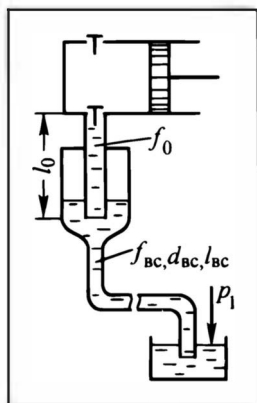


Рис.3.15. К расчету предельной геометрической высоты всасывания поршневого насоса при наличии колпака на всасывающей линии

Предельная высота всасывания  $h_{гв}^{пред}$ , определяемая по (3.33), зависит от ряда факторов. Из-за больших инерционных потерь при перекачке даже не очень горячих жидкостей (небольшие  $p_t$ ), но без колпака на всасывающей линии, возможно получение нулевого и даже отрицательных значений  $h_{гв}^{пред}$ . При перекачке горячих жидкостей (высокие  $p_t$ ) это тем более вероятно. Для увеличения  $h_{гв}^{пред}$  (а это расширяет возможности монтажа насосов в технологической схеме)

необходимо:

- работать с жидкостью с возможно более низкой температурой, дабы понизить  $p_t$  (охлаждение жидкости целесообразно, если затем не требуется снова ее нагревать);
- уменьшить длину всасывающего трубопровода и увеличить его диаметр;
- уменьшить частоту вращения  $n$  (и, следовательно,  $\omega$ , равную  $2\pi n$ ).

Заметим, что в рабочих условиях реализация этих мер не всегда возможна.

При заданной геометрической высоте всасывания  $h_{гв}$  может возникнуть задача определения, например, максимально допустимой частоты вращения (в секунду). Из (3.33) находим

$$n_{доп} = 0,5 \sqrt{\frac{f_{вс} g}{l_{вс} \pi^2 Fr} \left( \frac{p_1 - p_t}{\rho g} - h_{гв} \right)}.$$

Из этой формулы видно, что при чрезмерно большой  $h_{гв}$  возможны ситуации  $[h_{гв} \geq (p_1 - p_t)/(\rho g)]$ , когда насос не будет всасывать ни при какой частоте вращения: по формуле под радикалом получается отрицательное число.

Разумеется, возможна постановка задач определения предельных значений  $l_{вс}$ ,  $d_{вс}$  и других параметров системы насос — трубопровод.

**При наличии воздушного колпака на всасывающей линии** инерционные потери сохраняются лишь на небольшом участке  $l_0$  (по сравнению с  $l_{вс}$ ) с неравномерной подачей жидкости (рис. 3.15). В то же время почти по всей длине всасывающего трубопровода  $l_{вс}$  (за вычетом  $l_0$ ) жидкость движется равномерно с некоторой *средней* скоростью  $w_v = \text{const} = V/f_{вс}$ . По этой скорости и рассчитывают гидравлические потери во всасывающем трубопроводе  $h_{пв}$  — по формуле (2.31).

При работе поршневого насоса с воздушным колпаком также наиболее опасен (в аспекте инерционных потерь и возможного закипания жидкости) начальный момент хода поршня, когда  $\cos\alpha = 1$ ; максимальные инерционные потери для этого момента составляют

$$h_{\text{и}} = l_0 \frac{F}{f_0} \frac{\omega^2 r}{g}, \quad (3.296)$$

где  $f_0$  — сечение патрубка, соединяющего колпак с насосом (часто  $f_0 = f_{\text{вс}}$ ).

Заметим, что при наличии колпака значения  $h_{\text{пв}}$  и  $h_{\text{и}}$  сопоставимы по величине. Таким образом, предельную высоту всасывания поршневого насоса при наличии колпака можно рассчитывать по формуле

$$(h_{\text{гв}}^{\text{пред}})_{\text{к}} = \frac{p_1 - p_t}{\rho g} - \left( \lambda \frac{l_{\text{вс}} - l_0}{d_{\text{вс}}} + \sum \xi \right) \frac{V^2}{f_{\text{вс}}^2 \cdot 2g} - l_0 \frac{F}{f_0} \frac{\omega^2 r}{g}. \quad (3.33a)$$

Применение колпака на всасывающей линии и значительное уменьшение при этом инерционных потерь позволяет при прочих равных условиях существенно увеличить предельную геометрическую высоту всасывания.

Во избежание весьма часто наблюдаемой путаницы в понятиях  $h_{\text{гв}}$  и  $h_{\text{гв}}^{\text{пред}}$  еще раз (см. с. 272) подчеркнем разницу между ними. Предельная геометрическая высота всасывания  $h_{\text{гв}}^{\text{пред}}$  характеризует *максимально допустимую* высоту монтажа насоса по отношению к расходному резервуару. Реальная высота всасывания  $h_{\text{гв}}$  может быть любой, но для *нормальной* работы насоса должно быть соблюдено условие  $h_{\text{гв}} < h_{\text{гв}}^{\text{пред}}$ . В формулы для расчета напора  $H$  и далее — мощности  $N$  входит, естественно, *реальная* геометрическая высота всасывания  $h_{\text{гв}}$ .

Инерционные силы необходимо учитывать и при работе насоса с нагнетательным трубопроводом; здесь наиболее опасным является момент  $\alpha \rightarrow \pi$ . Подробнее об этом можно прочитать в литературе\*.

### 3.2.7. Расчет мощности, потребляемой поршневым насосом

Мощность рассчитывается по формулам (3.10) — (3.12). При этом полный напор  $H$  для проектируемой насосной установки определяется по формуле (3.3), а в случае эксплуатации насоса — по показаниям манометра и вакуумметра [формула (3.4)].

Заметим, что при расчете мощности никак не учитываются инерционные потери — они не входят в  $H$ . Дело в том, что они энергетически компенсируются в разных фазах движения поршня: энергия затрачивается на разгон поршнем массы жидкости и возвращается жидкостью поршню насоса при ее торможении.

\* См., например, [1].



### 3.2.8. Регулирование производительности поршневых насосов

В соответствии с формулой (3.14) производительность поршневого насоса может регулироваться следующими способами:

- варьирование скорости вращения кривошипа путем установки редуктора с разными передаточными числами (коробки передач); применяется на очень больших насосных установках;

- изменение хода поршня путем изменения положения пальца кривошипа, т.е. воздействие на  $r$  (так как  $S = 2r$ ); таким способом возможно и ступенчатое и плавное регулирование производительности (в последнем случае — не перестановкой пальца, а установкой винта);

- переборка части жидкости из нагнетательного трубопровода во всасывающий по обратной линии 2 с помощью задвижки 3 (рис.3.16); при таком способе регулирования налицо безвозвратные затраты энергии на повышение давления той части жидкости, которая возвращается по обратной линии во всасывающий трубопровод; этот способ регулирования является невыгодным в энергетическом плане и его применяют лишь при малом изменении производительности (менее 10—20%).

Ни в коем случае *не следует регулировать производительность поршневого насоса задвижками на всасывающей и нагнетательной линиях*. Во-первых, потому, что этот способ не позволяет регулировать производительность: все равно за один акт подачи насос будет всасывать и выталкивать одно и то же количество жидкости  $V_0 = FS$ . Во-вторых, и это гораздо важнее, попытки регулировать производительность поршневого насоса с помощью задвижки могут привести к большим неприятностям.

Действительно, при регулировании задвижкой на всасывающей линии возможно понижение давления под поршнем ниже  $p_r$ , а значит, и вскипание жидкости с сопутствующими этому гидравлическими ударами. Дело в том, что из-за гидравлического сопротивления задвижки ( $\Delta p_{\text{зав}}$ ) давление после нее ( $p'_{\text{вс}}$ ) будет значительно меньше давления до нее ( $p_{\text{вс}}$ ):  $p'_{\text{вс}} = p_{\text{вс}} - \Delta p_{\text{зав}}$ ; не исключено  $p'_{\text{вс}} < p_r$ .

При регулировании задвижкой на нагнетательной линии возникают большие давления в линии до задвижки  $p'_n = p_n + \Delta p_{\text{зав}}$ , которые могут порвать линию. При полном закрытии задвижки про-

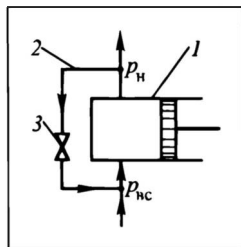


Рис.3.16. Регулирование производительности поршневого насоса с помощью вентиль на обратной линии:

1 — насос, 2 — обратная линия, 3 — вентиль (задвижка)

изойдет либо остановка поршня (а значит, и электродвигателя, что приведет к перегоранию его предохранителей), либо поломка (разрыв) линии или насоса.

### 3.3. ЦЕНТРОБЕЖНЫЕ НАСОСЫ

Среди лопастных насосов наиболее распространенными являются **центробежные**. Основным рабочим органом центробежного насоса (рис.3.17) является колесо 2, насаженное на вал 9 и помещенное в улиткообразном корпусе 1. Колесо представляет собой два диска, соединенных в единую конструкцию **лопастями (лопатками) 3**, разделяющими пространство между дисками на ряд криволинейных каналов для прохода жидкости. В одном из дисков (на рис. 3.17 — левый) имеется отверстие для входа жидкости в насос из всасывающего трубопровода 5. На входе в последний нередко устанавливают фильтр 7, препятствующий попаданию в насос грубых механических примесей. Кроме того, на всасывающей линии, как правило, ставят обратный клапан 6, закрывающийся под действием силы тяжести при отсутствии движения жидкости и тем самым предотвращающий опорожнение насоса. Перед первым пуском корпус насоса и всасывающий трубопровод заливают жидкостью по отдельной линии 4. Центробежные насосы для обеспечения достаточно высоких напоров, как правило, работают с частотой вращения рабочего колеса порядка 20 об/с (обоснование столь высоких скоростей вращения дано в разд. 3.3.1). Поэтому вал насоса соединяется при помощи муфты непосредственно с валом электродвигателя (чаще всего — без редуктора и других передаточных устройств). Герметизация места ввода вала 9 в корпус 1 осуществляется при помощи сальникового уплотнения 10.

При быстром вращении рабочего колеса жидкость в каналах между лопатками отбрасывается под действием центробежной силы от оси вращения к периферии и вытекает с большой скоростью в улиткообразный (спиралевидный) корпус 1, а оттуда — в нагнетательный трубопровод 8. При этом в приосевых зонах насоса создается разрежение, и жидкость из расходного резервуара под действием внешнего давления на ее свободную поверхность устремляется непрерывным потоком по всасывающему трубопроводу к входному отверстию насоса. Таким образом, *всасывание и нагнетание жидкости в центробежных насосах происходят непрерывно и равномерно.*

На рис. 3.17 изображен центробежный насос с **односторонним всасыванием** жидкости (слева). Для увеличения производительности и разгрузки вала от осевых усилий применяют центробежные насосы с **двухсторонним всасыванием** (рис. 3.18).

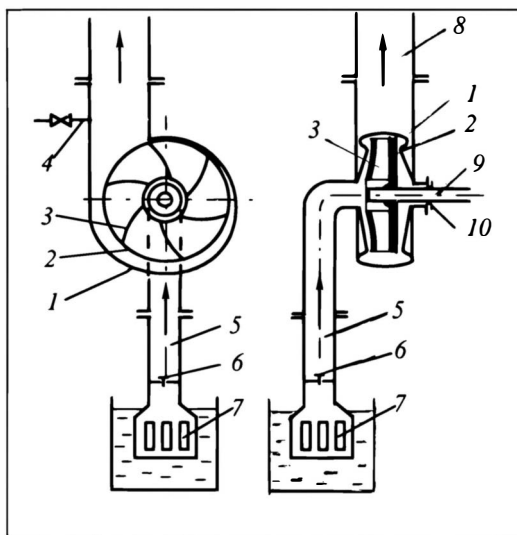


Рис.3.17. Центробежный насос:

1 — корпус, 2 — колесо, 3 — лопатки, 4 — линия для залива насоса жидкостью, 5 — всасывающий трубопровод, 6 — обратный клапан, 7 — фильтр, 8 — нагнетательный трубопровод, 9 — вал, 10 — сальник

Улиткообразная форма корпуса способствует плавному отводу жидкости из каналов между лопатками рабочего колеса в нагнетательный трубопровод, а также постепенному понижению скорости жидкости с целью повышения ее давления за счет преобразования кинетической энергии в потенциальную.

Для контроля работы насоса к всасывающему патрубку присоединяется вакуумметр, а к нагнетательному — манометр. Кроме того, на нагнетательной линии устанавливается задвижка, которая служит для регулирования подачи жидкости вплоть до ее прекращения. Для защиты насоса от гидравлического удара при внезапной остановке в нагнетательном трубопроводе также иногда устанавливают обратный клапан.

Пуск центробежного насоса производится обязательно под заливом и при *закрытой* задвижке на нагнетательном трубопроводе — во избежание

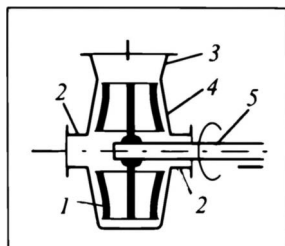
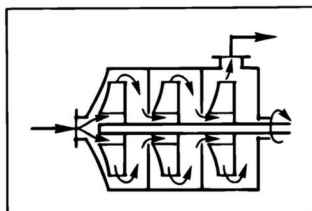


Рис.3.18. Схема центробежного насоса с двухсторонним всасыванием жидкости:

1 — рабочее колесо, 2 и 3 — всасывающие и нагнетательные патрубки, 4 — корпус, 5 — вал

Рис.3.19. Схема многоступенчатого центробежного насоса



перегрузки двигателя. Затем при медленном открывании задвижки насос начинает подачу жидкости в нагнетательный трубопровод. Чем длиннее последний, т.е. чем большую массу жидкости нужно привести в движение, тем медленнее следует открывать задвижку, сохраняя нормальный рабочий режим, характеризующийся отсутствием ударов и резкого шума в трубопроводе.

Рассмотренные выше центробежные насосы, где требуемый манометрический напор достигается при прохождении жидкости через одно рабочее колесо, называются **одноступенчатыми**, или **одноколесными**. Напор, создаваемый такими насосами, обычно составляет 35—50 м жидкостного столба (в случае перекачки воды это соответствует 0,35—0,5 МПа). Для создания более высоких напоров применяют **многоступенчатые** (многоколесные) центробежные насосы, состоящие из нескольких последовательно соединенных одинаковых колес, вращающихся на общем валу (рис.3.19). Жидкость последовательно проходит через все колеса и получает напор, равный (в идеале) сумме напоров, создаваемых каждым колесом. В современных многоступенчатых насосах достигается напор до 20 МПа.

Центробежные насосы изготавливают из различных конструкционных материалов — металлических (стали, чугуны, специальные сплавы, цветные металлы) и неметаллических (вплоть до керамических и фарфоровых) — в зависимости от химической агрессивности перекачиваемой жидкости.

Другой разновидностью лопастных насосов являются **пропеллерные (осевые)** насосы, применяемые для перемещения больших количеств жидкости (до 25 м<sup>3</sup>/с и более) при малых напорах (до 0,15 МПа). Рабочее колесо осевого насоса (см. рис. 3.1, ж) состоит из втулки с лопатками винтового профиля, закрепленной на валу. При вращении колеса лопатки сообщают жидкости движение не в радиальном направлении, как у центробежных насосов, а в осевом. Для уменьшения окружной (вращательной) скорости жидкости (а следовательно, и гидравлических потерь) перед нагнетательным трубопроводом устанавливается направляющий аппарат с продольными ребрами. КПД осевых насосов (по мощности) достигает 0,9 и выше.

При подборе лопастных насосов и технологическом их расчете необходимо определить их напор  $H$  и производительность  $V$ , их взаимосвязь (характеристику насоса), мощность

на валу, а также ряд других параметров и условий их работы. Ниже эти вопросы рассмотрены применительно к центробежным насосам.

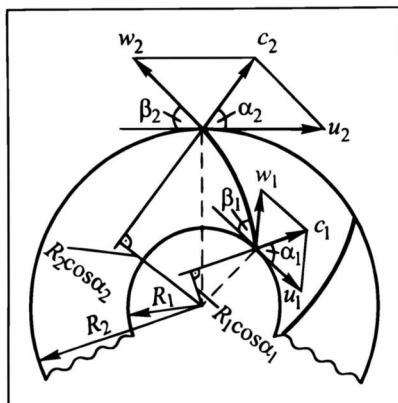
### 3.3.1. Основное уравнение. Напор

Для поршневых насосов, где замкнутые объемы жидкости принудительно выталкиваются потребителю, вопрос о том, какой напор *может* развивать насос, не возникает: это может быть в принципе любой напор. В центробежных насосах рабочее колесо может вращаться и при закрытой задвижке на напорной линии, создавая определенный (не беспредельный) напор. В рабочих режимах передаваемая механическая энергия от лопаток рабочего колеса к жидкости (иначе: получаемый жидкостью напор) ограничена и во многом зависит от конструкции рабочего колеса и параметров работы насоса. Поэтому для центробежных насосов вполне правомерен вопрос: какой напор *может* развивать центробежный насос?

Теоретически возможный напор  $H_t$ , создаваемый центробежным насосом, определим следующим образом. Рассмотрим движение жидкости между лопатками рабочего колеса (рис.3.20). При работе насоса каждая частица жидкости движется вдоль лопатки с относительной скоростью  $w$ , перемещаясь одновременно вместе с рабочим колесом по касательной к окружности (нормально к радиусу) с окружной (переносной) скоростью  $u$ . Абсолютная скорость частицы жидкости  $c$  равна геометрической сумме  $w$  и  $u$ . Обозначим:  $w_1$  и  $w_2$  — относительные скорости жидкости при входе на лопатку и на выходе с лопатки;  $R_1$  и  $R_2$  — внутренний и внешний радиусы колеса соответственно для окружностей входа жидкости в рабочее колесо и выхода из него;  $\omega$  — угловая скорость вращения колеса;  $u_1$  и  $u_2$  — окружные скорости на радиусах  $R_1$  и  $R_2$ . Очевидно,  $u_1 = \omega R_1$ ,  $u_2 = \omega R_2$ . А абсолютные скорости  $c_1$  и  $c_2$  на входе и на выходе с лопатки рабочего колеса определяются из параллелограммов скоростей (см. рис.3.20).

Угол между относительной скоростью  $w$  и обратным направлением окружной скорости  $u$  обозначим  $\beta$  и назовем его **конструктивным** (его величина определяется конструкцией лопатки). Соответственно:  $\beta_1$  — конструктивный угол на входе;  $\beta_2$  — конструктивный угол на выходе. Угол между векторами абсолютной скорости  $c$  и окружной  $u$  обозначим  $\alpha$  и назовем **технологическим** (его величина зависит от технологических параметров работы насоса: производительности, частоты вращения рабочего колеса и т.д.). Соответственно:  $\alpha_1$  — технологический угол на входе жидкости на лопатку,  $\alpha_2$  — технологический угол на выходе.

Рис.3.20. Картина скоростей жидкости на входе и выходе центробежного насоса



Известная теорема механики гласит, что изменение момента количества движения равно моменту равнодействующей внешних сил в системе. При массовом расходе жидкости  $G$  ( $\text{кг/с}$ ) имеем:  $Gc$  — количество движения в какой-либо точке лопатки;  $R\cos\alpha$  — плечо,  $GcR\cos\alpha$  — момент количества движения.

Тогда, согласно этой теореме, для сечений входа жидкости в рабочее колесо и выхода из него без учета потерь на трение между этими сечениями

$$Gc_2 R_2 \cos\alpha_2 - Gc_1 R_1 \cos\alpha_1 = M, \quad (a)$$

где  $M$  — вращающий момент (от электродвигателя).

При угловой скорости вращения колеса  $\omega$  мощность, переданная жидкости от электродвигателя посредством лопаток рабочего колеса, равна  $N = M\omega$ . В самом деле, момент внешней силы на валу рабочего колеса равен произведению этой силы  $F$  на радиус вала  $r_b$ , так что  $M\omega = F\omega r_b$ , причем  $\omega r_b = u_b$  — окружная скорость на валу. А полученное произведение  $Fu_b$  (силы на путь в единицу времени) есть работа в единицу времени, т.е. мощность  $N$ .

С другой стороны, мощность может рассматриваться (см. разд.3.1.4) как работа (в единицу времени), затрачиваемая на подъем  $G$  ( $\text{кг/с}$ ) жидкости на высоту  $H_T$  м, т.е.

$$N = GgH_T. \quad (б)$$

Умножим обе части равенства (а) на  $\omega$  и учтем соотношение (б), а также  $\omega R_2 = u_2$  и  $\omega R_1 = u_1$ :

$$Gc_2 u_2 \cos\alpha_2 - Gc_1 u_1 \cos\alpha_1 = GgH_T.$$

Отсюда получаем одну из форм записи **основного уравнения центробежного насоса**:

$$H_T = \frac{1}{g} (u_2 c_2 \cos\alpha_2 - u_1 c_1 \cos\alpha_1). \quad (3.34)$$

Уравнение (3.34) может быть также получено из *баланса моментов* для контура, охватывающего входное (на лопатки) и выходное (с лопаток) сечения для прохода жидкости. Для фраг-

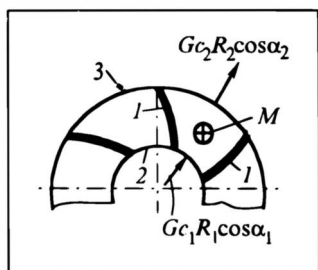


Рис.3.21. К балансу моментов в рабочем колесе насоса:

1 — лопатки, 2 — окружность входа, 3 — окружность выхода

мента такого контура (между двумя соседними лопатками на рис. 3.21) имеем, пренебрегая пока потерями энергии в самом насосе:

Приход:	$Pr = Gc_1 R_1 \cos \alpha_1$ ;
Уход:	$Ух = Gc_2 R_2 \cos \alpha_2$ ;
Источник:	$Ис = M$ ;
Сток:	$Ст = 0$ ;
Накопление:	$Нак = 0$ , так как рассматриваем стационарную работу насоса.

Тогда по уравнению (1.8) имеем

$$Gc_1 R_1 \cos \alpha_1 - Gc_2 R_2 \cos \alpha_2 + M - 0 = 0,$$

откуда следуют упомянутая теорема механики и уравнение (а).

Конструкторы насосов, как и технологи, их эксплуатирующие, заинтересованы в получении максимального напора. Этого можно добиться, уменьшая второй член правой части уравнения (3.34). Следовательно, надо стараться, чтобы угол  $\alpha_1$  был близок к  $90^\circ$ . К тому же при этом абсолютная скорость  $c_1$  будет направлена вдоль лопатки (см. рис.3.20), что обеспечивает *плавный (безударный) вход* жидкости в рабочее колесо. На практике обычно  $\alpha_1 = 85^\circ - 88^\circ$ , так что  $\cos \alpha_1$  практически равен нулю. Тогда основное уравнение центробежного насоса принимает вид

$$H_T = \frac{1}{g} u_2 c_2 \cos \alpha_2. \quad (3.34a)$$

Это соотношение не учитывает потерь напора внутри насоса  $h_{п\text{нас}}$ . Поэтому реальный напор насоса  $H$ , полезно используемый потребителем, меньше теоретического и равен

$$H = H_T - h_{п\text{нас}} = H_T \eta_r,$$

где  $\eta_r$  — гидравлический КПД насоса.

Полные потери напора внутри насоса  $h_{п\text{нас}}$  складываются из потерь на трение жидкости о лопатки и диски рабочего колеса (учитываются коэффициентом  $\eta'_r$ , равным  $0,8 - 0,95$ ) и вихреобразование между лопатками из-за неравномерности полей скоростей (учитываются коэффициентом  $\eta''_r$ , равным  $0,55 - 0,85$ ), так что  $\eta_r = \eta'_r \eta''_r$ . Обычно для насосов малой и средней произ-

водительности  $\eta_r = 0,6 \div 0,7$ ; для насосов большой производительности  $\eta_r = 0,7 \div 0,8$ .

Таким образом,

$$H = \frac{\eta_r}{g} u_2 c_2 \cos \alpha_2. \quad (3.346)$$

Анализ формулы (3.34) показывает, что *теоретический напор не зависит от свойств жидкости* — они не входят в уравнение. Иными словами, насос любую жидкость (в том числе и сжимаемую — газ) будет перекачивать на *одинаковую* высоту. Именно поэтому насос перед работой должен быть заполнен жидкостью. Если в нем воздух (его плотность —  $\rho_r$ ), то насос создаст напор  $H_r$  метров *воздушного* столба. Тогда жидкость под действием этого напора поднимется по всасывающей линии лишь на высоту  $H_r(\rho_r/\rho)$  над уровнем в расходном резервуаре и *не попадет* в рабочее колесо насоса. Вот почему центробежный насос запускается *под заливом*. Чтобы при остановке насоса жидкость не вытекала из него по всасывающей линии, на последней устанавливают обратный клапан (см. рис. 3.17, поз. б).

Заметим, что *полезный напор насоса  $H$*  в определенной мере зависит от свойств жидкости, в частности от вязкости: последняя влияет на величину потерь напора в рабочем колесе насоса и, следовательно, на  $\eta_r$ .

Теоретический напор  $H_T$  (реальный — тоже) зависит от окружной  $u_2$  и абсолютной  $c_2$  скоростей, причем  $u_2 = \omega R_2 = 2\pi n R_2$ . Это означает, что необходимый напор насоса  $H$  может быть обеспечен различными сочетаниями  $n$  и  $R_2$ .

Напор, развиваемый центробежным насосом, согласно формуле (3.34а) *зависит* от технологического угла выхода  $\alpha_2$ , следовательно и от конструктивного угла  $\beta_2$  (рис.3.22). Последний определяется формой лопаток и их расположением. Лопатки могут быть плоскими и радиально расположенными, так что  $\beta_2 = 90^\circ$  (рис. 3.22, б). Для лопаток, загнутых назад относительно направления вращения колеса, угол  $\beta_2 < 90^\circ$  (рис. 3.22, а). И,

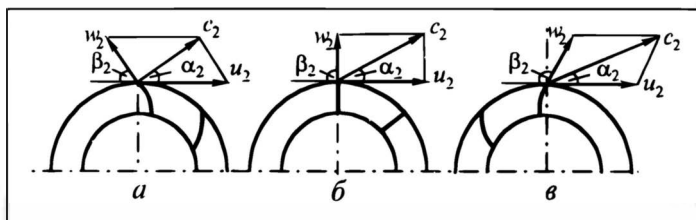


Рис.3.22. Влияние угла  $\beta_2$  на величину абсолютной скорости  $c_2$ :  
а —  $\beta_2 < 90^\circ$ , б —  $\beta_2 = 90^\circ$ , в —  $\beta_2 > 90^\circ$



наконец, лопатки могут быть загнуты вперед (рис. 3.22, в). Возникает вопрос: какое расположение лопаток является предпочтительным с точки зрения формирования напора  $H$ ?

Для ответа на этот вопрос напишем уравнение Бернулли для сечений входа жидкости в рабочее колесо и выхода из него, учитывая, что между сечениями есть источник напора  $H_T$  и потери в рабочем колесе  $h_{\text{п}}^{\text{нас}}$ :

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{c_1^2}{2g} + H_T = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{c_2^2}{2g} + h_{\text{п}}^{\text{нас}}.$$

Здесь  $H_T - h_{\text{п}}^{\text{нас}} = H$ . Разность  $z_2 - z_1$  знакопеременна (знак изменяется при повороте рабочего колеса на  $180^\circ$ ), причем она составляет десятки доли метра, поэтому ею можно пренебречь по сравнению с  $(p_2 - p_1)/(\rho g)$ , измеряемой десятками метров. Тогда

$$H = \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2g} = H_{\text{пот}} + H_{\text{кин}}.$$

Таким образом, развиваемый насосом напор можно представить как сумму приращений потенциального ( $H_{\text{пот}}$ ) и кинетического ( $H_{\text{кин}}$ ) напоров.

Назначение насоса — создание возможно *большого потенциального* напора. Большой кинетический напор вреден, так как выход жидкости из насоса в трубопровод с высокой скоростью сопряжен с большими гидравлическими потерями в последнем.

Возможны, конечно, ситуации, требующие высоких скоростей жидкости на выходе из рабочего колеса (создание дальнобойных жидкостных струй, например). Тогда вывод о направлении лопаток рабочего колеса будет обратным. Но, как правило, такие ситуации находятся за пределами химической технологии.

Именно преобразованию кинетического напора в потенциальный служит улиткообразная форма корпуса центробежного насоса: постепенное расширение сечения обеспечивает переход (согласно уравнению Бернулли) кинетической энергии в потенциальную. Этой же цели должно служить рациональное направление лопаток рабочего колеса: надо выбрать такое, при котором доля кинетического напора будет наименьшей.

Сопоставление скоростных диаграмм при различных углах выхода  $\beta_2$  в условиях одинаковых значений  $w_2$  и  $u_2$  представлено на рис. 3.22. Можно видеть, что с точки зрения получения наименьшего кинетического напора [величины  $c_2^2/(2g)$ ] наилучшими являются лопатки, отогнутые назад (рис. 3.22, а):  $H_{\text{кин}} \equiv (c_2^2 - c_1^2)/(2g)$  при этом минимально.

Наилучшие результаты работы центробежных насосов получаются при  $\beta_1 = 20 \div 40^\circ$  (обеспечивается безударный вход жидкости на лопатку) и  $\beta_2 = 15 \div 60^\circ$ .

### 3.3.2. Производительность

Производительность центробежного насоса может быть рассчитана по уравнению (1.3) как произведение живого сечения и абсолютной скорости. При этом необходимо помнить, что живое сечение трактуется как проекция сечения на плоскость, нормальную к направлению скорости. Для расчета производительности центробежных насосов такое представление неудобно, поэтому используют тождественное ему произведение сечения потока и проекции скорости на направление, нормальное сечению.

Обозначим (рис. 3.23):  $D = 2R_2$  — диаметр рабочего колеса;  $b$  — ширина лопатки на выходе;  $\delta$  — толщина лопатки;  $i_\lambda$  — количество лопаток (обычно кратно 3).

Полное сечение рабочего колеса на выходе равно  $\pi Db$ . Часть его, а именно  $i_\lambda b \delta$ , занята лопатками, тогда сечение  $f$  для прохода жидкости составляет

$$f = \pi Db - i_\lambda b \delta = b(\pi D - i_\lambda \delta) = \pi Db \psi,$$

где  $\psi = 1 - i_\lambda \delta / (\pi D)$  — коэффициент, учитывающий стеснение потока лопатками.

При абсолютной скорости жидкости  $c_2$  на выходе с лопаток и угле  $\alpha_2$  (см. рис. 3.23) нормальная к сечению  $f$  (радиальная) скорость  $c_R$  равна

$$c_R = c_2 \sin \alpha_2.$$

Следовательно, теоретическая производительность центробежного насоса равна

$$V_T = f c_R = \pi Db \psi c_2 \sin \alpha_2. \quad (3.35)$$

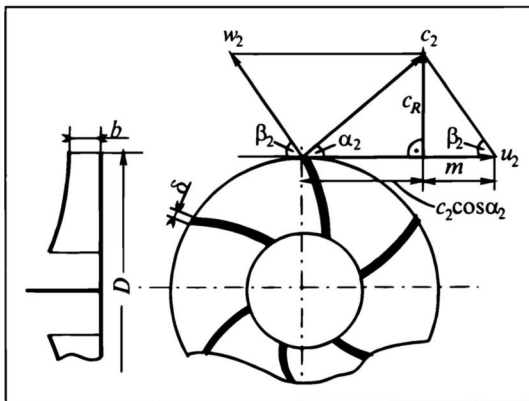


Рис. 3.23. К расчету производительности центробежного насоса

*Реальная* производительность центробежного насоса будет несколько ниже:

$$V = V_T \eta_v, \quad \text{или} \quad V = \pi D b \psi c_2 \sin \alpha_2 \eta_v, \quad (3.35a)$$

где  $\eta_v$  — коэффициент подачи, учитывающий переток жидкости из зон нагнетания в зоны всасывания через зазоры между рабочим колесом и корпусом (а иногда и утечки жидкости через сальники). Величина  $\eta_v$  изменяется в сравнительно узких пределах — от 0,95 до 0,98, причем большее значение отвечает насосам более высокой производительности.

### 3.3.3. Характеристики центробежных насосов

Одной из особенностей центробежного насоса является **взаимозависимость** развиваемого им напора и производительности. В самом деле, выражения (3.34б) и (3.35а) для напора и производительности содержат абсолютную скорость  $c_2$ , так что зависимости  $H = H(c_2)$  и  $V = V(c_2)$  демонстрируют связь  $H$  и  $V$ , заданную в параметрической форме. Зависимость между напором  $H$  и производительностью  $V$  для постоянной (заданной) частоты вращения носит название **частной характеристики центробежного насоса**. При выборе оптимального режима работы центробежного насоса целесообразно использовать его **универсальную характеристику**, которая представляет зависимости  $H$  от  $V$  при *различных* скоростях вращения рабочего колеса. Для технологов важно (в плане отыскания **рабочей точки центробежного насоса** — см. ниже) представить зависимость  $H$  от  $V$  в явном виде. Связь теоретических напора  $H_T$  и производительности  $V_T$  может быть установлена аналитически.

#### *Частная характеристика центробежного насоса*

Для отыскания *теоретической* характеристики центробежного насоса, т.е. зависимости  $H_T = H_T(V_T)$ , в явной форме достаточно лишь найти выражения для  $c_2$  из формул (3.34а) и (3.35) и приравнять их:

$$\frac{g H_T}{u_2 \cos \alpha_2} = \frac{V_T}{\pi D b \psi \sin \alpha_2},$$

откуда

$$H_T = \frac{V_T u_2 \cos \alpha_2}{g \pi D b \psi \sin \alpha_2} = \frac{V_T u_2}{g \pi D b \psi} \operatorname{ctg} \alpha_2. \quad (b)$$

Полученная зависимость имеет существенный недостаток: она содержит *технологический* угол  $\alpha_2$ . Выразим его через *конструктивный* угол  $\beta_2$ . Для этого рассмотрим параллелограмм скоростей жидкости на выходе из рабочего колеса (см. рис. 3.23).

Очевидно,

$$\operatorname{ctg} \alpha_2 = \frac{c_2 \cos \alpha_2}{c_R} = \frac{u_2 - m}{c_R} = \frac{u_2 - c_R \operatorname{ctg} \beta_2}{c_R} = \frac{u_2}{c_R} - \operatorname{ctg} \beta_2.$$

Но  $c_R = c_2 \sin \alpha_2$ , и из (3.35) находим

$$c_R = \frac{V_T}{\pi D b \psi}.$$

Тогда

$$\operatorname{ctg} \alpha_2 = \frac{u_2 \pi D b \psi}{V_T} - \operatorname{ctg} \beta_2.$$

Подставляя найденное значение  $\operatorname{ctg} \alpha_2$  в уравнение (в), получаем

$$H_T = \frac{V_T u_2}{g \pi D b \psi} \left( \frac{u_2 \pi D b \psi}{V_T} - \operatorname{ctg} \beta_2 \right),$$

или после преобразований

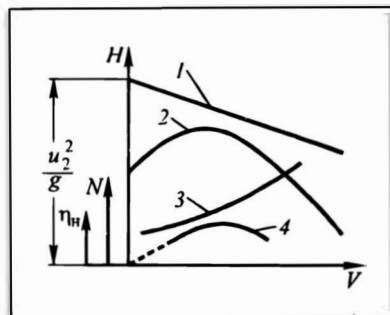
$$H_T = \frac{u_2^2}{g} - \frac{u_2 \operatorname{ctg} \beta_2}{g \pi D b \psi} V_T. \quad (3.36)$$

Эта *линейная* зависимость  $H_T$  от  $V_T$  представляет собой теоретическую характеристику центробежного насоса при заданной постоянной частоте вращения рабочего колеса. При  $\beta_2 < 90^\circ$  (лопатки отогнуты назад) с увеличением  $V_T$  теоретический напор  $H_T$  падает; при  $\beta_2 = 90^\circ$  ( $\operatorname{ctg} \beta_2 = 0$ ) теоретический напор  $H_T$  равен  $u_2^2/(2g)$  и не зависит от  $V_T$ ; наконец, при  $\beta_2 > 90^\circ$  (лопатки отогнуты вперед)  $H_T$  растет при увеличении  $V_T$ . Практически, как было показано ранее, для химиков-технологов наиболее важен случай  $\beta_2 < 90^\circ$ . При этом теоретическая зависимость напора от производительности изображается прямой *1* на рис.3.24. Подчеркнем: в рассматриваемом случае *увеличению производительности отвечает понижение напора, развиваемого насосом*.

Реальная частная характеристика центробежного насоса устанавливается экспериментально — путем измере-

Рис.3.24. Частная характеристика центробежного насоса:

*1* — теоретическая характеристика насоса ( $H_T - V$ ), *2* — реальная характеристика насоса ( $H - V$ ), *3* — зависимость мощности  $N$  от производительности  $V$ , *4* — зависимость КПД насоса от производительности  $V$



ния сопряженных значений напора насоса (как суммы показаний манометра и вакуумметра) и его производительности при различных степенях открытия задвижки на напорной линии. Она отклоняется от теоретической и в случае лопаток, отогнутых назад, имеет вид кривой 2, изображенной на рис.3.24. Большая разница между теоретическим и реальным напорами при малых производительностях насоса связана с потерями напора в самом насосе на трение и на гидравлический удар при переходе кинетической энергии жидкости в потенциальную. При полностью *закрытой* задвижке ( $V = 0$ ) основные потери напора обусловлены гидравлическим ударом; собственно потери на трение жидкости о лопатки рабочего колеса при этом невелики, поскольку жидкость не перемещается в рабочем колесе от окружности входа к окружности выхода. Если немного приоткрыть задвижку на напорной линии ( $V > 0$ ), то потери на гидравлический удар уменьшаются, однако несколько возрастут потери на гидравлическое сопротивление движению жидкости внутри насоса, но они еще существенно ниже потерь на удар. Поэтому реальная характеристика насоса с увеличением  $V$  поначалу приближается к теоретической. С ростом  $V$  соотношение упомянутых потерь (как и их сумма, обозначенная ранее как  $h_n^{\text{нас}}$ ) постепенно изменяется. При достаточно высоких производительностях  $V$  потери на гидравлический удар сводятся к минимуму (при этом вход жидкости на лопатки рабочего колеса близок к безударному), а потери на гидравлическое сопротивление — достаточно велики. С ростом  $V$  они продолжают возрастать, и реальная характеристика центробежного насоса все более отклоняется от теоретической.

С изменением производительности и напора изменяются также мощность, потребляемая насосом (кривая 3 на рис.3.24), и коэффициент полезного действия насоса  $\eta_n$  (кривая 4), имеющий максимальное значение при некоторой производительности насоса. Заметим, что именно в этой точке суммарные гидравлические потери в насосе  $h_n^{\text{нас}}$  минимальны.

### *Рабочая точка центробежного насоса*

Напомним, что насос при работе с заданным трубопроводом *должен* развивать напор, равный сопротивлению этого трубопровода. Поэтому рабочую точку центробежного насоса (точка  $M_1$  с координатами  $V_1, H_1$  на рис.3.25) можно определить как точку пересечения характеристики насоса ( $H - V$ ) и характеристики сети [формула (3.5)]. При этом центробежный насос обеспечивает производительность, при которой сопротивление в трубопроводе равно напору, создаваемому насосом.

Если нужно уменьшить подачу в сеть, то следует несколько прикрыть задвижку на нагнетательной линии. Тем самым будет увеличиваться коэффициент местного сопротивления задвижки  $\xi_3$ , входящий в  $\Sigma\xi$ , а значит, и множитель перед  $V^2$  в формуле (3.5). В результате характеристика сети пойдет более круто, и рабочая точка  $M_2$  получится при меньшей производительности ( $V_2 < V_1$ ).

Этот вывод, сделанный на основе геометрических построений на графике  $H-V$ , находит следующее физическое объяснение. Увеличение гидравлического сопротивления сети (за счет  $\xi_3$ ) потребовало работы насоса с *большим* напором. Но *росту напора* на нисходящей ветви (речь идет о насосе, в котором лопатки рабочего колеса отогнуты назад) *отвечает уменьшение производительности*  $V$ . Таким образом, задвижка на напорной линии позволяет (в отличие от поршневых насосов) регулировать производительность центробежного насоса. Следует, однако, понимать, что при таком способе регулирования производительности приходится затрачивать энергию на преодоление дополнительного гидравлического сопротивления прикрытой задвижки (вентиля).

При регулировании производительности задвижкой желательно, чтобы рабочая точка характеризовалась максимальным  $\eta_n$  (или была вблизи этого значения  $\eta_n$ ). Поэтому если при таком регулировании происходит существенное снижение КПД насоса  $\eta_n$ , то этот способ следует признать нецелесообразным. Опыт эксплуатации насосов показал, что регулирование производительности задвижкой оправдывает себя, если оно осуществляется в пределах  $\pm 20\%$ .

Заметим, что *рабочие точки должны находиться на нисходящей ветви кривой  $H-V$*  (точки  $M_1$  и  $M_2$ ). Работа центробежного насоса на восходящей ветви является неустойчивой.

Неустойчивая работа насоса, вероятнее всего, объясняется возможностью появления *двух стационарных рабочих точек* на восходящей ветви кривой  $H-V$  (точки  $M_3$  и  $M_4$  на рис.3.25). Два относительно устойчивых режима работы (точки  $M_3$  и  $M_4$ ) характеризуются разными производительностями и напорами. При некотором изменении производительности (отключился потребитель или, наоборот, подключился) возможен переход из одного устойчивого режима в другой. Такой переход сопровождается гидравлическими ударами. Неустойчивая работа насоса, характеризуемая частой сменой режимов работы и гидравли-

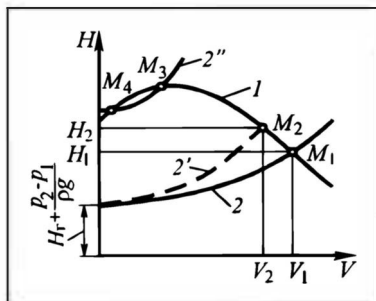


Рис.3.25. Определение рабочей точки центробежного насоса:

1 — характеристика насоса, 2, 2' и 2'' — характеристики сети

скими ударами, получила название “помпаж”. Сколько-нибудь длительная работа центробежного насоса в режиме помпажа выводит его из строя.

Есть и иные объяснения\* неустойчивой работы центробежного насоса при рабочей точке на восходящей линии.

При необходимости более существенного изменения подачи в трубопровод следует искать другие способы регулирования производительности (о некоторых из них см. ниже) — вплоть до замены насоса.

### Законы пропорциональности

При необходимости существенного изменения производительности центробежного насоса идут на изменение скорости вращения рабочего колеса путем замены электродвигателя или передачи (редуктора). При этом изменяется не только производительность насоса, но и его напор, а также потребляемая мощность. Иными словами, частная характеристика насоса, сохранив свою форму, займет другое положение на графике  $H-V$ .

Рассмотрим влияние частоты вращения рабочего колеса на производительность насоса  $V$ , создаваемый им напор  $H$  и потребляемую мощность  $N$ . Если пренебречь несущественным изменением угла  $\alpha_2$  при изменении частоты вращения насоса от  $n'$  до  $n''$ , то треугольники скоростей выхода жидкости могут рассматриваться как подобные (рис.3.26). Тогда, учитывая малосущественное изменение  $\eta_v$  с  $V$  и известные соотношения  $\omega' = 2\pi n'$  и  $\omega'' = 2\pi n''$ , получим на основе формулы (3.35а)

$$\frac{V''}{V'} = \frac{\pi D b \psi c_2'' \sin \alpha_2 \eta_v}{\pi D b \psi c_2' \sin \alpha_2 \eta_v} = \frac{c_2''}{c_2'} = \frac{u_2''}{u_2'} = \frac{\omega'' R_2}{\omega' R_2} = \frac{n''}{n'}. \quad (г)$$

Следовательно, *производительность центробежного насоса прямо пропорциональна частоте вращения.*

Для определения зависимости напора насоса от частоты вращения рабочего колеса воспользуемся формулой (3.34б):

$$\frac{H''}{H'} = \frac{\eta_r g u_2'' c_2'' \cos \alpha_2}{g \eta_r u_2' c_2' \cos \alpha_2} \cong \frac{u_2'' c_2''}{u_2' c_2'} = \left( \frac{u_2''}{u_2'} \right)^2 = \left( \frac{n''}{n'} \right)^2, \quad (д)$$

т.е. *напор, развиваемый насосом, примерно прямо пропорционален квадрату частоты вращения.* Оговорка “примерно” здесь необходима, поскольку изменению  $n$  сопутствует изменение производительности  $V$ , а с ней — потерь на трение внутри центробежного насоса, а значит и  $\eta_r$ .

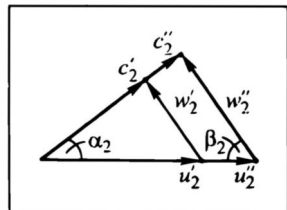


Рис.3.26. Треугольники скоростей при различных частотах вращения рабочего колеса центробежного насоса ( $n'$  и  $n''$ )

\* См., например, [2, 3].

Аналогично, в соответствии с формулой (3.10) получим

$$\frac{N''}{N'} = \frac{\rho g V'' H'' \eta_n}{\eta_n \rho g V' H'} \approx \frac{V'' H''}{V' H'} = \frac{n''}{n'} \left( \frac{n''}{n'} \right)^2 = \left( \frac{n''}{n'} \right)^3, \quad (e)$$

т.е. *мощность на валу насоса пропорциональна кубу частоты вращения*. Это соотношение еще более приближенно, так как  $\eta_n$  заметно изменяется с числом оборотов  $n$ ; поэтому соотношение (е) пригодно лишь для оценки влияния частоты вращения  $n$  на мощность  $N$ .

При помощи соотношений (г), (д) и (е), известных как **законы пропорциональности**, можно по одной опытной характеристике  $H-V$ , полученной для определенной частоты вращения, приблизительно построить характеристики при других частотах вращения. Однако для точного расчета этих характеристик необходимо учесть ранее проигнорированное влияние частоты вращения  $n$  на величины  $\eta_r$ ,  $\eta_n$ , а если строго, то и  $\eta_v$ .

Поэтому более точно характеристики насоса при различных частотах вращения получают на специальных испытательных стендах и для определенных конструктивных серий приводят в паспортах насосов или в каталогах.

#### *Универсальная характеристика центробежного насоса*

Семейство кривых  $H-V$  при различных частотах вращения (обычно они даются в *об/мин*) в совокупности с линиями одинаковых КПД насоса называют **универсальной характеристикой** (пример ее представлен на рис. 3.27). Отметим, что каждый насос имеет лишь один наивыгоднейший рабочий режим (при определенных производительности и частоте вращения); при любом отклонении от него КПД насоса падает. С самым высоким КПД ( $\eta_n^{\text{макс}}$ ) насос работает при определенной частоте вращения (в рассматриваемом случае —  $\eta_n^{\text{макс}} = 0,70$  при  $n = 1500$  *об/мин*). При других  $n$  также имеются точки с наибольшими КПД насоса (но их значение ниже  $\eta_n^{\text{макс}}$ ). Точки с равными КПД насоса дают линии одинаковых КПД (0,65; 0,60; 0,55 и 0,50 на рис.3.27).

Выбор типа центробежного насоса (серии), а также оптимальной частоты вращения рабочего колеса производится с учетом его универсальной характеристики.

В задачах проектирования расход жидкости  $V_p$  задан (требуемая производительность насоса). Для проектируемого трубопровода при этой производительности рассчитывается сопротивление трубопровода  $H_p$  (именно этот напор и должен развивать насос). Если точка с требуемыми  $V_p$  и  $H_p$  (точка  $P$ ) на универсальной характеристике попадает в область сравнительно высоких



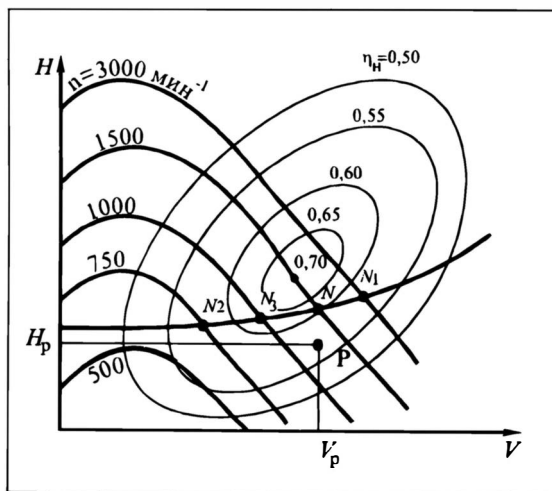


Рис. 3.27. Универсальная характеристика центробежного насоса

$\eta_n$ , то этот тип насоса можно считать подходящим для работы с проектируемым трубопроводом. Поскольку значения частоты вращения электродвигателя, а значит и рабочего колеса насоса, как правило, можно изменять только дискретно, то выбирают ближайшее (к упомянутой точке) большее. Рабочей точкой этого центробежного насоса будет точка  $N$  (см. рис. 3.27); при этом производительность равна  $V_p$ , а развиваемый напор — чуть больше требуемого. Дополнительное гидравлическое сопротивление трубопровода обеспечивается прикрытием задвижки на нагнетательной линии (увеличивается  $\xi_3$ ).

При эксплуатации насоса с трубопроводом (характеристика последнего  $N_2N_3NN_1$ ) изменение частоты вращения приводит к перемещению рабочей точки по линии  $N_2N_3NN_1$  — с соответствующим изменением производительности и напора. Заметим, что уменьшение производительности путем уменьшения частоты вращения возможно лишь до определенного предела. Так, из рис. 3.27 видно, что при частоте вращения  $500 \text{ мин}^{-1}$  насос *не может* подавать жидкость в трубопровод, так как развиваемый им напор меньше требуемого (характеристика насоса расположена *ниже* характеристики сети: они *не пересекаются* и рабочей точки не существует).

В целом регулировать производительность центробежного насоса путем изменения частоты вращения рабочего колеса целесообразно только в области достаточно высоких КПД насоса. В противном случае необходимо искать иные способы: замена

насоса (при этом его надо подбирать так, чтобы рабочая точка отвечала заданной производительности при возможно *большем* КПД), установка двух насосов (при необходимости увеличения производительности) и т.д.

### 3.3.4. Параллельная и последовательная работа насосов

Совместная работа нескольких насосов на общий нагнетательный трубопровод применяется в тех случаях, когда требуемые значения  $V$  или  $H$  (либо обе эти величины) не могут быть обеспечены одним насосом. Естественной представляется **параллельная** установка насосов при необходимости увеличения производительности и их **последовательная** работа — для увеличения напора. Однако реально при параллельном включении нескольких одинаковых насосов подача не увеличивается пропорционально числу насосов, а при их последовательной работе — пропорционально их числу не увеличивается напор. Причины этого становятся ясными при анализе совместной работы параллельно или последовательно включенных насосов. Проведем такой анализ на примере двух центробежных насосов с *одинаковыми* индивидуальными характеристиками.

Допустим, что насос с характеристикой  $DBB_1$  (рис. 3.28, *a*), нагнетая жидкость в трубопровод с характеристикой  $ABC$ , имеет рабочую точку  $B$ , отвечающую подаче  $V_1$  и напору  $H_1$ . Характеристика двух *параллельно* работающих насосов (кривая  $DCC_1$ ) может быть построена путем удвоения производительности одного насоса при каждом из рабочих напоров. Например, при  $H_1$  производительность равна сумме  $V_1 + V_{II}$  (в рас-

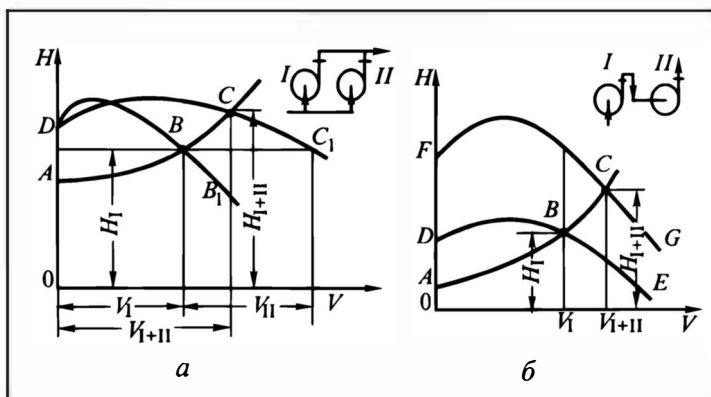


Рис. 3.28. Определение рабочих точек при параллельной (*a*) и последовательной (*б*) работе двух центробежных насосов (*I*, *II*)

смаатриваемом случае одинаковых характеристик — величине  $2V_1$ ). Рабочей точкой при работе двух параллельных насосов с тем же трубопроводом (его характеристика  $ABC$ ) будет точка  $C$ . Вообще говоря, характеристика трубопровода за счет коммуникации второго насоса несколько изменяется. Однако из-за малой длины коммуникационных линий по сравнению с общей длиной трубопровода это изменение характеристики трубопровода можно не учитывать.

Из рис. 3.28, *a* видно, что производительность двух насосов  $V_{I+II}$  меньше удвоенной производительности одного насоса ( $2V_1 \equiv V_I + V_{II}$ ), а развиваемый при этом обоими насосами напор  $H_{I+II}$  больше напора  $H_I$ . Таким образом, при параллельной установке двух насосов в действительности происходит увеличение производительности, но все же не ее удвоение. Такое удвоение наблюдалось бы при сохранении напора насосной установки на уровне  $H_I$ . Но напор таким не сохраняется. Причина в том, что при возросшей производительности  $V_{I+II}$ , т.е. увеличенном расходе жидкости по тому же трубопроводу, повышается ее скорость, а с ней и гидравлическое сопротивление. Для преодоления последнего насосная установка должна развивать *большой* напор, чем это было необходимо при работе одного насоса с меньшей производительностью  $V_I$ . Это означает повышение рабочего значения  $H_{I+II} > H_I$ . А поскольку при работе центробежного насоса на нисходящей ветви характеристики с увеличением напора его производительность падает, то становится вполне понятным неравенство  $V_{I+II} < V_I + V_{II}$  (или в рассматриваемом случае  $V_{I+II} < 2V_1$ ).

Ранее было отмечено, что удвоение производительности ( $V_{I+II} = 2V_1$ ) все-таки возможно (при сохранении напора на уровне  $H_I$ ); для этого нужно изменить характеристику сети (проложить, например, трубопровод *большого* диаметра). Однако практически это делать нецелесообразно.

Схема *последовательной* работы двух одинаковых насосов представлена на рис. 3.28, *б*. Характеристика двух последовательно работающих центробежных насосов ( $FCC$ ) получается при сложении (здесь — при удвоении) ординат кривой  $DBE$  для каждой рабочей производительности  $V$ . В трубопровод с характеристикой  $ABC$  один насос будет подавать жидкость с производительностью  $V_I$  при напоре  $H_I$ ; рабочей при этом будет точка  $B$ . При совместной работе двух насосов на тот же трубопровод (его характеристика  $ABC$ ) рабочей будет точка  $C$ . Значит, насосная установка при последовательной работе насосов действительно обеспечивает увеличение напора:  $H_{I+II} > H_I$ . Однако это увеличение не достигает удвоения ( $H_{I+II} < 2H_I$ ). Дело в том, что для удвоения напора потребовалось бы сохранить прежнюю

производительность  $V_1$ ; но она не сохраняется, а возрастает ( $V_{1+11} > V_1$ ). А при увеличении производительности уменьшается напор  $H_{1+11}$  — он стал меньше удвоенного (суммарного — при работе пары насосов с разными характеристиками).

Таким образом, при совместной работе двух центробежных насосов происходит одновременное увеличение как напора, так и производительности. Встречающиеся в литературе\* суждения о целесообразности во всех практических случаях параллельного включения насосов при необходимости повышения производительности и последовательного — при необходимости повышения напора — вряд ли являются оправданными. Выбор рациональной схемы их включения зависит от потребностей технологической установки, а также от конкретных характеристик используемых насосов и трубопровода (сети).

### 3.3.5. Предельная высота всасывания

В основе расчета предельной высоты всасывания центробежного насоса лежит общая формула (3.8). При этом необходимо также принять во внимание некоторые особенности работы центробежных насосов. Здесь, разумеется, нет инерционных потерь во всасывающем трубопроводе, поскольку движение в нем — равномерное. В то же время для центробежных насосов следует учитывать эффекты, связанные с неравномерным распределением скоростей и давлений в рабочем колесе вблизи входного сечения.

Различия в значениях абсолютных  $c$  и относительных  $w$  скоростей в разных точках канала между соседними лопатками приводят к повышению (в сравнении со средним значением) давления в зонах, где лопатки “набегают” на жидкость в рабочем колесе, и к понижению (именно в этом — опасность!) там, где они “убегают” от жидкости (т.е. за лопаткой). Это может повлечь за собой уменьшение давления в некоторых точках сечения всасывания (за лопаткой) ниже давления насыщенных паров  $p_v$ , соответствующего температуре  $t$  перекачиваемой жидкости, и тогда жидкость закипит. Образовавшиеся пузырьки пара, перемещаясь вместе с жидкостью, попадают ближе к выходу из колеса — в зону более высокого давления — и конденсируются. В освобождающиеся при этом полости (“пустоты”) устремляется жидкость и с большой силой бьет по лопаткам, причем с очень высокой частотой — сотни ударов в секунду. При работе насоса в таком режиме возникает явление, получившее название **кавитации** (см. разд. 3.1.3). Работа центробеж-

---

\* См., например, [2].

ного насоса в этом режиме быстро приводит к образованию раковин на лопатках и дисках рабочего колеса, его децентровке, биению колеса на валу и в итоге – к его разрушению.

Эффект снижения давления за счет неравномерности распределения скоростей во входном сечении рабочего колеса обозначим символом  $h_{\text{кав}}$ . Для обеспечения надежной работы (без кавитации) предельную высоту всасывания уменьшают на эту величину:

$$h_{\text{гв}}^{\text{пред}} = \frac{p_1 - p_t}{\rho g} - \frac{w_{\text{вс}}^2}{2g} - h_{\text{па}} - h_{\text{кав}}. \quad (3.37)$$

Для определения  $h_{\text{кав}}$  предложены различные расчетные соотношения. В качестве примера приведем полуэмпирическую формулу с безразмерным множителем:

$$h_{\text{кав}} = 2,75 \frac{1}{g} (Vn^2)^{2/3}. \quad (3.38)$$

Значения  $h_{\text{кав}}$ ,  $g$ ,  $V$  и  $n$  согласованы единой выбранной системой единиц (например, СИ).

## 3.4. НЕМЕХАНИЧЕСКИЕ НАСОСЫ

### 3.4.1. Газлифты

В газлифтах (эрлифтах, если газ – воздух) подъем жидкости (отсюда еще одно название этих насосов – "газовые подъемники") на высоту  $H$  (рис. 3.29) из расходного резервуара 2 в приемный 4 обеспечивается за счет меньшей плотности газожидкостной смеси  $\rho_{\text{гж}}$  в подъемной трубе 3, по сравнению с плотностью жидкости  $\rho_{\text{ж}}$  в резервуаре 2.

Технологический расчет предусматривает связь параметров процесса с геометрическими характеристиками системы газлифта.

Плотность газожидкостной смеси зависит от объемной доли газа в смеси – газосодержания  $\phi$ :

$$\rho_{\text{гж}} = \rho_{\text{г}}\phi + \rho_{\text{ж}}(1 - \phi),$$

или, поскольку обычно плотность газа  $\rho_{\text{г}} \ll \rho_{\text{ж}}$ , то

$$\rho_{\text{гж}} \cong \rho_{\text{ж}}(1 - \phi).$$

Обозначим глубину погружения подъемной трубы 3 в расходном резервуаре до сечения подачи газа  $H_{\text{ж}}$ , а давления на свободные поверхности в обоих резервуарах –  $p_1$ . Согласно закону сообщающихся сосудов, давление на уровне ввода газа по трубе 2 может быть записано как по жидкости, так и по газожидкостному столбу; без учета гидравлических потерь при движении

Рис.3.29. Схема газлифта:

1 — труба для подачи газа, 2 — расходный резервуар, 3 — подъемная труба, 4 — приемный резервуар;  $\Gamma$  — газ,  $\mathcal{J}$  — жидкость

газожидкостной смеси по подъемной трубе

$$\begin{aligned} p_1 + \rho_{\mathcal{J}} g H_{\mathcal{J}} &= \\ &= p_1 + \rho_{\Gamma\mathcal{J}} (H + H_{\mathcal{J}}). \end{aligned} \quad (6)$$

Отсюда

$$\rho_{\mathcal{J}} H_{\mathcal{J}} = \rho_{\Gamma\mathcal{J}} (H + H_{\mathcal{J}}). \quad (3.39)$$

Это соотношение позволяет приблизительно рассчитать газлифт при различных постановках технологической задачи.

Максимальная высота подъема жидкости при известной  $H_{\mathcal{J}}$  определяется при решении (3.39) относительно  $H$ :

$$H = H_{\mathcal{J}} \frac{\rho_{\mathcal{J}} - \rho_{\Gamma\mathcal{J}}}{\rho_{\Gamma\mathcal{J}}}. \quad (3.40)$$

Необходимое заглубление подъемной трубы  $H_{\mathcal{J}}$ , обеспечивающее требуемую высоту  $H$ , отыскивается по формуле

$$H_{\mathcal{J}} = H \frac{\rho_{\Gamma\mathcal{J}}}{\rho_{\mathcal{J}} - \rho_{\Gamma\mathcal{J}}}. \quad (3.41)$$

Отношение  $(\rho_{\mathcal{J}} - \rho_{\Gamma\mathcal{J}})/\rho_{\Gamma\mathcal{J}}$ , входящее в формулы (3.40) и (3.41), можно выразить через газосодержание  $\varphi$  с помощью соотношения (а):

$$\frac{\rho_{\mathcal{J}} - \rho_{\Gamma\mathcal{J}}}{\rho_{\Gamma\mathcal{J}}} = \frac{\varphi}{1 - \varphi}.$$

В этом случае

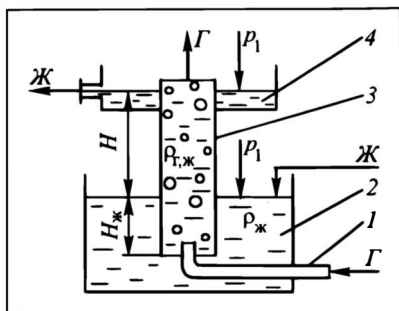
$$H = H_{\mathcal{J}} \frac{\varphi}{1 - \varphi}, \quad (3.40a) \quad H_{\mathcal{J}} = H \frac{1 - \varphi}{\varphi}. \quad (3.41a)$$

Из выражения (3.40a) следует, что для увеличения высоты подъема жидкости необходимо повышать газосодержание газожидкостной смеси.

При известных значениях  $H$  и  $H_{\mathcal{J}}$  минимальное значение газосодержания составляет

$$\varphi = \frac{H}{H + H_{\mathcal{J}}}. \quad (3.42)$$

Более точный расчет параметров газлифта требует учета гидравлических потерь при движении двухфазного (газожидкостного) потока по трубе. Величина этих потерь зависит от расхо-



дов жидкости и газа, диаметра подъемной трубы, состояния ее стенок и т.д. С расчетом гидравлических потерь при течении двухфазных потоков можно ознакомиться в специальной литературе\*.

### 3.4.2. Струйные насосы

В струйных насосах (рис.3.30) рабочая жидкость (поток ее  $G_p$ ) с большой скоростью вытекает из сопла 1 и поступает в камеру смешения 2. В качестве рабочей жидкости чаще всего используют воду или водяной пар. Из-за увеличения скорости в сечении 1—1 давление в нем, соответственно уравнению Бернулли, падает, так что возникает разность давлений (напор) между расходным резервуаром 4 и сечением 1—1. Под действием этого напора жидкость из расходного резервуара поступает (поток ее  $G_n$ ) в камеру смешения. После смешения перекачиваемой жидкости с рабочей эта смесь поступает в диффузор 3, переходящий в напорный трубопровод. В диффузоре (его еще называют камерой сжатия) скорость потока уменьшается из-за возрастания поперечного сечения, и в соответствии с уравнением Бернулли кинетическая энергия движения переходит в потенциальную энергию давления.

Струйные насосы подразделяются на **инжекторы** (для создания давлений выше атмосферного) и **эжекторы** (применяемые для создания вакуума в аппаратах).

Производительность струйных насосов удобно оценивать **коэффициентом инжекции**  $\psi_{\text{и}} = G_n / G_p$ . Величина коэффициента инжекции при заданном давлении на выходе из струйного насоса и известных параметрах рабочей и перекачиваемой жидкостей, а также размерах насоса может быть рассчитана из баланса энергий и количеств движения потоков. Методика такого расчета подробно изложена в специальной литературе\*\*, а применительно к работе инжектора для сжатия и перемещения пара низкого давления с помощью пара высокого давления — в разд. 9.6.7.

При увеличении развиваемого струйным насосом напора  $H$  коэффициент инжекции  $\psi_{\text{и}}$  уменьшается.

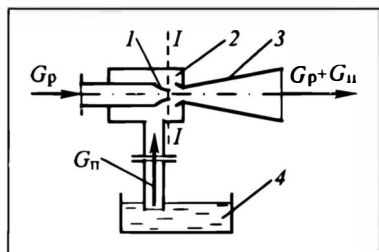


Рис.3.30. Схема струйного насоса:

1 — сопло, 2 — камера смешения, 3 — диффузор, 4 — расходный резервуар

\* См., например, [4].

\*\* См., например, [1].

### 3.5. ДОСТОИНСТВА И НЕДОСТАТКИ НАСОСОВ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ. ОБЛАСТИ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Каждый вид насоса имеет свои предпочтительные области применения (рис. 3.31), в которых с наибольшей полнотой реализуются их достоинства и в наименьшей мере — присущие им недостатки. Перечень наиболее существенных достоинств и недостатков различных насосов представлен в табл. 3.3. Заметим, что почти все достоинства и недостатки насосов вытекают из специфики их работы. Так, возвратно-поступательные движения рабочего органа (поршня) в поршневых насосах обуславливают основные их недостатки (неравномерность подачи, большие инерционные нагрузки на фундамент и т.д.), а наличие в них замкнутых пространств — их достоинства, связанные с возможностью получения практически любых давлений. Равномерное движение рабочего колеса в центробежных насосах обеспечивает непрерывную подачу жидкости и связанные с этим достоинства, а связь напора и производительности — их недостатки.

В табл. 3.3 наряду с достоинствами и недостатками даны также краткие комментарии. Из последних, как правило, ясно, чем объясняется то или иное достоинство насоса или его недостаток. Поэтому остановимся здесь кратко лишь на отдельных моментах.

Поясним специально два ограничения для центробежных насосов: практическую невозможность получения высоких (выше 10 МПа) напоров и нецелесообразность их конструирования на существенно малые производительности.

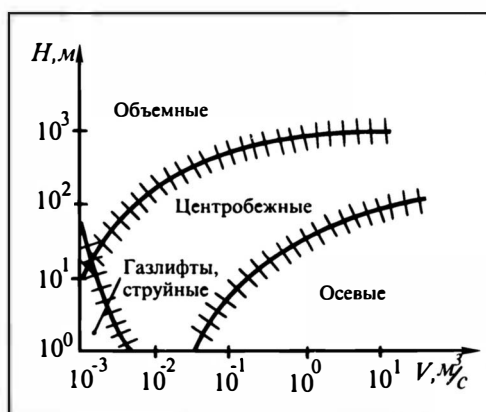


Рис. 3.31. Предпочтительные области применения насосов различных видов



Таблица 3.3. Достоинства и недостатки насосов различных типов

Вид насоса	Достоинства		Недостатки	
	наименование	пояснение, комментарий	наименование	пояснение, комментарий
Поршневые	Возможность создания любых напоров при заданной производительности	Создаваемый насосом напор не зависит от производительности	Невозможность перекачки жидкостей, содержащих твердые частицы	Наличие клапанов и опасность нарушения полноты их закрытия при попадании твердых частиц под тарелку клапана
			Неравномерность подачи	Это особенно существенно, когда равномерность подачи обязательна
			Необходимость тяжелых фундаментов	Обусловлена большими инерционными нагрузками на фундамент из-за неравномерного (с переменной скоростью) движения поршня
			Необходимость редуктора для снижения частоты вращения в сравнении с электродвигателем	Невозможность возвратно-поступательного движения поршня с большой частотой из-за высоких инерционных нагрузок
Шестеренчатые	Равномерность (или практическая равномерность) подачи	Движение рабочего органа с постоянной скоростью (или подача малых порций с большой частотой)	Металлоемкость	В 4—5 раз больше, чем у центробежных, особенно при больших производительностях
			Сложность изготовления, трудность сборки	Резкое снижение производительности и напора при увеличении рабочих зазоров, прорезей и т.п. сверх допустимых пределов
Винтовые	То же	То же	Малые производительности	Малая доля объема насоса заполняется жидкостью
			Сложность изготовления, трудность сборки	Резкое снижение производительности и напора при увеличении рабочих зазоров сверх допустимых пределов
Пластинчатые	То же	То же		

Таблица 3.3 (продолжение)

Вид насоса	Достоинства		Недостатки	
	наименование	пояснение, комментарий	наименование	пояснение, комментарий
Центробежные	Непрерывная и равномерная подача; безынерционность	Жидкость непрерывно входит в насос и выходит из него	Взаимосвязь напора и производительности	Невозможность изменить один параметр (например, производительность) при неизменном втором (напоре)
	Не требуются тяжелых фундаментов	Отсутствуют инерционные нагрузки	Нецелесообразность конструирования центробежных насосов на малую производительность	Повышенные потери на трение в рабочем колесе насоса и пониженный его КПД при уменьшении ширины рабочего колеса
	Возможность непосредственного соединения с электродвигателем	Большая частота вращения рабочего колеса насоса	Трудно сконструировать насосной на высокие напоры (выше 10 МПа)	Связано с ограниченной прочностью конструктивных материалов
	Отсутствие клапанов	Возможность перекачки жидкостей со взвешенными твердыми частицами		
	Низкая металлоемкость, компактность	—	Пониженный КПД насоса	На 10—15% ниже, чем у поршневого насоса
Осевые	Простота регулировки производительности	Регулировка осуществляется вентилем на нагнетательной линии	Подверженность кавитации	В особенности при перекачивании горячих жидкостей
	Большие производительности	—	Малые напоры	—
Струйные	Простота устройства	Отсутствие движущегося рабочего органа	Смещение перекачиваемой жидкости с рабочей	Невозможность использования насосов, если смещение этих жидкостей недопустимо
	Возможность перекачки жидкостей, содержащих мелкие твердые частицы	Отсутствие узких проходов для перекачиваемой жидкости		

Таблица 3.3 (окончание)

Вид насоса	Достоинства		Недостатки	
	наименование	пояснение, комментарий	наименование	пояснение, комментарий
Газлифт	Простота устройства	Отсутствие движущегося рабочего органа	Необходимость заглубления подъемной трубы в жидкость	Особенно важно учитывать при необходимости больших заглублений
	Возможность подъема из глубоких скважин	Отсутствие сколько-нибудь заметных ограничений высоты подъема жидкости		
	Возможность подачи агрессивных жидкостей	При наличии материала (для подъемной трубы), стойкого к воздействию жидкости; простота замены подъемной трубы		
Монтежю	Простота устройства	Отсутствие движущегося рабочего органа	Повышенная толщина стенок монтежю	Обусловлена повышенным давлением в монтежю

Первое ограничение связано с необходимостью увеличения частоты вращения  $n$  рабочего колеса для повышения напора, согласно формуле (3.34). Однако центробежная сила, пропорциональная, как известно, квадрату частоты вращения, действует не только на жидкость, но и на само рабочее колесо. При очень больших  $n$  под действием центробежной силы может произойти механическое разрушение дисков и лопаток рабочего колеса. Поэтому ограничение частоты вращения, а с ним и развиваемого напора связано прежде всего с ограниченностью механической прочности конструктивных материалов. В ходе технического прогресса по мере создания материалов с повышенной прочностью верхняя граница получаемых в центробежных насосах напоров (давлений) постепенно повышается.

Нецелесообразность конструирования центробежных насосов на малую производительность объясняется следующим. Умень-

шать производительность за счет уменьшения частоты вращения  $n$  нельзя, так как при этом еще быстрее (пропорционально  $n^2$  — см. разд.3.3.3) уменьшается развиваемый напор. Единственным приемлемым способом уменьшения производительности остается уменьшение щели  $b$  между дисками рабочего колеса (см. рис.3.23). Но это приводит к росту гидравлических потерь в насосе  $h_{\text{п}}^{\text{нас}}$ , а значит и к понижению КПД насоса  $\eta_{\text{п}}$ . Учитывая и без того сравнительно невысокие значения  $\eta_{\text{п}}$  (даже у нормально сконструированных центробежных насосов), констатируем экономическую нецелесообразность центробежных насосов с малой производительностью. Отсюда и вытекает ограничение производительности центробежных насосов.

Рассмотрение достоинств и недостатков насосов различных типов позволяет оконтурить предпочтительные области их применения (см. рис.3.31).

*Объемные насосы* применяют при малых и средних производительностях и больших (практически любых) напорах.

Наиболее широкое применение в химической промышленности находят *центробежные насосы*: при средних и высоких производительностях и не очень больших напорах.

При необходимости обеспечения весьма больших производительностей при малых напорах используют *осевые насосы*.

*Струйные насосы* и *газлифты* выгодно применять при малых производительностях и малых (и средних) напорах.

Простота устройства *газлифтов*, а также их надежность в работе позволяют им в ряде случаев (при небольших производительностях) конкурировать с центробежными насосами (например, при подъеме жидкостей из глубоких скважин, подаче агрессивных жидкостей и т. д.). Однако необходимость большого заглубления подъемной трубы в жидкости и низкий КПД этих насосов ограничивают область их применения.

Область применения *монтежю* (на рис.3.31 не показана) также ограничена невысокими значениями напоров и производительностей. Увеличение напора приводит к повышению давления в монтежю, что вызывает необходимость существенного утолщения стенок. С увеличением размеров монтежю (на *большие* производительности) толщина их стенок также увеличивается.

Приведенные на рис.3.31 границы предпочтительных областей применения различных насосов являются *подвижными*. По мере развития науки и техники (например, создания новых конструкционных материалов) эти границы будут смещаться.

В заключение отметим, что выбор вида насоса в каждом конкретном случае производится на основе технико-экономического расчета с учетом эксплуатационных и конструктивных характеристик насоса и другого оборудования.

### ЛИТЕРАТУРА к главе 3

1. *Абдурашитов С.А., Тупиченков А.А., Вершинин И.М., Тененгольц С.М.* Насосы и компрессоры. М.: Недра, 1974. 296 с.
2. *Гельперин Н.И.* Основные процессы и аппараты химической технологии. М.: Химия, 1981. 812 с.
3. *Дытнерский Ю.И.* Процессы и аппараты химической технологии. М.: Химия, 1995. 768 с.
4. *Соу С.* Гидродинамика многофазных систем: Пер. с англ./ Под ред. М.Е.Дейч. М.: Мир, 1971. 536 с.

### СЖАТИЕ ГАЗОВ

Сжатие газов широко применяется в химической технологии при осуществлении различных физических и химических процессов, протекающих под давлением, отличающимся от атмосферного, а также для перемещения газов и многофазных систем, в которых газ является несущей средой. Кроме того, сжатие и перемещение газов используется для ряда специфических (вспомогательных) целей: передавливание и подсос жидкостей, транспорт жидкообразных сред, распыление жидкостей и др.

Конкретная технология может потребовать создания весьма высоких давлений (до 100 МПа в промышленной практике, еще выше — в лабораториях) или очень низких давлений (вплоть до 10 Па и даже ниже). При этом потоки сжимаемого газа в ряде производств исчисляются сотнями тысяч кубометров в час (т.е. свыше 30 м<sup>3</sup>/с). В качестве общеизвестных примеров можно привести: синтез аммиака или метанола (давления порядка 10 МПа, объемные производительности по воздуху, сжимаемому для ожигания в крупных установках, — более 120 тыс. м<sup>3</sup>/ч); выпаривание под вакуумом (давление ниже 0,01 МПа) и сублимационную сушку (давление на уровне 10 Па); транспортирование природного газа от его месторождений к потребителю на тысячи километров или газообразных веществ из одного аппарата в другой в ходе технологического процесса.

Устройства для сжатия газов (чаще всего это — *машины*, имеющие движущиеся узлы) называются **компрессорами**. Они сообщают газу энергию — *потенциальную* (давление — в этом, как правило, их основное назначение) и *кинетическую* (иногда ее приращение существенно).

По своему общему назначению и принципам конструктивного оформления компрессоры обладают определенным сходством с **насосами** — устройствами для создания напора и перекачки жидкостей (см. гл. 3). Вместе с тем надо помнить о коренном (в аспекте курса ПАХТ) отличии в свойствах рабочих тел: газ *сжимаем*, жидкость практически *несжимаема*. В ходе последующего анализа процесса сжатия газов в компрессорах используется сходство с процессом в насосах (нередко проводится сопоставление этих процессов), но непременно учитывается сжимаемость газов.

В задачу технологического анализа и расчета сжатия газов в аспекте курса ПАХТ входит ряд вопросов:

- классификация компрессоров по различным признакам;
- рассмотрение принципов функционирования компрессоров различных типов;
- расчет производительности компрессоров и (или) изменения давления газа;
- расчет энергии на сжатие газа в компрессорах;
- анализ отдельных рабочих моментов, представляющих технологический интерес.

#### 4.1. КЛАССИФИКАЦИЯ КОМПРЕССОРОВ\*

Разнообразие технологических целей, рабочих условий, принципов действия и конструкций компрессоров затрудняет создание единой и достаточно строгой их классификации. Представленные ниже градации — условны, они не имеют строгого научного обоснования, скорее носят традиционный характер.

Приведем принятую в настоящее время классификацию компрессоров по некоторым срезам.

*По характеру изменения давления* в технологических аппаратах выделяют собственно компрессоры (создание повышенного давления в аппарате) и вакуум-насосы (создание разрежения в нем). Заметим: термин "вакуум-насос" сохранился чисто исторически, речь идет не о насосах (так в науке ПАХТ именуют устройства для перемещения жидкостей), а о компрессорах определенного назначения.

*По величине развиваемого напора (давления)* различают вентиляторы, создающие избыточное давление до 0,015 МПа, газодувки — до 0,2 МПа и компрессоры — свыше 0,2 МПа. Внутри перечисленных типов компрессоров нередко проводят более дробную классификацию.

*По производительности* различают малые компрессоры — объемной производительностью до 0,015 м<sup>3</sup>/с, средние — от 0,015 до 1,5 м<sup>3</sup>/с и крупные — более 1,5 м<sup>3</sup>/с (практически — до десятков кубометров в секунду).

В плане изучения и описания сжатия газов в компрессорах наиболее важна классификация *по принципу действия*. Здесь существуют различные подходы. Согласно наиболее простому из них (и, вероятно, весьма удобному в плане рассмотрения в курсе ПАХТ), все компрессоры подразделяют на три группы: поршневые, центробежные и остальные (обычно их именуют специальными).

---

\* См. [1, 3–5, 7].

Более обоснованной в рассматриваемом аспекте представляется следующая классификация:

— компрессоры *объемного действия*, принцип работы которых основан на сжатии газов в результате уменьшения объема замкнутого рабочего пространства с постоянной массой газа в нем. К таким компрессорам относятся **поршневые** — с возвратно-поступательным движением поршня, **ротационные** (в том числе водокольцевые) — с вращательным перемещением изменяющегося рабочего объема (см. ниже) и целый ряд иных разновидностей;

— *динамические* компрессоры, для которых характерно повышение кинетической энергии газового потока и преобразование затем значительной ее доли в потенциальную (энергию давления). К числу таких компрессоров относятся **центробежные**, или **турбокомпрессоры**, в которых давление создается под действием центробежных сил на газовый поток; **осевые** компрессионные машины, основанные на сообщении газовому потоку кинетической энергии (в осевом направлении); **струйные** (инжекторы), базирующиеся на обмене количеством движения между газовыми потоками, и некоторые другие.

Кроме того, существует ряд компримирующих устройств, использующих иные физические явления.

Конструкции и принцип работы некоторых компрессоров описаны в последующих разделах — по ходу изучения отдельных типов компрессионных машин.

Ниже наиболее детально рассмотрены особенности и технологический расчет поршневых компрессоров, отчасти — турбокомпрессоров. Для некоторых других устройств показаны принципы и условия их работы, отмечены особенности; в отдельных случаях продемонстрированы пути расчета основных (прежде всего — энергетических) характеристик. Более подробные сведения об устройстве, работе и расчете различных типов компрессоров можно найти в специальной литературе\*.

## 4.2. О ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ОСНОВАХ РАБОТЫ КОМПРЕССОРОВ

Напомним с некоторыми комментариями ряд известных термодинамических соотношений, необходимых для последующего анализа. Обозначим:  $p$  — давление;  $v$  — удельный объем;  $T$  — абсолютная температура;  $R = R_y/M$  — индивидуальная газовая постоянная сжимаемого газа ( $M$  — его молярная масса,  $R_y$  —

---

\* См. [1, 3–5, 7].



универсальная газовая постоянная). Первоначально — в целях упрощения — примем, что газ является *идеальным* и подчиняется уравнению Клапейрона—Менделеева:

$$pv = RT. \quad (4.1)$$

Энергетический анализ работы компрессионных установок, строго говоря, должен учитывать изменение (приращение) потенциальной и кинетической энергии газа. Однако в большинстве случаев вклад кинетической составляющей невелик, и им пренебрегают.

В основе анализа лежит I закон термодинамики в различных написаниях:

$$du = Tds - pdv; \quad (4.2)$$

$$\delta q = du + pdv; \quad (4.3)$$

$$dh = \delta q + vdp. \quad (4.4)$$

Здесь:  $s$  — энтропия;  $u = c_v T$  — внутренняя энергия;  $h = c_p T$  — энтальпия;  $c_v$  и  $c_p$  — удельные теплоемкости при постоянных объеме и давлении соответственно;  $q$  — теплота (тепловой эффект) процесса.

Эти соотношения позволяют применительно к компрессорам анализировать различные операции над газами — изобарные ( $dp = 0$ ), адиабатические ( $ds = 0$ ), изоэнтальпические ( $dh = 0$ ) и другие.

Процессы сжатия газа в компрессорах удобно изображать в диаграмме "давление — удельный объем" ( $p - v$ ) — рис. 4.1. Исходный газ (состояние 1) давлением  $p_1$  с удельным объемом  $v_1$  подвергается сжатию до состояния 2 — до давления  $p_2 > p_1$ ; при этом в ходе процесса сжатия удельный объем газа уменьшается до  $v_2$ . Одновременно происходит изменение температуры от  $T_1$  до  $T_2$ .

Ход кривой сжатия 1—2 зависит от *условий сжатия*.

Процесс сжатия сопровождается повышением внутренней энергии — разогревом газа. Чтобы удержать температуру сжимаемого газа постоянной, необходимо организовать очень интенсивный отвод теплоты в процессе сжатия. В случае такого **изотермического** (реже применяют термин "изотермного") сжатия, когда  $T_2 = T_1 = T = \text{const}$ , процесс идет по линии 1—2t. Согласно выражению (4.1),

$$p_2 v_2 = p_1 v_1 = pv = RT = \text{const}. \quad (4.5t)$$

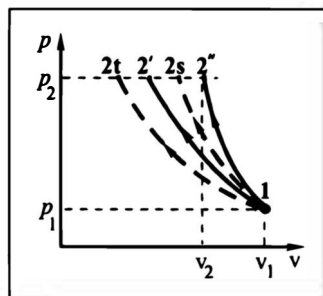


Рис.4.1. Процессы сжатия газа в компрессоре в диаграмме  $p - v$ :

1—2t — изотерма, 1—2s — адиабата, 1—2' — политропа при  $m < k$ , 1—2'' — политропа при  $m > k$

Можно представить себе, что сжатие газа происходит в условиях его полной тепловой изоляции (т.е. в отсутствие Приходов и Уходов теплоты), — тогда процесс сжатия протекает при постоянной энтропии  $s$ . В случае такого **адиабатического** (иначе — **адиабатного**) сжатия (точнее его было бы называть **изоэнтропийным**) процесс идет по линии 1—2s; при этом

$$p_2 v_2^k = p_1 v_1^k = p v^k = \text{const}, \quad (4.5s)$$

где  $k = c_p/c_v$  называется **показателем адиабаты**.

Для одноатомных газов  $k \approx 5/3 \approx 1,67$ ; для двухатомных —  $k \approx 7/5 \approx 1,4$ ; для трех- и многоатомных —  $k \approx 9/7 \approx 1,3$ .

В наиболее общем случае в процессе сжатия не поддерживаются условия  $T = \text{const}$  и  $s = \text{const}$  — такой процесс называют **политропным** (или **политропическим**). Он описывается уравнением

$$p_2 v_2^m = p_1 v_1^m = p v^m = \text{const}, \quad (4.5m)$$

где  $m$  называется **показателем политропы**.

Формулы (4.5t) и (4.5s) можно рассматривать как частные случаи выражения (4.5m). Действительно, при  $m = 1$  процесс протекает изотермически, при  $m = k$  — адиабатически.

Приведем также известные соотношения:

$$c_p - c_v = R; \quad (4.6a) \quad c_m = c_v \frac{m - k}{m - 1}, \quad (4.6b)$$

где  $c_m = \text{const}$  — удельная (на 1 кг сжимаемого газа) теплоемкость газа в политропическом процессе.

В процессе сжатия газа в компрессоре выделяется (и по возможности отводится) теплота; причины ее выделения:

- равновесный (обратимый) процесс сжатия газа;
- неравновесные (необратимые) процессы, связанные с диссипацией (рассеянием) энергии (трение движущихся частей рабочего органа компрессора, а также газа о его детали).

В ходе реального процесса в компрессоре не удастся удерживать постоянной температуру сжимаемого газа, так как интенсивность тепловыделения заметно превышает возможности отвода теплоты. Но часть теплоты все же отводят. Если при этом удается *полностью* отвести теплоту трения и *частично* теплоту сжатия, то  $1 < m < k$  — политропный процесс сжатия пойдет по линии 1—2'. Однако на практике (чаще всего — из-за ограниченной поверхности теплосъема) не удастся отвести даже всю теплоту трения, не говоря уж о теплоте сжатия. Поэтому реальный процесс сжатия идет, как правило, по линии 1—2", т.е. с показателем политропы  $m > k$ .

При эксплуатации компрессоров (и при расчетах — тоже) важно знать температуру газа  $T_2$  после компрессора. Она уста-

навливается в зависимости от степени сжатия  $p_2/p_1$  в компрессоре. Расчетным путем  $T_2$  нетрудно определить с помощью уравнений (4.1), (4.5m). Записав (4.1) для начала и конца процесса сжатия  $p_1 v_1 = RT_1$  и  $p_2 v_2 = RT_2$ , получим

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 v_2}{p_1 v_1}. \quad (a)$$

Выразив отношение удельных объемов из (4.5m) как

$$\frac{v_2}{v_1} = \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{1/m} \quad (b)$$

и подставив это отношение в (a), найдем

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}}, \quad (4.7)$$

причем в случае адиабатического сжатия в (4.7) вместо  $m$  будет, конечно, фигурировать показатель адиабаты  $k$ .

Расчет затрат энергии базируется на уравнениях (4.2)—(4.4) — в зависимости от физических явлений в конкретных компрессионных устройствах\*.

В случае **объемных** компрессоров удельные (в расчете на 1 кг рабочего тела) затраты энергии на **собственно сжатие**  $l_{сж}$  составляют

$$l_{сж} = \int_{v_2}^{v_1} p dv, \quad (4.8)$$

где  $p = p(v) = \text{var}$ ; индексы 1 и 2 относятся к начальному (перед сжатием) и конечному (после него) состояниям газа (разумеется,  $v_2 < v_1$ ).

Для расчета **полных** затрат энергии в объемных компрессорах надо еще учесть **работу всасывания** газа в рабочий объем от источника и **выталкивания** (нагнетания) газа из этого объема к потребителю.

В случае **динамических** компрессоров **полная удельная работа на сжатие и перемещение газа** выражается формулой

$$l = \int_{p_2}^{p_1} v dp, \quad (4.9)$$

причем индексы при  $p = \text{var}$  имеют указанный выше смысл (разумеется,  $p_2 > p_1$ ).

Располагая связью параметров процесса  $p$  и  $v$ , например по одной из формул (4.5t), (4.5s) или (4.5m), можно из (4.8) и (4.9)

---

\* Детально эти вопросы освещены в литературе по технической термодинамике (см., например, [2, 6, 8]) и по компрессорам [1]. См. также [5] и [7].

Рис. 4.2. Процессы сжатия газа в компрессоре в диаграмме  $h - s$ :

1—2t — изотерма, 1—2s — адиабата, 1—2' — политропа при  $m < k$ , 1—2'' — политропа при  $m > k$

найти выражения  $l$  для изотермического, адиабатического и поли-  
тропического процессов в компрессоре.

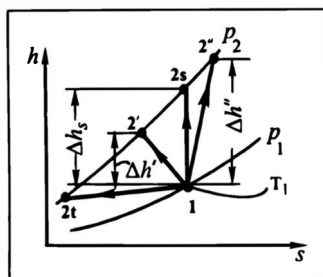
В условиях достаточно высоких давлений и при температурах, существенно ниже критических (тем более — приближающихся к температурам кипения), уравнение состояния (4.1), записанное для идеального газа, становится неточным. Уточнения вводят путем записи более сложных уравнений (например, Ван-дер-Ваальса) или с помощью коэффициента сжимаемости  $z$ , зависящего от давления и температуры:

$$pv = zRT. \quad (4.1')$$

Естественно, для идеального газа  $z = 1$ ; с ростом  $p$  и понижением  $T$  коэффициент сжимаемости уменьшается (для реальных газов он может заметно отличаться от 1).

Использование расчетных формул, базирующихся на уравнении Клапейрона—Менделеева, для области достаточно высоких давлений может привести к заметным погрешностям. В то же время использование более точных аналитических методов на основе упомянутых уравнений состояния сопряжено с весьма громоздкими расчетами. Поэтому переходят к графо-аналитическому определению параметров и характеристик процессов в компрессоре с помощью **диаграмм состояния** реальных газов. Наиболее удобными в практическом использовании представляются энтальпийно-энтропийные диаграммы  $h(i) - s$ , процессы сжатия в которых изображены на рис. 4.2. Затраты энергии соответственно этой диаграмме получаются как разности энтальпий сжатого и исходного газа.

При аналитическом расчете **политропических** процессов возникнут затруднения, связанные с неопределенностью значений показателя политропы  $m$ ; при пользовании диаграммами состояния — неизвестны реальное положение точки 2 и путь сжатия. В этих случаях стадию сжатия идеализируют, полагая ее изотермической или адиабатической: тогда для нее известны параметры процесса и линии сжатия  $T = \text{const}$  либо  $s = \text{const}$ . А переход от таких идеализированных стадий к реальной (политропической) стадии сжатия осуществляется с помощью **эмпирических поправок**, называемых соответственно "изотермическим КПД"  $\eta_i$  и "адиабатическим КПД"  $\eta_s$  компрессора. На



диаграмме  $p - v$  (менее наглядно — на  $h - s$ ) видно, что реальная политропная работа (линия 1—2") больше адиабатной и тем более — изотермической. Поэтому КПД компрессора, определяемый как отношение идеализированной работы к реальной, выражается величиной, меньшей 1. Обычно в зависимости от типа компрессора и условий его работы (в первую очередь — от степени сжатия)  $\eta_l \approx 0,6 \div 0,8$ ;  $\eta_s \approx 0,85 \div 0,97$ . Реальные затраты энергии получают делением найденной работы идеального процесса на соответствующий КПД. Конкретные расчетные выражения, относящиеся к определению затрат энергии с использованием  $\eta_l$  и  $\eta_s$ , приводятся при рассмотрении поршневых и центробежных компрессионных машин.

Заметим, что термин "КПД" в расчетах энергии, потребляемой компрессором, не имеет физического обоснования и сохраняется лишь в силу традиций. В самом деле, можно себе представить достаточно хорошее охлаждение газа в процессе его сжатия, так что  $l < l_s$ , и тогда будет  $\eta_s > 1$ . Нет физического запрета (хотя практически это трудно реализовать) на осуществление процесса сжатия с *очень* интенсивным охлаждением газа, так что будет даже  $l < l_l$ ; тогда и  $\eta_l > 1$ . А ведь по смыслу КПД должен характеризовать степень приближения реального процесса к идеальному, он может лишь в пределе приближаться к 1. Из этих рассуждений следует, что термин "КПД" — неудачен, и коэффициенты  $\eta_l$  и  $\eta_s$  должны трактоваться как некоторые эмпирические поправочные множители, связывающие не вполне определенный реальный процесс в компрессоре с вполне определенными, чаще — с адиабатическим.

### 4.3. ПОРШНЕВЫЕ КОМПРЕССОРЫ

Поршневые компрессоры (ПК) являются типичными и наиболее распространенными представителями объемных компрессионных машин. У ПК четко выражены все стадии рабочего цикла и наиболее наглядно прочерчиваются основные закономерности функционирования объемных компрессоров вообще.

#### 4.3.1. Устройство и работа поршневых компрессоров

По своему устройству и принципу действия ПК во многом напоминают поршневые насосы. На рис.4.3, *а* показана схема ПК *простого* действия\*.

В цилиндрическом корпусе *1* совершает возвратно-поступательные движения поршень 2. Приводом чаще всего является электродвигатель — с редуктором, поскольку частота движения поршня (порядка 1—5 с<sup>-1</sup>) заметно ниже стандартной частоты вращения ротора электродвигателя. Вращательное движение электродвигателя преобразуется в возвратно-поступательное с помощью кривошипно-шатунного механизма (принципы преобразования рассмотрены в разд. 3.2.1), коленчатого вала или какого-либо другого устройства. На валу кри-

---

\* Существуют и иные варианты конструктивного выполнения поршневых компрессоров [1, 3—5, 7].

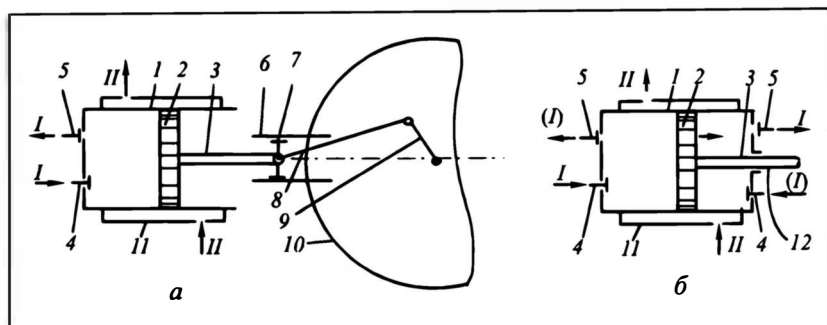


Рис. 4.3. Схема поршневых компрессоров простого (а) и двойного (б) действия:  
1 — корпус, 2 — поршень, 3 — шток, 4 — всасывающие клапаны, 5 — нагнетательные клапаны, 6 — направляющие, 7 — ползун, 8 — шатун, 9 — кривошип, 10 — маховое колесо, 11 — охлаждающая рубашка, 12 — уплотнение; I — газ, II — охлаждающая вода

вошипа у средних и крупных ПК, в особенности работающих с высокими степенями сжатия, укреплено массивное маховое колесо 10, воспринимающее и сглаживающее инерционные усилия. Значительно реже в качестве привода используют паровые машины или двигатели внутреннего сгорания.

При движении поршня 1 вправо из крайнего левого ("мертвого") положения в рабочем пространстве цилиндра (слева от поршня — говорят: *под поршнем*) возникает разрежение. Под действием разности давлений (у источника газа и в цилиндре ПК) открывается всасывающий клапан 4, и газ засасывается в рабочее пространство цилиндра. Нагнетательный клапан 5 при этом закрыт. Далее поршень приходит в крайнее правое ("мертвое") положение и начинает двигаться влево. При этом уменьшается рабочий объем, под поршнем повышается давление (оно становится больше, чем у источника), и всасывающий клапан 4 закрывается. Нагнетательный клапан 5 на начальных стадиях движения поршня влево тоже закрыт, поскольку давление в рабочем пространстве под поршнем пока еще ниже, чем у потребителя газа. При дальнейшем движении поршня влево давление под поршнем достигает давления у потребителя и начинает превосходить его. Тогда открывается нагнетательный клапан, и газ из рабочего пространства цилиндра выталкивается (нагнетается) к потребителю. После достижения левого "мертвого" положения поршень снова начинает двигаться вправо, нагнетательный клапан при этом закрывается, и цикл повторяется. Таким образом, у поршневых компрессоров в отличие от поршневых насосов рабочий цикл состоит (даже в рассмотренном упрощенном варианте) не из двух, а из трех стадий: всасывание, сжатие, нагнетание.

Для эффективной работы ПК необходимо достаточно плотное соприкосновение поршня с внутренней поверхностью цилиндрического корпуса; в противном случае не удастся обеспечить должного повышения давления газа в компрессоре, возможны и прямые потери (утечки) газа. По этим причинам соприкасающиеся цилиндрические поверхности поршня (наружная) и корпуса (внутренняя) тщательно обрабатаны; зазор между поршнем и цилиндром должен быть минимальным. В этих целях применяют уплотняющие кольца на поршнях и используют специальные смазочные масла, понижающие силу трения движущегося поршня о стенки цилиндра в условиях их плотного контакта.

Работа ПК сопровождается значительным повышением температуры газа (эффекты сжатия; трения), что неблагоприятно сказывается на затратах энергии, поскольку возрастают объем-

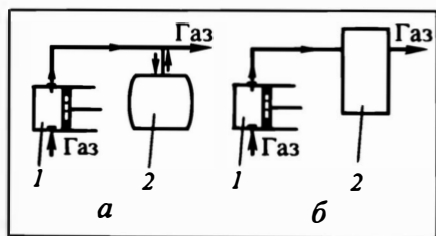


Рис.4.4. Схема поршневого компрессора (1) с тупиковым (а) и проходным (б) ресивером (2)

ные расходы сжимаемого газа. Чтобы понизить температуру сжимаемого газа (уменьшить его объемный расход), используют охлаждение стенок цилиндра

с помощью установки на его боковых поверхностях (иногда и на торцевых) теплообменных рубашек (поз.11 на рис. 4.3), в которые подается охлаждающий агент, как правило — вода.

С целью повышения производительности используют ПК *двойного действия* — см. рис. 4.3, б (устройство для преобразования вращательного движения в возвратно-поступательное на рисунке не показано). При движении поршня, например, вправо (в направлении стрелки) в левой части рабочего цилиндра происходит всасывание газа (левый нагнетательный клапан закрыт), а в правой — его сжатие и выталкивание (левый всасывающий клапан закрыт).

ПК, как и поршневые насосы, подают рабочее тело *неравномерно* — пульсирующим темпом. Однако в отличие от жидкости газ *сжимаем*, поэтому пульсации давления сглаживаются по мере движения газа по газопроводу к потребителю. При *коротком* газопроводе для сглаживания пульсаций по пути от ПК к потребителю устанавливают **ресивер** — тупиковый или проходной (рис.4.4) — емкость достаточно большого объема. При достаточно *длинном* газопроводе амплитуда пульсаций постепенно снижается по мере удаления от компрессора, и потребитель практически не ощущает пульсаций. Для ПК двойного действия *неравномерность* подачи, естественно, выражена в меньшей степени, нежели для ПК простого действия. В этом одно из достоинств ПК двойного действия. Но ПК большей кратности действия не применяют — видимо, из-за их громоздкости, сложности и дороговизны, а также меньшей (чем для поршневых насосов) остроты самой проблемы *неравномерности* подачи.

#### 4.3.2. Удельные затраты энергии в поршневом компрессоре

Рассмотрим первоначально затраты энергии в ПК простого действия для упрощенного (идеализированного) варианта его работы. Этот вариант представлен на рис.4.5, причем диаграмма (ее называют индикаторной) изображена в координатах  $p - V$ , где  $V$  — объем газа в рабочем пространстве компрессора. Идеализация процесса предполагает, что в крайнем левом положении  $A$  (начало стадии всасывания) поршень подходит к крышке компрессора *вплотную*, так что начальный объем газа равен

Рис.4.5. Диаграмма  $p - V$  и схема движения поршня в компрессоре:

$A$  и  $B$  — крайние левое и правое положения поршня; 1 — 5 — характерные состояния рабочего тела

нулю — точка 4 на рис. 4.5. Тогда рабочий цикл складывается из следующих стадий:

4—1 — всасывание газа при постоянном давлении  $p_1$ , объем газа в рабочем пространстве компрессора изменяется от 0 до  $V_1$ ;

1—2 — сжатие газа от  $p_1$  до давления  $p_2$ , при этом объем газа в рабочем пространстве уменьшается от  $V_1$  до  $V_2$ ;

2—3 — выталкивание газа при постоянном давлении  $p_2$ , объем газа в рабочем пространстве компрессора изменяется от  $V_2$  до  $V_3 = 0$ .

Для рассматриваемого идеализированного рабочего цикла при перемене направления движения поршня (т.е. при переходе от стадии выталкивания газа к стадии всасывания) давление под поршнем мгновенно падает от  $p_2$  до  $p_1$  (стадия 3—4 при  $V_3 = V_4 = 0$ ).

Заметим:  $p_1$  в идеале есть давление у источника газа, реально — несколько ниже (на величину гидравлического сопротивления подводящего газопровода и всасывающего клапана); давление  $p_2$  в идеале равно давлению у потребителя газа, реально — несколько выше (на величину гидравлического сопротивления нагнетательного клапана и отводящего газопровода).

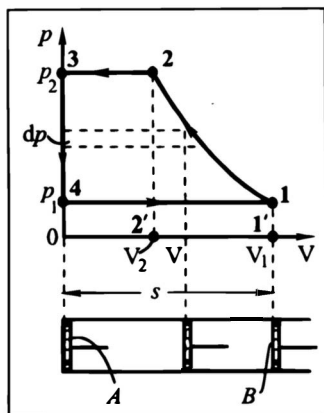
В соответствии с представленными выше стадиями цикла работа ПК в расчете на 1 цикл (ц.) складывается из трех составляющих — затрат энергии: на сжатие газа по линии 1—2; на выталкивание газа к потребителю по линии 2—3; приход энергии (газ совершает работу над поршнем) при всасывании газа от источника по линии 4—1. Расчетные формулы для затрат энергии на различных стадиях базируются на выражении (4.8):

— для стадии сжатия работа составляет в самом общем виде

$$L_{сж} = \int_{V_2}^{V_1} p dV \text{ (Дж/ц.) и выражается площадью под линией сжа-}$$

тия (1—2—2'—1'—1);

— для стадии выталкивания (нагнетания) при  $p_2 = \text{const}$  выражение (4.8) легко интегрируется:  $L_n = p_2(V_2 - 0) = p_2 V_2$  (Дж/ц.), и работа отвечает площади (2—3—0—2'—2);





— для стадии *всасывания* характерен *приход* энергии при  $p_1 = \text{const}$ ; выражение (4.8) здесь также легко интегрируется:  $L_v = p_1(0 - V_1) = -p_1V_1$  (Дж/ц.), и работа отвечает площади (4—1—1'—0—4).

Собирая составляющие затрат энергии (Уходы и Приход), получим

$$L = \Sigma L_i = \int_{V_2}^{V_1} p dV + p_2V_2 - p_1V_1 \text{ (Дж/ц.)} . \quad (4.10)$$

Представленное в таком виде выражение для  $L$  подчеркивает, что в затратах энергии в ПК работа на стадии сжатия газа (первое слагаемое в правой части) — лишь одна из составляющих общих затрат. Для последующего анализа выражение (4.10) целесообразно преобразовать. Опирируя соответствующими площадями (пл.), получим

$$L = \text{пл.}(1-2-2'-1'-1) + \text{пл.}(2-3-0-2'-2) - \text{пл.}(4-1-1'-0-4) = \\ = \text{пл.}(4-1-2-3-4). \quad (\text{a})$$

Результирующая площадь (4—1—2—3—4), очерченная жирной линией на рис.4.5, очевидно представляет собой интеграл:

$$L = \int_{p_1}^{p_2} V dp \text{ (Дж/ц.)}. \quad (4.11)$$

Таким образом, выражение для расчета затрат энергии в ПК (на все стадии, включая сжатие) совпадает с соответствующим выражением (4.9) для динамических компрессоров.

Рассматривая совместно линии сжатия на рис. 4.1 и диаграмму рабочего цикла компрессора на рис. 4.5, можно видеть, что работа минимальна при изотермическом сжатии, больше — при адиабатическом сжатии и наибольшая (поскольку реально, как правило,  $m > k$ ) — при политропическом сжатии. Физически это объясняется тем, что ПК — машина объемного действия: на сжатие одинаковых объемов газа (строго говоря, газов равной атомности) затрачивается одинаковая энергия. Поэтому повышению температуры при сжатии газа, приводящему к увеличению его объема, закономерно сопутствует повышение затрат энергии. Отсюда следует вывод, что для снижения энергетических затрат надо стремиться к приближению процесса сжатия к изотермическому или хотя бы к адиабатическому. На практике это стремление реализуется путем охлаждения стенок компрессора в процессе сжатия (а также исходного газа до компрессора, если это не противоречит требованиям технологии).

В практических расчетах неудобно оперировать затратами энергии за цикл; поэтому под интеграл в выражение (4.11) обычно подставляют:

— удельный объем газа  $v$  ( $\text{м}^3/\text{кг}$ ) — тогда получают удельную работу  $l$  в  $\text{Дж}$  на  $1 \text{ кг}$  сжимаемого газа

— либо объемный расход  $V$  ( $\text{м}^3/\text{с}$ ) — тогда получают затраты энергии  $L$  в единицу времени ( $\text{Дж}/\text{с} = \text{Вт}$ ).

Во всех этих случаях для вычисления интеграла (4.11) надо знать связь между подынтегральными величинами. Конкретное выражение этой связи зависит от характера процесса сжатия, т.е. от уравнения, описывающего стадию сжатия 1—2. Ниже рассмотрены характерные режимы сжатия, причем анализ проводится в расчете на  $1 \text{ кг}$  сжимаемого газа с определением удельной работы  $l$  в  $\text{Дж}/\text{кг}$ . Аналитические выражения для  $l$  достаточно просто получаются применительно к *идеальному* газу.

**Изотермическое сжатие.** Здесь справедливо уравнение (4.5т). Домножив и разделив подынтегральное выражение на  $p$ , можно вынести из-под интеграла произведение  $p v$  — в форме  $p_1 v_1$ , или  $p_2 v_2$ , или  $RT$ , причем  $T_1 = T_2 = T$ :

$$l_t = \int_{p_1}^{p_2} v dp = \int_{p_1}^{p_2} p v \frac{dp}{p} = p_1 v_1 \ln \frac{p_2}{p_1} = p_2 v_2 \ln \frac{p_2}{p_1} = RT \ln \frac{p_2}{p_1} \quad (\text{Дж}/\text{кг}). \quad (4.12)$$

**Адиабатическое сжатие.** Здесь справедливо уравнение (4.5с); его целесообразно переписать в форме  $p^{1/k} v = \text{const}$ . Домножив и разделив подынтегральное выражение на  $p^{1/k}$ , можно вынести из-под интеграла произведение  $p^{1/k} v$  — в форме  $p_1^{1/k} v_1$  или  $p_2^{1/k} v_2$ . Например:

$$\begin{aligned} l_s &= \int_{p_1}^{p_2} v dp = \int_{p_1}^{p_2} p^{1/k} v \frac{dp}{p^{1/k}} = p_1^{1/k} v_1 \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p^{1/k}} = \\ &= p_1^{1/k} v_1 \frac{p_2^{-\frac{1}{k}+1} - p_1^{-\frac{1}{k}+1}}{-\frac{1}{k}+1} = \frac{k}{k-1} p_1^{1/k} v_1 \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] = \\ &= \frac{k}{k-1} RT_1 \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] \quad (\text{Дж}/\text{кг}). \end{aligned} \quad (4.13)$$

**Политропическое сжатие.** Здесь справедливо уравнение (4.5м). Путем аналогичных (см. выше) преобразований (разу-

меется, с заменой  $k$  на показатель политропы  $m$ ) приходим к выражению для удельной политропической работы компрессора:

$$l = \frac{m}{m-1} p_1 v_1 \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right] =$$

$$= \frac{m}{m-1} R T_1 \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right] \text{ (Дж/кг)} . \quad (4.14)$$

Из рассмотрения выражений (4.12)—(4.14) следует, что удельная (на 1 кг газа) затрачиваемая энергия в компрессорах

- увеличивается с повышением степени сжатия  $p_2/p_1$ ;
- возрастает при увеличении удельного объема газа  $v$  (т.е. при уменьшении молярной массы:  $R = R_y/M$ );
- возрастает по мере удаления процесса сжатия от изотермического и адиабатического, т.е. при увеличении показателя политропы  $m$ , в особенности при  $m > k$ .

Два последних эффекта связаны с увеличением объема сжимаемого газа.

Удельная работа компрессора может быть представлена как разность энтальпий конечного и начального состояний адиабатно сжимаемого газа. Покажем это применительно к *идеальному* газу. Удельные затраты энергии, выраженные по (4.13), преобразуем с учетом приведенных в разд. 4.2 формул  $k = c_p/c_v$ ,  $R = c_p - c_v$ ;  $T_2/T_1 = (p_2/p_1)^{\frac{k-1}{k}}$ , имея при этом в виду, что произведение  $c_p T$  представляет собой энтальпию  $h$ :

$$l_s = \frac{k}{k-1} R T_1 \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] = \frac{c_p / c_v}{c_p / c_v - 1} (c_p - c_v) T_1 \left[ \frac{T_2}{T_1} - 1 \right] =$$

$$= c_p (T_2 - T_1) = h_2 - h_1 . \quad (6)$$

Для *реального* газа, как указано в разд. 4.2, уравнение Клайперона—Менделеева (4.1) теряет точность, а теплоемкости  $c_p$  и  $c_v$  являются функциями температуры и давления. В этом случае аналитические выражения (4.12)—(4.14), полученные на базе уравнения (4.1), становятся приближенными. Более строгими будут расчеты с помощью диаграмм состояния реальных газов; в аспекте ПАХТ наиболее удобной представляется энтальпийно-

энтропийная диаграмма  $h - s$ , где разность энтальпий конечного и начального состояний выражает удельную работу компрессора:

$$l = \Delta h = h_2 - h_1 \text{ (Дж/кг)} . \quad (4.15)$$

Диаграмма  $h - s$  с характерными изолиниями некоторых параметров состояния и изображенными на ней процессами в компрессоре показана на рис. 4.2. Изотермический процесс изображается на этой диаграмме линией  $1-2t$ , адиабатический — вертикальным отрезком  $1-2s$ , политропические процессы — линиями  $1-2'$  (при очень хорошем охлаждении газа в процессе его сжатия) и  $1-2''$  (преобладающий практический случай). В начале расчета обычно располагают исходным состоянием газа в точке 1 (известны начальные давление  $p_1$  и температура  $t_1$ ) и знают конечное давление  $p_2$ . Тогда нетрудно построить линию адиабатического сжатия (вертикаль от точки 1 до линии  $p_2 = \text{const}$ ) и найти удельную адиабатическую работу  $\Delta h_s$ . Переход к реальным затратам энергии (удельным  $\Delta l = \Delta h$  и полным — в единицу времени) рассмотрен в разд.4.3.6.

#### 4.3.3. Производительность поршневого компрессора

Поскольку поршневые компрессоры — машины *объемного* действия, то резонно вести речь об **объемной производительности**. Однако объемные производительности по исходному и сжатому газу не совпадают: газ сжимаем. Условимся (так принято в ПАХТ, если нет специальных оговорок) оперировать объемной производительностью по *исходному* (всасываемому) газу.

Рассмотрим сначала производительность ПК *простого* действия в *идеализированном* варианте работы — поршень вплотную подходит к торцевой крышке компрессора. По аналогии с поршневыми насосами (см. разд. 3.3.2) теоретическая объемная производительность  $V_0$  за цикл в расчете на исходный (всасываемый) газ равна объему, описываемому движущимся поршнем:  $V_0 = Fs$ , где  $F$  и  $s$  — площадь и ход поршня. Если в единицу времени происходит  $n$  циклов (двойных ходов — всасывания и сжатия-нагнетания), то теоретическая объемная производительность в единицу времени, аналогично формуле (3.13), составляет

$$V_T = Fsn . \quad (4.16)$$

С учетом коэффициента подачи  $\eta_v$ , отражающего запаздывание клапанов (этот эффект описан в разд. 3.2.2), имеем — пока еще в идеализированном варианте:

$$V_{ид} = Fsm\eta_v, \quad (4.16a)$$

причем  $\eta_v$  находится обычно в пределах от 0,85 (малые ПК) до 0,95—0,98 (крупные ПК).

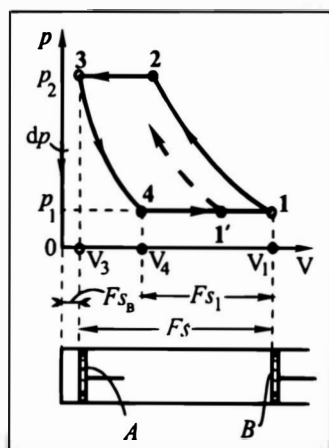


Рис.4.6. Диаграмма  $p - V$  работы поршневого компрессора с учетом вредного пространства;

1 — 4 — характерные состояния рабочего тела

Применительно к поршневым компрессорам выражение (4.16а) требует принципиальной корректировки. Дело в том, что в крайнем (на рис. 4.3, а и 4.5 — левом) положении поршень не подходит вплотную к крышке компрессора, в рабочем пространстве всегда остается некоторый **промежуток**. Его наличие обусловлено необходимостью размещения деталей клапанов, а также недопустимостью ударов поршня о крышку — во избе-

жание механического разрушения компрессора. Поэтому в конце хода выталкивания (в начале хода всасывания) в рабочем пространстве компрессора остается некоторое количество сжатого газа. На начальном этапе стадии всасывания этот газ расширяется, его давление постепенно уменьшается; но пока оно не снизится до давления источника (реально — несколько ниже), всасывающий клапан остается закрытым и всасывания не происходит.

Рабочий цикл ПК с учетом стадии 3—4 *расширения остатка газа*, заключенного в объеме промежутка, показан на рис. 4.6. Из рисунка видно, что протяженность той части хода поршня 4—1, на которой происходит всасывание газа в компрессоре, стала меньше, нежели в идеализированном варианте, — производительность ПК понизилась. Поскольку наличие упомянутого промежутка приводит к понижению производительности компрессора (уменьшается протяженность зоны всасывания газа), объем этого зазора называют **"вредным пространством"**.

Специально подчеркнем, что в поршневых *насосах* поршень тоже не подходит вплотную к крышке цилиндра. Однако вследствие несжимаемости жидкости (идеальной — теоретически, реальной — практически) никакого расширения остатка жидкости, разумеется, не происходит:  $V_3 = V_4$ . Поэтому выражение (3.14) — аналог (4.16а) — для поршневых насосов является правомерным.

Для определения *реальной* объемной производительности ПК необходимо проанализировать эффекты, связанные со стадией расширения остатка. Обозначим (см. рис.4.6):  $s_1$  — та часть хода

поршня, на которой в действительности происходит всасывание газа в рабочее пространство компрессора;  $\epsilon_B = Fs_B/Fs = s_B/s$  — относительный объем вредного пространства. Тогда реальная объемная производительность ПК по всасываемому газу составит за один цикл  $V_0 = Fs_1$ . Величиной  $s_1$  оперировать неудобно, поскольку в паспорте ПК указан *полный* ход поршня  $s$ . Поэтому вводят понятие об **объемном КПД** компрессора  $\lambda_0 = Fs_1/Fs = s_1/s < 1$ . Тогда объемная производительность ПК за цикл составит  $V_0 = Fs_1 = Fs\lambda_0$ , а за единицу времени

$$V = Fsm\eta_v\lambda_0, \quad (4.17)$$

причем все трудности расчета переносятся на нахождение  $\lambda_0$ .

Для компрессоров *двойного* действия производительность, естественно, будет вдвое больше.

Чтобы найти  $\lambda_0$ , рассмотрим стадию 3—4 расширения остатка, полагая, что в общем случае процесс расширения газа протекает политропически. Тогда

$$p_2 V_3^m = p_1 V_4^m, \quad p_2^{1/m} V_3 = p_1^{1/m} V_4. \quad (в)$$

Подставим в (в) значения  $V_3 = Fs_B$  и  $V_4 = F(s_B + s - s_1)$ ; после сокращения на  $F$  получим

$$\frac{V_4}{V_3} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{1/m} = \frac{s_B + s - s_1}{s_B}.$$

Поделим почленно величины в правой части равенства и домножим числитель и знаменатель получившегося при этом отношения  $s_1/s_B$  на  $s$ :

$$\left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{1/m} = 1 + \frac{s}{s_B} - \frac{s_1 s}{s_B s}.$$

В правой части последнего выражения *по определению* второе слагаемое  $s/s_B = 1/\epsilon_B$ , а третье  $\frac{s_1}{s} \frac{s}{s_B} = \frac{\lambda_0}{\epsilon_B}$ , так что

$$\left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{1/m} = 1 + \frac{1}{\epsilon_B} - \frac{\lambda_0}{\epsilon_B}. \quad (г)$$

Решая (г) относительно  $\lambda_0$ , получим расчетное выражение для объемного КПД поршневого компрессора:

$$\lambda_0 = 1 - \epsilon_B \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{1/m} - 1 \right]. \quad (4.18)$$

Это значение  $\lambda_0$  и используется при расчете объемной производительности по формуле (4.17).

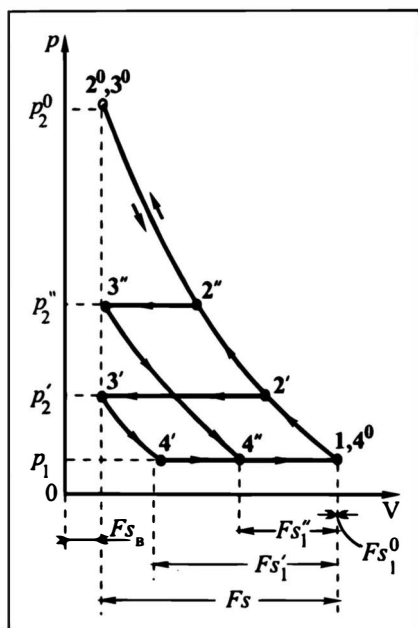


Рис.4.7. К влиянию степени сжатия газа на объемный КПД поршневого компрессора (обозначения — в тексте)

Из соотношения (4.18) следует ряд выводов относительно величины объемного КПД  $\lambda_0$ .

1. Значение  $\lambda_0$  понижается при увеличении относительного объема вредного пространства  $\epsilon_v$ . Величина  $\epsilon_v$  задана в паспортных данных ПК; обычно она находится в диапазоне 0,02—0,08 для компрессоров умеренного давления и может несколько превышать 0,1 для компрессоров высокого давления.

2. Значение  $\lambda_0$  понижается при увеличении степени сжатия  $p_2/p_1$ ; этот эффект иллюстрируется

рис.4.7. При относительно небольших конечных давлениях  $p_2'$  (или степенях сжатия  $p_2'/p_1$ ) реальный ход всасывания  $s'$  остается достаточно протяженным, так что производительность компрессора по всасываемому газу за рабочий цикл сравнительно велика:  $Fs_1'$ . При *больших* конечных давлениях  $p_2''$  (степенях сжатия  $p_2''/p_1$ ) протяженность реального хода всасывания понижается до  $s_1''$ , так что объемная производительность станет меньше:  $Fs_1''$ . Можно представить себе столь значительные конечные давления  $p_2^0$  и степени сжа-

тия  $p_2^0/p_1$ , что ход всасывания  $s_1^0$  станет равным нулю. В таких предельных условиях ПК будет "работать на себя", т.е. только на сжатие газа и расширение остатка — без всасывания газа от источника и выталкивания к потребителю. Если отвлечься от возможного различия в значениях показателя политропы  $m$  при сжатии газа и при расширении остатка, то в рассматриваемой предельной ситуации линии сжатия 1—2<sup>0</sup> и расширения 3<sup>0</sup>—4<sup>0</sup> совпадают, а пары точек 2<sup>0</sup> и 3<sup>0</sup>, 1 и 4<sup>0</sup> — сливаются.

Подчеркнем: зависимость  $\lambda_0$  от  $p_2$  (или от  $p_2/p_1$ ) указывает на то, что объемный КПД не может быть задан заранее: он опреде-

ляется, наряду со значением конструктивной величины  $\epsilon_b$ , также условиями функционирования компрессора.

3. Значение  $\lambda_0$  возрастает с увеличением показателя политропы  $m$  на стадии расширения остатка. Иными словами, наименьшему значению  $m = 1$  (изотермическое расширение остатка) отвечали бы минимальные значения  $s_1$  и  $\lambda_0$ , при адиабатическом процессе  $\lambda_0$  был бы выше, при политропическом в случае  $m > k$  — еще выше.

При работе ПК на стадиях 1—2 сжимается весь газ (объемом  $V_1$ ) под поршнем в рабочей зоне компрессора, в том числе и находившийся ранее во вредном пространстве. Это, однако, не должно восприниматься как бесполезные, хотя и вынужденные *потери* энергии на сжатие той *части* газа [ $V_4 = F(s + s_b - s_1)$  — в конце хода всасывания и  $V_3 = Fs_b$  — в конце хода нагнетания], которая далее не попадает к потребителю. Конечно, на сжатие упомянутой *части* газа и в самом деле затрачивается энергия; но при расширении остатка эта энергия возвращается газом поршню, *практически полностью компенсируя* непроизводительные затраты энергии на сжатие газа, заключенного ранее во вредном пространстве. Выше указано "практически", поскольку реально возможно некоторое различие в затраченной и возвращенной энергии в силу неполного совпадения показателей политропы на стадиях сжатия газа и расширения остатка.

Таким образом, эффект расширения остатка понижает производительность ПК, но практически не влияет на затраты энергии в расчете на цикл, на 1 кг сжимаемого газа, передаваемого потребителю, или перерабатываемого в единицу времени при заданной производительности.

Диаграмма сжатия на рис. 4.6 отражает реальный эффект расширения остатка, но тем не менее является *модельной*. Индикаторная диаграмма, снимаемая на действующем компрессоре, располагается около модельной, несколько отличаясь от нее — прежде всего конфигурацией линий всасывания и выталкивания. Эти отличия обусловлены особенностями работы клапанов и теплообменом газа с охлаждаемыми стенками цилиндра компрессора\*.

В разд. 4.3.1 было отмечено, что ПК, как и поршневые насосы (см. разд. 3.3.3), подают рабочее тело неравномерно — *пульсирующим* темпом: существует некое отклонение ("избыток") газа от средней (равномерной) подачи. В то же время потребителю по условиям технологического процесса может потребоваться существенная равномерность подачи газа. Выравнивание подачи, как указано выше, обеспечивается установкой ресивера (см. рис. 4.4) или естественным сглаживанием пульсаций в газопроводе.

---

\* См. [1, 3—5, 7].



Объем ресивера должен быть достаточно большим, чтобы, попав в него, избыток газа не изменил бы заметно давления газа. Тогда напор (разность давлений между ресивером и потребителем) будет изменяться мало, пульсации сгладятся, и газовый поток к потребителю станет существенно равномернее. **Расчет объема ресивера** с этих позиций ведется так же, как и объема воздушного колпака (разд.3.3.4). И с тех же позиций можно оценить релаксирующее (снижающее амплитуду пульсаций) воздействие участка газопровода от компрессора до потребителя, полагая, что объем газопровода по существу выполняет роль ресивера.

#### 4.3.4. Степень сжатия в поршневом компрессоре

В технологических процессах нередко используются газы, сжимаемые от начального давления (часто близкого к атмосферному, т.е. к 0,1 МПа) до рабочего, исчисляемого сотнями атмосфер (десятками МПа). Между тем условия функционирования ПК устанавливают определенные пределы для степени сжатия  $p_2/p_1$ . Будем рассматривать эти пределы в аспекте производительности ПК и конечной температуры газа  $T_2$ .

Физические пределы степени сжатия  $(p_2/p_1)^\Phi$ , исходя из **производительности** компрессора, определены в предыдущем разделе: при достаточно высоких степенях сжатия  $p_2/p_1$  объемный КПД компрессора  $\lambda_0$  становится равным нулю, и компрессор перестает подавать газ потребителю ( $V = 0$ ), работая "на себя". Предельную степень сжатия находят подстановкой  $\lambda_0 = 0$  в уравнение (4.18) и последующим решением его относительно  $(p_2/p_1)_{\text{пр}}^\Phi$ :

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{\text{пр}}^\Phi = \left(\frac{1}{\epsilon_v} + 1\right)^m. \quad (\text{д})$$

Если, например, положить  $\epsilon_v = 0,1$  и принять, что расширение остатка происходит адиабатически ( $m = k$ ), то для двухатомных газов ( $k \approx 1,4$ ) получается  $(p_2/p_1)_{\text{пр}}^\Phi \approx 29$ ; при  $\epsilon_v = 0,05$  эта величина составляет  $\approx 71$ . Если бы сжатие газа происходило изотермически ( $m = 1$ ), то значения  $(p_2/p_1)_{\text{пр}}^\Phi$  составили бы соответственно 11 и 21. Заметим, что на практике расширение остатка — достаточно быстротечно, часто занимает сравнительно небольшую долю хода всасывания и потому протекает в режиме, близком к адиабатному (изоэнтропийному).

Практический интерес для технолога представляет **предельная** степень сжатия, обусловленная приемлемой производительностью компрессора. Такой предел устанавливается по некоторому минимально приемлемому значению  $\lambda_0^{\text{min}}$ . В этом случае

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{\text{пр}}^T = \left(\frac{1 - \lambda_0^{\text{min}}}{\epsilon_v} + 1\right)^m. \quad (\text{е})$$

Для  $\lambda_0^{\min} = 0,7$  в условиях приведенных выше примеров получаются, естественно, более низкие предельные значения  $(p_2/p_1)_{\text{пр}}$ ; в случае адиабатического расширения остатка они составляют соответственно 7 и 15.

Приведенные выше численные предельные значения степени сжатия следует оценивать как достаточно высокие; обычно не они лимитируют, *не по ним* устанавливается предельное значение  $p_2/p_1$ .

Значительно жестче пределы степени сжатия, найденные исходя из *конечной* температуры газа  $T_2$ . Последняя определяется по уравнению (4.7):

$$T_2 = T_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}}. \quad (4.7a)$$

Ограничения по  $T_2$  связаны прежде всего с устойчивостью смазки.

Смазка должна быть термически устойчива к разложению (крекингу), а ее температура вспышки — достаточно высока. Вязкость смазки не должна заметно изменяться с температурой, иначе смазка не удержится на трущихся поверхностях.

Современные смазочные масла термически вполне устойчивы до весьма высоких температур и обладают высокой температурой вспышки. Кроме того, вязкость современных смазочных масел сравнительно медленно понижается с ростом температуры. Тем не менее именно вязкостная стабильность смазки является главной причиной ограничений в температуре  $T_2$ : при чрезмерно высоких температурах заметно понижается вязкость смазки, и она плохо удерживается на трущихся поверхностях; приходится увеличивать ее расход, иначе возрастут затраты энергии на преодоление трения. В настоящее время рассматриваемый температурный предел определен цифрами  $t = 180+200^\circ\text{C}$ .

В качестве примера оценим по (4.7a) температуру  $T_2$  при  $T_1 = 300\text{ K}$  ( $27^\circ\text{C}$ ) для вполне типичных степеней сжатия, равных 4 и 5, в случае адиабатического сжатия двухатомного газа ( $k \approx 1,4$ ):

$$T_2 = 300 \cdot (4)^{\frac{1,4-1}{1,4}} = 446\text{ K} = 173^\circ\text{C};$$

$$T_2 = 300 \cdot (5)^{\frac{1,4-1}{1,4}} = 475\text{ K} = 202^\circ\text{C}.$$

Из приведенных выше численных примеров следует, что в аспекте *устойчивости смазки* степени сжатия в ПК на уровне 4—5 близки к предельным. Это означает, что ни по условиям приемлемой производимости, ни по условиям вязкостной стабильности смазки задача работы компрессора с высокими степенями сжатия (на уровне десятков и сотен) не может быть решена при использовании *одноступенчатого* поршневого компрессора.

### 4.3.5. Сжатие газа в многоступенчатых компрессорах

#### *Схема многоступенчатой компрессионной установки*

Высокая результирующая степень сжатия достигается применением многоступенчатых компрессоров с охлаждением газа между ступенями. На рис.4.8 в качестве примера изображена схема трехступенчатой компрессорной установки. Исходный газ дав-

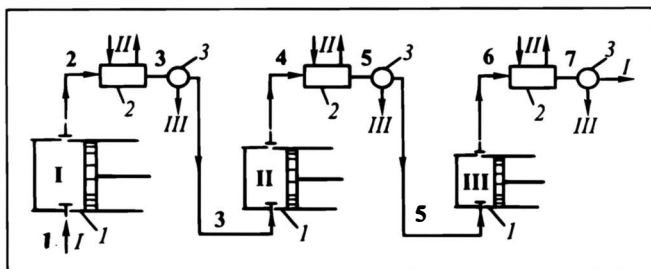


Рис. 4.8. Схема трехступенчатой компрессорной установки с охлаждением газа между ступенями:

*I* — компрессоры (римские цифры I—III — номера ступеней), 2 — холодильники, 3 — влагоотделители; *I* — газ, *II* — охлаждающий агент, *III* — выделившаяся влага; 1 — 7 — характерные состояния рабочего тела

лением  $p_1$  и температурой  $T_1$  (состояние 1) поступает в первую ступень компрессора, сжимается в ней до давления  $p_2$  (состояние 2). После I ступени сжатия газ подается в холодильник, в котором изобарически охлаждается до состояния 3 (желательно до первоначальной температуры  $T_1$  — той же, что и в точке 1). Далее охлажденный газ подается на II ступень сжатия — до давления  $p_3$  (состояние 4) и затем охлаждается в холодильнике после II ступени сжатия — предпочтительно до первоначальной температуры (состояние 5). Охлажденный газ подается в следующую ступень компрессора (в рассматриваемом примере — на III и последнюю), где сжимается до давления  $p_4$  (состояние 6), после чего в случае необходимости охлаждается в конечном холодильнике (до состояния 7).

Кружками на схеме изображены **влагоотделители**, устанавливаемые после каждого холодильника. Дело в том, что водяные пары, находящиеся в исходном газе обычно в *ненасыщенном* состоянии, в результате уменьшения объема газа при сжатии могут (чаще всего так и бывает) после охлаждения примерно до первоначальной температуры оказаться *пересыщенными*. Тогда избыток влаги выпадает в виде конденсата в количестве, превышающем возможности насыщения, а газ остается насыщенным водяными парами. (Эффект насыщения газа влагой и выпадения конденсата в результате повышения давления становится более понятным при рассмотрении свойств влажного воздуха в разд.15.2.2.)

Наличие капельной влаги в газе неблагоприятно сказывается на работе компрессора, поскольку за счет выделения теплоты сжатия газа и трения происходит испарение капель. Это сопровождается дополнительным повышением степени сжатия в компрессоре вследствие возрастания конечного давления: при испарении капель объем рабочего тела резко увеличивается. В результате понижаются  $\lambda_0$  и производительность компрессора. Кроме того, испарение капель сопровождается возникновением локальных (в точках испарения капель) термических напряжений на стенках цилиндра — появляется усталость металла, снижается долговечность работы компрессора. Наконец, потребитель по условиям технологии может потребовать удаления капель из газа. Этим целям и служат влагоотделители (сепараторы), выводящие сконденсировавшуюся влагу из газовой системы. Заметим, что одновременно происходит и удаление капель смазочного масла, так что эти сепараторы по существу являются **влагомаслоотделителями**.

### Оптимизация распределения степени сжатия по ступеням компрессора

Понижение степени сжатия  $p_{i+1}/p_i$  в каждой ступени многоступенчатого компрессора в сравнении с высокой общей степенью сжатия  $p_{n+1}/p_1$  в  $n_c$ -ступенчатой компрессорной установке позволяет успешно разрешить обе сформулированные выше проблемы:

- в каждой отдельной ступени, где газ сжимается с умеренной степенью сжатия, получаются технологически приемлемые (достаточно высокие) значения  $\lambda_0$ ;

- поскольку степень сжатия в каждой ступени ограничена и между ступенями производят охлаждение газа, температуру в конце стадии сжатия в любой ступени удастся удерживать на уровне, не превышающем предельных (по условиям устойчивости смазки) значений  $t_2^{пр}$ .

Многоступенчатое сжатие с охлаждением газа между ступенями сопровождается *благоприятным энергетическим эффектом*. В самом деле, при охлаждении газа уменьшается его объем (объемный расход), а ПК — машина *объемного* действия; поэтому уменьшение объема сжимаемого газа сопровождается снижением энергетических затрат. Энергетические выгоды использования многоступенчатых компрессоров с промежуточным охлаждением газа в холодильниках наглядно иллюстрируются диаграммой  $p$ — $V$  на рис. 4.9 применительно к идеализированному варианту ( $\epsilon_v = 0$ ). Цифры на этом рисунке отвечают номерам позиций на рис. 4.8. В случае одноступенчатого сжатия от давления  $p_1$  до  $p_4$  была бы затрачена энергия, выражаемая площадью 1—6'—7'—1'—1. Но в случае многоступенчатого сжатия газ, вытолкнутый из I ступени компрессора в объеме  $V_2$ , поступает во II ступень *после его охлаждения* — в объеме  $V_3 < V_2$ . Поэтому работа сжатия во II ступени компрессора будет выражаться не площадью 2—4'—5'—3'—2, а меньшей: площадью 3—4—5'—3'—3; выигрыш в затратах энергии выразится заштрихованной площадью 3—2—

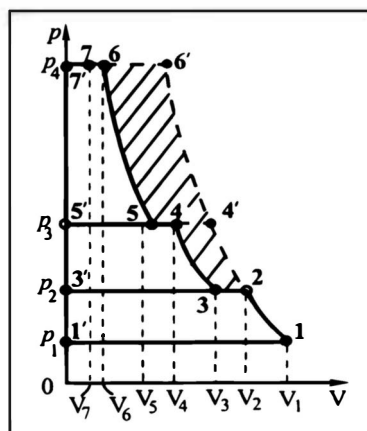


Рис. 4.9. Диаграмма  $p$  —  $V$  сжатия газа в трехступенчатой компрессорной установке с охлаждением газа между ступенями (обозначения — в тексте)

4'—4—3. Точно так же, в результате охлаждения газа после II ступени, выигрыш в затратах энергии на III ступени компрессора отвечает заштрихованной площади 5—4'—6'—6—5.

Количественно выигрыш в суммарных (по *всем* ступеням компрессора) затратах энергии  $l_{\Sigma}$  зависит от распределения промежуточных давлений  $p_2$  и  $p_3$  или, что то же самое, — от **распределения степени сжатия по ступеням многоступенчатого компрессора**. Разумеется, начальное давление  $p_1$  на входе в компрессор и конечное  $p_{n+1}$  на выходе из него (в рассматриваемом примере  $p_{n+1} = p_4$ ) — зафиксированы условиями технологического процесса. Таким образом,  $l_{\Sigma} = l(p_2, p_3)$ . Запишем выражение для  $l_{\Sigma}$  применительно к *удельным* затратам энергии:

$$l_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n l_i = \frac{m}{m-1} p_1 v_1 \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m}{m-1}} - 1 \right] + \\ + \frac{m}{m-1} p_2 v_2 \left[ \left( \frac{p_3}{p_2} \right)^{\frac{m}{m-1}} - 1 \right] + \frac{m}{m-1} p_3 v_3 \left[ \left( \frac{p_4}{p_3} \right)^{\frac{m}{m-1}} - 1 \right] + \dots, \quad (\text{ж})$$

Из соотношения (ж) видно, что каждый из параметров  $p_2$  и  $p_3$  двояко влияет на  $l_{\Sigma}$ : например, с увеличением  $p_2$  возрастает первое слагаемое в правой части (ж), но уменьшается второе слагаемое. То же самое можно сказать о влиянии  $p_3$  на второе и третье слагаемые в правой части (ж). Это означает, что может существовать такое оптимальное распределение степеней сжатия по ступеням компрессора, при котором суммарные затраты энергии будут минимальными.

С целью определения условия  $l_{\Sigma} = \min$  запишем выражение для  $l_{\Sigma}$ , используя формулы (4.13) или (ж). Для простоты положим:

- газ является идеальным;
- сжатие происходит адиабатически ( $s = \text{const}$ );
- в холодильнике после каждой ступени газ удается охладить (изобарически) до первоначальной температуры  $T_1$ .

Поскольку принято, что всасываемый газ в каждую ступень подается при одной и той же температуре  $T_1$ , то  $p_1 v_1 = p_2 v_2 = p_3 v_3 = RT_1$ . И тогда

$$l_{\Sigma} = \frac{k}{k-1} RT_1 \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} + \left( \frac{p_3}{p_2} \right)^{\frac{k-1}{k}} + \left( \frac{p_4}{p_3} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 3 \right]. \quad (4.19)$$

Минимуму работы  $l_{\Sigma}$  отвечают следующие условия выбора  $p_2$  и  $p_3$ :

$$\frac{\partial l_{\Sigma}}{\partial p_2} = 0, \quad \frac{\partial l_{\Sigma}}{\partial p_3} = 0. \quad (3)$$

При дифференцировании степенных функций дробного вида  $(x/a)^n$  и  $(a/x)^n$ , содержащих константу  $a$ , удобной является форма записи, сохраняющая дробь в той же степени и включающая множитель  $1/x$ , чтобы учесть понижение показателя степени на 1. Так,

$$\frac{\partial}{\partial x} (x/a)^n = n(x/a)^n(1/x) \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial x} (a/x)^n = -n(a/x)^n(1/x). \quad (\text{и})$$

Используем этот прием — сначала для первого из условий (3). При этом имеем в виду, что давления  $p_1$  и  $p_4$  существенно постоянны, а  $p_3$  считается постоянным при отыскании *частной* производной по  $p_2$ :

$$\frac{\partial l_{\Sigma}}{\partial p_2} = \frac{k}{k-1} T_1 \left[ \frac{k-1}{k} \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \frac{1}{p_2} - \frac{k-1}{k} \left( \frac{p_3}{p_2} \right)^{\frac{k-1}{k}} \frac{1}{p_2} + 0 - 0 \right] = 0. \quad (\kappa)$$

Согласно (κ) выражение в квадратных скобках равно нулю.

Проведя очевидные сокращения (на  $\frac{k-1}{k}$  и  $p_2$ ), придем к

равенству  $(p_2 / p_1)^{\frac{k-1}{k}} = (p_3 / p_2)^{\frac{k-1}{k}}$ , откуда следует

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_3}{p_2}. \quad (\lambda)$$

Проведя аналогичные преобразования для второй из производных в выражениях (3), найдем, полагая постоянным давление  $p_2$ :

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{p_4}{p_3}. \quad (\mu)$$

Такие же попарные равенства будут справедливы для любой пары смежных ступеней многоступенчатого компрессора. Таким образом,

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_3}{p_2} = \frac{p_4}{p_3} = \dots = \frac{p_{i+1}}{p_i} = \dots = \frac{p_{n+1}}{p_n} = \text{idem}. \quad (4.20)$$

Значит, для обеспечения минимума суммарных энергозатрат во всех ступенях многоступенчатого компрессора степени сжа-

тия должны быть *одинаковыми*. Суммарная удельная работа  $l_{\Sigma}$  в этом случае составит

$$l_{\Sigma} = n_c R T_1 \left[ \left( \frac{p_{i+1}}{p_i} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right], \quad (4.21)$$

причем  $p_{i+1}/p_i = p_2/p_1$ .

Строго говоря, надо убедиться, что условия (3) действительно отвечают *минимуму* работы  $l_{\Sigma}$ . Для этого следует установить знак второй производной в точке минимума, т.е. при  $p_2/p_1 = p_3/p_2$ .

Применительно к *первой* из рассматриваемых производных (3) используем выражение (к):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l_{\Sigma}}{\partial p_2^2} &= \frac{k}{k-1} R T_1 \frac{\partial}{\partial p_2} \left[ \frac{1}{p_2} \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - \frac{1}{p_2} \left( \frac{p_3}{p_2} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right] = \\ &= R T_1 \left[ -\frac{1}{p_2^2} \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} + \frac{1}{p_2^2} \frac{k-1}{k} \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} + \frac{1}{p_2^2} \left( \frac{p_3}{p_2} \right)^{\frac{k-1}{k}} + \frac{1}{p_2^2} \frac{k-1}{k} \left( \frac{p_3}{p_2} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]. \end{aligned}$$

Легко видеть, что первое и третье слагаемые в квадратных скобках взаимно уничтожаются, а второе и четвертое — существенно положительны; значит, экстремум  $l_{\Sigma}$  действительно есть минимум.

Тот же знак и смысл имеет вторая производная для *второго* условия (3).

Попытка проведения анализа по той же канве в случае *изотермического* сжатия даст "неожиданный" результат: суммарные затраты энергии  $l_{\Sigma}$  безразличны к распределению степеней сжатия по ступеням компрессора. В этом гипотетическом случае газ между ступенями охлаждать незачем ( $T_1 = T_2 = \text{const}$ ), так что выигрыша в работе не будет.

Пользуясь соотношением (4.20), нетрудно решить задачу о степени сжатия в  $n_c$ -ступенчатом компрессоре при известных начальном  $p_1$  и конечном  $p_{n+1}$  давлениях, и наоборот — о числе ступеней  $n_c$  при выбранной степени сжатия в одной ступени. Для этого перемножим все отношения  $p_{i+1}/p_i$ , содержащиеся в (4.20):

$$\frac{p_2}{p_1} \frac{p_3}{p_2} \frac{p_4}{p_3} \dots \frac{p_{i+1}}{p_i} \dots \frac{p_{n+1}}{p_n} = \left( \frac{p_{i+1}}{p_i} \right)^{n_c} = \frac{p_{n+1}}{p_1}. \quad (н)$$

Отсюда степень сжатия в произвольной ступени (при заданной результирующей степени сжатия в  $n_c$ -ступенчатом компрессоре) составит

$$\frac{p_{i+1}}{p_i} = \sqrt[n_c]{\frac{p_{n+1}}{p_1}}. \quad (о)$$

Из (4.20) получается и число ступеней компрессора при заданной степени сжатия в одной ступени:

$$n_c = \frac{\ln(p_{n+1} / p_1)}{\ln(p_{i+1} / p_i)}; \quad (\text{п})$$

разумеется, рассчитанное значение  $n_c$  следует округлить до целого числа, после чего скорректировать по формуле (о) степень сжатия в одной ступени.

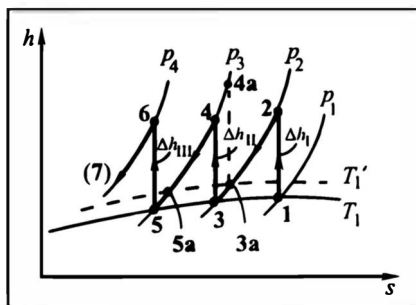
Из выражения (4.20) в соответствии с формулой (4.13) следует, что при равенстве степеней сжатия по ступеням компрессора и охлаждении до  $T_1$  газа, всасываемого в каждую ступень, затраты энергии во всех ступенях также будут одинаковыми:

$$l_1 = l_2 = l_3 = \dots = l_i = \dots = l_{n_c}. \quad (4.22)$$

Закключение о равенстве затрат энергии по ступеням компрессора является *более общим*, нежели о равенстве степеней сжатия. Дело в том, что анализ, приведший к уравнению (4.20), выполнен для *идеального* газа. Для *реального* газа при переходе в область более высоких давлений затраты энергии при одинаковых степенях сжатия в каждой последующей ступени возрастают: газ при повышении давления все в большей мере сопротивляется сжатию. Поэтому для сохранения условия (4.22) — именно оно отвечает минимуму  $l_\Sigma$  при сжатии реального газа — рабочие объемы компрессоров конструируют таким образом, чтобы степени сжатия постепенно понижались от первой ступени к последней: так, чтобы затраты энергии в разных ступенях были одинаковыми; тогда суммарные ее затраты будут минимальными.

Многоступенчатое сжатие реальных газов с промежуточным охлаждением между ступенями компрессора представлено в диаграмме  $h-s$  на рис. 4.10. Стадии адиабатического сжатия изображаются вертикальными отрезками 1—2, 3—4 и 5—6, стадии изобарического охлаждения в холодильниках — криволинейными участками 2—3 и 4—5; если требуется охлаждение газа, поступающего к потребителю, то еще и участком

Рис. 4.10. Диаграмма  $h-s$  сжатия газа в трехступенчатой компрессорной установке с охлаждением газа между ступенями (обозначения — в тексте)





6–7. Минимальные суммарные затраты энергии реализуются в случае равенства работ по ступеням компрессора:  $\Delta h_I = \Delta h_{II} = \dots = \Delta h_{III}$  (причем для  $i$ -й ступени ПК  $l_i = \Delta h_i$ ) и  $l_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n \Delta h_i$ .

Реальные (политропические) затраты энергии рассчитываются по адиабатической работе с использованием адиабатического КПД компрессора (см. разд.4.3.6).

На практике газ после очередного холодильника обычно не удастся охладить до первоначальной температуры  $T_1$ . Например, из холодильника после I ступени газ подается на II ступень с температурой не  $T_1$ , а  $T'_1$ . Тогда процесс изобарного охлаждения в холодильнике изображается участком 2—3а, и далее сжатие газа происходит по адиабате 3а—4а. Аналогичные построения в диаграмме  $h-s$  могут быть выполнены и для последующих стадий сжатия и охлаждения. Разумеется, при этом затраты энергии несколько возрастают, поскольку приходится сжимать увеличившиеся объемы газа, что обусловлено повышением его температуры на всасывающей стороне компрессора с  $T_1$  до  $T'_1$ .

Вывод о равенстве степеней сжатия и затрачиваемой энергии в различных ступенях многоступенчатого компрессора справедлив, если во всех ступенях последовательно сжимается *один и тот же* (весь) массовый поток газа. На практике встречаются случаи, когда имеются два или более потребителя: одни — на газ конечного давления и другие — на газ промежуточных давлений. Здесь тоже возникает проблема оптимизации распределения степеней сжатия по ступеням компрессора, дабы суммарные затраты энергии были минимальными.

#### *Оптимизация распределения степени сжатия при промежуточном отборе части газа*

Задачу оптимизации распределения степеней сжатия будем решать применительно к двухступенчатому компрессору. Согласно схеме на рис.4.11, газовый поток после сжатия в первой ступени разделяется (точка раздачи А) на два:

- один (его доля  $\varphi \leq 1$ ) идет на вторую ступень компрессора и далее под давлением  $p_3$  — к первому потребителю,
- другой (его доля  $1 - \varphi$ ) при промежуточном давлении  $p_2$  направляется ко второму потребителю.

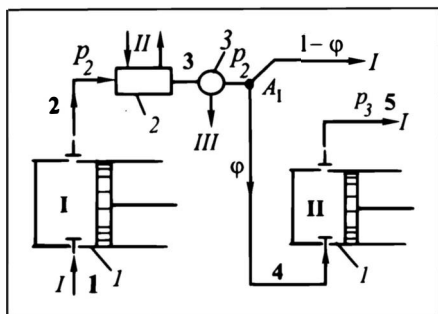
Задача оптимизации степеней сжатия решается в той же манере, что и при отсутствии промежуточного отбора газового потока.

Суммарные удельные затраты энергии запишутся:

$$l_{\Sigma} = l_1 + l_2 = \frac{k}{k-1} RT_1 \left\{ \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] + \varphi \left[ \left( \frac{p_3}{p_2} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] \right\}. \quad (p)$$

Рис. 4.11. К распределению степени сжатия по ступеням компрессора с промежуточным отбором газа между ступенями:

$I$  — компрессоры ( $I, II$  — номер ступени),  $2$  — холодильник,  $3$  — влагоотделитель;  $I$  — газ,  $II$  — охлаждающий агент,  $III$  — выделившаяся влага;  $1-5$  — характерные состояния в процессах сжатия газа в компрессорах и его охлаждения в холодильниках



Из формулы (р) следует, что в рассматриваемом случае единственной варьируемой переменной является промежуточное давление  $p_2$ , поскольку значения  $p_1$  и  $p_3$ , а также  $\varphi$  зафиксированы условиями технологической задачи; иначе говоря,  $l_\Sigma = f(p_2)$ .

Для решения задачи оптимизации  $l_\Sigma$  следует приравнять нулю производную от  $l_\Sigma$  по переменной  $p_2$ . Выполним операцию дифференцирования по канве, изложенной в этом разделе:

$$\frac{\partial l_\Sigma}{\partial p_2} = \frac{k}{k-1} RT_1 \left[ \frac{k-1}{k} \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \frac{1}{p_2} - \varphi \frac{k-1}{k} \left( \frac{p_3}{p_2} \right)^{\frac{k-1}{k}} \frac{1}{p_2} \right] = 0.$$

После очевидных сокращений:

$$\left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \varphi \left( \frac{p_3}{p_2} \right)^{\frac{k-1}{k}},$$

откуда 
$$\frac{p_2}{p_1} = \varphi^{\frac{k}{k-1}} \frac{p_3}{p_2}. \quad (c)$$

Из выражения (с) следует, что при  $\varphi < 1$  оптимальная степень сжатия в первой ступени меньше, чем во второй. В случае увеличения  $\varphi$  различие в оптимальных степенях сжатия в разных ступенях компрессора понижается. Разумеется, если газ промежуточного давления не отводится ( $\varphi = 1$ ), то равенство (с) переходит в выражение типа (ж). Если же устремить  $\varphi$  к нулю, то теряет смысл постановка задачи: речь пойдет об *одноступенчатом* компрессоре, а для него  $p_2$  — величина постоянная.

#### 4.3.6. Об охлаждении поршневых компрессоров

Отвод теплоты в компрессорах является важным объектом их эксплуатации и технологического расчета. Полное удельное (на 1 кг сжимаемого газа) количество теплоты  $q_\Sigma$ , как указано в

разд.4.2, складывается из "теплоты сжатия"  $q_c$  и теплоты трения  $q_T$ .

При известных начальной  $T_1$  и конечной  $T_2$  температурах газа суммарная теплота  $q_\Sigma$  может быть рассчитана по формуле

$$q_\Sigma = c_m(T_2 - T_1), \quad (\tau)$$

причем теплоемкость политропического процесса  $c_m$ , постоянная в условиях политропического сжатия, определяется выражением (4.6б).

Теплота трения  $q_T$  зависит не только от конструктивных особенностей конкретного ПК, но и от качества изготовления его рабочих узлов (цилиндра, поршня, клапанов), от физического их состояния (износа), а также от качества и интенсивности подачи смазки.

Если в компрессоре *нет* отвода теплоты от сжимаемого газа, то его сжатие идет с неким показателем политропы  $m_0$ , и конечная температура  $T_2^0$  определяется по формуле (4.7) при  $m = m_0$ .

Если в компрессоре удалось бы отвести всю теплоту  $q_\Sigma = q_c + q_T$ , охлаждая газ до первоначальной температуры ( $T_2 = T_1$ ), то формально  $\Delta h = c_p(T_2^0 -$

$$- T_1) = 0, \text{ и согласно выражению (4.4) } \delta q = -v dp, \text{ и } q = \int_{p_1}^{p_2} v dp. \text{ (При этом}$$

знак изменился в связи со сменой пределов интегрирования: речь идет не о работе, совершаемой газом, а о работе над газом при изменении давления от  $p_1$  до  $p_2$ .) Таким образом, в рассматриваемом случае количество выделившейся и отведенной теплоты совпало бы с работой, затрачиваемой в компрессоре.

На практике в ходе работы компрессора снимается часть теплоты трения  $q_T$ , так что сжатие происходит политропически — с показателем  $m < m_0$ , а конечная температура  $T_2 < T_2^0$ . Здесь  $T_2$  также определяется по (4.7), но при рабочем значении  $m$ . Удельное количество теплоты, отведенной в ходе работы компрессора, запишется как

$$q_k = (q_m + q_T)_0 - (q_m + q_T) = c_v \left( \frac{m_0 - k}{m_0 - 1} - \frac{m - k}{m - 1} \right). \quad (\text{y})$$

Остальная теплота ( $q - q_k$ ) целиком или частично снимается в холодильниках после компрессора.

Основная трудность расчета — в нахождении теплоты трения  $q_T$  (соответственно — величины  $m_0$ ) и теплоты, отводимой при охлаждении стенок компрессора  $q_k$ . На практике ориентируются на допустимую конечную температуру газа  $T'_2$  (см. разд.4.4), организовав охлаждение компрессора таким образом, чтобы воспрепятствовать превышению  $T'_2$ .

#### 4.3.7. Расход энергии. Мощность

Энергия на сжатие в компрессоре  $G$  ( $\text{кг}$ ) или  $G$  ( $\text{кг/с}$ ) газа рассчитывается на основе удельных затрат энергии  $l$  ( $\text{Дж/кг}$ ). Для периодического и непрерывного процессов соответственно

$$L = Gl \quad (\text{Дж}); \quad L = Gl \quad (\text{Вт}); \quad (\text{ф})$$

далее будет рассматриваться только непрерывная работа компрессора.

В практических расчетах удобно базироваться на адиабатическом (реже — на изотермическом) процессе сжатия газа в

компрессоре, оперируя удельной *адиабатической* работой  $l_s$  или *изотермической* —  $l_t$ . Тогда в случае адиабатической работы

$$L_s = Gl_s \quad (Bm). \quad (x)$$

Переход к политропическим затратам энергии осуществляется с помощью адиабатического КПД компрессора  $\eta_s$ :

$$L = L_s/\eta_s = Gl_s/\eta_s \quad (Bm). \quad (ц)$$

С учетом механических потерь энергии (трение поршня о стенки цилиндра, в редукторе и кривошипно-шатунном механизме, уплотнениях и др.) получим выражение для требуемой мощности двигателя  $N$ :

$$N = \frac{L_s}{\eta_s \eta_m}, \quad (4.23)$$

где механический КПД  $\eta_m$  находится в пределах 0,85 — 0,95.

По формуле (4.23) определяется мощность для одно- и многоступенчатых компрессоров; в последнем случае под  $l_{\Sigma s}$  понимаются суммарные удельные адиабатические затраты энергии

$l_{\Sigma s} = \sum_1^{n_c} l_s = \sum_1^{n_c} \Delta h_s$ , где  $n_c$  — число ступеней в многоступенчатом компрессоре. При этом величины  $l_s$  определяются выражениями, приведенными в разд.4.3.2. Значения мощности  $N$ , рассчитанные по формуле (4.23), лежат в основе подбора привода компрессора (ныне чаще всего — электродвигателя).

В некоторых случаях (например, при расчете мощности в процессах получения глубокого холода — см. разд.21.3.1) удобнее базироваться на удельной изотермической работе  $l_t$ . Тогда расчет ведется с использованием изотермического КПД компрессора  $\eta_t$ :

$$L = L_t/\eta_t = Gl_t/\eta_t \quad (Bm). \quad (ч)$$

В этом случае расчетное выражение для мощности на валу привода имеет вид

$$N = \frac{L_t}{\eta_t \eta_m} = \frac{Gl_t}{\eta_t \eta_m}. \quad (4.24)$$

При этом величины  $l_t$  определяются выражениями, приведенными в разд.4.3.2.

Для многоступенчатых компрессоров  $l_{\Sigma t} = \sum_1^{n_c} l_t$ .

#### 4.3.8. Регулирование производительности поршневых компрессоров

Регулирование производительности ПК имеет целью обеспечить возможность изменения подачи газа потребителю соответственно требованиям его технологического процесса\*. Существуют разные способы регулирования производительности; все они в той или иной мере исходят из выражения (4.17):

$$V = F \pi n \lambda_0.$$

Рассмотрим некоторые способы регулирования производительности.

Наиболее выгодно изменять производительность, варьируя частоту ходов поршня  $n$ . Важно, что при этом не изменяются удельные затраты энергии. Однако изменение  $n$  является достаточно простым лишь при использовании в качестве регулируемого привода, например, паровых машин; кстати, в этом случае возможно плавное регулирование производительности. Но сами паровые машины занимают большие производственные площади и не очень удобны и надежны в эксплуатации. Ныне в подавляющем большинстве случаев в химической промышленности в качестве привода используются электродвигатели переменного тока с определенной частотой вращения ротора  $n$ . Специальное устройство, позволяющее плавно регулировать  $n$  (а значит — и производительность компрессора), весьма сложно, дорого и потому используется лишь для компрессоров с высокой производительностью. По этим причинам приходится искать другие возможности воздействия на производительность  $V$ .

Вполне возможно управлять производительностью путем рецикла газа (рис. 4.12). Тогда часть газового потока  $(1 - \psi)$  высокого давления  $p_2$  после сжатия возвращают, регулируя потоки задвижкой 3, по обводной линии 2 на всасывающую сторону компрессора, где давление  $p_1 < p_2$ . Чем большую долю газа  $(1 - \psi)$  возвращают на всасывающую сторону компрессора, тем меньше газа (его доля  $\psi$ ) поступает к потребителю. Подчеркнем: этот способ регулирования производительности энергетически невы-

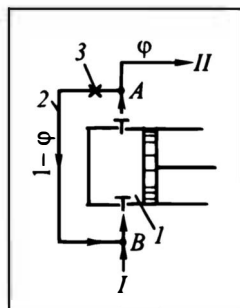


Рис. 4.12. Схема компрессора с обводной линией:

1 — компрессор, 2 — обводная линия, 3 — задвижка; I — источник газа, II — потребитель газа; А и В — точки отбора и возврата циркулирующего газа

\* См. [1, 3–5, 7].

годен, поскольку безвозвратно теряется энергия, затрачиваемая на сжатие рециркулирующего газа.

Регулирование производительности **задвижкой** на всасывающей или нагнетательной линии привлекает своей простотой. Однако и в этом случае возникают непроизводительные затраты энергии — на преодоление местных гидравлических сопротивлений в задвижке  $\Delta p_{\text{зав}}$ . Эти потери заметно меньше, чем в случае рецикла: там фигурирует  $\Delta p = p_2 - p_1 > \Delta p_{\text{зав}}$ . Регулирование производительности задвижками сопровождается и другими нежелательными эффектами.

Если прикрыть задвижку на *всасывающей* линии, то давление газа  $p_1$  после задвижки понизится, значит при том же  $p_2$  возрастет степень сжатия, а с ней и затраты энергии в компрессоре. Кроме того, на всасывающей стороне (между задвижкой и компрессором) давление может оказаться ниже атмосферного. Тогда возможен подсос воздуха в компрессор из окружающей среды. Это всегда нежелательно, а иногда (контакт кислорода воздуха с сжимаемыми горючими газами) — просто опасно.

Если прикрыть задвижку на *нагнетательной* линии, то при постоянном давлении  $p_1$  это приведет к повышению давления  $p_2$ , значит и степени сжатия  $p_2/p_1$ . При этом возросшая температура  $T_2$  может превысить предельную температуру  $T'_2$ , допустимую по условиям устойчивости смазки.

Экономичным и достаточно простым способом регулирования производительности является присоединение **дополнительного вредного пространства** — его относительный объем равен  $\epsilon_d$  в добавление к существующему в компрессоре  $\epsilon_b$ . Тогда в формулу (4.18) вместо  $\epsilon_b$  надо подставлять  $\epsilon_b + \epsilon_d$ ; при этом уменьшится  $\lambda_0$ , а значит и производительность  $V$ . *Регулируемое* дополнительное вредное пространство представляет собой цилиндр, в котором в определенном положении фиксируется неподвижный поршень. При необходимости изменения производительности компрессора поршень дополнительного вредного пространства фиксируется в новом положении. Заметим, что этот способ позволяет регулировать производительность без дополнительных затрат энергии (см. разд. 4.3.3).

В последнее время наиболее часто используют *способ регулирования* производительности путем **отжима всасывающего клапана** на определенной (начальной) части хода поршня при сжатии. Отжим всасывающего клапана осуществляется специальным кулачковым устройством — оно заметно проще и дешевле, нежели организация дополнительного вредного пространства. При этом на начальной части хода сжатия не происходит самого сжатия: пока всасывающий клапан открыт, поршень просто выталкивает газ обратно во всасывающую линию (отрезок 1—1',

при давлении  $p_1$  на рис. 4.6). В результате реально ход всасывания, а с ним и производительность компрессора уменьшаются. Заметим, что (как и для предыдущего способа) работа компрессора с отжимом клапанов не сопровождается непроизводительными затратами энергии.

#### 4.4. НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ОБЪЕМНЫЕ КОМПРЕССОРЫ

Рассматриваемые в этом разделе специальные компрессоры объемного действия, несмотря на наличие вращающихся деталей и узлов, близки не к центробежным, а к поршневым машинам. Дело в том, что напор в них создается *не* непосредственно центробежной силой (как у центробежных машин), а за счет изменения объема полости (как у поршневых машин). Только здесь движение "поршня" не возвратно-поступательное, а вращательное. А центробежная сила участвует в процессе не прямо, а опосредованно — в создании этого вращающегося "поршня".

Объемные специальные компрессоры могут работать на создание как напора, так и вакуума.

Ниже кратко рассмотрены устройство и принцип работы пластинчатого и водокольцевого компрессоров\*.

##### 4.4.1. Пластинчатые ротационные компрессоры

Пластинчатые ротационные компрессоры (вакуум-насосы), используемые в химической промышленности, изготавливаются в различных конструктивных вариантах — в зависимости от их назначения и условий функционирования. Один из вариантов такого компрессора показан на рис.4.13.

Рабочий орган компрессора — помещенный в корпус 1 ротор 2 с пазами 5, в которые вставлены пластины 4 (число их обычно превышает 20). При вращении ротора (на рис. 4.13, *а* — по часовой стрелке) под действием центробежной силы пластины частично выходят из пазов (см. рис. 4.13, *б* — укрупненный масштаб) — насколько позволяют специальные направляющие. При движении ротора пластины трутся о стенки корпуса. При этом рабочее пространство разделяется на отдельные перемещающиеся отсеки (полости) между ротором, корпусом и пластинами. Рубашка 3, питаемая холодной водой, предусмотрена для отвода теплоты сжатия и трения.

**Всасывание** газа от источника (в зону всасывания 7) происходит за счет разрежения, возникающего в зоне всасывания при увеличении объема движущегося отсека. **Сжатие и подача** газа к потребителю происходят при уменьшении объема газа в этом отсеке, когда он перемещается к зоне нагнетания 6.

**Производительность** ротационного компрессора оценим из следующих соображений (рис.4.13, *а*). В случае соосности корпуса (диаметр  $d_k$ ) и ротора (диаметр  $d_p$ ) зазор между ними составил бы  $e = (d_k - d_p)/2$ . В рабочем положении ротор

---

\* См. [1, 3 — 5, 7].

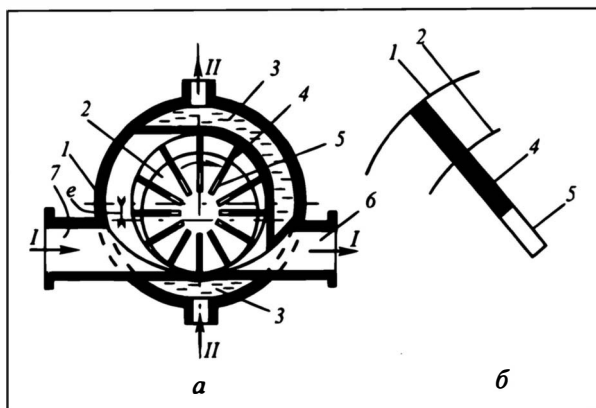


Рис. 4.13. Ротационный пластинчатый компрессор:

*a* — общая схема, *б* — паз и пластина; 1 — корпус, 2 — ротор, 3 — водяная рубашка, 4 — пластины, 5 — пазы, 7 и 6 — зоны всасывания и выталкивания газа; I — газ, II — охлаждающая вода

опущен вниз, в идеале — до упора, т.е. на величину  $e$  (здесь  $e$  — эксцентриситет). При этом зазор в верхней части ротора становится равным  $2e$ , а максимальное живое сечение очевидно равно  $2eb$ , где  $b$  — длина ротора по образующей. При известной частоте вращения ротора  $n$  скорость перемещения полости равна  $\pi d n$ , причем в качестве  $d$  используется некое усредненное значение, равное, например, средней арифметической величине  $(d_k + d_p)/2$ . Тогда теоретическая производительность составит

$$V_T = 2eb\pi d n. \quad (4.25)$$

Для определения реальной производительности надо учесть:

— долю рабочего объема, занимаемого лопатками (их число —  $i_n$ , их толщина —  $\delta$ ): вместо  $\pi d$  надо писать  $\pi d - i_n \delta$ ;

— объемный КПД  $\lambda_0$ : эффект расширения небольшого остатка газа при перемещении газовой полости из зоны нагнетания в зону всасывания. Тогда реальная производительность запишется как

$$V = V_T \lambda_0 = 2eb(\pi d - i_n \delta) n \lambda_0, \quad (4.26)$$

причем для ротационного пластинчатого компрессора  $\lambda_0 \approx 0,6 \div 0,8$ .

Производительность компрессора в зависимости от частоты вращения ротора и его размеров составляет до  $1000 \text{ м}^3/\text{ч}$  (или  $0,3 \text{ м}^3/\text{с}$ ), напор — до  $0,4 \text{ МПа}$  (при работе на сжатие), остаточное давление — до  $0,01 \text{ МПа}$  (при работе на создание вакуума). Регулирование производительности осуществляется изменением  $n$  ротора при помощи редуктора или какого-нибудь другого вариатора либо организацией рецикла газа с помощью обводной линии, т.е. возврата части газа с нагнетательной стороны компрессора на всасывающую.

**Мощность** на валу ротационного компрессора рассчитывается по формуле (4.23), причем  $\eta_s \approx 0,75 \div 0,8$ , а  $\eta_m \approx 0,8 \div 0,9$ . Заметим, что невысокие значения  $\eta_s$  и  $\eta_m$  обусловлены затратами энергии на преодоление сил трения: для ротационных компрессоров эти затраты энергии существенны.

Частота вращения ротора — от  $10$  до  $20 \text{ с}^{-1}$ ; иногда возможно непосредственное присоединение компрессора к электромотору.

Среди *достоинств* ротационных компрессоров — практически равномерная подача газа потребителю, а также относительная простота конструкции. Основ-



ные *недостатки*: сильный шум при работе; износ пластин (хотя их изготавливают из износостойчивых материалов); кроме того, не исключено заклинивание пластин при вращении ротора вследствие их перекоса.

#### 4.4.2. Водокольцевые компрессоры

Водокольцевые компрессоры (иногда их именуют ротационными мокрыми компрессорами — РМК или водокольцевыми вакуум-насосами — ВНН) весьма широко представлены в химической технологии и ряде других производств. Их конструктивное оформление также может изменяться в зависимости от назначения и условий работы. Схема работы типичного компрессора приведена на рис.4.14.

В цилиндрическом корпусе 1 эксцентрично расположен ротор 3, снабженный небольшим числом лопаток 2 одинаковой длины (плоских или изогнутых, расположенных вдоль образующей). В корпус первоначально заливается жидкость (чаще всего — вода) — примерно до половины. При вращении ротора вода отбрасывается лопатками к периферии, образуя жидкостной кольцевой слой, свободная поверхность которого при достаточно большой частоте вращения практически соосна (см. разд. 2.1.3) с корпусом. В результате между ротором, его пластинами и кольцевым слоем жидкости возникают замкнутые газовые полости (отсеки). Они перемещаются (на рисунке — по часовой стрелке), изменяя при этом объем газовой полости. При его увеличении на всасывающей стороне возникает разрежение, и газ засасывается в полость (положение А). На нагнетательной стороне при перемещении газовой полости в положение Б объем ее уменьшается, и происходит сжатие газа. В положениях А и Б к цилиндрическому корпусу присоединены (обычно с торцов) патрубки, ведущие соответственно к всасывающей и нагнетательной линиям.

Производительность водокольцевого компрессора оценивается по формуле (4.26), при этом объемный КПД  $\lambda_0$  для водокольцевых компрессоров обычно превышает 0,95: вследствие хорошего уплотнения зазоров жидкостью мал  $\epsilon_n$ .

Производительность компрессора (или вакуум-насоса) в зависимости от размеров и условий работы достигает  $0,3 \text{ м}^3/\text{с}$ . Создаваемый напор при работе на нагнетание — до  $0,2 \text{ МПа}$ , остаточное давление при работе на вакуум — до  $5 \text{ кПа}$ .

*Достоинства*: равномерная подача газа; возможность непосредственного присоединения к электродвигателю (частота вращения — порядка  $10 \text{ с}^{-1}$ );

высокая надежность (особенно если нет частых остановок). Эксплуатационный недостаток — крутая характеристика: при повышении напора или разрежения производительность быстро понижается.

Важная особенность: из компрессора вместе с газом в значительных количествах выбрасываются капли воды (поток II на рис.4.15). Поэтому рядом с ним устанавливают влагоотделитель (поз.3), из которого отделившаяся

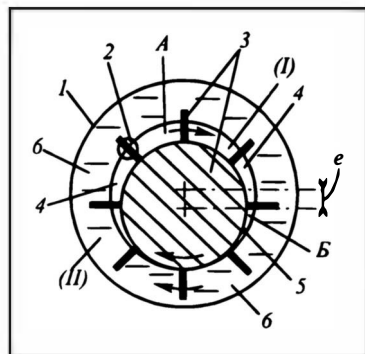
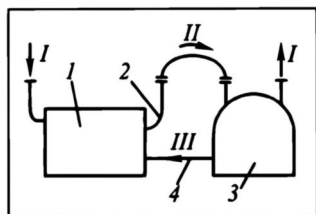


Рис.4.14. Водокольцевой компрессор:

1 — корпус, 2 — зона всасывания, 3 — ротор с лопатками, 4 — газовые полости (отсеки), 5 — зона нагнетания, 6 — кольцевой слой воды; I — газ, II — жидкость

Рис. 4.15. Схема водокольцевого компрессора с водосборником:

1 — компрессор, 2 — трубопровод от компрессора к водосборнику, 3 — водосборник, 4 — линия возврата воды в компрессор; I — газ, II — газожидкостная смесь, III — возвратная вода



вода возвращается (поток III) обратно в компрессор, а освобожденный от брызг воды газ (правый поток I) направляется по назначению.

Расчет энергетических затрат можно формально вести по выражению (4.23), только полный КПД  $\eta$  здесь весьма низок (заметьте менее 0,5). Дело в том, что для водокольцевого компрессора расход энергии на сжатие газа не является определяющим. Вклад затрат энергии на подъем и поддержание центра масс жидкости соизмерим с затратами энергии на сжатие газа, а затраты энергии на перемещение жидкостного кольца лопатками превосходят затраты энергии на сжатие. Упомянутые дополнительные затраты пока что достоверной оценке не поддаются; поэтому в основу кладут затраты энергии на сжатие газа, а вклад других составляющих учитывают низким КПД — по существу, поправочным "коэффициентом незнания".

## 4.5. ЦЕНТРОБЕЖНЫЕ КОМПРЕССОРЫ

Центробежные компрессоры и газодувки (иначе — турбокомпрессоры ТК) являются наиболее распространенными представителями динамических компрессоров. По своему устройству и принципам работы (создание напора за счет непосредственного воздействия центробежных сил) ТК близки к центробежным насосам. Это позволяет воспользоваться некоторыми соотношениями, установленными в гл.3 для центробежных насосов.

ТК по развиваемому напору условно подразделяют на собственно ТК (напор свыше 0,3 МПа), турбогазодувки (напор от 0,01 до 0,3 МПа) и вентиляторы (напор не превышает 0,01 МПа).

### 4.5.1. Устройство и принцип действия турбокомпрессоров

Рабочий орган ТК (рис.4.16) — насаженное на вал 1 и заключенное в корпус (на рисунке не показан) рабочее колесо 2, снабженное лопатками 3. При вращении колеса с лопатками газ центробежной силой отбрасывается к периферии рабочего колеса и далее — в нагнетательный газопровод к потребителю. При этом вблизи оси рабочего колеса возникает разрежение, куда устремляется газ от источника. Газ из рабочего колеса выходит с большой скоростью, т.е. с большой кинетической энергией. Поскольку назначение компрессора состоит в повышении давления (приросте потенциальной энергии), то используются устройства\*, преобразующие кинетическую энергию газа в потенциальную (в энергию давления): лопатки, отогнутые назад, улиткообразный корпус, специальный направляющий аппарат (система неподвижных лопаток, охватывающих рабочее колесо) — см. разд. 3.3.

\* См. [1, 3 — 5, 7].

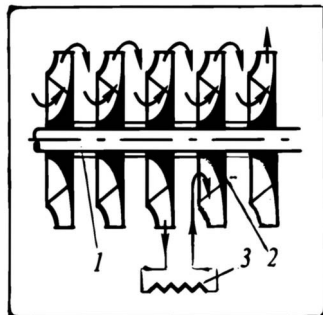
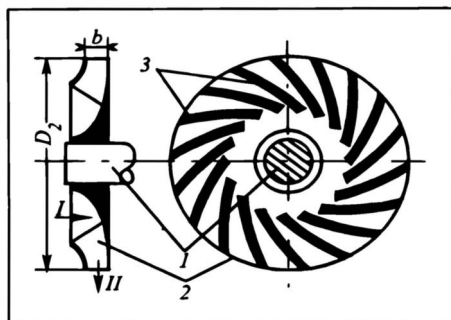


Рис.4.16. Схема центробежного компрессора:

1 — вал, 2 — рабочее колесо, 3 — лопатки; I — исходный газ, II — сжатый газ

Рис.4.17. Схема многоколесного центробежного компрессора:

1 — вал, 2 — рабочее колесо с лопатками, 3 — холодильник

Степень сжатия в одной ступени ТК невелика. Для ее увеличения на валу ТК устанавливают несколько рабочих колес (рис. 4.17), через которые газ проходит последовательно, повышая свое давление. Сжатие газа в ТК сопровождается нарастанием температуры, что приводит к увеличению объемного расхода газа, а значит и затрат энергии. Поэтому в многоколесных компрессорах после каждой секции из 3—4 ступеней для снижения затрат энергии газ направляют в выносные холодильники, после чего подают в очередную секцию.

В задачу технологического расчета входит определение производительности ТК, развиваемого им напора (степени сжатия  $p_2/p_1$ ) и затрат энергии (мощности).

#### 4.5.2. Производительность турбокомпрессоров

Для определения производительности ТК рассмотрим параллелограмм скоростей на выходе (индекс 2) из ТК (рис. 4.18) подобно тому, как это было сделано при рассмотрении центробежных насосов. При толщине лопаток  $\delta$  и их числе  $i_n$  живое сечение газового потока равно  $\pi D_2 b - i_n b \delta$ , где  $D_2 = 2R_2$  — диаметр окружности выхода,  $b$  — ширина канала на выходе из рабочего колеса (см. рис.4.16). При абсолютной скорости  $c_{2R}$ , нормальной к живому сечению, получим теоретическую объемную производительность ТК:

$$V = (\pi D_2 b - i_n b \delta) c_{2R}. \quad (a)$$

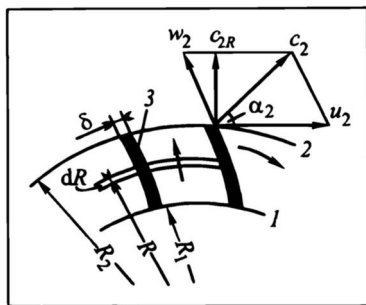
Для инженерных расчетов удобно ввести коэффициент стеснения потока лопатками:

$$1 - \frac{i_n \delta}{\pi D_2} = k_1 < 1$$

и выразить  $c_{2R}$  через окружную скорость  $u_2$ :  $c_{2R} = c_2 \sin \alpha_2 = k_2 u_2$ ,

Рис. 4.18. К определению производительности турбокомпрессора и степени сжатия в его рабочем колесе:

1 и 2 — окружности входа и выхода, 3 — лопатки рабочего колеса



где  $u_2 = 2\pi n R_2 = \pi D_2 n$ ,  $n$  — число оборотов рабочего колеса в единицу времени. Кроме того, следует ввести поправку  $k_3$  на сжимаемость газа ( $\rho_2 \neq \rho_1$ ) и учесть коэффициент подачи  $\eta_v$ , отражающий переток через зазор между корпусом и рабочим колесом небольшого количества газа из зоны нагнетания в зону всасывания. Тогда (ср. с формулой 3.35а)

$$V = \pi D_2 b k_1 k_2 u_2 k_3 \eta_v = k \pi D_2 b \pi D_2 n,$$

или

$$V = k \pi^2 D_2^2 b n, \quad (4.27)$$

где  $k = k_1 k_2 k_3 \eta_v$ .

Из (4.27) следует, что при проектировании ТК на заданную производительность  $V$  имеется возможность варьировать его конструктивные ( $D_2$ ,  $b$ ) и эксплуатационные ( $n$ ) характеристики.

#### 4.5.3. Напор, развиваемый турбокомпрессорами

Напор, создаваемый рабочим колесом *турбокомпрессора*, обычно записывают по аналогии с напором центробежного насоса (см. разд. 3.4.1 — основное уравнение центробежного насоса). В случае безударного входа газа в рабочее колесо ( $\cos \alpha_1 = 0$ )

$$H = \frac{1}{g} u_2 c_2 \cos \alpha_2 = \frac{k_0}{g} u_2^2 = \frac{k_0}{g} (\pi D_2 n)^2, \quad (4.28)$$

где вместо  $c_2 \cos \alpha_2$  записано  $k_0 u_2$ , причем значение коэффициента  $k_0$  для ТК с лопатками, отогнутыми назад, близко к 0,5.

Полный напор  $H$  расходуется на преодоление сопротивлений:

- гидравлического сопротивления в газопроводе и противодавления у потребителя газа  $H_n$  (это — "полезные" потери напора);
- гидравлических потерь в самом компрессоре  $H_k$ :

$$H = H_n + H_k. \quad (6)$$

Технологу важен полезный напор

$$H_n = H - H_k = H \left( 1 - \frac{H_k}{H} \right) = H \eta_{\Gamma},$$

где  $\eta_{\Gamma}$  — гидравлический КПД турбокомпрессора, выражающий ту долю полного напора, которая может быть использована по-

требителем сжатого газа:

$$H_{\Pi} = H\eta_r = k_0 \frac{\eta_r}{g} u_2^2. \quad (4.29)$$

Величина  $H_{\Pi}$  выражается в метрах газового столба. Но плотность газа изменяется при его движении между лопатками в рабочем колесе ТК. Поэтому возникает неопределенность: к какому именно давлению следует относить  $H$  и  $H_{\Pi}$ . При небольших степенях сжатия в ТК, т.е. при условии  $\rho g H \ll p$ , этот вопрос не актуален, поскольку  $\rho \approx \text{const}$ . Однако при более высоких степенях сжатия плотность  $\rho$  изменяется существенно, и неопределенность остается. В этих случаях вместо напора  $H$  следует оперировать приращением давления и степенью сжатия, связав их с конструктивными и рабочими характеристиками турбокомпрессора.

Для выявления этой связи воспользуемся подходом, примененным для определения напора центробежных насосов, но учтем сжимаемость газа, т.е. изменение его плотности при движении в рабочем колесе. С этой целью выделим элементарный пространственный контур, ограниченный радиусами  $R$  и  $R + dR$  (см. рис. 4.18) и запишем баланс по моментам количества движения (импульса силы). При массовой производительности компрессора  $G$  имеем: Приход (нижняя стрелка на рисунке)  $\text{Пр} = GcR\cos\alpha$ ; Уход (верхняя стрелка на рисунке)  $\text{Ух} = G[cR\cos\alpha + d(cR\cos\alpha)]$ ; Источник  $\text{Ис} = dM_0$  — момент импульса, передаваемого газу от рабочего колеса на рассматриваемом участке  $dR$ :

$$GcR\cos\alpha - G[cR\cos\alpha + d(cR\cos\alpha)] + dM_0 = 0. \quad (в)$$

Раскроем квадратные скобки и произведем очевидные сокращения:

$$Gd(cR\cos\alpha) = dM_0. \quad (г)$$

Домножим обе части равенства на угловую скорость  $\omega = 2\pi n$ :

$$Gd(\omega cR\cos\alpha) = d(\omega M_0).$$

Поскольку  $\omega R = u$  (окружная скорость) и  $d(\omega M_0) = dN$  — приращение мощности на участке  $dR$ , то имеем

$$Gd(cuc\cos\alpha) = dN. \quad (д)$$

Выразим  $dN = GgdH$  и запишем  $dH$  с учетом переменной плотности газа  $\rho$ :  $dH = dp/\rho g$ . Тогда после сокращения на  $G$  и  $g$  получим

$$d(cuc\cos\alpha) = dp/\rho. \quad (е)$$

Представим текущую (переменную) плотность газа  $\rho$ , исходя из уравнения Клапейрона—Менделеева:  $\rho = pM/R_y T$  (здесь  $M$  —

молярная масса газа):

$$d(cu\cos\alpha) = \frac{R_y T}{M} \frac{dp}{p} \quad (\text{ж})$$

В выражение (ж) входит текущая температура  $T$ , изменяющаяся в ходе сжатия и зависящая по (4.7) от текущего давления  $p$ :

$$\frac{T}{T_1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{m-1}{m}} \quad \text{и} \quad T = T_1 \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{m-1}{m}}.$$

Подставив последнее выражение в (ж), получим

$$d(cu\cos\alpha) = \frac{R_y T_1}{M} \frac{p^{\frac{m-1}{m}-1}}{p_1^{\frac{m-1}{m}}} dp \quad (\text{з})$$

Проинтегрируем (з) от сечения входа до сечения выхода:

$$\begin{aligned} c_2 u_2 \cos\alpha_2 - c_1 u_1 \cos\alpha_1 &= \frac{R_y T_1}{M} \frac{1}{p_1^{\frac{m-1}{m}}} \frac{m}{m-1} \left( \frac{p_2^{\frac{m-1}{m}}}{p_1^{\frac{m-1}{m}}} - 1 \right) = \\ &= \frac{R_y T_1}{M} \frac{m}{m-1} \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (\text{и})$$

Принимая теперь, как и в случае центробежных насосов, что  $\alpha_1 \approx \pi/2$  (безударный вход газа в рабочее колесо ТК), разрешим выражение (и) относительно степени сжатия:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{c_2 u_2 \cos\alpha_2 M}{R_y T_1} \frac{m-1}{m} + 1 \right)^{\frac{m}{m-1}} = \left( \frac{k_0 u_2^2 M}{R_y T_1} \frac{m-1}{m} + 1 \right)^{\frac{m}{m-1}}. \quad (4.30)$$

В последнем выражении, как и при получении формулы (4.28), произведена замена:  $c_2 \cos\alpha_2 = k_0 u_2$ .

Степень сжатия по (4.30) дает *полный* напор ТК. Потребитель может воспользоваться лишь *частью* напора ( $\eta_r$ ), поскольку заметная его доля теряется в самом компрессоре. Для учета этих потерь первое слагаемое в скобках выражения (4.30) следует умножить на  $\eta_r$ .

Если степень сжатия невелика (приближается к 1), то первое слагаемое в скобках мало в сравнении с 1. Тогда, разлагая (4.30)

в ряд Тейлора и ограничиваясь только двумя членами ряда, найдем:

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{k_0 u_2^2 M}{R_y T_1}. \quad (\kappa)$$

В случае изотермического сжатия анализ по той же канве приводит к следующему выражению:

$$\frac{p_2}{p_1} = \exp \left( \frac{k_0 u_2^2 M}{R_y T_1} \right). \quad (\lambda)$$

Из выражения (4.30) следует, что степень сжатия  $p_2/p_1$  возрастает при увеличении частоты вращения рабочего колеса  $n$  (соответственно — при увеличении окружной скорости  $u_2 = \pi D_2 n$ ) и с понижением температуры  $T_1$ . Кроме того, при прочих равных условиях  $p_2/p_1$  выше для газов с большей плотностью (с большей молярной массой). Физически такое влияние обусловлено увеличением центробежной силы, действующей на газ (его масса  $m_r$ , ускорение  $\omega^2 R$ ):

— с ростом  $n$  возрастает центробежное ускорение, равное  $\omega^2 R = (2\pi n)^2 R$ ;

— понижение температуры приводит к увеличению плотности газа, а значит и его массы  $m_r$  в рабочем колесе ТК;

— газы с большей плотностью  $\rho$  (молярной массой  $M$ ) сжимаются с большей степенью сжатия, так как увеличение  $\rho$  означает увеличение  $m_r$ .

Степень сжатия  $p_2/p_1$  в одном колесе современных турбокомпрессоров обычно невелика: 1,2 — 1,4; сравнительно редко она достигает 1,8. Заметим, что в  $n_c$ -колесном компрессоре степень сжатия увеличивается менее чем в  $n_c$  раз, так же и по тем же причинам, что и в центробежных насосах (см. разд. 3.4.4).

Существенному увеличению степени сжатия в ТК препятствует ограниченная прочность конструкционных материалов. Дело в том, что центробежная сила при вращении рабочего колеса действует не только на газ, но и на само рабочее колесо, так что оно может разрушиться при существенном повышении частоты вращения  $n$ . Вместе с тем это означает, что при повышении прочности конструкционных материалов появится возможность повысить  $n$ , а с ним и степени сжатия в турбокомпрессоре.

**Мощность на валу ТК** рассчитывается по формулам (4.23), (4.24), если газ мало отличается от идеального, и по диаграммам состояния газа (например,  $h - s$ ), если этими отличиями пренебречь нельзя.

#### 4.5.4. Характеристики турбокомпрессоров

Уравнения для производительности  $V$  и напора  $H$  (степени сжатия  $p_2/p_1$ ) задают связь величин  $V$  и  $p$  в параметрической форме: в формулы для обеих величин входит окружная скорость

Рис.4.19. Частная характеристика турбокомпрессора (ТК):

1 — характеристика ТК, 2 и 3 — характеристики газопровода, 4 — КПД турбокомпрессора

и<sub>2</sub>. Как и в случае центробежных насосов, для установления рабочих значений  $p$  и  $V$  необходимо построить характеристики компрессора и газопровода. Частная характеристика задает связь  $H$  (или  $p$ ) и  $V$  при определенной частоте вращения рабочего колеса, универсальная характеристика — связь  $H$  и  $V$  при различной частоте вращения.

На рис.4.19 показаны типичная частная характеристика  $p-V$  (кривая 1), а также кривая 4 изменения КПД компрессора  $\eta$  в зависимости от производительности  $V$ . Для определения рабочей точки необходимо еще построить характеристику газопровода (линии 2 и 3). Рабочая точка определяется как точка пересечения характеристик компрессора и газопровода. Приближенный пересчет характеристики компрессора на другую частоту вращения производится, как и в случае центробежных насосов, по законам пропорциональности (разд. 3.4.3):

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{V_2}{V_1} \cong \sqrt{\frac{H_2}{H_1}} \approx \sqrt[3]{\frac{N_2}{N_1}}.$$

Более широкую и надежную информацию о связи  $H(p)$  и  $V$  при разной частоте вращения рабочего колеса дает универсальная характеристика ТК (см. разд.3.4.3).

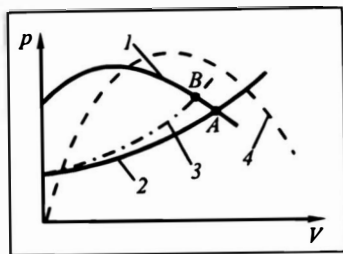
Проблемы последовательного и параллельного включения ТК формулируются и решаются так же, как и в случае центробежных насосов (см. разд.3.4.4).

#### 4.5.5. Регулирование производительности турбокомпрессоров

Производительность ТК возможно регулировать разными способами. Охарактеризуем кратко некоторые из них.

Наиболее экономичный путь — воздействие на частоту вращения  $n$  рабочего колеса. Однако этот путь конструктивно сложен, его целесообразно использовать в случае ТК большой производительности.

Рецикл, т.е. перепуск по обводной линии некоторой доли сжимаемого газа с нагнетательной стороны компрессора на всасывающую. Способ неэкономичен, поскольку энергия на сжатие рециркулирующего газа теряется безвозвратно.





**Задвижка** на всасывающей или нагнетательной линии. Достоинство этого способа в его простоте. Но здесь также бесполезно затрачивается энергия на преодоление гидравлического сопротивления задвижки. Однако эти потери существенно ниже, чем в предыдущем случае, поскольку сопротивление задвижки заметно меньше полного перепада давлений  $p_2 - p_1$ . Для задвижки на всасывающей линии надо также иметь в виду опасность понижения давления на входе в ТК ниже атмосферного: возможен подсос воздуха через неплотности — загрязнение технологического газа воздухом, а в некоторых случаях — образование взрывчатых газовых смесей.

#### 4.5.6. Центробежные вентиляторы

Вентиляторы достаточно широко применяются в химической технологии, когда необходимо обеспечить большие производительности  $V$  при небольших напорах  $H$ . По развиваемым напорам эти компрессоры подразделяют на вентиляторы *низкого* давления ( $H \leq 1 \text{ кПа}$ ), *среднего* давления (от 1 до 4  $\text{кПа}$ ) и *высокого* давления (от 4 до 10  $\text{кПа}$ ).

Отдельную группу среди вентиляторов составляют центробежные машины\*, по конструкции сходные с турбокомпрессорами и турбогазодувками. Напоры, создаваемые турбовентиляторами, сравнительно невелики, они работают с пониженными окружными скоростями  $u$  (в 3—4 раза меньше, нежели у ТК). Производительности центробежных вентиляторов, напротив, весьма велики, поэтому лопатки в рабочем колесе вентилятора нередко устанавливают радиально или даже несколько отгибают вперед.

Технологический расчет турбовентиляторов в общем ведется по той же канве, что и для ТК. Поскольку **напор** вентилятора  $\Delta p \ll p$ , то степень сжатия газа в нем вполне можно определять по формуле (4.30), с учетом гидравлического КПД вентилятора

$\eta_r$ . **Производительность** вентилятора оценивается по формуле (4.27). **Мощность** на валу вентилятора может быть определена по формуле (4.23). Однако в связи с малыми напорами возможен более простой метод расчета мощности. На рис.4.20

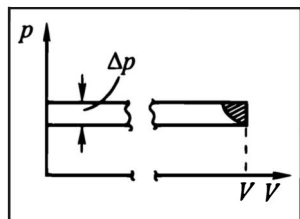


Рис.4.20. К расчету мощности на валу вентилятора

\* К вентиляторам относятся не только центробежные машины, но и ряд других (специальных) компримирующих устройств (осевые и т.п.). Их рассмотрение выходит за рамки настоящего учебника — см. [1, 3—5, 7].

приведена диаграмма  $p-V$  для вентилятора. Из рисунка видно, что вследствие малости  $\Delta p$  затраты энергии без сколько-нибудь заметной погрешности можно определять, игнорируя кривизну линии сжатия газа — по площади прямоугольника (небольшая ошибка при этом делается "в запас"):

$$N = \frac{V\Delta p}{\eta_v} \quad (4.31)$$

Значение КПД для вентилятора  $\eta_v$  ниже (на уровне 0,5), чем для турбокомпрессоров и турбогазодувок. Это связано с более существенным вкладом кинетической энергии газового потока и необходимостью ее преобразования в потенциальную (из-за потерь энергии при таком преобразовании — см. начало разд.4.5.1).

К вентилятору прилагается его универсальная характеристика, позволяющая оценить зависимость  $H(\Delta p)$  от  $V$  при различной частоте вращения  $n$ , а также КПД.

## 4.6. ДРУГИЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ КОМПРЕССОРЫ

К динамическим компрессорам помимо центробежных относятся двухроторные, осевые, струйные и другие устройства. Детальное рассмотрение работы и расчета таких компрессоров можно найти в ряде учебников и специальной литературе\*. В качестве примера ниже рассмотрены и охарактеризованы только двухроторные компрессоры: их устройство, принцип действия и некоторые особенности.

Рабочий орган **двухроторного компрессора** (рис. 4.21) — пара роторов — "восьмерок" 2, размещенных в овальном корпусе 1. Роторы вращаются в противоположных направлениях (на рис. 4.21 — жирные стрелки) и как бы катятся друг по другу. При этом зазор между роторами, а также между каждым ротором и корпусом — очень мал (доли миллиметра). В целях герметизации (для уменьшения зазоров) в рабочую зону добавляют в небольших количествах смазочные материалы.

При вращении роторов газ захватывается и порциями (на рисунке — заштриховано) проталкивается от всасывающей стороны к нагнетательной. При этом в полости между ротором и корпусом газ не изменяет объема, сжатие происходит

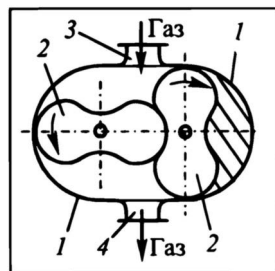


Рис. 4.21. Схема двухроторного компрессора:  
1 — корпус, 2 — роторы, 3 — патрубок входа газа, 4 — патрубок выхода газа

\* Расчет струйных компрессоров рассматривается в разд. 9.6.7 применительно к сжатию водяного пара. См. также [1, 3—5, 7].

при сообщении полости с нагнетательным пространством, где газ принимает давление потребителя.

Несмотря на порционную подачу, потребителем газа неравномерность подачи практически не ощущается вследствие высокой частоты вращения роторов.

Диапазон производительностей (в зависимости от размеров газодувки и скорости вращения роторов) — весьма широк: от 100 до 25000 м<sup>3</sup>/ч (от 0,3 до 7 м<sup>3</sup>/с). Частота вращения роторов вполне соответствует стандартной частоте вращения электродвигателей, что позволяет непосредственно (без редуктора) присоединять компрессор к электродвигателю; не исключается работа и с  $n > 50 \text{ с}^{-1}$  (если привод не электродвигатель, а турбина или какой-либо другой двигатель). Создаваемый напор достигает 0,3—0,4 МПа.

*Достоинства:* компактность, простота, надежность. *Недостаток:* шум в процессе работы. Существенная *особенность:* необходимость тщательного изготовления роторов и корпуса и точность монтажа, иначе из-за увеличения зазоров существенно снижаются напор и производительность.

Изготавливаются также двухроторные компрессоры с ротором более сложной конфигурации (три головки "восьмерок" вместо двух), что способствует повышению равномерности подачи газа.

## 4.7. ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ КОМПРЕССОРОВ

*Достоинства* поршневых компрессоров (ПК) состоят в возможности создания высоких степеней сжатия (до 1000) при неограниченном нижнем пределе производительности, а также в сравнительно высоком КПД. К *недостаткам* относятся громоздкость, высокие инерционные усилия вследствие возвратно-поступательного движения поршня, загрязнение сжимаемого газа смазкой, высокая стоимость.

*Достоинства* турбокомпрессоров (ТК) — компактность, равномерность подачи, высокий верхний предел производительности (более 50 м<sup>3</sup>/с), отсутствие загрязнения газа смазкой, возможность непосредственного присоединения к электродвигателю. Среди *недостатков* — пониженный КПД, ограниченный нижний предел производительности (около 1,5 м<sup>3</sup>/с).

Таким образом, ПК применяются в случае высоких степеней сжатия при умеренной производительности, а ТК — при высоких производительностях и не очень высокой степени сжатия.

Достоинства и недостатки специальных компрессоров, а также области их предпочтительного применения рассматриваются в ряде учебников по курсу ПАХТ и в специальной литературе\*.

## 4.8. ВАКУУМИРОВАНИЕ

Вакуум-насосы (ВН) служат для создания и поддержания вакуума, перемещения газа, подсоса жидкости. Часто компримирующие машины могут работать на создание как повышенного давления, так и вакуума. При этом компрессоры присоединяют-

---

\* См. [1, 3—5, 7].

ся к потребителю своей нагнетательной стороной, а вакуум-насосы — всасывающей.

Основные проблемы вакуумирования рассматриваются ниже на примере *поршневых* вакуум-насосов.

#### 4.8.1. Поршневые вакуум-насосы

Устройство и принцип действия поршневых ВН в общем аналогичны поршневым компрессорам, но есть некоторые особенности, связанные с весьма высокими степенями сжатия  $p_2/p_1$  (10 и более). В частности, чтобы обеспечить приемлемую производительность, т.е. достаточно большое значение объемного КПД  $\lambda_0$ , необходимо конструктивно (см. разд. 4.3.3) предусмотреть весьма малые объемы вредного пространства (т.е. малые  $\epsilon_v$ ). Существуют и другие способы\* повышения  $\lambda_0$ .

Для создания большего разрежения (т.е. более низкого остаточного давления в аппарате) целесообразно использовать многоступенчатые ВН. Однако при этом потери давления в коммуникациях между ступенями и в клапанах ВН становятся соизмеримыми с рабочим остаточным давлением, что снижает эффект вакуумирования. Поэтому на практике число последовательных ступеней вакуумирования не превышает двух.

Индикаторная диаграмма в случае поршневых ВН схожа с рассмотренной ранее для поршневых компрессоров; только область работы в этом случае располагается ниже уровня атмосферного давления (рис. 4.22).

Формулы для расчета затрат энергии в принципе тоже повторяют полученные ранее для поршневых компрессоров:

$$l = \frac{m}{m-1} p_1 v_1 \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right]; \quad N = \frac{Gl}{\eta_M}. \quad (4.14)$$

ВН может работать на *поддержание* вакуума, например на удаление газов, подсасываемых через неплотности аппаратуры. В этих случаях давления  $p_1$  и  $p_2$  — постоянны, и приведенными выше формулами, например типа (4.14), можно воспользоваться непосредственно. Однако нередко ВН работает на *создание* вакуума в аппарате — тогда постоянным является лишь давление  $p_2$ ; оно часто близко к атмосферному (ВН выбрасывает газ в атмосферу), превышая его на величину гидравлического сопротивления нагнетательного клапана. А давление  $p_1$  переменное: в ходе процесса оно изменяется от исходного  $p_{1н}$  (обычно — атмосферного) в начале вакуумирования до низкого рабочего  $p_{1к}$  в конце

---

\* См. [1, 3—5, 7].

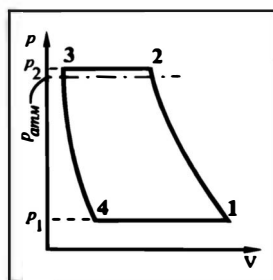


Рис.4.22. Индикаторная диаграмма вакуумнасосов (1 — 4 — точки состояния рабочего тела)

вакуумирования. В этом случае возникает вопрос, на какое именно *рабочее давление*  $p_1$  следует ориентироваться, пользуясь формулой (4.14).

Для разрешения возникшей проблемы удобно оперировать удельными затратами энергии в расчете на  $1 \text{ м}^3$  газа  $l_v$ . Полные затраты энергии составляют  $Gl$ , где  $G$  — массовая производительность ВН. Тогда из (4.14) получается:

$$L = Gl = \frac{m}{m-1} p_1 V_1 \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right] \text{ Вт}; \quad (\text{а})$$

здесь  $V_1 = Gv_1$  — объемный расход газа на входе в ВН.

Относя теперь  $L$  к единице объемного расхода  $V_1$ , получим  $l_v$  в  $\text{Дж/м}^3$ :

$$l_v = \frac{m}{m-1} p_1 \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right]. \quad (\text{б})$$

Из (б) видно, что переменное давление  $p_1$  влияет на  $l_v$  двояко: с одной стороны,  $l_v$  падает при уменьшении  $p_1$ : множитель перед квадратной скобкой (полное вакуумирование, нет газа — нечего сжимать), а с другой — возрастает: первое слагаемое в квадратных скобках (начало стадии вакуумирования, степень сжатия еще равна единице). В таких случаях возможно существование экстремума  $l_v$  при изменении  $p_1$ . Найдем этот экстремум, приравнявая нулю производную от  $l_v$  по  $p_1$ :

$$\frac{dl_v}{dp_1} = 0 = \frac{m}{m-1} \left\{ 1 \cdot \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right] - p_1 \left[ \frac{m-1}{m} \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} \frac{1}{p_1} \right] \right\}. \quad (\text{в})$$

Здесь использован математический прием, удобный для дифференцирования степенных функций вида  $(x/a)^n$  — см. разд. 4.3.5.

Сокращая множитель  $m/(m-1)$  перед фигурной скобкой и давление  $p_1$  в последнем слагаемом выражения (в), приходим после раскрытия квадратных скобок к следующему соотношению:

$$\left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} - 1 - \frac{m-1}{m} \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{m} \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} - 1 = 0,$$

зафиксировав экстремум  $l_v$  при определенном значении  $p_1$  или  $p_2/p_1$ :

$$\frac{p_2}{p_1} = m^{\frac{m}{m-1}}. \quad (г)$$

Для оценки значения  $p_2/p_1$ , при котором реализуется экстремум  $l_v$ , положим: процесс сжатия — адиабатный ( $m = k$ ); сжимается двухатомный газ ( $k = 1,41$ );  $p_2 \approx 1,05 \cdot 10^5$  Па. Тогда, согласно (г), искомое значение  $p_2/p_1 = k^{k/(k-1)} \approx 3,26$ , откуда  $(p_1)_{\text{extr}} \approx 0,32 \cdot 10^5$  Па.

Для определения вида экстремума (max или min) следует установить знак второй производной в точке экстремума. Однако в рассматриваемом случае вид экстремума легко устанавливается из физических соображений: согласно (б), удельная работа  $l_v$  равна нулю при  $p_1 = 0$  (абсолютный вакуум, полное вакуумирование) и при  $p_1 = p_{1н} = p_2$  (начальный момент вакуумирования). При промежуточных значениях  $p_1$  затраты энергии на сжатие газа, естественно, положительны; значит, в ходе вакуумирования  $l_v$  при изменении (понижении)  $p_1$  проходит через максимум.

Характер изменения  $l_v$  в зависимости от  $p_1$  показан на рис. 4.23. Этот рисунок конкретизирует постановку задачи, устанавливая некоторые ограничения.

Если по технологическим условиям приходится *часто* вакуумировать сосуд (аппарат), то, подбирая двигатель для ВН, в целях преодоления "горба"  $l_v$  следует ориентироваться на максимальную работу  $l_{v \max}$  — говорят о *частом*, или *быстром*, пуске. При этом значения переменных давлений в сосуде ( $p_c$ ) и на всасывающей стороне ВН ( $p_1$ ) практически одинаковы.

Однако встречаются случаи, когда операция *создания* вакуума в сосуде производится *редко*, а после достижения в сосуде низкого остаточного рабочего давления  $p_c = p_{1к}$  ВН *длительное время* работает только на *поддержание* вакуума. В таких случаях нецелесообразно ориентироваться на максимум  $l_v$ : плохо, если установленная мощность привода (найденная на основе  $p_{1\text{extr}}$ ) заметно превышает рабочую (требуемую — на основе  $p_{1к}$ ) — высока реактивная мощность, электродвигатель (привод ВН) перегревается, возрастают затраты энергии. Поэтому для создания благоприятных условий продолжительной работы электродвигателя надо ориентироваться на  $p_{1к}$ . Но в этом случае электродвигатель обеспечит снижение давления лишь до предельного значения  $p_{1пр}$ , равного  $p_{1к}$  и соответствующего точке  $A$ , — далее не хватит мощности электродвигателя, чтобы перешагнуть через "горб" (точка  $B$ ) и затем прийти в рабочую точку  $C$ .

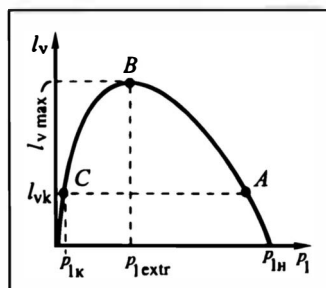


Рис.4.23. Зависимость удельной работы  $l_v$  от давления всасывания  $p_1$

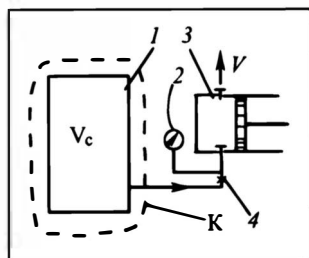


Рис.4.24. Схема вакуумирования сосудов:

1 — вакуумируемый сосуд, 2 — вакуумметр, 3 — вакуум-насос, 4 — задвижка;  $V_c$  — объем сосуда, K — контур

Здесь применяют **медленный пуск**, не разрешая, чтобы на всасывающей стороне ВН давление  $p_1$  превысило  $p_{1k}$ . В этих целях между вакуумируемым сосудом и ВН устанавливают задвижку (рис.4.24, поз.4), что позволяет за счет ее гидравлического сопротивления удерживать непосредственно на всасывающей стороне ВН давление  $p_1$ , не превышающее  $p_{1k}$ . Регулируют это давление задвижкой 4, а контролируют вакуумметром 2.

Систему "ВН — сосуд" запускают (т.е. включают ВН) при **закрытой** задвижке. Тогда в небольшом объеме (от задвижки до сосуда) на всасывающей стороне ВН практически сразу устанавливается малое остаточное давление  $p_1 < p_{1k}$ , хотя в сосуде давление  $p_c$  пока что равно начальному. Затем задвижку чуть **приоткрывают**, следя по вакуумметру, чтобы давление  $p_1$  на всасывающей стороне ВН оставалось не выше  $p_{1k}$ . В сосуде по мере отсасывания газа давление  $p_c$  тоже понижается, но остается выше  $p_{1k}$  — на величину гидравлического сопротивления приоткрытой задвижки. По мере понижения давления в сосуде  $p_c$  задвижку **постепенно все более открывают**, не позволяя, однако, давлению  $p_1$  превысить  $p_{1k}$ . Спустя некоторое время давление в сосуде  $p_c$  понизится до целевого  $p_{1k}$ ; тогда задвижку открывают **полностью** (сводя к минимуму, в идеале — к нулю, ее гидравлическое сопротивление); давления  $p_c$  и  $p_1$  становятся при этом практически одинаковыми, равными  $p_{1k}$ . Далее ВН работает не только при  $p_2 = \text{const}$  на нагнетательной стороне ВН, но и при **постоянном** давлении  $p_1 = p_{1k}$  на его всасывающей стороне. Разумеется, вакуумирование в таком режиме требует **дополнительных затрат времени**, но зато после достижения  $p_1 = p_{1k}$  электродвигатель вакуум-насоса длительно работает в благоприятных условиях.

#### 4.8.2. О вакуум-насосах глубокого вакуума

Объемные вакуум-насосы могут обеспечить остаточное давление на уровне  $0,05 \cdot 10^5$  Па (5 кПа), в ряде случаев (двухступенчатый ВН) — до 1 кПа и даже ниже. В то же время в химической технологии встречаются процессы, проводимые при весьма глубоком вакууме. В этом случае используются **специальные** вакуум-насосы.

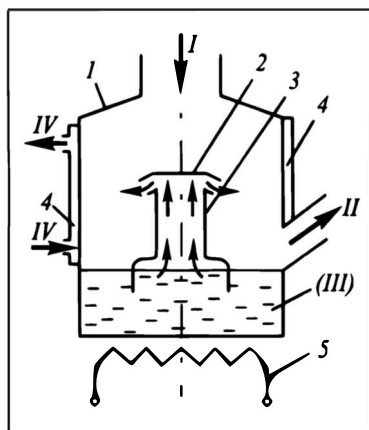
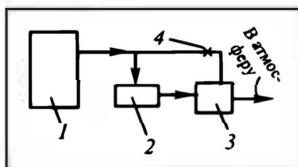


Рис.4.25. Диффузионный вакуум-насос:

1 — корпус, 2 — щелевидное сопло, 3 — труба, 4 — водяная рубашка, 5 — подогреватель; I — газ от вакуумируемого аппарата, II — газ к форвакуумному насосу, III — слой рабочей жидкости, IV — охлаждающая вода

Рис.4.26. Схема глубокого вакуумирования сосуда:

1 — вакуумируемый сосуд, 2 — насос глубокого вакуумирования, 3 — форвакуумный насос, 4 — задвижка



Ниже в качестве примера\* рассмотрены устройство и принцип действия диффузионного вакуум-насоса, обеспечивающего остаточное давление на уровне  $10^{-3}$ — $10^{-4}$  Па (иногда и ниже).

Схема диффузионного вакуум-насоса представлена на рис.4.25. В корпусе 1 смонтирована труба 3, заканчивающаяся в верхней части щелеобразным соплом 2. В нижней части корпуса и трубы находится слой III жидкого рабочего тела с очень низким (при температурах на уровне  $20^\circ\text{C}$ ) давлением паров. Корпус снабжен охлаждающей рубашкой 4, питаемой холодной водой IV. Днище корпуса и слой жидкого рабочего тела получают теплоту от подогревателя 5.

Диффузионный вакуум-насос работает следующим образом. Подогреваемая жидкость испаряется; пары рабочего тела поднимаются по трубе 3 и, выходя через щелевое сопло 2, направляются на охлаждаемые стенки корпуса. Здесь они конденсируются и стекают вниз — в зону жидкости III. При этом давление на холодных стенках крайне низкое — соответственно давлениям паров рабочего тела при температуре стенки. Пары рабочего тела от щелеобразного сопла движутся на стенки корпуса с очень высокой скоростью, поскольку на этом участке практически отсутствует гидравлическое сопротивление. Высокому скоростному напору отвечает (по уравнению Бернулли) низкое давление — ниже, чем в вакуумируемом аппарате. Под действием этого перепада давления возникает и поддерживается газовый поток I — от аппарата к диффузионному вакуум-насосу. Далее газовый поток II выходит из диффузионного ВН и направляется к форвакуумному насосу (см. ниже).

В качестве рабочего тела с низким давлением паров наиболее перспективны жидкости на основе кремнийорганических соединений: они устойчивы и практически нетоксичны, что является важным преимуществом в сравнении с использовавшимися ранее ртутью или веретенным маслом.

Многие ВН глубокого вакуума имеют весьма *крутую характеристику*: их производительность очень быстро падает с увели-

\* См. также [1, 3—5, 7].



чением напора (противодавления). Поэтому их используют совместно с **форвакуумным насосом** по схеме, показанной на рис. 4.26.

Вначале вакуумируемый сосуд 1 присоединяется к форвакуумному насосу 3: задвижка 4 открыта, ВН глубокого вакуума 2 не работает. В результате давление в сосуде постепенно снижается до уровня, отвечающего возможностям форвакуумного насоса (скажем, до  $1 \text{ кПа}$ ). С этого момента включается вакуумный насос глубокого вакуума и перекрывается задвижка: теперь газ из сосуда проходит последовательно вакуум-насос глубокого вакуума и форвакуумный насос.

Смысл такой схемы работы состоит в улучшении рабочих условий ВН глубокого вакуума: он должен теперь развивать сравнительно небольшой напор — от рабочего в сосуде до конечного на уровне давления всасывания в форвакуумном насосе (сотые доли атмосферы). А последующее сжатие газа до атмосферного давления осуществляется форвакуумным насосом. В результате при сравнительно малом напоре (низкое противодавление на выходе ВН глубокого вакуума) обеспечивается приемлемая производительность системы "сосуд — вакуум-насосы".

#### 4.8.3. Время вакуумирования сосудов

Среди технологических проблем вакуумирования практический интерес (особенно — при частом пуске) представляет *время  $\tau_{\text{в}}$  вакуумирования* сосуда, за которое с помощью вакуум-насоса производительностью  $V_{\text{ВН}}$  в сосуде объемом  $V_{\text{с}}$  давление понижается от начального  $p_{\text{н}}$  до конечного  $p_{\text{к}}$ .

Для решения задачи рассмотрим (см. рис. 4.24) промежуточный момент времени  $\tau$ , когда текущее давление в сосуде  $p$  уже ниже  $p_{\text{н}}$ , но еще не достигло  $p_{\text{к}}$ . Выберем в качестве пространственного контура "К" сам сосуд (на рисунке — штриховая линия). Запишем баланс по массе газа для элементарного времени  $d\tau$ : Приход  $\text{Пр} = 0$ , Уход  $U_{\text{х}} = V_{\text{ВН}} \rho d\tau$  и Накопление  $\text{Нак} = d(V_{\text{с}} \rho) = V_{\text{с}} d\rho$ . В целом:

$$0 - V_{\text{ВН}} \rho d\tau = V_{\text{с}} d\rho. \quad (\text{д})$$

Разделим переменные: 
$$d\tau = - \frac{V_{\text{с}}}{V_{\text{ВН}}} \frac{d\rho}{\rho}$$

и проинтегрируем в пределах от 0 до  $\tau_{\text{в}}$  и соответственно от  $p_{\text{н}}$  до  $p_{\text{к}}$ ; поменяем также местами пределы интегрирования, чтобы избавиться от знака "минус" :

$$\tau_{\text{в}} = \frac{V_{\text{с}}}{V_{\text{ВН}}} \ln \frac{p_{\text{н}}}{p_{\text{к}}} . \quad (\text{е})$$

Для перехода от плотностей к давлениям воспользуемся уравнением политропического сжатия, имея в виду, что  $\nu = 1/\rho$ :

$$\frac{p_H}{\rho_H^m} = \frac{p_K}{\rho_K^m}$$

и

$$\frac{\rho_H}{\rho_K} = \left( \frac{p_H}{p_K} \right)^{1/m} \quad (ж)$$

Подставим полученные соотношения в выражение (ж):

$$\tau_B = \frac{V_c}{V_{BH}} \ln \left( \frac{p_H}{p_K} \right)^{1/m}$$

или

$$\tau_B = \frac{V_c}{m V_{BH}} \ln \left( \frac{p_H}{p_K} \right) \quad (4.32)$$

При адиабатическом снижении давления в сосуде вместо  $m$  подставляется показатель адиабаты  $k$ , при изотермическом —  $m = 1$ .

Из (4.32) следует, что при более высоких  $m$  сосуд вакуумируется быстрее (в частности, при адиабатном вакуумировании быстрее, чем при изотермическом). Это связано с понижением температуры при уменьшении давления в сосуде: поскольку  $V_c = \text{const}$ , то снижение температуры при адиабатическом вакуумировании сопровождается дополнительным уменьшением давления.

Строго говоря, формула (4.32) является *оценочной*, так как производительность вакуум-насоса  $V_{BH}$  зависит от степени сжатия (изменяется объемный КПД  $\lambda_0$ ). Для более точного решения задачи следует учесть зависимость  $\lambda_0$  от степени сжатия — см. разд. 4.3.3.

#### ЛИТЕРАТУРА к главе 4

1. Абдурашитов С.А., Тутиченков А.А., Вершинин И.М., Тененголец С.М. Насосы и компрессоры. М.: Недра, 1974. 296 с.
2. Баскаков А.П., Берг Б.В., Витт О.К. и др. Теплотехника. М.: Энергоиздат, 1982. 264 с.
3. Гельперин Н.И. Основные процессы и аппараты химической технологии. М.: Химия, 1981. 812 с.

4. Дытнерский Ю.И. Процессы и аппараты химической технологии. М.: Химия, 1995. 768 с.
5. Касаткин А.Г. Основные процессы и аппараты химической технологии. М.: Химия, 1971. 784 с.
6. Литвин А.М. Техническая термодинамика. М.— Л.: Госэнергоиздат, 1956. 312 с.
7. Плановский А.Н., Николаев П.И. Процессы и аппараты химической и нефтехимической технологии. М.: Химия, 1972. 494 с.
8. Чечеткин А.В., Занемонец Н.А. Теплотехника. М.: Высшая школа, 1986. 344 с.

### ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Область гидромеханических процессов весьма широка, она включает многочисленные и достаточно разнородные процессы (технологические приемы) — соответственно назначению и особенностям объектов. Гидромеханические процессы основаны на **переносе импульса (количества движения)** — именно этот признак объединяет указанные процессы в отдельную группу. Конечно, и другие химико-технологические процессы используют перенос импульса, но превалирует там перенос иных субстанций (теплоты, вещества). Гидромеханические процессы в своем осуществлении и описании *непосредственно* базируются на закономерностях переноса импульса, устанавливаемых технической гидравликой (см. гл. 2). При описании гидромеханических процессов рассматриваются внутренняя, внешняя и смешанная задачи гидродинамики.

Перенос импульса, количества движения является предметом также теоретической и прикладной гидравлики. Не всегда просто провести четкое разграничение между объектами изучения, относящимися к теоретической гидравлике, прикладной гидравлике и гидромеханическим процессам, — в различных учебниках и научных монографиях эти границы проводят по-разному. Видимо, к гидромеханическим процессам в самом общем плане следует относить технологические приемы, приводящие к практически важным направленным изменениям состояния рабочих тел.

В настоящем учебнике в главу "Гидромеханические процессы" вошли разделы "**Осаждение**", "**Фильтрация**", "**Перемешивание**" и "**Диспергирование жидкостей и газов**". В число объектов изучения не включено рассмотрение гидравлических машин (прессов, аккумуляторов, мультипликаторов): такие машины применяются в некоторых химико-технологических процессах, но расчет их основных технологических характеристик весьма прост (принципы расчета гидравлических прессов изучаются в средней школе; подход к расчету аккумуляторов практически совпадает с рассмотренным при изучении воздушных колпаков поршневых насосов).

Схемы и конструкции аппаратов для осуществления отдельных процессов приведены в соответствующих разделах главы\*.

Ниже последовательно рассматриваются:

- процессы разделения неоднородных систем (преимущественно — жидкостных) с твердой фазой: осаждение, фильтрация;
- процессы перемешивания жидкостных систем (собственно жидкостей, суспензий и т.д.);
- процессы диспергирования.

## 5.1. ОСАЖДЕНИЕ

### 5.1.1. Общие положения

Процесс осаждения состоит в *разделении суспензий*, составленных из жидкостей и твердых частиц, на осветленную жидкость и осадок. В более общем случае речь может идти также об эмульсиях (из несмешивающихся жидкостей) и некоторых других дисперсных системах (в частности, с газом в качестве сплошной среды). В идеале **осветленная жидкость** не должна содержать твердых частиц. Влажный **осадок** состоит из твердых частиц, в просветах между которыми находится (остается) то или иное количество жидкости.

В основе процесса осаждения лежит явление **отстаивания**. Это явление реализуется в поле каких-либо *массовых сил*: такие силы, действующие на единицу объема твердого материала (частиц) и жидкости, должны быть *неодинаковы* — в этом **условие разделения** неоднородных систем методом осаждения. Условие разделения выполняется, когда плотности твердого материала (ТМ)  $\rho_T$  и жидкости (Ж)  $\rho$  — различны:  $\rho_T \neq \rho$ , обычно  $\rho_T > \rho$ .

Состав суспензии, т.е. смеси ТМ и Ж (в общем случае — возможно, и газа) характеризуют **относительной массовой концентрацией**  $a$ . Если рассматривать 1 м<sup>3</sup> смеси, то при порозности  $\varepsilon$  масса ТМ в нем равна  $\rho_T(1 - \varepsilon)$ , а масса жидкости —  $\rho\varepsilon$ . Тогда концентрация  $a$ , равная отношению этих массовых количеств, выразится:

$$a = \frac{\rho_T(1 - \varepsilon)}{\rho\varepsilon} \quad (\text{кг ТМ})/(\text{кг Ж}). \quad (5.1)$$

Отсюда по известной концентрации  $a$  нетрудно определить рабочую порозность:

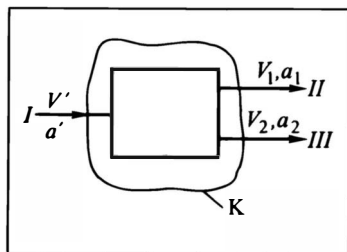
$$\varepsilon = \frac{\rho_T}{\rho_T + a\rho}. \quad (5.1a)$$

---

\* Подробно конструкции аппаратов см. [1, 6, 9, 15, 17, 19, 22] и др.

Рис.5.1. Схема потоков в отстойнике непрерывного действия:

*I* — исходная суспензия, *II* — осветленная жидкость, *III* — осадок; *K* — контур



В дальнейшем будем обозначать:  $a'$ ,  $a_1$  и  $a_2$  — концентрации ТМ в исходной суспензии, в осветленной жидкости и в осадке.

**Производительности** процесса осаждения могут быть представлены на основе *исходной суспензии* или *осветленной жидкости* (реже — *осадка*). Установим связь между этими производительностями. Будем рассматривать *непрерывный* процесс разделения суспензии на осветленную жидкость и осадок по схеме, показанной на рис.5.1. Пусть  $V'$ ,  $V_1$  и  $V_2$  — объемные производительности (потоки) по *собственно жидкости* в исходной суспензии, в осветленной жидкости и в осадке (в случае *периодических* процессов надо оперировать не потоками, а количествами (объемами) жидкостей  $V'$ ,  $V_1$  и  $V_2$ ).

Заметим: в идеале осветленная жидкость не должна содержать твердых частиц ( $a_1 = 0$ , значение  $V_1$  совпадает с полным количеством осветленной жидкости  $V_{ж}$ ); реально в случае неполного осветления возможно  $a_1 > 0$ .

Полагая, что пространственный контур "K" на рис.5.1 охватывает разделяющий аппарат *I* (отстойник), запишем для единицы времени материальные балансы:

— по массовым жидкостным потокам:

$$\rho V' - \rho V_1 - \rho V_2 = 0,$$

откуда после сокращения на  $\rho$  и простых преобразований

$$V' = V_1 + V_2, \quad V_2 = V' - V_1 \text{ и т.д.}; \quad (a)$$

— по потокам ТМ:

$$\rho V'a' - \rho V_1 a_1 - \rho V_2 a_2 = 0,$$

откуда после сокращений и преобразований

$$V'a' = V_1 a_1 + V_2 a_2 \text{ и т.д.} \quad (б)$$

Исключая из (б) величину  $V_2$  с помощью последнего из выражений (а), имеем

$$V'a' = V_1 a_1 + (V' - V_1) a_2;$$

отсюда

$$V_1 = V' \frac{a_2 - a'}{a_2 - a_1}. \quad (5.2)$$

Аналогичное выражение получается в случае *периодического* процесса осаждения, только вместо *потоков* жидкости  $V$  в нем будут

фигурировать ее *количества*  $V$ :

$$V_1 = V \frac{a_2 - a'}{a_2 - a_1} \quad (5.3)$$

При рациональном проведении осаждения  $a_1 \rightarrow 0$  — в этом цель процесса. Тогда выражения (5.2) и (5.3) упрощаются:

$$V_1 = V \left( 1 - \frac{a'}{a_2} \right), \quad (5.2a) \quad V_1 = V \left( 1 - \frac{a'}{a_2} \right). \quad (5.3a)$$

Для исходной суспензии величины  $a'$  и  $V'$  ( $V'$ ) в подавляющем большинстве реальных задач эксплуатации и проектирования заданы. Конечная концентрация ТМ в осадке ( $a_2$ ) в задачах эксплуатации рассчитывается по известным значениям  $V'$  или  $V_1$  из выражений (5.2), (5.2a). В задачах проектирования величина  $a_2$  обычно выбирается на основе практических рекомендаций, исходя из последующего использования осадка.

Часто технологи заинтересованы, чтобы осадок был возможно более сухим (не исключено, что после осаждения его отправят на сушку); тогда стремятся получить высокие значения  $a_2$ . В других случаях, например, предполагается осадок в виде *шлама* (консистенция типа ила) транспортировать по трубопроводу с помощью специального насоса; тогда целесообразно ориентироваться на умеренные значения  $a_2$ .

Важнейшей характеристикой рассматриваемого процесса является **скорость осаждения**. В общем случае речь идет о **скорости стесненного осаждения** (витания)  $w_c$ . В поле сил тяжести для суспензии с частицами *одинаковых* размеров она рассчитывается (см. разд. 2.7.4) по формуле

$$Re_c = \frac{Ag \cdot \varepsilon^{4,75}}{18 + 0,59 \sqrt{Ag \cdot \varepsilon^{4,75}}}, \quad (2.75)$$

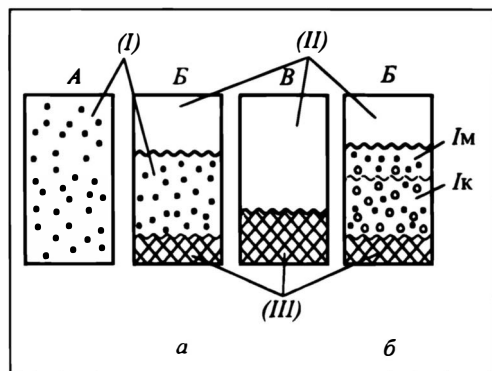
причем порозность  $\varepsilon$  определяется из (5.1) на основании начальной концентрации ТМ в суспензии ( $a'$ ).

Рис.5.2. Схема осаждения (разделения суспензий):

$a$  — монодисперсные суспензии,  $b$  — суспензии, содержащие частицы разных размеров;

$I$  — исходная суспензия ( $I_m$  и  $I_k$  — с мелкими и крупными частицами),  $II$  — осветленная жидкость,  $III$  — осадок;

$A, B, B$  — начальная, промежуточная и конечная фазы осаждения соответственно



Напомним:  $Ar = \frac{gd^3}{\nu^2} \frac{\rho_T - \rho}{\rho}$  — критерий Архимеда,  $d$  — диаметр твердых

частиц,  $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости,  $g$  — ускорение силы тяжести.

В случае разбавленных суспензий  $\varepsilon \rightarrow 1$ , и выражение (2.75) переходит в формулу для *свободного* осаждения (витания)  $w_B$ :

$$Re_B = \frac{Ar}{18 + 0,59\sqrt{Ar}}. \quad (2.72)$$

Рассчитав  $Re_c \equiv w_c d / \nu$ , находим искомую скорость  $w_c$ . В ходе последующего анализа величина  $w_c$  трактуется и используется как *известное свойство* системы ТМ — Ж.

Реально суспензия содержит частицы *разных* размеров (иногда — и плотностей); в ходе осаждения они движутся в жидкости с разной скоростью: более крупные и тяжелые — быстрее, более мелкие и легкие — медленнее. Скорость осаждения каждого сорта частиц может быть *приближенно* найдена по формуле (2.75). Приближенно потому, что в процессе осаждения частицы разных размеров и плотностей гидродинамически взаимодействуют друг с другом, так что скорости их движения в той или иной мере выравниваются (в малой степени — в разбавленных суспензиях, в большей — в концентрированных, "густых"). Тем не менее рекомендуется вести расчет, ориентируясь на наиболее мелкие (и легкие) частицы в исходной суспензии. Такие частицы в своем движении все же отстают от крупных (и тяжелых):

— в отстойниках *периодического* действия, через некоторый промежуток времени после начала процесса, на границе с осветленной жидкостью образуется зона (рис.5.2, б), в которой находятся преимущественно мелкие (легкие) частицы; их осаждение происходит далее в соответствии с формулой (2.75), примененной для таких частиц;

— для отстойников *непрерывного* действия, где эффект выравнивания скоростей стесненного осаждения может быть заметным, расчет на основе наиболее мелких (легких) частиц приводит к несколько *заниженным* скоростям осаждения и производительностям, т.е. ошибка делается "в запас".

Разумеется, более точные значения скоростей осаждения для конкретных полидисперсных суспензий могут быть получены из эксперимента.

Теоретическая формула (2.75) получена (и пригодна) для сферических частиц одинакового размера. Несферичность частиц учитывается фактором формы  $\phi_s$  (см. разд. 2.7.1). Распределение частиц по размерам характеризуется **кривыми грануломет-**



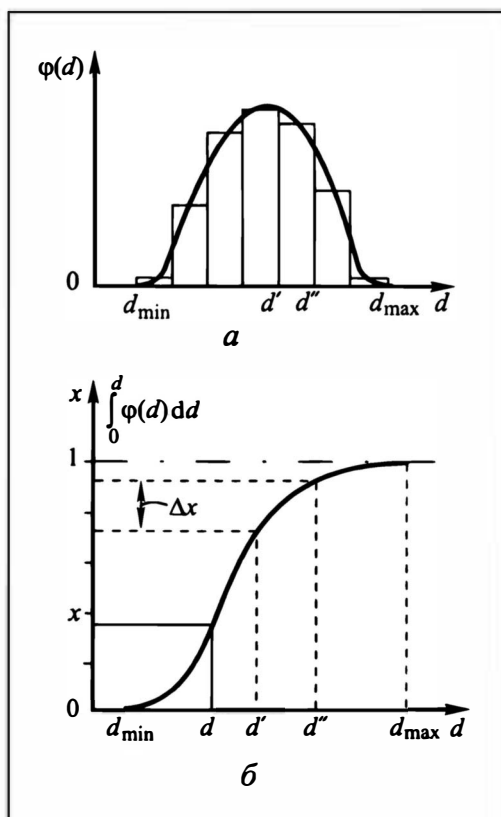


Рис. 5.3. Кривые гранулометрического состава:  
а — дифференциальная, б — интегральная

рического состава— рис. 5.3. На рис. 5.3, а показана **дифференциальная кривая распределения**: по ординате — плотность распределения  $\varphi(d)$ ; доля частиц отдельной фракции выражается площадью под этой кривой на участке абсциссы, ограниченном предельными размерами частиц этой фракции  $d'$  и  $d''$ . Для удобства практических расчетов дифференциальная кривая может быть изображена в виде гистограммы — последовательности прямоугольных площадок, равновеликих площадям под соответствующими участками кривой. На рис. 5.3, б показана **интегральная кривая распределения**: по ординате — накопленная част-

тость, т.е. доля (обычно — массовая) частиц  $x = \int_{d_{\min}}^d \varphi(d) dd$  раз-

мерами от минимального  $d_{\min}$  до текущего  $d$ . Доля частиц в диапазоне диаметров от  $d'$  до  $d''$  (т.е. относительное количество данной фракции в смеси) выражается отрезком  $\Delta x$  на ординате этой кривой. Средний размер узкой фракции определяют как среднегеометрическую величину  $d = \sqrt{d'd''}$  (иногда приближенно — как среднеарифметическую из  $d'$  и  $d''$ ).

С помощью кривых распределения легко найти содержание каждой (скажем, достаточно узкой) фракции в смеси и осуществить пофракционный расчет процесса осаждения на основе средних диаметров фракций.

Возможность учета полидисперсности смеси при анализе процесса осаждения продемонстрирована в разд. 5.1.3.

### 5.1.2. Естественное осаждение

Для разделения суспензий, содержащих сравнительно крупные частицы (часто — сотые доли миллиметра), в случае невысокой вязкости жидкости и не очень малой разности плотностей твердых частиц и жидкости применяется **естественное** осаждение — процесс осуществляется *в поле сил тяжести* под действием движущей силы, базирующейся на величине  $(\rho_T - \rho)g$ , т.е. на разности удельных (приходящихся на  $1 \text{ м}^3$ ) сил — тяжести и выталкивающей (архимедовой). Дело в том, что такая система характеризуется большими значениями критерия Архимеда; это приводит, соответственно формуле (2.75), к достаточно высоким величинам  $Re_c$  и скоростей стесненного осаждения  $w_c$ , значит, и к приемлемым производительностям процесса.

Сущность процесса естественного осаждения ясна из рис.5.2, а. Примем для простоты, что исходная суспензия *I* содержит твердые частицы одинакового размера. Первоначально (ситуация *A*) суспензия заполняет вертикальный сосуд. Спустя некоторый промежуток времени (ситуация *B*) в результате осаждения твердых частиц в сосуде образуются (рассматривается наиболее часто встречающийся случай  $\rho_T > \rho$ ) слой осветленной жидкости *II* и осадок *III*, между которыми расположена зона *I* еще не разделившейся суспензии. Наконец, через определенное время (ситуация *B*) в сосуде остаются лишь две зоны — *II* и *III*, занятые соответственно осветленной жидкостью и осадком, — процесс осаждения завершен.

На рис. 5.2, б показан промежуточный момент (ср. с положением *B* на рис. 5.2, а) при разделении суспензии, содержащей твердые частицы двух разных размеров (в общем случае — и плотности). Здесь зона неразделенной суспензии состоит из двух областей, содержащих преимущественно медленно осажда-

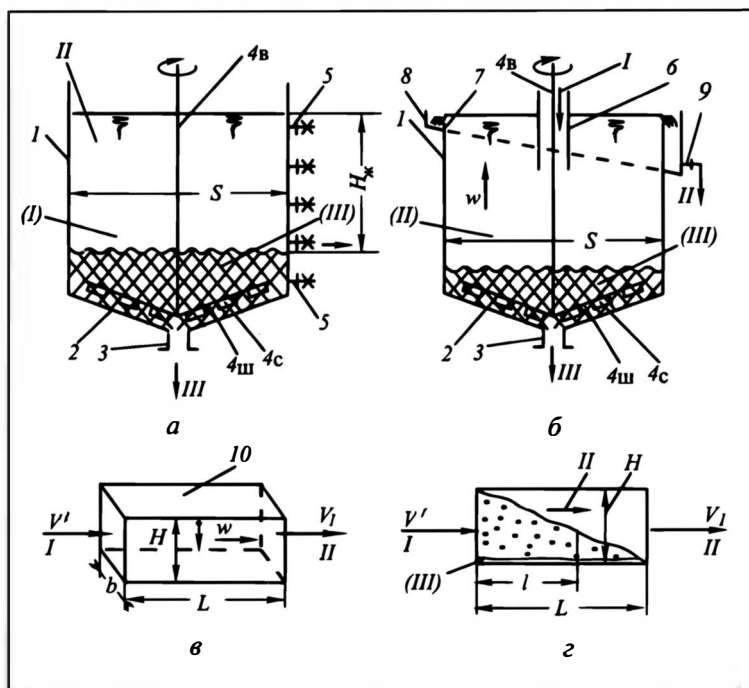


Рис.5.4. Простейшие отстойники:

*а* — вертикальный отстойник периодического действия, *б* — вертикальный отстойник непрерывного действия, *в* — горизонтальный отстойник непрерывного действия (схемы аппарата и процесса);

*1* — цилиндрический корпус отстойника, *2* — коническое днище, *3* — патрубок для отвода осадка, *4* — транспортирующее устройство (*в, с, ш* — ось вала, скребки, штанга), *5* — патрубок для отвода осветленной жидкости, *6* — патрубок для подачи исходной суспензии, *7* — крутовой порог, *8* — кольцевой карман, *9* — штуцер для отвода осветленной жидкости, *10* — прямоугольный корпус отстойника;

*I* — исходная суспензия, *II* — осветленная жидкость, *III* — осадок

ющиеся мелкие ( $I_m$ ) и быстрее оседающие крупные ( $I_k$ ) частицы. Разумеется, если разделяется полидисперсная суспензия с широким набором непрерывно изменяющихся размеров частиц, то граница между областями становится размытой или даже просто исчезает (остается плавное распределение частиц по размерам в промежуточной зоне осаждения).

Осадительные аппараты — **отстойники** — могут работать *периодически* или *непрерывно*, причем непрерывные отстойники могут быть *вертикальными* и *горизонтальными*.

**Вертикальный отстойник периодического действия** показан на рис. 5.4, *а*. Он представляет собой цилиндр *1*, переходящий вниз в коническое днище *2* с большим углом в вершине. Устье конуса заканчивается патрубком *3* для отвода осадка. Перемещение осадка к устью конуса (к патрубку *3*) осуществляется с

помощью размещенного в отстойнике транспортирующего устройства 4: вал 4в со штангами 4ш (обычно числом 4–6; они расположены по хордам, несколько смещенным относительно диаметра отстойника). Штанги снабжены снизу скошенными скребками 4с. При включении это устройство медленно вращается, перемещая образовавшийся осадок к отводящему патрубку 3. На образующей цилиндра 1 по его высоте размещено несколько патрубков 5 с задвижками для вывода осветленной жидкости с требуемого уровня.

Отстойник работает циклично. В него загружается исходная суспензия I; через определенное время происходит ее разделение на слой осветленной жидкости II и осадок III. Жидкость сливают через соответствующий патрубок 5 (ситуации на рисунке отвечает работа патрубка, выделенного жирной стрелкой). Далее включают транспортирующее устройство и выгружают из отстойника осадок. Затем останавливают это устройство, и цикл повторяется.

С рассмотренным выше сходен по устройству **вертикальный отстойник непрерывного действия**, показанный на рис. 5.4, б. Только исходная суспензия I подается в отстойник *непрерывно* – через патрубок 6, а осветленная жидкость II переливается через кольцевой порог 7, попадает в скошенный кольцевой карман 8 и выводится (тоже *непрерывно*) через штуцер 9. Осадок III может отводиться *периодически* или *непрерывно*:

- при низкой концентрации ТМ в исходной суспензии осадок накапливается медленно, поэтому транспортирующее устройство 4 включается по мере накопления осадка на короткое время;

- при высокой концентрации ТМ в исходной суспензии быстрее накапливающийся осадок отводится с помощью непрерывно работающего транспортирующего устройства.

На рис. 5.4, в, г показана (в изометрии и на виде сбоку) схема работы **горизонтального отстойника непрерывного действия**. Исходная суспензия I поступает в прямоугольный отстойник 10 с левого (на схеме) торца. В ходе ее движения вдоль отстойника происходит постепенное выпадение твердых частиц на его дно и осветление жидкости. При достаточной продолжительности пребывания потока суспензии в отстойнике ее разделение на осветленную жидкость II и осадок III будет достаточно полным. Осветленная жидкость выводится из отстойника через штуцер 9 (на рис. 5.4, б – с правого торца). Осадок по мере накопления удаляется из аппарата – чаще всего с помощью специального механического устройства (на рисунке не показано).

Основные **цели технологического расчета отстойников** заключаются в выявлении связи *характеристик суспензии* и *производительности* ( $a'$ ,  $a$ ,  $V'$  или  $V_1$  либо  $V'$  или  $V_1$ ) с его *основными геометрическими размерами*, а в случае периодического процесса – еще и с его продолжительностью.

**Вертикальный отстойник периодического действия.** В отстойнике (рис. 5.4, а) площадью поперечного сечения  $S$  (ее часто называют площадью осаждения) в ходе процесса осаждения образуется свободный от твердых частиц слой осветленной жидкости объемом  $V_{\text{ж}} = V_1 = SH_{\text{ж}}$ , где  $H_{\text{ж}}$  – высота этого слоя. При порозности (объемной доле жидкости) исходной суспензии  $\varepsilon'$  [определяется из (5.1) при  $a = a'$ ] и ее объеме  $V_{\text{с}}$  очевидно:  $V' = V_{\text{с}} \varepsilon'$ , так что  $V_{\text{с}} = V'/\varepsilon'$ . Объем твердого материала в суспензии

$$V_{\text{т}} = V_{\text{с}} (1 - \varepsilon') = V' \frac{1 - \varepsilon'}{\varepsilon'}. \quad (\text{в})$$

Весь этот ТМ при полном осветлении жидкости переходит в осадок. Пусть порозность последнего  $\varepsilon_0$ , следовательно, объем-

ная доля в нем твердой фазы  $(1 - \epsilon_0)$ . Тогда с учетом (в) получаем объем осадка:

$$V_0 = \frac{V_T}{1 - \epsilon_0} = \frac{V'}{\epsilon'} \frac{1 - \epsilon'}{1 - \epsilon_0}.$$

Вычитая этот объем из объема исходной суспензии, находим объем осветленной жидкости:

$$V_{\text{ж}} = V_1 = V_c - V_0 = \frac{V'}{\epsilon'} - \frac{V'}{\epsilon'} \frac{1 - \epsilon'}{1 - \epsilon_0} = \frac{V'}{\epsilon'} \frac{\epsilon' - \epsilon_0}{1 - \epsilon_0}. \quad (5.4)$$

В случае постоянного поперечного сечения  $S$  в зоне осветленной жидкости высота ее слоя составит

$$H_{\text{ж}} = \frac{V_{\text{ж}}}{S} = \frac{V'}{\epsilon' S} \frac{\epsilon' - \epsilon_0}{1 - \epsilon_0}. \quad (5.4a)$$

Без специальных мер механического воздействия величина  $\epsilon_0$  в процессах естественного осаждения несколько превышает обычную для неподвижного слоя порозность 0,4.

Продолжительность осаждения  $\tau_0$  связана с высотой осветленной жидкости  $H_{\text{ж}}$  условием перехода всех твердых частиц в осадок. Это условие будет обеспечено, если в осадок перейдут частицы, находившиеся первоначально в самом *неблагоприятном* положении (у верхней границы суспензии). Таким образом, расчет времени осаждения следует вести, ориентируясь именно на эти твердые частицы. Последние в процессе осаждения должны пройти путь  $H_{\text{ж}}$ . Размеры частиц в суспензии невелики, и участок их разгона (ускоренного движения) исчисляется миллиметрами. Поэтому можно считать, что весь путь  $H_{\text{ж}}$  они проходят с постоянной скоростью стесненного осаждения  $w_c$ , определяемой выражением (2.75). Тогда искомая связь имеет вид

$$H_{\text{ж}} \leq w_c \tau_0. \quad (г)$$

Знак равенства отвечает *минимальной* продолжительности процесса  $\tau_{\min}$ , обеспечивающей полное осветление жидкости. Знак неравенства ("меньше") указывает на то, что повышение времени процесса осаждения сверх минимального ( $\tau_0 > \tau_{\min}$ ) не приводит к увеличению высоты слоя осветленной жидкости:  $H_{\text{ж}}$  не может быть больше величины, определяемой выражением (5.4a).

Подставив значение  $H_{\text{ж}}$  по (г) в выражение  $V_{\text{ж}} = SH_{\text{ж}}$ , имеем

$$V_{\text{ж}} = V_1 \leq Sw_c \tau_0. \quad (5.5)$$

Эта связь дает решение *задачи эксплуатации* для периодического процесса, т.е. производительность отстойника  $V_{\text{ж}} = V_1$  при полном осветлении жидкости. При этом знаку равенства отвечает *максимальная* производительность, когда  $\tau_0 = \tau_{\min}$ . Если

$\tau_0 < \tau_{\min}$ , то производительность  $V_{\text{ж}}$  понижается. Можно было бы попытаться принудительно повысить производительность, отбирая при  $\tau_0 < \tau_{\min}$  объем жидкости, превышающий  $Sw_c\tau_0$ . В этом случае осветление отбираемой жидкости было бы *неполным*.

Один из важнейших выводов, следующих из соотношения (5.5): производительность периодического отстойника *не зависит* от его *высоты*, она *определяется площадью* сечения отстойника.

Наиболее распространенная *задача проектирования* заключается в расчете площади поперечного сечения отстойника  $S$ , обеспечивающей заданную производительность  $V_{\text{ж}} = V_1$  при условии осветления жидкости. Из (5.5) с учетом (5.3а) следует

$$S \geq \frac{V_1}{w_c \tau_0} = \frac{V'}{w_c \tau_0} \left( 1 - \frac{a'}{a_2} \right). \quad (5.5a)$$

Знак равенства отвечает здесь минимальной продолжительности процесса  $\tau_0 = \tau_{\min}$ : в этом случае  $S$  означает *минимальную* площадь осаждения отстойника, которая сможет обеспечить полное осветление жидкости при заданной производительности  $V'$  или  $V_1 = V_{\text{ж}}$ . Попытка осуществить осветление при заданных  $V_{\text{ж}}$  и  $\tau_0 = \tau_{\min}$  в отстойнике с площадью  $S$  менее минимально необходимой обернется *неполным* осветлением жидкости.

**Вертикальный отстойник непрерывного действия.** Технологический расчет отстойника (рис. 5.4, б) возможен на основе соотношений, приведенных выше для вертикального отстойника *периодического* действия. Надо только вместо *количеств* жидкости оперировать *расходами*, иначе говоря, положить  $\tau_0 = 1$  и писать  $V$  вместо  $V_1$ , или (что то же самое) трактовать  $V/\tau_0$  как поток  $V$  (расход; производительность в единицу времени). Тогда выражения (5.5) и (5.5а), соответственно — для задач эксплуатации и проектирования, примут вид

$$V_{\text{ж}} = V_1 \leq Sw_c, \quad (5.6) \quad S \geq \frac{V_1}{w_c} = \frac{V'}{w_c} \left( 1 - \frac{a'}{a_2} \right). \quad (5.6a)$$

Знак равенства, как и ранее, означает *максимальную* производительность для отстойника известного сечения  $S$  и *минимальное* поперечное сечение при заданной производительности  $V_1$ ,  $V'$ , соответствующее полному осветлению жидкости.

Связь производительности и поперечного сечения для вертикального отстойника непрерывного действия может быть получена также непосредственно из уравнения расхода (1.18). В зоне осветления жидкость движется вверх со скоростью  $w$  (см. рис. 5.4, б). Искомая связь имеет вид

$$V_1 = wS.$$

Рабочая скорость  $w$  может быть выбрана различной, но *не любой*. Ее значение не может превышать  $w_c$ , иначе жидкостной

поток подхватит и унесет твердые частицы, так что полного освещения не будет. Если указанное условие  $w \leq w_c$  подставить в уравнение расхода (1.18), то приходим к выражению (5.6), а следовательно и к (5.6а).

Из полученных выражений следует, что и для вертикального отстойника непрерывного действия производительность *не зависит от высоты отстойника, а определяется его поперечным сечением* (площадью осаждения).

**Горизонтальный отстойник непрерывного действия.** Для его технологического расчета воспользуемся схемами, приведенными на рис. 5.4, в. Обозначим длину отстойника  $L$ , ширину —  $b$  и высоту —  $H$ . Тогда площадь отстойника  $S = Lb$ , а живое сечение потока, нормальное к направлению движения жидкости,  $f = bH$ . По мере движения суспензии вдоль отстойника происходит *постепенное* осаждение твердых частиц. В результате в окрестности текущего сечения  $l < L$  существуют три зоны с более или менее четко очерченными границами: осветленная жидкость (сверху), осадок (внизу — на дне отстойника) и еще не разделенная суспензия (между ними). При этом по мере движения жидкости высота зоны суспензии уменьшается, и при достаточной протяженности отстойника  $L$  (т.е. при достаточном времени пребывания в нем суспензии) она сводится к нулю: все частицы переходят в осадок, а из аппарата выводится полностью осветленная жидкость.

Условие полного освещения формулируется здесь путем *сопоставления* времени пребывания суспензии в отстойнике  $\tau_{\text{пр}}$  и времени осаждения  $\tau_0$ , необходимого для освещения:

$$\tau_{\text{пр}} \geq \tau_0; \quad (\text{д})$$

при этом знак равенства соответствует *минимальному* (для полного освещения) времени пребывания жидкости в отстойнике  $\tau_{\text{пр}} = \tau_{\text{min}}$ .

Выразим характерные продолжительности  $\tau_{\text{пр}}$  и  $\tau_0$  через соответствующие пути движения и скорости. Очевидно,  $\tau_{\text{пр}} = L/w$ , где  $w$  — линейная скорость потока в направлении движения жидкости в отстойнике, она определяется из уравнения расхода типа (1.18) для горизонтального потока  $V_1$  осветленной жидкости при его живом сечении  $bH$ :  $V_1 = wbH$ . Отсюда  $w = V_1/bH$ , так что

$$\tau_{\text{пр}} = \frac{L}{w} = \frac{LbH}{V_1} = \frac{SH}{V_1}.$$

Для полного освещения жидкости в осадок из суспензии должны перейти все частицы, в том числе и первоначально находившиеся в наиболее неблагоприятном положении — у верхней границы потока суспензии. Такие частицы в своем осаждении должны пройти путь  $H$ . При скорости осаждения  $w_c$  время

осаждения составит

$$\tau_0 = \frac{H}{w_c}.$$

Подставим найденные значения  $\tau_{пр}$  и  $\tau_0$  в условие (д):

$$\frac{SH}{V_1} \geq \frac{H}{w_c}.$$

Отсюда после сокращения на  $H$  имеем применительно к задаче эксплуатации

$$V_1 \leq Sw_c, \quad (5.7)$$

применительно к задаче проектирования

$$S \geq \frac{V_1}{w_c} = \frac{V'}{w_c} \left( 1 - \frac{a'}{a_2} \right). \quad (5.7a)$$

Знаки равенства в этих выражениях, как и для вертикальных отстойников, отвечают максимальной производительности и минимальной площади отстойника, требуемой для полного осветления жидкости.

Важно: производительность горизонтального отстойника тоже не зависит от его высоты, она определяется его поперечным сечением.

Из приведенных выше формул ясно, что при прочих равных условиях необходимая площадь осаждения отстойника  $S$  обратно пропорциональна скорости осаждения  $w_c$ . Значит, для разделения суспензий, содержащих более мелкие частицы, более вязкие жидкости и при меньшей разности плотностей ТМ и жидкости потребуется увеличивать поперечное сечение отстойника.

Заметим: анализ проведен для идеализированного случая — одинаковых размеров частиц в суспензии, газовзвеси. Для встречающихся на практике полидисперсных смесей расчет следует вести пофракционно, с учетом изменяющейся порозности. Для приближенных оценок (с ошибкой “в запас”) можно базироваться на более мелкой фракции.

Общий для всех отстойников вывод об отсутствии влияния высоты аппарата  $H$  на его производительность  $V$ ,  $V'$  и об увеличении производительности с ростом площади осаждения отстойника  $S$  используется при проектировании осадительных аппаратов:

— отстойники большой высоты изготавливать нецелесообразно, на производительность это не повлияет;

— для повышения производительности необходимо увеличивать поперечное сечение отстойника  $S$ .

На практике отстойники при небольшой высоте имеют весьма внушительные диаметры (20—30 м — не исключение), занимают большие производственные площади. Реальное соотношение размеров отстойника, показанного ранее схематически на рис. 5.4,б, видно из рис. 5.5.



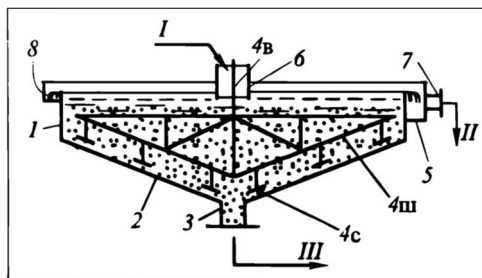


Рис.5.5. Вертикальный отстойник непрерывного действия (см. рис. 5.4):

1 — цилиндрический корпус отстойника, 2 — коническое днище, 3 — патрубок для отвода осадка, 4 — транспортирующее устройство, 5 — кольцевой карман, 6 — патрубок для подачи исходной суспензии, 7 — штуцер для отвода осветленной жидкости, 8 — круговой порог;

I — исходная суспензия, II — осветленная жидкость, III — осадок

Уменьшить занимаемые отстойниками площади возможно путем конструирования **многополочных** аппаратов (рис. 5.6). В этом случае *рабочая* площадь осаждения в сравнении с занимаемой отстойником площадью, а с нею и производительность, увеличиваются кратно количеству полок (параллельных секций). Немаловажно, что здесь не требуется больших расстояний между полками, так как от высоты секций их производительность не зависит.

На рис. 5.6,а схематично показан многополочный отстойник непрерывного (строже — полунепрерывного) действия для разделения *жидкостных* суспензий; на рис.5.6,б несколько более подробно — отстойник для разделения *аэросуспензий*, т.е. запыленного газа (пылеосадительная камера). В обоих случаях поток I, содержащий твердые частицы, распределяется (по возможности — равномерно) по секциям между полками, на которые и осаждаются ТМ. Освободившийся от частиц поток II отводится из отстойника. Накопленный осадок (на рисунке показаны его фрагменты, помеченные в скобках римской цифрой III) удаляется — *стадия очистки* — из межполочного пространства. В случае жидкостных суспензий это делается чаще механическим путем, реже кратковременной подачей жидкости с высокой скоростью; в случае обеспыливания газа — чаще всего жидкостным потоком.

При очистке отстойника от осадка твердых частиц процесс разделения в нем суспензии, запыленного газа *прерывается*. Между тем производство до и после отстойника может быть *непрерывным*, т.е. требуются *постоянные во времени* ввод в отстойник исходного потока  $V'$  и вывод из него осветленного потока  $V_1$ . В этом случае устанавливают два (или более) отстойника параллельно: один из них находится в режиме очистки, другой (или другие) — в рабочем режиме разделения исходной смеси. После завершения стадии очистки отстойник включают в рабочий режим осаждения, а на очистку ставится второй (очередной) аппарат.

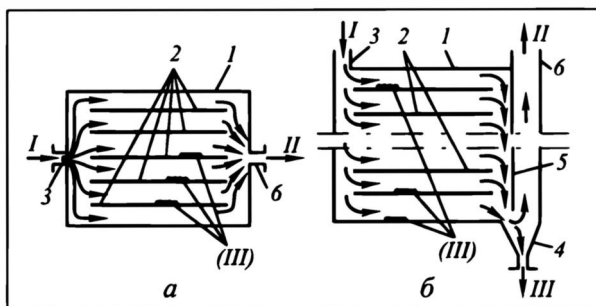


Рис.5.6. Многополочные отстойники:

*a* — отстойник для разделения суспензии, *б* — пылеосадительная камера;  
 1 — корпус, 2 — полки, 3 — штуцер ввода исходной смеси, 4 — бункер с патрубком — для сбора и вывода ТМ, 5 — выравнивающая перегородка, 6 — штуцер вывода очищенных жидкости или газа;

*I* — исходная суспензия, *II* — осветленная жидкость, *III* — осадок

Обратим внимание на *две особенности* пылеосадительной камеры.

Первая связана с наличием перегородки 5. При ее отсутствии газовые потоки в разных секциях испытывали бы разные гидравлические сопротивления, поскольку протяженности их пути в аппарате заметно различались бы: для верхних полок путь был бы короче, чем для нижних. В результате газовый поток двигался бы преимущественно по коротким траекториям с меньшим гидравлическим сопротивлением (верхние секции), а поток в нижних секциях был бы заметно меньше. Это привело бы к неравномерной, а значит и менее эффективной работе отстойника. В самом деле, в верхних секциях (высокие скорости потока) время пребывания газа могло бы оказаться меньше минимально необходимого, и газ в этих секциях был бы очищен не полностью. А в нижних секциях (малые скорости потока) время пребывания газа было бы неоправданно велико, полное обеспыливание завершилось бы где-то на полпути, и хвостовые области полок в процессе осаждения участия не принимали бы. Наличие перегородки 5 выравнивает пути, а значит и гидравлические сопротивления газовых потоков в разных секциях; в результате *поток равномерно распределяется по секциям*.

Вторая особенность связана с изменением направления движения потока при его движении над бункером 4. При повороте потока оставшиеся в газе частицы (наиболее мелкие или легкие) подвергаются действию **инерционных сил** и выпадают из потока — так происходит *дополнительная очистка* газа. Аналогичный метод используется для грубой очистки газа от пыли в отстойных газоходах.

Важно: при крутом повороте действующая на частицу инерционная сила может значительно *превосходить силу тяжести*.

Это создает предпосылки для очистки суспензий и запыленных газовых потоков в условиях, когда естественное осаждение не может обеспечить приемлемую чистоту очистки или производительность отстойника. Конкретно: малым размерам частиц, высоким вязкостям жидкостей, небольшим величинам  $(\rho_T - \rho)$  при существующем значении гравитационного ускорения  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$  соответствуют низкие критерии Архимеда, а с ним — малые  $Re_c$  и скорости осаждения  $w_c$ . В этом случае возрастает продолжительность процесса осаждения, понижается его производительность.

Среди инерционных сил наибольший интерес для технологов представляет **центробежная**, поскольку эта сила *управляема*.

### 5.1.3. Центробежное осаждение в неоднородных жидкостных системах

Осаждение под действием центробежных сил происходит в машинах, называемых **центрифугами**. Пусть суспензия вместе с ротором центрифуги совершает вращательное движение с угловой скоростью  $\omega = 2\pi n$  ( $n$  — частота вращения); тогда на частицу массой  $m_c$ , находящуюся на расстоянии  $r$  от оси вращения, действует центробежная сила, равная  $m_c \omega^2 r$ . Это означает, что удельная (на  $1 \text{ м}^3$ ) движущая сила процесса осаждения запишется (с учетом архимедовой силы):  $(\rho_T - \rho) \omega^2 r$ . Поскольку за счет высокой частоты вращения  $n$  (или путем увеличения радиуса вращения  $r$ ) центробежное ускорение  $\omega^2 r$  может быть сделано значительно больше ускорения силы тяжести  $g$ , то в поле центробежных сил наблюдается существенное возрастание скорости осаждения, т.е. происходит интенсификация процесса разделения суспензии.

Для пояснения сущности центробежного осаждения на рис.5.7 приведены принципиальные схемы действия центрифуг.

**Вертикальная** центрифуга (рис. 5.7,а) представляет собой укрепленный на валу 3 цилиндрический барабан 1 (корпус, ротор) с кольцевой крышкой 2, вращающийся с частотой вращения  $n$  (угловой скоростью  $\omega$ ). В барабан заливается суспензия; под действием сил — центробежной и тяжести — ее свободная поверхность должна принять форму параболоида вращения (см. разд. 2.1.3). Но при увеличении  $\omega$  вершина параболоида окажется *ниже* дна цилиндрического барабана, а при высоких  $\omega$  (именно в таком режиме работает центрифуга) — практически сдвинется далеко вниз. Так что свободную поверхность суспензии в центрифуге (на рисунке — сп) без сколько-нибудь заметной погрешности можно считать не параболической, а цилиндрической, соосной с валом и барабаном.

На некую твердую частицу II, расположенную внутри кольцевого слоя суспензии I на текущем радиусе  $r$ , действует центробежная сила, определяемая центробежным ускорением  $\omega^2 r$ . Поскольку на практике обычно плотность частицы  $\rho_T$  больше, нежели жидкости  $\rho$ , то под воздействием движущей силы  $(\rho_T - \rho) \omega^2 r$  частица перемещается в направлении от свободной поверхности к стенке барабана. По прошествии некоторого времени рассматриваемая частица

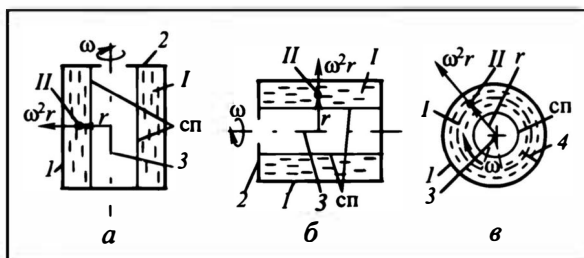


Рис.5.7. Осаждение в поле центробежных сил:

*а* — вертикальная центрифуга, *б* — горизонтальная центрифуга, *в* — поперечное сечение центрифуги;

*1* — корпус центрифуги, *2* — кольцевая крышка, *3* — ось вала центрифуги, *4* — радиальное ребро;

*I* — суспензия, *II* — характерная твердая частица в текущем положении (сп — свободная поверхность жидкости)

(в конечном итоге — все частицы суспензии) осядет на стенку барабана, а ближе к оси вращения останется кольцевой слой осветленной жидкости (фугат) — процесс осаждения в поле центробежных сил состоялся. Далее организуют раздельный вывод из центрифуги осадка и фугата.

**Горизонтальная центрифуга** (рис. 5.7,б) представляет собой цилиндрический барабан *1* с кольцевой крышкой *2*, укрепленный на горизонтальном валу. При вращении центрифуги образуется цилиндрическая свободная поверхность — строго говоря, не соосная с осью вращения — с эксцентриситетом  $g/\omega^2$  (см.разд. 2.1.3). Однако при высоких частоте вращения  $n$  и угловых скоростях  $\omega$  (именно в таком режиме работает центрифуга) эксцентриситет становится пренебрежимо малым, так что без сколько-нибудь заметной погрешности свободную поверхность и здесь можно считать соосной с валом и цилиндром барабана.

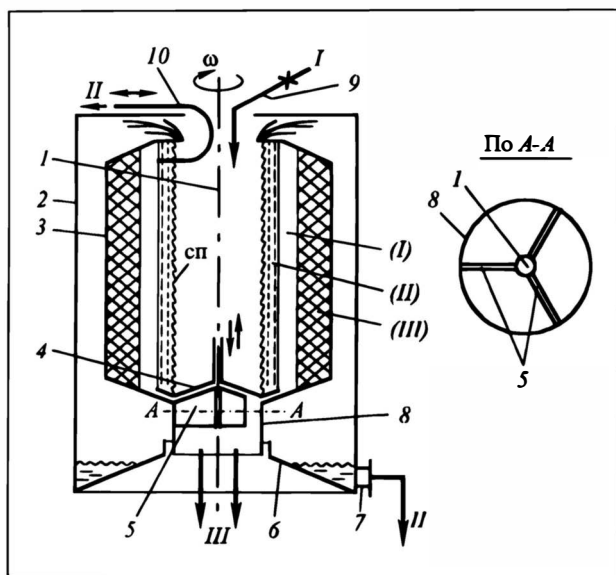
Как и в вертикальном отстойнике, некая твердая частица *II*, расположенная внутри кольцевого слоя суспензии *I* на текущем радиусе  $r$  (и другие частицы суспензии), будет под действием центробежной силы двигаться в направлении к стенке вращающегося цилиндра. В результате на стенке образуется осадок ТМ, а ближе к оси вращения — кольцевой слой фугата. Осадок и фугат далее раздельно выводят из центрифуги.

На рис. 5.7,в, иллюстрирующем процесс центробежного осаждения, показано поперечное сечение барабана, нормальное к оси его вращения (ось направлена перпендикулярно плоскости чертежа). Это — горизонтальное сечение в случае вертикальных центрифуг и вертикальное — в случае горизонтальных.

Осаждение в поле центробежных сил можно проводить в периодическом, непрерывном и полунепрерывном режимах\*.

На рис. 5.8 изображена вертикальная подвесная осадительная центрифуга периодического действия. На валу (ось *1*), соединенном с электромотором (на рисунке не показан), подвешен ротор *3* — вертикальный цилиндрический бара-

\* В учебнике приводятся лишь отдельные примеры устройства и работы центрифуг (осадительных и фильтрующих). Более подробные сведения представлены в [1, 9, 17, 19].



**Рис.5.8.** Вертикальная подвесная осадительная центрифуга периодического действия:

1 — вал, 2 — неподвижный кожух, 3 — ротор (барабан), 4 — конус ротора, 5 — ребра, 6 — фасонное днище кожуха, 7 — штуцер для вывода фугата, 8 — патрубком для выгрузки осадка, 9 — линия подачи суспензии, 10 — отводная трубка для фугата;

I — суспензия, II — осветленная жидкость (фугат), III — осадок

бан, ограниченный сверху кольцевой крышкой, а снизу — коническим днищем, заканчивающимся патрубком 8. Подвеска ротора производится с помощью ребер 5, соединяющих вал (ось I) с патрубком 8 (см. сечение патрубка А—А). Кожух 2 защищает персонал от быстро вращающегося ротора (кстати, и ротор от нежелательного контакта с кем-то или чем-то). Кожух заканчивается фасонным днищем 6, позволяющим собирать и отводить (через штуцер 7) осветленную жидкость (фугат). На валу (ось I) расположен конус 4 — его возможно перемещать вдоль вала и фиксировать в определенном положении. В отверстие в верхней крышке пропущены труба 9 для подачи суспензии и отводная трубка 10 для вывода основной доли фугата (предусмотрена возможность радиального перемещения отводной трубки).

Центрифуга работает в две стадии. Первая — *рабочая* — состоит в разделении суспензии. В ротор с опущенным конусом 4 по линии 9 загружают определенную порцию суспензии, после чего ротор приводят во вращение. Во вращающемся роторе суспензия принимает форму кольцевого слоя и происходит (на рисунке изображена ситуация для промежуточного момента времени) постепенное накопление осадка (заштрихованная зона III) и осветление жидкости (зона I). Основная доля фугата выводится на ходу центрифуги по отводной трубке 10; подача суспензии при этом не прекращается. После накопления слоя осадка необходимой толщины барабан центрифуги останавливают — начинается вторая стадия — *выгрузки осадка*. Для этого поднимают конус 4 и механически выгружают осадок по патрубку 8 через просветы между ребрами 5. Затем опускают конус 4, и цикл повторяется.

**Технологический расчет** осадительной центрифуги включает:

- установление связи свойств суспензии и основных геометрических размеров барабана центрифуги с ее производительностью (в случае центрифуг периодического действия определяется продолжительность процесса);
- расчет затрат энергии на центрифугирование.

*Связь свойств суспензий с геометрическими размерами центрифуги и ее производительностью*

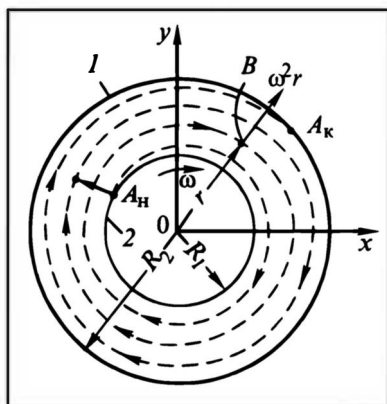
Отношение  $\omega^2 r/g$ , называемое **фактором разделения**, в современных центрифугах исчисляется сотнями и тысячами; при  $\omega^2 r/g > 3000$  говорят о сверх(супер)центрифугах. Очень высокие значения фактора разделения позволяют в ходе анализа центробежного осаждения практически без какой-либо ошибки *пренебрегать влиянием силы тяжести* на движение твердой частицы и *учитывать влияние только центробежной силы*.

Частица в барабане совершает сложное спиралеобразное движение — *относительное* (в радиальном направлении от оси вращения к стенкам) и *переносное* (вместе с суспензией, вращающейся со скоростью вращения барабана). Траектория движения частицы  $A$ , первоначально находившейся у свободной поверхности, показана на рис. 5.9 штриховыми линиями (со стрелками). В ходе движения по спирали частица проходит путь от начального положения (точка  $A_H$ ) до конечного (на стенке — точка  $A_K$ ). Технолога в плане анализа процесса осаждения интересует только *радиальная* составляющая траектории частиц (жирная стрелка от точки  $A_H$ ). Для исключения переносного движения *закрепим* во вращающемся барабане систему координат  $y-x$ , как это делалось в задачах гидростатики (разд. 2.1). Относительно такой системы координат, вращающейся вместе с барабаном, частица будет двигаться *радиально* — в дальнейшем будем анализировать именно это движение.

Расчетное выражение для скорости стесненного осаждения (стесненного витания)

*Рис. 5.9. К расчету времени центробежного осаждения:*

1 — цилиндрическая стенка барабана (поперечное сечение), 2 — свободная поверхность жидкости



в поле *центробежных* сил  $w_c$  можно было бы получить, сопоставляя силы, действующие здесь на частицу, по канве, изложенной в разд. 2.7.4, где рассматривалось стесненное витание в поле сил *тяжести*. Однако проще прямо воспользоваться выведенными там формулами (2.75), а в случае свободного витания — (2.72). Принадлежность этих формул к полю сил тяжести определяется гравитационным ускорением  $g$ , входящим в критерий Архимеда  $Ag$ . При переходе к полю центробежных сил (параметры осаждения для этого случая снабдим индексом "ц") гравитационное ускорение  $g$  следует заменить на центробежное  $\omega^2 r$ . В результате приходим к модифицированному начертанию критерия Архимеда:

$$A_{Гц} = \frac{\omega^2 r d^3}{\nu^2} \frac{\rho_T - \rho}{\rho}. \quad (е)$$

С таким выражением критерия Архимеда остается справедливой формула (2.75), записанная теперь для критерия Рейнольдса  $Re_{ц}$  в поле центробежных сил. Рассчитав  $Re_{ц} \equiv w_{ц} d / \nu$ , найдем скорость стесненного осаждения в центробежном поле  $w_{ц}$ .

В разд. 5.1.1 время осаждения  $\tau_0$  определялось как отношение пути  $H_{ж}$  к скорости стесненного осаждения  $w_c$ . Применительно к центробежному осаждению полный путь частицы (в радиальном направлении) равен разности радиусов  $(R_2 - R_1)$ . Однако при расчете времени осаждения в поле центробежных сил  $\tau_{ц}$  по формуле

$$\tau_{ц} = \frac{R_2 - R_1}{w_{ц}} \quad (ж)$$

возникают трудности, поскольку в ходе осаждения изменяется (возрастает) радиальная координата  $r$ , входящая в  $Ag$  и, следовательно, влияющая на скорость  $w_{ц}$ . Иными словами,  $w_{ц} = \text{var}$ , поэтому не удастся прямо воспользоваться выражением (ж). Очевидно, надо рассматривать бесконечно малый радиальный путь  $dr$ , проходимый частицей за элементарное время  $d\tau$ :

$$d\tau = \frac{dr}{w_{ц}}, \quad (3)$$

причем скорость осаждения изменяется с радиусом, т.е.  $w_{ц} = w_{ц}(r)$ .

При *естественном* осаждении участок разгона частицы в жидкости невелик, им пренебрегали и анализ проводили на основе *постоянной* скорости стесненного осаждения  $w_c$ . В поле центробежных сил скорость осаждения  $w_{ц}$  принципиально *переменна* вследствие изменения по ходу процесса радиальной координаты частицы  $r$ . Поэтому, строго говоря, анализ следует проводить с учетом силы инерции  $P_{и} = m_c(dw_{ц}/d\tau)$  (см. вывод формулы для скорости витания в

разд.2.7.4). Оценим *порядок* ускорения  $dw_{\text{ц}}/dt$  на примере ламинарного режима *свободного* осаждения для типичной модельной ситуации: размер частиц  $d = 100$   $\mu\text{м}$   $= 10^{-4}$  м,  $\omega = 10^2$   $\text{с}^{-1}$ ,  $v = 10^{-6}$   $\text{м}^2/\text{с}$ ,  $\rho = 10^3$   $\text{кг}/\text{м}^3$ ,  $\rho_{\text{T}} = 2 \cdot 10^3$   $\text{кг}/\text{м}^3$ .

По соотношению (2.72)

$$\text{Re}_{\text{ц}} \equiv \frac{w_{\text{ц}} d}{v} = \frac{A_{\Gamma}}{18} = \frac{\omega^2 r d^3}{18 v^2} \frac{\rho_{\text{T}} - \rho}{\rho},$$

откуда

$$w_{\text{ц}} = \frac{\omega^2 r d^2 (\rho_{\text{T}} - \rho)}{18 v \rho}.$$

Обозначим среднюю радиальную координату для частицы в процессе центробежного осаждения  $\bar{R}$  (грубо ее можно было бы принять равной среднеарифметическому из  $R_1$  и  $R_2$ ). Тогда в последнем выражении вместо  $r$  следует поставить  $\bar{R}$ . Приближенная оценка по (ж) дает

$$\tau_{\text{ц}} \approx \frac{R_2 - R_1}{w_{\text{ц}}} = \frac{(R_2 - R_1) 18 v \rho}{\omega^2 \bar{R} d^2 (\rho_{\text{T}} - \rho)}.$$

Теперь можно оценить ускорение твердой частицы в радиальном направлении:

$$a_{\text{ц}} \approx \frac{\Delta w_{\text{ц}}}{\tau_{\text{ц}}} = \frac{\omega^2 d^2 (\rho_{\text{T}} - \rho) (R_2 - R_1) \omega^2 d^2 \bar{R} (\rho_{\text{T}} - \rho)}{18 v \rho (R_2 - R_1) 18 v \rho}.$$

Вопрос о необходимости учета силы инерции решается путем сопоставления ускорений — радиального движения и центробежного:

$$\frac{a_{\text{ц}}}{\omega^2 r} \approx \frac{a_{\text{ц}}}{\omega^2 \bar{R}} = \frac{\omega^2 d^4 (\rho_{\text{T}} - \rho)^2}{18^2 (v \rho)^2} = \frac{10^4 \cdot 10^{-16} \cdot 10^6}{324 \cdot 10^{-12} \cdot 10^6} < 0,01.$$

Следовательно, радиальное ускорение (даже для сравнительно крупных частиц  $d = 100$   $\mu\text{м}$ ) более чем в 100 раз ниже центробежного, управляющего процессом осаждения. Это означает, что при последующем рассмотрении силу инерции можно *не учитывать*. К аналогичному выводу приводит анализ центробежного осаждения для турбулентного режима, а также учет стесненности витания.

Найдем на основе (з) время центробежного осаждения  $\tau_{\text{ц}}$ . С этой целью запишем зависимость  $\text{Re}_{\text{ц}}$  от  $A_{\Gamma_{\text{ц}}}$  соответственно (2.75):

$$\text{Re}_{\text{ц}} = \frac{A_{\Gamma_{\text{ц}}} \cdot \varepsilon^{4,75}}{18 + 0,59 \sqrt{A_{\Gamma} \cdot \varepsilon^{4,75}}}. \quad (5.8)$$

Подставим в комплексы  $\text{Re}_{\text{ц}}$  и  $A_{\Gamma_{\text{ц}}}$  входящие в них величины:

$$\frac{w_{\text{ц}} d}{v} = \frac{\frac{\omega^2 r d^3}{v^2} \frac{\rho_{\text{T}} - \rho}{\rho} \varepsilon^{4,75}}{18 + 0,59 \sqrt{\frac{\omega^2 r d^3}{v^2} \frac{\rho_{\text{T}} - \rho}{\rho} \varepsilon^{4,75}}}$$



и после сокращения на  $d/v$  выразим скорость стесненного осаждения частицы в центрифуге:

$$w_{ц} = \frac{\frac{\omega^2 r d^2}{v} \frac{\rho_T - \rho}{\rho} \epsilon^{4,75}}{18 + 0,59 \sqrt{\frac{\omega^2 r d^3}{v^2} \frac{\rho_T - \rho}{\rho} \epsilon^{4,75}}}.$$

С этим значением  $w_{ц}$  перепишем формулу (3) и, разделив переменные, получим ламинарное и турбулентное слагаемые, поместив аргумент  $r$  в конце этих слагаемых:

$$d\tau = \frac{18vp}{\omega^2 d^2 (\rho_T - \rho) \epsilon^{4,75}} \frac{dr}{r} + 0,59 \sqrt{\frac{\rho}{\omega^2 d (\rho_T - \rho) \epsilon^{4,75}}} \frac{dr}{\sqrt{r}}. \quad (и)$$

Проинтегрируем почленно выражение (и) от начального момента времени  $\tau = 0$  до полного времени осаждения  $\tau_{ц}$  — для частицы, находившейся в начале осаждения на радиусе  $R_1$  (положение  $A_n$ ) и в конце осаждения на радиусе  $R_2$  (в положении  $A_k$ ):

$$\begin{aligned} \tau_{ц} = & 18 \frac{vp}{\omega^2 d^2 (\rho_T - \rho) \epsilon^{4,75}} \ln \frac{R_2}{R_1} + \\ & + 1,18 \sqrt{\frac{\rho R_2}{\omega^2 d (\rho_T - \rho) \epsilon^{4,75}}} \left( 1 - \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \right). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Здесь в правой части во втором слагаемом получающаяся при интегрировании разность  $(\sqrt{R_2} - \sqrt{R_1})$  представлена в виде  $\sqrt{R_2} (1 - \sqrt{R_1/R_2})$ , а сомножитель  $\sqrt{R_2}$  внесен под общий радикал.

Из полученной формулы следует ряд выводов.

1. Первое слагаемое доминирует при *ламинарном* режиме осаждения (достаточно частый случай), второе — при *турбулентном* (более редкий случай); в наиболее часто встречающемся *переходном* режиме оба слагаемых сопоставимы.

2. Действующие на частицу центробежные силы снижаются при уменьшении радиуса  $r$ . По этой причине в центрифугах не идут на малые  $R_1$ , так как при этом возрастает продолжительность осаждения  $\tau_{ц}$ .

Часто центрифуги работают с половинным заполнением: рабочий объем жидкости в барабане  $V'$  равен половине рабочего объема барабана  $V_6$ . Тогда  $\pi R_1^2 l = 0,5 \pi R_2^2 l$ , где  $l$  — длина (высота) барабана. В этом случае  $R_1/R_2 = \sqrt{0,5}$  и

$\ln(R_2/R_1) \approx 0,347$ ;  $(1 - \sqrt{R_1/R_2}) \approx 0,1591$ . Если учесть численные коэффициенты в (5.9), то эта формула приобретает вид

$$\tau_{\text{ц}} \approx 6,25 \frac{\nu \rho}{\omega^2 d^2 (\rho_T - \rho) \epsilon^{4,75}} + 0,188 \sqrt{\frac{\rho R_2}{\omega^2 d (\rho_T - \rho) \epsilon^{4,75}}} \quad (5.9a)$$

Подобная форма записи (без  $\ln$  и сомножителя в скобках, отражающих влияние отношения  $R_2/R_1$ ) иногда встречается в справочниках и расчетных регламентах. Надо понимать, что здесь нет противоречия с формулой (5.9), просто расчетное соотношение записано для *определенного* значения  $R_2/R_1$ .

3. Формула (5.9) может давать несколько *заниженные* значения  $\tau_{\text{ц}}$  в сравнении с наблюдаемыми на практике.

Нередко в учебной и научной литературе\* выражение для  $\tau_{\text{ц}}$  выводится на основе формулы Тодеса (2.72) для скорости *свободного* витания  $w_{\text{в}}$ , т.е. для  $\epsilon = 1$ . В этом случае продолжительность процесса осаждения закономерно получается заниженной, поскольку  $w_{\text{в}} > w_{\text{с}}$ . В приведенном выше выводе этот источник занижения  $\tau_{\text{ц}}$  исключен: анализ базировался на *рабочих* значениях  $\epsilon$ .

Другая причина преуменьшения  $\tau_{\text{ц}}$  по формуле (5.9) состоит в *проскальзывании* подаваемой в барабан суспензии относительно его стенок: формула предполагает, что вся суспензия солидарно вращается вместе с барабаном с угловой скоростью  $\omega$ . На самом же деле загруженная в барабан суспензия (при периодической работе центрифуги) или свежие ее порции (при непрерывной работе) не сразу приобретают эту скорость, вращаясь некоторое время с меньшими значениями  $\omega$ . Чтобы исключить эту причину, вдоль образующей барабана устанавливают продольные (радиальные) ребра, предотвращающие проскальзывание. Исключить проскальзывание возможно также путем тангенциальной подачи суспензии через шелевое отверстие на свободную поверхность жидкости в направлении ее вращения со скоростью, близкой к окружной скорости ее движения.

4. Найденное по (5.9) значение  $\tau_{\text{ц}}$  может быть использовано для расчета производительности  $V$  центрифуги непрерывного действия в *задачах эксплуатации*. Здесь величина  $\tau_{\text{ц}}$  трактуется как время пребывания суспензии в барабане, минимально необходимое для ее осветления. Тогда при рабочем объеме жидкости в барабане  $V'$  очевидна связь (см. разд. 8.3; ср. размерности):

$$V = V' / \tau_{\text{ц}} \quad (\kappa)$$

При необходимости решения *задачи проектирования* формула (κ) записывается в явном виде относительно  $V'$ , и на этой основе выбираются минимальные габариты барабана, обеспечивающие осветление фугата.

#### *Затраты энергии на работу центрифуги*

Различают затраты энергии  $L$  (мощность на валу центрифуги  $N$ ) в *пусковой* период (индекс "п") и на *рабочем ходу* (индекс "р"). Рассмотрим сначала затраты энергии в период пуска (пусть его

\* См., например, [1, 5, 17, 19, 21].

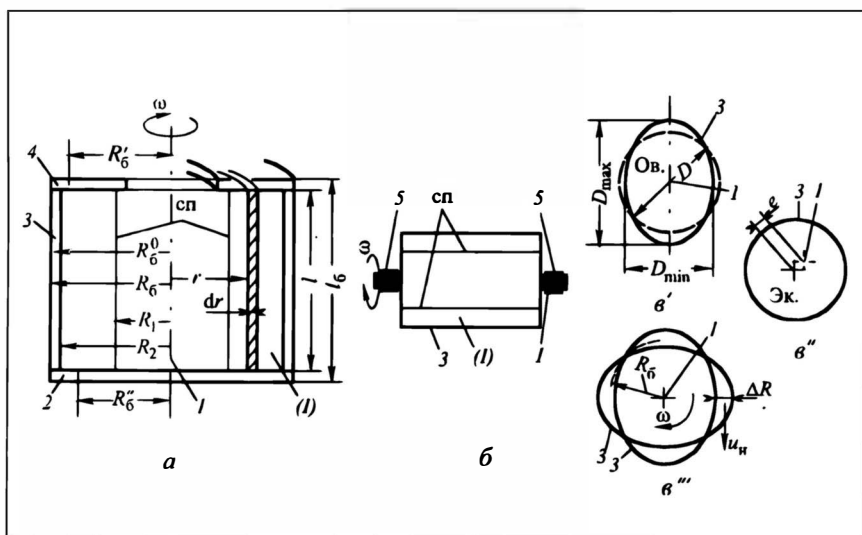


Рис. 5.10. К расчету затрат энергии:

*a* — на раскручивание барабана и суспензии, *б* — на трение в подшипниках, *в* — на компенсацию вентиляционных потерь (*в'* — овал, *в''* — эксцентриситет, *в'''* — расчетная схема);

*1* — вал, *2* — нижняя крышка, *3* — боковая стенка барабана, *4* — верхняя крышка, *5* — подшипники;

*l* — суспензия, *сп* — свободная поверхность

продолжительность составляет  $\tau_n$ ). Они складываются из четырех основных составляющих.

**1. Энергетические затраты на раскручивание барабана центрифуги.** Пусть (рис. 5.10, *a*) тело массой  $m$ , первоначально находящееся в покое, разгоняют до скорости  $w$ . Тогда работа на его разгон будет равна приобретенной им кинетической энергии  $L = mw^2/2$ . В случае вращательного движения в качестве скорости  $w$  выступает окружная скорость  $u = \omega r$ . При массе барабана  $m_6$  работа на раскручивание барабана  $L_6 = m_6 u_6^2/2 = m_6 \omega^2 r_6^2/2$ .

Не установленной пока остается радиальная координата  $r_6$  центра масс барабана. Центр масс боковых его стенок находится внутри этих стенок на радиусе  $R_6^0$ , промежуточном между  $R_2$  и  $R_6$  (под  $R_6$  понимается наружный радиус барабана). Центры масс для верхней и нижней крышек барабана находятся на меньших радиусах —  $R_6'$  и  $R_6''$  соответственно. Расчет значений  $R_6^0$  (при известной толщине стенок барабана),  $R_6'$  и  $R_6''$  затруднений не вызывает. Но обычно ограничиваются приближенной оценкой  $L_6$ , полагая, что центр масс всего барабана расположен на радиусе  $R_2$ , иначе говоря — масса барабана  $m_6$  полагается *сосредоточенной* на этом радиусе. Это значение  $r_6 = R_2$  несколько завышено в сравнении с точным

значением, вычисленным на основе  $R_6^0$ ,  $R_6'$  и  $R_6''$ ; так что затраты энергии, мощность получаются с некоторой погрешностью "в запас". Вклад  $L_6$ ,  $N_6$  в общую мощность на валу центрифуги невелик (основная статья затрат энергии — на раскручивание суспензии), поэтому принятое приближение оправданно. Итак, искомая составляющая затрат энергии

$$L_6 = \frac{m_6 \omega^2 R_2^2}{2}; \quad (5.10)$$

составляющая мощности определится как  $L_6/\tau_n$ .

**2. Энергетические затраты на раскручивание суспензии.** Затраты на раскручивание до угловой скорости  $\omega$  (рис. 5.10,а) формально могут быть определены из аналогичных соображений. Если масса кольцевого слоя суспензии равна  $m_c$ , а центр масс этого слоя находится на некотором "среднем" радиусе  $R_c$ , то

$$L_c = \frac{m_c \omega^2 R_c^2}{2}; \quad (л)$$

при этом подразумевается, что первоначально суспензия находится в покое.

Здесь было бы неоправданным базироваться на каком-то умозрительном предположении о величине  $R_c$ ; необходим обоснованный подход, учитывающий *распределение* массы суспензии по толщине ее кольцевого слоя от  $R_1$  до  $R_2$ . Выделим внутри слоя суспензии на радиусе  $r$  кольцевой слой толщиной  $dr$  (рис. 5.10,а). Для этого элементарного слоя, вращающегося с окружной скоростью  $\omega r$ , справедливо выражение типа (5.10), поскольку элементарная масса суспензии в этом слое  $dm_c$  *сосредоточена* на радиусе  $r$ . Тогда элементарные затраты энергии на приведение во вращение этой массы

$$dL_c = \frac{(dm_c) \omega^2 r^2}{2}. \quad (м)$$

Выразим элементарную массу  $dm_c$ , обозначив плотность суспензии  $\rho_c$ . Площадь поперечного сечения элементарного слоя равна  $2\pi r dr$ , высота —  $l$  (можно иначе: боковая цилиндрическая поверхность кольцевого слоя равна  $2\pi r l$ , толщина его —  $dr$ ); тогда объем элементарного слоя составит  $2\pi r l dr$ , а масса содержащейся в нем суспензии  $dm_c = \rho_c 2\pi r l dr$ . Подставив это значение  $dm_c$  в (м), получим после сокращения на 2 и объединения одинаковых множителей:

$$dL_c = \pi l \omega^2 \rho_c r^3 dr.$$

Интегрируя это выражение по всему диапазону изменения  $r$ , т.е. от  $R_1$  до  $R_2$ , найдем работу раскручивания суспензии:

$$L_c = \frac{\pi l \omega^2 \rho_c}{4} (R_2^4 - R_1^4) \quad (5.11)$$

и далее — соответствующую составляющую мощности  $N_c = L_c/\tau_n$ .

Сопоставляя формулы (л) и (5.11), установим расчетное значение радиальной координаты центра масс суспензии  $R_c$ , входящее в (л). Для этого полную массу суспензии в барабане  $m_c = \rho_c \pi (R_2^2 - R_1^2) l$  подставим в (л) и приравняем работы  $L_c$ , выраженные этими формулами:

$$\frac{\rho_c \pi (R_2^2 - R_1^2) \omega^2 R_c^2}{2} = \frac{\pi \omega^2 \rho_c (R_2^4 - R_1^4)}{4}.$$

После очевидных сокращений имеем

$$R_c^2 = \frac{R_1^2 + R_2^2}{2}, \quad (\text{н})$$

т.е. среднерасчетный квадрат радиуса равен среднеарифметической величине из квадратов граничных радиусов суспензии. С этим значением  $R_c^2$  для расчета  $L_c$  можно пользоваться формулой (л).

**3. Затраты энергии на преодоление трения вала центрифуги в подшипниках.** Эти затраты удобно рассматривать применительно к горизонтальной центрифуге (рис. 5.10, б). Пусть суммарная масса барабана и суспензии равна  $(m_b + m_c)$ , тогда сила нормального давления вала на подшипники будет  $P_n = (m_b + m_c)g$ . При коэффициенте трения в подшипниках  $f_t$  сила трения составит  $F_t = f_t P_n$ . Обозначим окружную скорость вала  $u_b = \omega r_b$ , где  $r_b$  — радиус вала. Работа рассчитывается как произведение силы на путь, а мощность — как работа в единицу времени; поэтому мощность будет определяться как произведение силы на путь в единицу времени, т.е. на скорость. Отсюда для составляющей  $N_t$  мощности на преодоление сил трения на валу центрифуги имеем

$$N_t = F_t u_b, \text{ или } N_t = (m_b + m_c) g f_t u_b. \quad (5.12)$$

**4. Затраты энергии на взаимодействие вращающегося барабана с воздухом.** В результате взаимодействия быстро вращающегося цилиндрического барабана с окружающим его воздухом, заключенным в пространстве между барабаном и кожухом, возникают силы гидравлического сопротивления, требующие определенных затрат энергии на их преодоление. Эти затраты называются *вентиляционными*. Вклад сил *трения* в общее взаимодействие вращающегося барабана с воздухом невелик, и его, как правило, не учитывают. Основная составляющая вентиляционных потерь энергии вызвана иными причинами, связанными с изготовлением и монтажом барабана. Первая из них обусловлена отклонением формы барабана от кругового цилиндра — всегда наблюдается небольшая *овальность* (эллипсность). Вторая связана с невозможностью точной установки вала по оси барабана — всегда есть некий (тоже небольшой) *эксцентриситет*  $e$ . По этим причинам при вращении барабана возникают *биения* — удары барабана о воздух в результате местного (лобового) сопротивления. На рис. 5.10, в эффекты овальности (Ов. — левый верхний

рисуюнок) и эксцентриситета (Эк. — правый верхний рисунок) иллюстрируются в сильно утрированном виде.

Расчетная схема вентиляционных потерь представлена на нижнем рисунке 5.10,в. Штриховыми линиями намечена окружность барабана наружным радиусом  $R_6$ , жирным контуром выделен отклоняющийся от окружности овальный барабан при горизонтальном положении большего радиуса, тонким — при вертикальном его положении. С правой стороны барабана показана обусловленная овалностью площадка шириной  $\Delta R$  и высотой  $l_6$  (рис. 5.10,а); эта площадка при вращении и создает местное (в данном случае — вентиляционное) гидравлическое сопротивление. Разумеется, такие же площадки и сопротивления возникают также с левой стороны овального барабана.

Потери напора на местное сопротивление (см. разд. 2.2.6) при окружной скорости  $u_n$  на наружной стенке барабана согласно формуле (2.30а) равны

$$h_{\text{в}} = \xi \frac{u_n^2}{2g}, \text{ а потери давления } \Delta p_{\text{в}} = h_{\text{в}} \rho_{\text{в}} g = \xi \frac{u_n^2}{2} \rho_{\text{в}};$$

здесь  $\xi$  — коэффициент местного сопротивления,  $\rho_{\text{в}}$  — плотность воздуха. (Заметим:  $\xi = \text{const}$ , так как вследствие высоких скоростей вращения ротора режим — верхний автомодельный.) Тогда сила взаимодействия барабана с окружающим его воздухом для обеих (правой и левой) площадок составит

$$F_{\text{в}} = \Delta p_{\text{в}} \cdot 2\Delta R l_6 = \xi \frac{u_n^2}{2} 2\Delta R l_6 \rho_{\text{в}}.$$

В расчетах абсолютную величину овалности барабана  $\Delta R$  удобно выразить через относительную овалность  $j \equiv \Delta R/R_6$ :  $\Delta R = jR_6$ . Вентиляционная составляющая мощности определяется как  $N_{\text{в}} = F_{\text{в}} u_n$ , где  $u_n = \omega R_6$ . Выражая значения  $F_{\text{в}}$  и  $u_n$  и заменяя  $\Delta R$ , приходим к расчетному выражению для вентиляционной составляющей мощности:

$$N_{\text{в}} = \xi \omega^3 R_6^4 j \rho_{\text{в}} l_6. \quad (5.13)$$

При тщательном изготовлении барабана его относительная овалность  $j$  находится на уровне 0,001. Рекомендуемые (на основе опытов) значения  $\xi$  близки к 0,5—0,6. В целом  $N_{\text{в}}$ , как правило, составляет не более 10% от общей мощности в период пуска.

**Полная пусковая мощность**

$$N_{\text{п}} = N_6 + N_{\text{с}} + N_{\text{т}} + N_{\text{в}}.$$

В выражение для мощности на валу центрифуги **на рабочем ходу**, т.е. после завершения пускового периода, не входят составляющие  $N_6$  и  $N_{\text{с}}$ ; составляющие  $N_{\text{т}}$  и  $N_{\text{в}}$  — остаются. Но после выхода на режим в барабан непрерывно подается массовый поток суспензии  $G_{\text{с}}$  — на его раскручивание необходимы затраты энергии — появляется составляющая мощности  $N'$ . Для ее оценки примем, что исходной кинетической энергией этого потока можно пренебречь (если это допущение и вносит некоторую ошибку, то “в запас”).

Составляющую мощности  $N'$  найдем, воспользовавшись выражением (л). Только в рассматриваемом случае речь идет не о количестве суспензии  $m_{\text{с}}$ , а о ее потоке в единицу времени  $G_{\text{с}}$ ;

поэтому в левой части выражения (л) будет стоять *работа в единицу времени*, т.е. мощность:

$$N' = \frac{G_c \omega^2 R_c^2}{2}. \quad (5.14)$$

Здесь квадрат среднерасчетного радиуса определяется по формуле (н).

Полная мощность на рабочем ходу составит

$$N_p = N_T + N_B + N'.$$

Это выражение является более обоснованным, чем иногда встречающиеся рекомендации — брать  $N_p$  как некую (на уровне 0,3 — 0,4) долю  $N_n$ .

### 5.1.4. Центробежное осаждение в неоднородных газовых системах

Очистка газового потока от содержащихся в нем твердых частиц в пылеосадительной камере, т.е. в поле *сил тяжести*, происходит эффективно только в случае достаточно крупных и тяжелых частиц. Промышленное производство часто имеет дело с газовзвесями (запыленными газами), несущими *мелкие* частицы размерами заметно менее 0,1 мм. В этом случае используется центробежное (инерционное) осаждение в аппаратах, называемых **циклонами**.

Обеспыливание газовзвесей в циклонах, т.е. отделение газа от пыли, производится в целях их последующего раздельного использования. В ряде производств запыленный газ получается в результате нежелательного уноса твердых частиц (например, из пылящего ТМ; из псевдоожиженного слоя); в этом случае выделяемые с помощью циклона твердые частицы возвращаются в технологический аппарат.

#### *Устройство и принцип работы циклонов*

Принципиальная схема действия циклона приведена на рис. 5.11.

Исходный запыленный газ (поток *Л*) подводится к циклону по цилиндрической трубе 4. С помощью переходного участка 5 канал изменяет форму на прямоугольную, и далее исходный газ поступает в циклон через прямоугольный патрубок 6 — с *достаточно высокой скоростью и тангенциально*. Высокая скорость (обычно на уровне 10—20 м/с) предотвращает выпадение твердых частиц из газового потока в подводящих к циклону каналах. Тангенциальная подача газа в циклон обеспечивает *закручивание* потока вокруг центральной цилиндрической трубы 3. Под действием возникающей при этом *центробежной* силы твердые частицы отбрасываются к стенкам циклона, а очищенный газ (поток *Л*) уходит из циклона через патрубок 7. Твердые частицы, осевшие на боковых стенках циклона, под действием уже силы *тяжести* (собственного веса) по пологому конусу 2 перемещаются к отводному патрубку 8 и выводятся из циклона.

Рис. 5.11. Схема циклона (разрез):

1 – цилиндр, 2 – конус, 3 – центральная труба, 4 – цилиндрическая входная труба, 5 – переходное устройство, 6 – входной патрубок прямоугольного сечения, 7 – патрубок вывода очищенного газа, 8 – патрубок вывода твердого материала, I – запыленный газ, II – очищенный газ, III – твердый материал

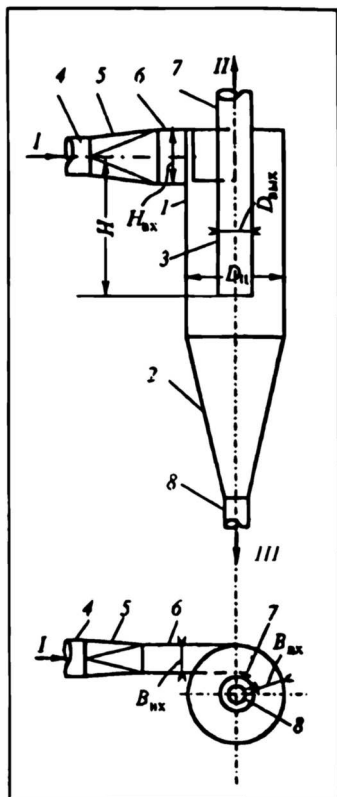
Циклон может работать под напором (газовдувка, вентилятор, компрессор *перед* циклоном – на линии 4) и под разрежением (вентилятор, вакуумнасос *после* циклона – на линии 7). В обоих вариантах вывод ТМ из циклона должен быть *герметизирован* – шнеком, мигалками, шлюзовым или секторным затвором, клапанами и т.д.\* Иначе:

- в случае первого варианта: по патрубку 8 пойдет не только ТМ, но и газ;
- в случае второго варианта: газ будет засасываться не только по патрубку 4, но и по патрубку 8; этот поток подхватит уже осевшие частицы и унесет их из циклона по патрубку 7.

Кольцевое пространство между корпусом циклона (диаметр  $D_{\text{ц}}$ ) и центральной трубой (диаметр  $D_{\text{вых}}$ ) высотой  $H$  (от оси входного канала до нижнего обреза центральной трубы) называется **рабочим объемом** циклона; обозначим его  $V_{\text{ц}}$  (см. рис. 5.11). Очевидно:  $V_{\text{ц}} = (\pi/4)(D_{\text{ц}}^2 - D_{\text{вых}}^2)H$ ;  $D_{\text{ц}} = 2R_2$ ,  $D_{\text{вых}} = 2R_1$ . Проходя рабочий объем, газ делает 2–3 полноценных витка – за это время должно произойти обеспыливание газа. Относительно крупные частицы *полностью* выделяются из газового потока, достигают стенок циклона и оседают на них, но мелкие – только *частично*: успевают осесть на стенках лишь те из них, которые изначально находились ближе к стенкам.

Этот эффект, свидетельствующий о *сепарирующих* возможностях циклона, используется для классификации зернистых материалов – см. разд. 23.4.3.

Удлинение центральной трубы (для увеличения числа витков потока не приводит к существенному улучшению выделения



\* Подробно устройство и работу герметизирующих устройств см. [2, 13, 16] и др.



мелких частиц. Дело в том, что по мере продвижения вниз по кольцевому рабочему объему газовый поток, вследствие трения о стенки корпуса и центральной трубы, теряет закрутку; поэтому увеличение  $H$  без специальных конструктивных мер не приводит к улучшению очистки газа от ТМ.

Скорость вращения потока в циклонах на порядок меньше, чем в центрифугах. Тем не менее процесс обеспыливания газа в циклоне в значительной мере успевает закончиться: существенно меньшие плотность и динамическая вязкость газа (в сравнении с жидкостью) обуславливают заметно большую скорость осаждения.

Практика выработала некоторые рекомендации относительно характеристик циклонов: в оценочном плане  $H \approx D_{\text{ц}}$ ;  $D_{\text{вых}} \approx (0,4 \div 0,6)D_{\text{ц}}$ ; на каждый  $\text{м}^3/\text{с}$  газового потока требуется  $0,4 - 0,5 \text{ м}^3$  рабочего объема циклона, иными словами: время пребывания потока в рабочем объеме должно быть близко к  $0,4 - 0,5 \text{ с}$ . Исходная концентрация ТМ в газозвеси, подаваемой в циклон, не должна превышать  $400 \text{ г}/\text{м}^3$  (по частицам с размером свыше  $10 \text{ мкм}$ ).

Степень очистки газа от пыли в циклонах  $\eta_{\text{ц}}$  зависит от геометрических характеристик циклона, свойств твердых частиц и газа и скорости последнего; обычно  $\eta_{\text{ц}}$  находится в пределах  $80-95\%$ . Для повышения степени очистки иногда устанавливают 2—3 циклона *последовательно*.

В центрифугах барабан суспензии вращается с постоянной по радиальной координате  $r$  угловой скоростью  $\omega$ ; поэтому при анализе процесса удобно пользоваться центробежным ускорением в форме  $\omega^2 r$ . Газовый поток на входе в циклон движется с большой линейной скоростью, он в высокой степени турбулизован; его *скорость* на входе в циклон (и далее — окружная скорость в рабочем объеме последнего) *существенно выровнена* по сечению, т.е. по радиальной координате, а *угловая скорость*  $\omega$  — *переменна*. Поэтому здесь удобнее перейти к выражению центробежного ускорения через примерно постоянную окружную скорость  $u$ :

$$u = \omega r, \quad \omega^2 r = \left(\frac{u}{r}\right)^2 r = \frac{u^2}{r}. \quad (o)$$

Из полученного выражения следует, что центробежная сила  $m_{\text{ц}}(u^2/r)$  возрастает при уменьшении  $r$ . Это означает, что в циклонах малого диаметра скорость осаждения будет выше, т.е. очистка газа от пыли при одинаковых скоростях потока более эффективна:  $\eta_{\text{ц}}$  — выше. Однако такие циклоны малого диаметра будут иметь низкую производительность, а попытка ее повышения приведет к уменьшению времени пребывания газа в рабочем объеме — оно станет ниже минимально необходимого. Поэтому *параллельно* устанавливают несколько десятков (иногда — свыше сотни) малых циклонов в общем корпусе — говорят о *батареях* циклонов, *мультициклоне* (рис. 5.12).

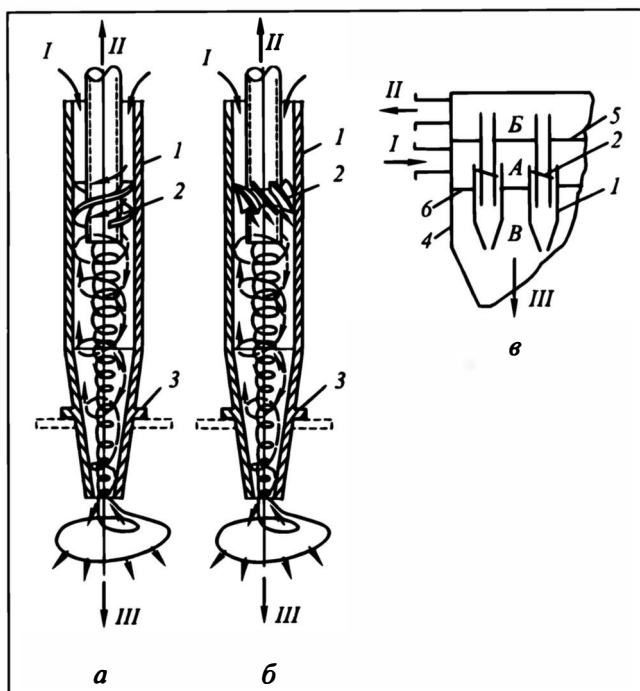


Рис. 5.12. Элементы мультициклона с закручивающим устройством:  
*а* — типа "винт", *б* — типа "розетка", *в* — схема компоновки элементов в мультициклоне;  
*1* — корпус, *2* — закручивающее устройство, *3* — опора, *4* — общий корпус, *5*, *6* — перегородки, разделяющие зоны;  
*I* — запыленный газ, *II* — очищенный газ, *III* — твердый материал;  
*A* — зона газозвеси, *B* — зона очищенного газа, *B* — зона твердого материала

Допустимая запыленность исходного газа находится здесь на уровне 120—150 г/м<sup>3</sup>, так как превышение этой концентрации создает затруднения при выводе твердых частиц из мультициклона.

Сравнивая центрифуги (машины) и циклоны (аппараты), можно констатировать, что последние существенно проще и надежнее в эксплуатации, поскольку не содержат движущихся узлов, деталей. Циклоны неприменимы, если содержащиеся в газозвеси твердые частицы имеют склонность к налипанию на стенки; в частности, циклоны плохо работают в случае высокой влажности частиц.

### Технологический расчет циклонов

При технологических расчетах приходится решать проблемы, связанные с производительностью циклона, предельными размерами улавливаемых частиц, степенью очистки газа, гидравлическим сопротивлением циклона. Решение первых трех проблем

нередко ведут\* на основе формул типа (5.9), иногда оставляя лишь ламинарную составляющую. Заметим, что ошибка (к тому же не "в запас") при игнорировании турбулентной составляющей может быть заметной, хотя обычно эта составляющая все же уступает ламинарной.

Главная погрешность подхода заключается в неправомерности постулата о постоянстве угловой скорости  $\omega$  по радиальной координате  $r$ : этот постулат, вполне справедливый в случае центрифуг, для процесса осаждения в циклоне весьма далек от реальности. Его возможно трактовать как некий идеализированный предельный случай, пригодный для приближенных оценок. Другим идеализированным предельным случаем является постулат о постоянстве (по радиусу  $r$ ) окружной скорости  $u = \omega r$ , обусловленном выравниванием скоростей в кольцевом поперечном сечении высокотурбулизованного газового потока. Легко видеть, что оба идеализированных случая могут быть объединены соотношением  $u/r^s = \text{const}$ , причем при  $s = 1$  получается первый случай, а при  $s = 0$  — второй. Экспериментально показано, что реально для циклонов  $s \approx 0,5$ ; тогда соответственно (о)

$$u/\sqrt{r} = \text{const} \equiv K, \quad (\text{п})$$

так что  $u = K \sqrt{r}$  или  $\omega = K/\sqrt{r}$ .

Постоянную  $K$  оценим из уравнения расхода для газового потока. Для оценки пренебрежем расширением потока в кольцевом пространстве циклона, т.е. примем (см. рис.5.11) наименьший радиус закрученного потока  $R_1^* = R_2 - B_{\text{вх}} > R_1$ . Тогда

$$V = H_{\text{вх}} \int_{R_1^*}^{R_2} u \, dr = H_{\text{вх}} \int_{R_1^*}^{R_2} K \sqrt{r} \, dr = KH_{\text{вх}} \frac{2}{3} \left[ R_2^{3/2} - (R_2 - B_{\text{вх}})^{3/2} \right].$$

Отсюда

$$K = \frac{3V}{2H_{\text{вх}} \left[ R_2^{3/2} - (R_2 - B_{\text{вх}})^{3/2} \right]}. \quad (\text{р})$$

Связь производительности циклона с его геометрическими характеристиками и свойствами газозвеси. В первом предельном случае искомая связь задана выражениями (5.9) и (к). Заметим: ширина потока газозвеси  $B_{\text{вх}}$  меньше полной ширины кольцевого просвета ( $R_2 - R_1$ ), где наименьший радиус  $R_1 = D_{\text{вых}}/2$  (см. рис. 5.11,б). Поэтому в целях уточнения рекомендуется модифицировать выражение (5.9), проводя интегрирование не по всему диапазону от  $R_1$  до  $R_2$ , а по промежутку  $B_{\text{вх}}$  (т.е. от  $R_2 - B_{\text{вх}}$  до  $R_2$ ).

Для второго предельного случая в исходное уравнение (и) следует вместо переменной  $\omega$  подставить  $u/r$ :

---

\* См. [1, 17].

$$d\tau = \frac{18\nu\rho}{u^2 d^2 (\rho_T - \rho)\epsilon^{4,75}} r dr + 0,59 \sqrt{\frac{\rho}{u^2 d (\rho_T - \rho)\epsilon^{4,75}}} \sqrt{r} dr$$

и проинтегрировать. Если пределы интегрирования оставить прежними, то (с учетом множителей, появляющихся при интегрировании)

$$\begin{aligned} \tau_{ц} = & 9 \frac{\nu\rho}{u^2 d^2 (\rho_T - \rho)\epsilon^{4,75}} (R_2^2 - R_1^2) + 0,79 \times \\ & \times \sqrt{\frac{\rho}{u^2 d (\rho_T - \rho)\epsilon^{4,75}}} (R_2^{3/2} - R_1^{3/2}). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Если принять более обоснованную базу — соотношение (п), то переменная  $r$  сокращается, и в качестве исходного выступает выражение

$$d\tau = \frac{18\nu\rho}{K^2 d^2 (\rho_T - \rho)\epsilon^{4,75}} dr + 0,59 \sqrt{\frac{\rho}{K^2 d (\rho_T - \rho)\epsilon^{4,75}}} dr;$$

интегрируя в тех же пределах, получаем

$$\tau_{ц} = \left[ \frac{18\nu\rho}{K^2 d^2 (\rho_T - \rho)\epsilon^{4,75}} + \frac{0,59}{K} \sqrt{\frac{\rho}{d (\rho_T - \rho)\epsilon^{4,75}}} \right] (R_2 - R_1). \quad (5.16)$$

В полученном выражении разность  $(R_2 - R_1)$  вынесена за общие скобки; в целях уточнения вместо нее, как указано выше, целесообразно подставить  $B_{вх}$ .

Искомая связь выражается формулой (к). В задачах *эксплуатации*, когда известны геометрические размеры рабочего объема  $V_{ц}$ , определяется производительность циклона  $V$ . В задачах *проектирования* по заданной производительности  $V$  находят рабочий объем циклона  $V_{ц}$  и, пользуясь рекомендациями по соотношению его основных размеров, определяют эти размеры.

**Предельный размер улавливаемых частиц.** Частицы разных размеров осаждаются с *разной* скоростью; вместе с тем все они с потоком газовзвеси находятся в рабочем объеме циклона примерно *одинаковое* время. Этого времени будет достаточно для полного осаждения частиц крупнее некоторого предельного размера  $d_{пр}$ ; более мелкие частицы, как указано выше, осядут лишь частично.

В зависимости от принятой модели для отыскания  $d_{пр}$  используют формулы (5.9), (5.15) или (5.16), решая соответствующее выражение относительно  $d = d_{пр}$ . При этом в формулу подставляют значение  $\tau_{ц}$  либо производительность  $V$  и рабочий

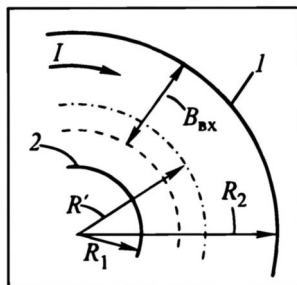
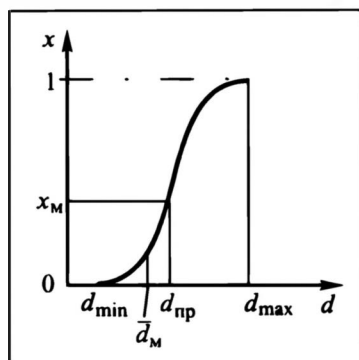


Рис.5.13. К расчету предельного размера улавливаемых частиц

Рис.5.14. К расчету степени очистки газа в циклоне:

1 — стенка корпуса, 2 — стенка центральной трубы;  
1 — поток газовой пыли в кольцевом пространстве циклона

объем циклона  $V_{\text{ц}}$ . Имея в виду, что  $d_{\text{пр}}$ , как правило, сдвинут в область достаточно мелких частиц, обычно без особой погрешности можно ограничиться *ламинарной* составляющей упомянутых формул.

Приведем расчетные выражения, базирующиеся на ламинарной составляющей наиболее обоснованной формулы (5.16):

$$d_{\text{пр}} = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{18\nu\rho(R_2 - R_1)}{(\rho_T - \rho)\epsilon^{4,75}\tau_{\text{ц}}}} = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{18\nu\rho(R_2 - R_1)V}{(\rho_T - \rho)\epsilon^{4,75}V_{\text{ц}}}}; \quad (5.17)$$

после раскрытия выражения для объема  $V_{\text{ц}}$  и сокращения на  $(R_2 - R_1)$ :

$$d_{\text{пр}} = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{18\nu\rho V}{(\rho_T - \rho)\epsilon^{4,75}\pi(R_2 + R_1)H}}. \quad (5.17a)$$

В качестве порозности в эти формулы для приближенного расчета можно подставить значение  $\epsilon$ , найденное по исходной концентрации  $a_0$  ТМ в газовой пыли (ошибка будет "в запас"). Для более строгого — надо знать значение порозности  $\epsilon_m$  в зоне осаждения мелких частиц. Ее можно оценить исходя из предположения, что частицы крупнее  $d_{\text{пр}}$  уже покинули эту зону. Тогда массовая доля мелочи в газовой пыли равна  $x_m$  (рис.5.13), а концентрация мелочи в потоке газовой пыли  $a_m$ , лежащая в основе расчета порозности  $\epsilon_m$  по (5.1а), может быть определена как  $a_0 x_m$ . Более точный анализ требует деления мелочи на несколько более узких фракций (т.е. диапазона  $d_{\text{мин}} - d_{\text{пр}}$  на несколько участков) и пофракционного расчета.

Заметим, что расчет  $\epsilon_m$  не вызывал бы затруднений при известной величине  $d_{\text{пр}}$ ; однако при расчете  $d_{\text{пр}}$  по (5.17а) требуется уже знать значение  $\epsilon_m$ . Поэтому определение  $d_{\text{пр}}$  приходится вести методом последовательных приближений, используя формулы (5.1а), (5.17а) и кривую гранулометрического состава.

**Степень очистки газа.** Газовый поток в циклоне будет безусловно очищен от всех частиц крупнее  $d_{\text{пр}}$ , так что гарантированная степень очистки составит  $\eta_{\text{пр}} = 1 - x_m$  (см. рис. 5.13). На самом деле циклон задерживает еще и определенную долю мелких частиц, оценить которую можно из следующих соображений. Допустим, что в оценках можно базироваться на размере мелких частиц  $d_m$ , усредненном в промежутке размеров от  $d_{\text{min}}$  до  $d_{\text{пр}}$  (рис. 5.13). Тогда, располагая величиной  $\tau_{\text{ц}} = V_{\text{ц}}/V$ , можно по формуле (5.17а) найти для размера  $d_m$  значение нижнего предела интегрирования  $R'$ : все мелкие частицы, находящиеся первоначально ближе к стенке корпуса 1 — на координатах  $r > R'$  (рис. 5.14), будут улавливаться в циклоне, а находящиеся дальше — на  $r < R'$ , т.е. в промежутке  $(R' - R_1)$  — проскочат циклон и будут унесены газовым потоком. В исходном потоке твердые частицы всех размеров равномерно распределены по объему газа и по сечению потока  $B_{\text{вх}}$ . Тогда доля унесенных мелких частиц, очевидно, составит  $(R_2 - R')/B_{\text{вх}}$ , а степень очистки газа от мелочи

$$\eta_m \approx 1 - \frac{R_2 - R'}{B_{\text{вх}}}.$$

Общая степень очистки получится суммированием:  $\eta_{\text{ц}} = \eta_{\text{пр}} + \eta_m$ .

При установке  $n_{\text{ц}}$  циклонов *последовательно* результирующая степень очистки газа  $\eta_{\text{общ}}$  возрастает. При этом расчет степени очистки  $\eta_i$  в каждом  $i$ -м циклоне ведется по рассмотренной выше методике, разумеется — с учетом для каждого циклона *своих* исходной концентрации ТМ во входящем потоке и распределения частиц по размерам. После каждого циклона в газе остается  $1 - \eta_i$  доля ТМ, после  $n_{\text{ц}}$  последовательно включенных циклонов останется доля  $\prod_{i=1}^{n_{\text{ц}}} (1 - \eta_i)$ . Тогда общая степень очистки составит

$$\eta_{\text{общ}} = 1 - \prod_{i=1}^{n_{\text{ц}}} (1 - \eta_i). \quad (5.18)$$

**Гидравлическое сопротивление циклонов.** В целях приближенной оценки сопротивления циклона  $\Delta p_{\text{ц}}$  его рассматривают как *единое местное сопротивление*. Обычно расчет  $\Delta p_{\text{ц}}$  циклона ведут на основе *фиктивной* скорости газа  $w_{\text{ф}}$ , вычисляемой по уравнению расхода на поперечное сечение циклона диаметром  $D_{\text{ц}}$  при производительности  $V$ . Тогда

$$\Delta p_{\text{ц}} = \xi_{\text{ц}} \frac{w_{\text{ф}}^2}{2} \rho. \quad (5.19)$$

Коэффициент местного сопротивления циклона  $\xi_{\text{ц}}$  зависит от конструктивных характеристик циклона; обычно он не выходит за пределы 100—300.

Более строгий расчет\* предполагает раздельное нахождение местных сопротивлений на различных участках циклона:  $\Delta p_{\text{вх}}$ ,  $\Delta p_{\text{вых}}$  и т.д. Определение этих

\* См., например, [4 и 17] и особенно детально [7].

величин базируется на коэффициентах местных сопротивлений, определяемых экспериментально.

### 5.1.5. Некоторые другие процессы осаждения

Процессы разделения жидких и газовых неоднородных смесей не исчерпываются приведенными вариантами их организации. Ниже кратко охарактеризованы некоторые другие возможности.

**Гидроциклоны**, предназначенные для разделения *жидкостных* неоднородных смесей (суспензий, нестойких эмульсий), по устройству и принципам работы аналогичны циклонам. Они выгодно отличаются от центрифуг отсутствием движущихся узлов и невысокой стоимостью. Однако скорость осаждения в них относительно невелика: в сравнении с центрифугами здесь заметно меньше центробежная сила (из-за более низкой угловой скорости  $\omega$ ); в сравнении с циклонами в них значительно ниже  $A_{гц}$  (прежде всего — из-за более высокой плотности несущей среды). Кроме того вследствие более высокого гидравлического сопротивления, жидкостной поток в меньшей мере сохраняет закрутку, нежели газовый. По указанным причинам степень очистки в гидроциклонах относительно невысока, и в химической промышленности они находят ограниченное применение.

Подход к технологическому расчету гидроциклонов сходен с рассмотренным для циклонов в разд. 5.1. 4.

**Центриклоны** занимают промежуточное положение между центрифугами и гидроциклонами. Рабочая зона центриклона представляет собой цилиндр (или пологий конус), по оси которого расположен вал с лопастями. Поток суспензии подается в цилиндр, где вращение вала обеспечивает закручивание потока. Возникающая центробежная сила обуславливает разделение суспензии. Центриклоны проще центрифуг, но сложнее гидроциклонов; они сохраняют ряд недостатков, присущих тем и другим. Видимо, поэтому они не нашли широкого применения в промышленности.

Пылеосадительные камеры и циклоны не обеспечивают необходимой степени очистки запыленных газов: мелкие частицы размером до 10  $\mu\text{м}$  в значительной степени уносятся с газовым потоком. Высокая степень очистки от мелочи достигается в *электростатическом* поле — в аппаратах, называемых **электрофильтрами**.

Принцип действия электрофильтров заключается в следующем. При разности потенциалов  $\Delta U$  между двумя электродами,

---

\* Подробнее см., например, [1, 5, 9, 14, 21].

достигающей некоторой критической величины, в газовом пространстве между ними возникает электрический разряд — поток ионов. Если в этом пространстве движется запыленный газ, то ионы отдают свои заряды частичкам пыли (либо содержащимся в газе капелькам жидкости) и заряжают их. Получившие заряд частички начинают двигаться к противоположно заряженному (осадительному) электроду и оседают на нем, а очищенный газ покидает электрофильтр.

**Технологический** расчет электрофильтра базируется на сопоставлении сил — *электростатической*, побуждающей заряженную частицу двигаться к осадительному электроду, и *гидравлического сопротивления* движению твердой частицы. При этом, вследствие малости частицы, режим ее движения к электроду — сугубо *ламинарный*. К тому же на электрофильтр подается газ с *низкой* концентрацией твердых частиц, уже прошедший другие обеспыливающие устройства. Таким образом, можно использовать *ламинарный* фрагмент формулы (2.72) для скорости *свободного* осаждения (витания):

$$Re_3 = Ar_3 / 18, \quad (5.20)$$

причем в "электростатический критерий Архимеда"  $Ar_3$  вместо ускорения силы тяжести входит ускорение электростатических сил.

Электрическое поле характеризуется градиентом потенциала, называемым **напряженностью** этого поля  $E = dU/dl$ . При числе  $z$  переданных частичке зарядов величиной  $e$  сила, действующая на частичку, равна  $zeE$ . Поделив эту силу на массу частицы  $m_{\text{ч}}$ , найдем ускорение электростатического поля, входящее в  $Ar_3$ . Последующий анализ ведется по канве, изложенной в разд. 5.1.2, с определением времени осаждения частицы в электрическом поле (на осадительном электроде). Далее решают проблемы, связанные с производительностью электрофильтра и его основными размерами. Подчеркнем: в случае необходимости учитывают *переменные* напряженность  $E$  и электростатическое ускорение, а значит и *переменную* скорость осаждения частицы в направлении ее перемещения к осадительному электроду.

## 5.2. ФИЛЬТРОВАНИЕ

### 5.2.1. Общие положения

Осаждение очень мелких и легких частиц из загрязненных жидкостей (или газов) происходит крайне медленно, что ограничивает производительность процесса либо требует больших производственных площадей. Переход к осаждению в центробежном или электростатическом поле заметно удорожает процесс. Разделение жидких и газовых неоднородных смесей воз-



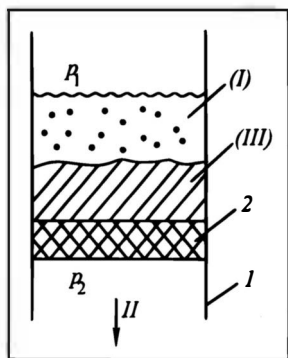


Рис.5.15. Общая схема фильтрования:

1 — корпус фильтра, 2 — фильтрующая перегородка;  
I — суспензия, II — фильтрат, III — осадок

можно методом **фильтрования**, состоящим в пропускании загрязненного потока через **перегородку**, проницаемую для несущей (сплошной) среды, но не пропускающую твердые частицы. В результате неоднородная смесь разделяется на осветленную жидкость, называемую **фильтратом**, и влажный **осадок** твердого материала. Каждый из полученных продуктов (фильтрат, осадок) может быть целе-

вым; с позиций тенденции к безотходности производства предпочтительно, чтобы целевыми были оба продукта.

Процесс фильтрования основан на явлении **фильтрации**: течения жидкости (газа) через пористые среды — зернистые слои, перегородки (в частности, ткани, пористые материалы и т.п.) с мелкими каналами.

Фильтрование по отношению к осаждению является *конкурирующим* процессом. Оно сложнее в организации (если сравнивать с естественным осаждением, то в аппаратурном оформлении), но эффективнее (выше степень очистки), а в случае мелких и легких частиц — и интенсивнее (выше производительность). Кроме того, фильтрование может оказаться *альтернативным* методом по отношению к осаждению, когда близки плотности сплошной и дисперсной фаз  $\rho \approx \rho_T$ ; в этом случае становится невозможным отстаивание в поле каких-либо массовых сил: критерий  $Ag$ , а с ним  $Re_c$  и скорость осаждения стремятся к нулю.

Схема фильтрования ясна из рис.5.15. Фильтрование происходит под действием разности давлений  $\Delta p = p_1 - p_2$ . В общем случае к этой разности надо еще добавить гидростатическое давление жидкостного столба высотой  $h$  над перегородкой:

$$\Delta p = p_1 - p_2 + \rho g h. \quad (a)$$

Размер пор перегородки должен быть меньше размера задерживаемых на ней частиц, иначе последние проскачат через перегородку вместе с фильтратом. На практике суспензия содержит частицы разных размеров, в том числе — очень мелкие. Они *поначалу* не задерживаются на фильтре, проскакивают через него, так что первые порции фильтрата получаются *мутными* — их собирают отдельно. По мере протекания процесса накапливается слой осадка — именно он является лучшим фильтром: даже небольшой его слой задерживает самые мелкие частицы, и

фильтрат получается светлым. Первые мутные порции фильтрата обычно повторно подвергают фильтрации — через перегородку с осадком.

Материал перегородки, разумеется, должен быть химически инертен по отношению к компонентам разделяемой суспензии, прежде всего — к жидкости (газу).

### 5.2.2. Устройство и работа фильтров

Фильтры бывают *периодического* и *непрерывного* действия. Они работают при *атмосферном давлении*, под *повышенным давлением* или под *разрежением*.

Простейший представитель фильтров *периодического действия* — **простой фильтр** — работает при атмосферном давлении над и под перегородкой, так что такое *естественное* фильтрование происходит под действием гидростатического давления столба жидкости  $p = \rho gh$  (пример из лабораторной практики — стеклянная воронка с фильтровальной бумагой). Достоинства таких фильтров — простота конструкции и дешевизна. Но низкая производительность простых фильтров при работе с промышленными суспензиями заставляет искать пути повышения движущей силы процесса фильтрования.

Аппарат, работающий с повышенным (сверх атмосферного) давлением, называется **друк-фильтром**. Вариант исполнения такого фильтра показан на рис.5.16. Фильтр работает в две стадии — накопление осадка с получением фильтрата; выгрузка осадка. На первой стадии в аппарат с закрытой крышкой 1, соединенной с линией 6 высокого давления  $p_1$ , подается суспензия I. Фильтрат II проходит через перегородку 4, давление под которой  $p_2$  — атмосферное, и отводится из фильтра; одновременно на перегородке накапливается осадок III. После накопления слоя осадка достаточной толщины подача суспензии прекращается (закрывается задвижка на линии 8) и отключается высокое давление  $p_1$  (перекрывается вентиль на линии 6) — первая стадия завершена. На второй стадии открывают вентиль на линии 7 — в пространстве над перегородкой с осадком устанавливается атмосферное давление, после чего открывают крышку 1. Далее из фильтра механически выгружают осадок. В некоторых конструкциях друк-фильтров для облегчения выгрузки осадка предусмотрено поворотное устройство 5, с помощью которого фильтр опрокидывается (поворачивается на  $180^\circ$  около горизонтальной оси).

По выгрузке осадка аппарат собирают, герметизируют (закрывают вентиль на линии 7), соединяют с источником высокого давления  $p_1$ , после чего включают подачу суспензии — повторяется первая стадия.

Для ряда промышленных осадков характерно появление в ходе процесса фильтрования глубоких трещин в осадке, достигающих до перегородки; в эти трещины устремляется суспензия, наиболее мелкие ее частицы проходят через перегородку, так что фильтрат получается недостаточно осветленным. В закрытом друк-фильтре затруднено наблюдение за поверхностью осадка, тем более воздействие на появляющиеся трещины. От этого недостатка свободны **нутч-фильтры**, работающие с разрежением под перегородкой и атмосферным давлением над ней (пример из лабораторной практики — воронка Бюхнера с водоструйным насосом). Движущая сила при этом возрастает в сравнении с естественным фильтрованием. (Заметим: иногда в нутч-фильтрах для увеличения движущей силы давление над перегородкой повышают сверх атмосферного; однако при этом пропадает доступность поверхности слоя осадка.)

Схема действия нутч-фильтра представлена на рис.5.17. Аппарат также работает в две стадии. На первой в открытый аппарат подается суспензия I, и под

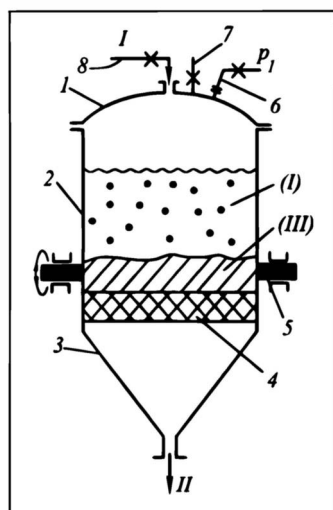


Рис.5.16. Схема друк-фильтра:

1 — крышка, 2 — цилиндрический корпус, 3 — днище, 4 — фильтрующая перегородка, 5 — поворотное устройство, 6 — линия высокого давления, 7 — линия сброса давления, 8 — линия подачи суспензии;

I — суспензия, II — фильтрат, III — осадок

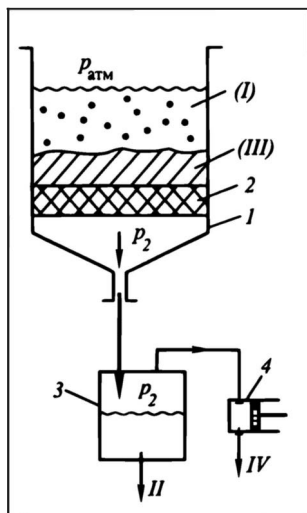


Рис.5.17. Схема нутч-фильтра:

1 — корпус фильтра, 2 — фильтрующая перегородка, 3 — промежуточный сборник фильтрата, 4 — вакуум-насос;

I — суспензия, II — фильтрат, III — осадок, IV — поток воздуха из вакуум-насоса

действием разрежения (давление под перегородкой  $p_2$  ниже атмосферного) происходит ее разделение на фильтрат II и осадок III. Фильтрат собирается в приемную емкость 3, соединенную с вакуум-насосом 4, создающим разрежение. Воздух IV от вакуум-насоса выбрасывается в атмосферу. При появлении в ходе фильтрования трещин в осадке их "забивают" или "замазывают", механически воздействуя сверху на слой осадка.

Рассмотренные выше фильтры отличаются сравнительно небольшой рабочей поверхностью фильтрования, что ограничивает их производительность. Значительное увеличение поверхности фильтрования характерно для **рамного фильтр-пресса** — рис.5.18. Элементами фильтр-пресса являются рамы 1 и плиты 4, показанные в отдельности на виде а; на виде б изображен фрагмент фильтра в сборке: чередующиеся рамы и плиты одинаковой высоты и ширины.

Рама 1 имеет фигурное отверстие 2, открывающееся во внутреннюю ее полость. Плита 4 имеет сквозное отверстие 7, совпадающее в сборке с отверстием рамы, и фигурное отверстие 6. Форма отверстий рам и плит показана на рис. 5.18,б. На вертикальных поверхностях плиты (с обеих ее сторон) выполнены продольные углубления — **ложбины 3**, заканчивающиеся внизу на наклонных ложбинах 5, ведущих к отверстию 6. На обеих сторонах плиты укреплена фильтрующая ткань 8 (на виде б она изображена штриховыми линиями).

В сборке рамы и плиты монтируются попеременно; с обоих торцов сборки закрыта сплошными крышками и стянута шпильками. Система из рам и плит помещена над ванной (на схеме не показана).

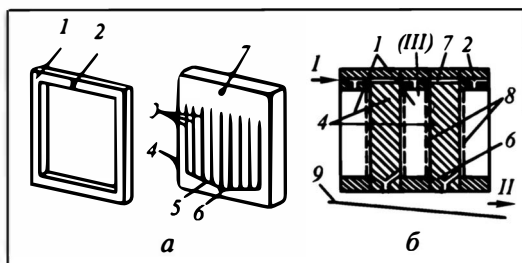


Рис. 5.18. Рамный фильтр-пресс:

*a* — элементы фильтр-пресса, *б* — фрагмент сборки:  
 1 — рама, 2 — фигурное отверстие рамы, 3 — вертикальные ложбины, 4 — плита, 5 — наклонные ложбины, 6 — фигурное отверстие плиты, 7 — сквозное отверстие плиты, 8 — фильтрующая ткань, 9 — лоток;  
 I — суспензия, II — фильтрат, III — осадок

На стадии накопления осадка и получения фильтрата суспензия *I* подается под давлением и через отверстия 2 поступает в полости рам. Фильтрат проходит через ткань 8, стекает по ложбинам 3, подводится по ложбинам 5 к отверстиям 6 и выводится из фильтр-пресса по лотку 9. После накопления осадка в полостях рам (и его промывки в случае необходимости) наступает стадия выгрузки осадка. Для этого рамы и плиты раздвигают (в современных фильтрах эта операция механизирована), и осадок выгружают в ванну. После осмотра, а при необходимости — и починки ткани фильтр-пресс вновь собирают, и цикл повторяется.

Достоинство фильтр-пресса — развитая поверхность фильтрования и относительно высокая производительность. Основной недостаток — громоздкость операции разборки и сборки фильтра и большие непроизводительные затраты времени на эту операцию.

Фильтры *непрерывного действия* характеризуются более высокой производительностью, стабильностью работы, отсутствием непроизводительных затрат времени на стадии выгрузки осадка, возможностью автоматизации процесса. Платить за это приходится усложнением и удорожанием аппаратуры.

**Барабанный вакуум-фильтр** (рис. 5.19, *a*) представляет собой медленно вращающийся (с частотой порядка  $1 \text{ мин}^{-1}$ ) горизонтальный барабан 1, опущенный в ванну 2 с суспензией. Барабан разделен радиальными стенками 3 на отдельные секторы 4, в которых поддерживается разрежение. Фильтрующей является *боковая* (цилиндрическая) поверхность барабана 5: чаще всего это перфорированная металлическая поверхность, покрытая снаружи фильтрующей тканью. Барабан вращается (на рисунке — против часовой стрелки) на полом валу 6, соединенном отверстиями с полостями секторов. В ванне размещено перемешивающее устройство 8, предотвращающее выпадение в ней осадка. Диаметр барабана достигает 3 м, длина по образующей — 4 м, поверхность фильтрации —  $40 \text{ м}^2$ .

В барабанный вакуум-фильтр непрерывно подается (на схеме — слева) исходная суспензия *I*. При вращении барабана на части его боковой поверхности, опущенной в ванну, накапливается постоянно утолщающийся слой осадка *III* — вследствие движения фильтрата *II* через фильтрующую перегородку под действием разрежения. Фильтрат из фильтра выводится через полый вал. Осадок при необходимости промывают посторонней жидкостью *IV*.

Далее, двигаясь вместе с боковой поверхностью барабана, он несколько подсушивается. Выгрузка осадка происходит, когда соответствующий сектор барабана попадает в положение *A*. Здесь осадок, расположенный слоем на поверхности барабана, набегает на нож-лоток 7, срезается и отправляется (по-

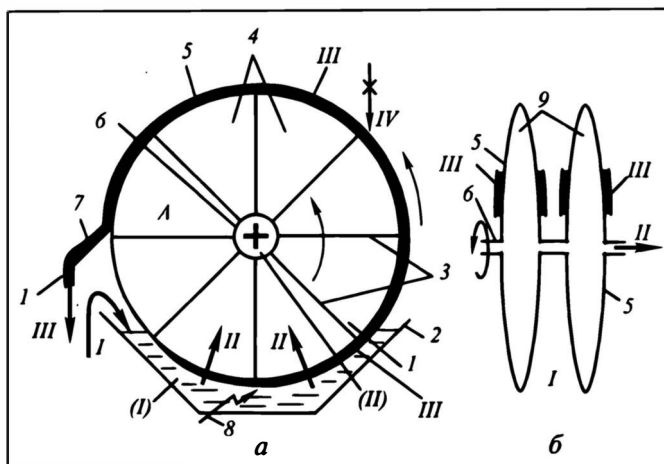


Рис. 5.19. Фильтры непрерывного действия:

*a* — барабанный, *б* — дисковый (фрагмент);

1 — барабан, 2 — ванна, 3 — радиальные стенки, 4 — секторы, 5 — фильтрующая поверхность, 6 — полый вал, 7 — нож-лоток, 8 — перемешивающее устройство, 9 — диск;  
I — суспензия, II — фильтрат, III — осадок, IV — промывная жидкость

ток III) в приемную емкость (на схеме не показана). При этом с помощью специального устройства в секторе, находящемся в положении А, отключается вакуум (часто даже дается небольшое избыточное давление) — это разрыхляет осадок и облегчает его отделение от фильтрующей поверхности. Последняя далее при вращении барабана опять погружается в ванну с суспензией, и на ней снова начинается накопление осадка.

В барабанном фильтре работает боковая поверхность, но торцевая в процессе фильтрования не участвует. Основанные на тех же принципах **дисковые фильтры** (фрагмент — на рис. 5.19, б) в качестве фильтрующей поверхности используют *торцы*, выполненные в форме дисков (иногда сужающихся с ростом радиуса). Здесь фильтрующая ткань обтягивает каркас диска — перфорированный или рифленый. Осадок срезается фасонным ножом. Диаметр дисков достигает 2–3 м, число их в одном агрегате может превышать 10, поверхность фильтрации — до 100 м<sup>2</sup>.

Более детальные сведения о работе рассмотренных фильтров, а также о конструкциях и принципе действия других приводятся в учебной и научной литературе\*.

### 5.2.3. Основные характеристики фильтрационного процесса

Процесс фильтрования, как указано в разд. 5.2.1, осуществляется под действием **движущей силы**  $\Delta p$ , определяемой выражением (а). Разделение суспензии на осадок и фильтрат происходит при движении последнего через фильтрующую *поверхность* (перегородку) площадью *F* и находящийся на ней *слой осадка*. В качестве линейной **скорости фильтрации** используют *расчетную скорость* *w*, отнесенную не к живому сечению (про-

\* См. [1, 5, 9, 14, 15, 17] и др.

светам) пор, а к *полному* сечению  $F$  фильтрующей перегородки (часто такое же сечение имеет и слой осадка). Напомним: расчетная скорость была введена в разд. 2.7 при изучении гидравлики дисперсных систем.

Если поток фильтрата через перегородку равен  $V_\phi$ , то  $w = V_\phi/F$ . Процесс фильтрования часто проводится в периодическом режиме — с *переменным* потоком фильтрата, поэтому в общем плане оперируют переменным *количеством* фильтрата в единицу времени:  $V_\phi = dV/d\tau = \text{var}$ . Тогда

$$w = \frac{1}{F} \frac{dV}{d\tau}. \quad (6)$$

Разумеется, в частном случае  $dV/d\tau = \text{const}$  анализ и расчет процесса удобно вести на базе  $V_\phi$ .

Содержание твердой фазы в исходной суспензии выражают *условной концентрацией*  $x_o$ , представляющей *объем осадка* (твердого материала с учетом просветов между частицами), образующегося при пропускании (получении)  $1 \text{ м}^3$  фильтрата через перегородку. Это определение позволяет связать высоту слоя осадка  $h_o$  с объемным количеством полученного фильтрата  $V$ . В самом деле, объем осадка  $V_{oc}$  по определению  $x_o$  может быть представлен как  $Vx_o$  либо из геометрических соображений как  $Fh_o$ . Отсюда

$$V_{oc} = Vx_o = Fh_o \quad \text{и} \quad V = \frac{Fh_o}{x_o}, \quad h_o = \frac{Vx_o}{F}. \quad (в)$$

Задачей технологического анализа является отыскание связи движущей силы  $\Delta p$  и производительности ( $V$  и  $\tau$ ) с основным геометрическим размером фильтра — площадью (поверхностью) фильтрования  $F$ . Эту связь, позволяющую решать задачи эксплуатации и проектирования, устанавливает основное уравнение фильтрования.

#### 5.2.4. Основное уравнение фильтрования

Движущая сила процесса фильтрования  $\Delta p$  расходуется на преодоление гидравлических сопротивлений осадка  $\Delta p_o$  и фильтрующей перегородки  $\Delta p_n$ :

$$\Delta p = \Delta p_o + \Delta p_n. \quad (г)$$

Осадок представляет собой рассмотренный в разд.2.7.2 *неподвижный* слой из твердых частиц, через который движется фильтрат. Поэтому для определения  $\Delta p_o$  можно воспользоваться формулой Эргана (2.67). Осадок состоит из весьма мелких частиц (обычно — десятые и сотые доли миллиметра), а скорости фильтрации — весьма низкие (обычно — единицы мм/с). Вот почему течение даже невязких фильтратов через слой осадка без

сколько-нибудь заметной погрешности можно считать *ламинарным*. Тогда, пренебрегая вторым слагаемым в (2.67) и перенося высоту слоя  $h_0$  в правую часть равенства, имеем

$$\Delta p_0 = 150 \frac{(1 - \varepsilon_0)^2}{\varepsilon_0^3} \frac{\mu}{d^2} h_0 w. \quad (д)$$

Формула Эргана выведена для сферических частиц одинакового диаметра  $d$ . Для полидисперсных промышленных суспензий с частицами произвольной (неправильной) формы необходимы *эмпирические* поправки. Чтобы обойти на данной стадии анализа эту проблему, обозначим  $R_0$  — комплекс в правой части перед  $w$  и назовем его **фактором сопротивления осадка**:

$$R_0 \equiv A \frac{(1 - \varepsilon_0)^2}{\varepsilon_0^3} \frac{\mu}{d^2} h_0, \quad (е)$$

где вместо 150 (идеальный случай) поставлен множитель  $A$ , учитывающий упомянутые эмпирические поправки.

Перепишем выражение (д) с учетом (е):

$$\Delta p_0 = R_0 w. \quad (ж)$$

Важно отметить, что в полном соответствии с особенностями ламинарного движения, показанными в гл.2, сопротивление слоя осадка прямо пропорционально скорости фильтрации:  $\Delta p_0 \sim w^1$ .

Течение фильтрата в порах перегородки — тем более ламинарное, так как при тех же значениях  $w$  диаметры пор в перегородке еще меньше, чем в осадке. Тогда, обозначив **фактор сопротивления перегородки**  $R_n$  (тоже подлежит *экспериментальному* определению), полагая  $\Delta p_n \sim w^1$ , по аналогии с (ж) можно записать

$$\Delta p_n = R_n w. \quad (з)$$

Используя выражения (ж) и (з), соответственно (г) получим

$$\Delta p = R_0 w + R_n w = (R_0 + R_n) w,$$

откуда

$$w = \frac{\Delta p}{R_0 + R_n}. \quad (и)$$

В учебной и научной литературе\* выражения типа (и), как правило, записываются в виде

$$w = \frac{\Delta p}{\mu(R'_0 + R'_n)}, \quad (к)$$

где  $\mu$  — динамическая вязкость жидкости в суспензии,  $\mu R'_0 \equiv R_0$ ,  $\mu R'_n \equiv R_n$ .

Такая форма записи была бы оправданна, если бы при переходе к жидкости с иной вязкостью  $\mu$  при прочих равных условиях характеристика осадка  $R'_0$

---

\* См. [1, 9, 15, 17] и др.

оставалась бы неизменной. На самом же деле при изменении вязкости жидкости в суспензии меняется и плотность укладки частиц в осадке, т.е. его порозность  $\epsilon_0$ , а с ней по (е) — и  $R_0$ . В этом аспекте выделение  $\mu$  в качестве множителя и вынесение его за скобки в знаменателе не представляется целесообразным.

В ходе процесса фильтрования сопротивление перегородки в идеале изменяется мало — будем считать  $R_n$  *постоянной* величиной. Напротив, фактор  $R_0$  является принципиально *переменным*: высота слоя осадка  $h_0$  нарастает, значит, согласно (е), увеличивается и  $R_0$ , хотя остальные величины, входящие в выражение для  $R_0$ , — постоянны. Обозначим постоянный комплекс этих величин

$$\rho_0 \equiv A \frac{(1 - \epsilon_0)^2}{\epsilon_0^3} \frac{\mu}{d^2}$$

и назовем его *удельным* (на 1 м высоты слоя) фактором сопротивления осадка. Таким образом, в выражение (и) может быть подставлен фактор сопротивления осадка  $R_0 = \rho_0 h_0$ .

В левой части соотношения (и) стоит скорость, выражаемая по (б) через переменное количество полученного фильтрата  $V$ ; в то же время в знаменателе правой части (и) входит фактор  $R_0$ , выраженный через переменную высоту слоя осадка  $h_0$ . Поскольку  $V$  и  $h_0$  связаны между собой формулой (в), то целесообразно избавиться от  $h_0$  и далее оперировать (наряду с  $\tau$ ) только переменной  $V$ :

$$R_0 = \rho_0 h_0 = \frac{\rho_0 x_0}{F} V.$$

Подставим  $R_0$  по последнему выражению в (и), записав  $w$  соответственно определению (б):

$$w \equiv \frac{1}{F} \frac{dV}{d\tau} = \frac{\Delta p}{\frac{\rho_0 x_0}{F} V + R_n}. \quad (5.21)$$

Это соотношение и носит название **основного уравнения фильтрования**.

В ходе фильтрования нарастает количество полученного фильтрата  $V$ , значит знаменатель в (5.21) увеличивается во времени. Отсюда следует, что процесс фильтрования с накоплением осадка не может протекать одновременно при постоянных движущей силе  $\Delta p$  и скорости фильтрации  $w$ . Очевидно, что при постоянной  $\Delta p$  в ходе процесса будет понижаться  $w$ , а чтобы удержать постоянной  $w$ , придется по какому-то закону повышать  $\Delta p$ . На практике фильтрование ведут и при  $\Delta p = \text{const}$ , и при  $w = \text{const}$ . Используют и сочетание этих режимов: сначала поддерживают постоянной  $w$ , при этом повышаются  $\Delta p$  и давление в фильтре; по достижении предельно допустимого давле-



ния, на которое рассчитан фильтр, его оставляют постоянным и работают далее при неизменном  $\Delta p$  и понижающейся скорости  $w$ .

В целях обеспечения работы фильтра в режиме  $\Delta p = \text{const}$  для подачи суспензии может быть использован *центробежный насос* с радиальным направлением лопаток (см. разд. 3.3.3), а в режиме  $w = \text{const}$  — специальная модификация *поршневого насоса*, обеспечивающая нормальную работу его клапанов (см. разд. 3.2.5, 3.5, табл. 3.3).

### 5.2.5. Отдельные режимы периодического фильтрования

В основе расчета — основное уравнение фильтрования (5.21) в различных модификациях.

#### *Фильтрование при постоянной движущей силе*

Движущая сила  $\Delta p$  здесь известна (задана). Перепишем (5.21), избавляясь от дробей и разделяя переменные  $V$  и  $\tau$ :

$$\rho_o x_o V dV + R_n F dV = \Delta p F^2 d\tau.$$

Интегрируя от начала процесса ( $\tau = 0$ ,  $V = 0$ ) до промежуточного момента с текущими значениями  $\tau$  и  $V$  (или до конца процесса:  $\tau = \tau_k$ ,  $V = V_k$ ), получаем квадратичное выражение

$$\rho_o x_o \frac{V^2}{2} + R_n F V = \Delta p F^2 \tau. \quad (5.22)$$

Отсюда возможно найти решения относительно различных интересующих технолога величин.

**Продолжительность** процесса, необходимая для получения на фильтре рабочей площадью  $F$  заданного количества фильтрата  $V_k$  при известной  $\Delta p$ , составляет

$$\tau_k = \frac{1}{\Delta p} \left( \frac{\rho_o x_o}{2 F^2} V_k^2 + \frac{R_n}{F} V_k \right). \quad (5.23)$$

Иногда требуется решить ту же задачу, но при заданном значении не  $V_k$ , а накопленного в конце процесса слоя осадка определенной высоты  $h_o = h_k$ . Тогда в (5.23)  $V_k$  надо заменить на  $h_k$  по выражению (в), естественно — для конечных значений  $V_k = F h_k / x_o$ :

$$\tau_k = \frac{1}{\Delta p x_o} \left( \frac{R_n}{2} h_k^2 + R_n h_k \right). \quad (5.23a)$$

**Количество фильтрата**, полученного на фильтре площадью  $F$  за время  $\tau$  при движущей силе  $\Delta p$ , находим решением квадратного уравнения (5.22). Перепишем его в канонической форме:

$$V^2 + 2 \frac{R_n F}{\rho_o x_o} V - \frac{2 \Delta p F^2 \tau}{\rho_o x_o} = 0.$$

Отсюда, если вынести  $F$  из-под корня и затем — за скобки, получим

$$V = F \left[ -\frac{R_{\Pi}}{\rho_o x_o} \pm \sqrt{\left(\frac{R_{\Pi}}{\rho_o x_o}\right)^2 + \frac{2\Delta p \tau}{\rho_o x_o}} \right].$$

Знак "минус" перед радикалом не отвечает физическому смыслу процесса ( $V < 0$  — невозможно). Изменив для удобства порядок записи слагаемых, находим  $V_k$  для *конца* процесса ( $\tau = \tau_k$ ,  $V = V_k$ ):

$$V_k = F \left[ \sqrt{\left(\frac{R_{\Pi}}{\rho_o x_o}\right)^2 + \frac{2\Delta p \tau_k}{\rho_o x_o}} - \frac{R_{\Pi}}{\rho_o x_o} \right]. \quad (5.24)$$

Разумеется, аналогичная задача может быть решена относительно высоты слоя накопленного осадка  $h_k$ ; в этом случае в (5.24) в качестве множителя перед квадратной скобкой, в соответствии с (в), вместо  $F$  войдет  $x_o$ .

**Поверхность фильтра  $F$** , требующаяся для получения заданного количества фильтрата  $V$  за время  $\tau$  при известном  $\Delta p$ , определяется записью выражения типа (5.24), решенного в явном виде относительно  $F$ :

$$F = \frac{V}{\sqrt{\left(\frac{R_{\Pi}}{\rho_o x_o}\right)^2 + \frac{2\Delta p \tau}{\rho_o x_o}} - \frac{R_{\Pi}}{\rho_o x_o}}. \quad (5.25)$$

Расчет по этой формуле (замечание относится также к формуле 5.24 и некоторым другим) становится неточным при  $2\Delta p \tau \ll R_{\Pi}^2/(\rho_o x_o)$ : значения уменьшаемого (корня) и вычитаемого близки, велика ошибка разности. Точность можно повысить, избавляясь от иррациональности в знаменателе (путем умножения его и числителя на *сумму величин*, стоящих в знаменателе), а тем самым и от разности. Тогда применительно к *концу* процесса после очевидных преобразований имеем

$$\begin{aligned} F &= \frac{\rho_o x_o}{2\Delta p \tau_k} \left[ \sqrt{\left(\frac{R_{\Pi}}{\rho_o x_o}\right)^2 + \frac{2\Delta p \tau_k}{\rho_o x_o}} + \frac{R_{\Pi}}{\rho_o x_o} \right] V_k = \\ &= \left[ \sqrt{\left(\frac{R_{\Pi}}{2\Delta p \tau_k}\right)^2 + \frac{\rho_o x_o}{2\Delta p \tau_k}} + \frac{R_{\Pi}}{2\Delta p \tau_k} \right] V_k. \end{aligned} \quad (5.25a)$$

Определение  $V$ ,  $V_k$  по (5.24) и  $h$ ,  $h_k$  по аналогичной формуле относится к *задачам эксплуатации*. Расчет  $F$  по формулам (5.25), (5.25а), несомненно, — *задача проектирования*. Определение  $\tau$ ,  $\tau_k$  по (5.23) тоже ближе к *задачам проектирования*.

### Фильтрация при постоянной скорости фильтрации

Здесь известна скорость фильтрации  $w$  (количество фильтрата  $V$ , пропускаемого фильтром за время  $\tau$ ) — по практическим рекомендациям для перегородки данного типа или по максимально допускаемым значениям  $\Delta p$  и рабочего давления в конце процесса (см. ниже). Основное уравнение фильтрации (5.21) для этого случая упрощается, поскольку  $dV/d\tau = V/\tau = \text{const}$ :

$$w \equiv \frac{1}{F} \frac{V}{\tau} = \frac{V_\phi}{F} = \frac{\Delta p}{\frac{\rho_o x_o}{F} V + R_n}, \quad (5.21a)$$

причем  $\Delta p = \Delta p(V)$  или  $\Delta p = \Delta p(\tau)$  — переменная величина.

Пусть фильтр рассчитан (или рассчитывается) по условиям механической прочности на определенное максимальное для данного процесса давление (т.е. максимальное  $\Delta p = \Delta p_k$ ). Тогда по (5.21a) оценивается значение  $w$  в конце, а значит и в ходе всего процесса фильтрования.

*Задача эксплуатации* состоит в определении количества фильтрата  $V$ ,  $V_k$  за заданное время  $\tau$ ,  $\tau_k$  или потока фильтрата в единицу времени  $V_\phi$  для имеющегося фильтра ( $F$  — известно):

$$V = wF\tau, \quad V_\phi = wF. \quad (5.26)$$

*Задачи проектирования* предусматривают определение необходимой поверхности фильтра  $F$  или продолжительности процесса  $\tau_k$ :

$$F = V/w\tau = V_k/w\tau_k = V_\phi/w; \quad \tau_k = V_k/wF. \quad (5.26a)$$

Работа в режиме  $w = \text{const}$  требует постепенного увеличения  $\Delta p$  в ходе процесса. Закон изменения  $\Delta p$  устанавливают из выражения (5.21a), разрешая его относительно  $\Delta p$ :

$$\Delta p = \frac{\rho_o x_o w}{F} V + R_n w. \quad (5.27V)$$

На это выражение следует ориентироваться при регулировании  $\Delta p$ , когда в ходе процесса легко контролировать изменяющиеся количества получаемого фильтрата  $V$ . Если же в процессе фильтрования удобнее контролировать текущую высоту слоя осадка  $h_o$ , то в формуле (5.27V) фрагмент  $Vx_o/F$  целесообразно по (в) заменить на  $h_o$ :

$$\Delta p = \rho_o w h_o + R_n w. \quad (5.27h)$$

Наконец, закон изменения  $\Delta p$  во времени получается при подстановке в первое слагаемое в правой части выражения (5.27V) значения  $V$  по левой формуле (5.26):

$$\Delta p = \rho_o x_o w^2 \tau + R_n w. \quad (5.27\tau)$$

Согласно формулам (5.27), для поддержания постоянной скорости фильтрации  $w$  необходимо обеспечение *линейного* повышения движущей силы  $\Delta p$  с  $V$ ,  $h_o$  и  $\tau$  соответственно в ходе процесса фильтрования. Это полностью отвечает формуле (5.21a): знаменатель в ходе процесса линейно возрастает с  $V$ .

### *О других режимах и моделях фильтрования*

При анализе режимов фильтрования с *переменными* во времени скоростью фильтрации  $w$  и движущей силой  $\Delta p$  необходимо располагать определяющей временной характеристикой. Для задач проектирования чаще всего это — конкретная (требуемая) закономерность изменения во времени потока фильтрата  $dV/d\tau = f(\tau)$ . Тогда основное уравнение фильтрования предстанет в виде

$$w \equiv \frac{1}{F} f(\tau) = \frac{\Delta p}{\frac{\rho_o x_o}{F} V + R_n}, \quad (5.21б)$$

причем текущее значение  $V$  к моменту времени  $\tau$  определится:

$$V = \int_0^{\tau} f(\tau) d\tau. \quad (л)$$

Подставим теперь (л) в знаменатель выражения (5.21б):

$$\frac{1}{F} f(\tau) = \frac{\Delta p}{\frac{\rho_o x_o}{F} \int_0^{\tau} f(\tau) d\tau + R_n};$$

отсюда найдем закономерность изменения движущей силы, обеспечивающую заданное временное изменение потока фильтрата  $f(\tau)$ :

$$\Delta p = \frac{f(\tau)}{F} \left[ \frac{\rho_o x_o}{F} \int_0^{\tau} f(\tau) d\tau + R_n \right].$$

Рассмотрение более *сложных* технологических ситуаций (фильтрование в случае *сжимаемых осадков*; частичное закупоривание пор фильтрующей перегородки и др.) проводится с некоторыми не очень строгими допущениями и требует привлечения дополнительных экспериментальных данных. Такой анализ выходит за рамки настоящего учебника\*.

\* См. [1, 15, 17] и особенно детально [6].

### 5.2.6. Непрерывный процесс фильтрования на барабанном вакуум-филт্রে

Расчетная схема непрерывного процесса фильтрования в барабанном вакуум-филт্রে представлена на рис.5.20.

Барабан *I* радиусом *R* и длиной по образующей *l* медленно вращается с угловой скоростью  $\omega$  (на рисунке — против часовой стрелки). Боковая поверхность 2 барабана входит в точке *A* в соприкосновение с суспензией *I*, находящейся в ванне 3. Фильтрат *II* под действием разрежения  $\Delta p$  проходит через перегородку, а на ней образуется слой осадка *III*. Толщина его  $h_0$  постепенно нарастает в направлении от точки *A* ( $h_0 = 0$ ) к точке *B* выхода барабана из соприкосновения с суспензией, где толщина слоя осадка достигает максимальной величины  $h_k$ . За пределами точки *B* перемещающийся вместе с барабаном слой осадка *III'* не изменяет своей толщины.

В задачу *технологического расчета* входит установление связей  $\Delta p$  и характеристик суспензии и осадка с основными геометрическими размерами барабана и скоростью его вращения.

База анализа — основное уравнение фильтрования (5.21). Заметим: толщина слоя осадка  $h_0$ ,  $h_k$  минимум на два порядка меньше радиуса барабана  $R_2$ , поэтому кривизной слоя осадка вполне можно пренебречь.

Текущее время фильтрования  $\tau$  для некоторой точки фильтрующей перегородки *M* характеризуется (рис.5.20) текущим углом  $\alpha$ , изменяющимся от  $\alpha = 0$  (в точке *A*) до конечного значения  $\alpha = \alpha_k$  (в точке *B*). Угол  $\alpha$  связан с  $\tau$  очевидным соотношением

$$\alpha = \omega \tau = 2\pi n \tau, \quad (м)$$

где  $n$  — частота вращения барабана в секунду.

Естественно, началу процесса ( $\tau = 0$ ) отвечает  $\alpha = 0$ , концу процесса ( $\tau = \tau_k$ ) — значение  $\alpha_k = \omega \tau_k$ . Из соотношения (м) можно выразить текущее время  $\tau = \alpha / \omega$  и подставить в основное уравнение фильтрования, тогда последующие связи получатся в зависимости от  $\alpha$ , а в конечном итоге — от  $\alpha_k$ :

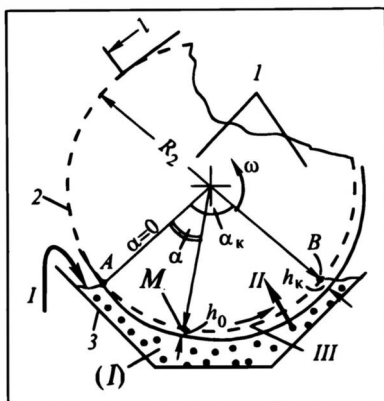
$$\frac{1}{F} \frac{dV}{d\tau} = \frac{\omega}{F} \frac{dV}{d\alpha} = \frac{\Delta p}{\frac{\rho_0 x_0}{F} V + R_n}. \quad (5.28)$$

На практике барабанный филтър работает с *постоянным* разрежением  $\Delta p$ , так что дальнейший анализ проводится именно для этого случая — по уже рассмотренному алгоритму (разд.5.2.5, вариант  $\Delta p = \text{const}$ ):

- разделение переменных  $\alpha$  и  $V$ ;
- интегрирование от начала (точка *A*) до конца (точка *B*) процесса;
- запись искоемых выражений для задач эксплуатации и проектирования.

Рис.5.20. Расчетная схема барабанного вакуум-фильтра:

1 — барабан, 2 — фильтрующая перегородка, 3 — ванна;  
I — суспензия, II — фильтрат, III — осадок



Однако здесь можно прямо воспользоваться полученными ранее решениями (5.22)—(5.25), подставляя по (м) вместо  $\tau_k$  величину  $\alpha_k/\omega$  и выражая производительность барабана  $V_{6\phi} \equiv V_k/\tau_k = V_{k\omega}/\alpha_k$ . Таким образом, при известной работающей площади фильтрования  $F = \alpha_k R_2 l$  имеем решение задачи эксплуатации:

$$V_k = \frac{V_{6\phi} \alpha_k}{\omega} = F \left[ \sqrt{\left( \frac{R_{\Pi}}{\rho_o x_o} \right)^2 + \frac{2 \Delta p \alpha_k}{\rho_o x_o \omega}} - \frac{R_{\Pi}}{\rho_o x_o} \right], \quad (н)$$

откуда

$$V_{6\phi} = \omega R_2 l \left[ \sqrt{\left( \frac{R_{\Pi}}{\rho_o x_o} \right)^2 + \frac{2 \Delta p \alpha_k}{\rho_o x_o \omega}} - \frac{R_{\Pi}}{\rho_o x_o} \right]. \quad (5.29)$$

Толщина слоя осадка  $h_k$  на выходе барабана из ванны (точка В) получается при замене  $V_k$  по (в) для конца процесса:  $V_k = F h_k / x_o$ . Подставив это значение  $V_k$  в (н), находим

$$h_k = x_o \left[ \sqrt{\left( \frac{R_{\Pi}}{\rho_o x_o} \right)^2 + \frac{2 \Delta p \alpha_k}{\rho_o x_o \omega}} - \frac{R_{\Pi}}{\rho_o x_o} \right],$$

откуда

$$h_k = \sqrt{\left( \frac{R_{\Pi}}{\rho_o} \right)^2 + \frac{2 \Delta p \alpha_k x_o}{\rho_o \omega}} - \frac{R_{\Pi}}{\rho_o}. \quad (5.30)$$

Задача проектирования может заключаться в определении площади фильтрующей перегородки  $F$ , необходимой для обеспечения заданной производительности  $V_{6\phi}$ . Здесь можно воспользоваться формулой (5.25а), заменив в ней  $V_k$  и  $\tau_k$  на параметры непрерывного процесса  $V_{6\phi}$  и  $\alpha_k$ :

$$F = \alpha_k R_2 l = \left[ \sqrt{\left( \frac{R_n \omega}{2 \Delta p \alpha_k} \right)^2 + \frac{\rho_o x_o \omega}{2 \Delta p \alpha_k}} + \frac{R_n \omega}{2 \Delta p \alpha_k} \right] \frac{V_{6\Phi} \alpha_k}{\omega} =$$

$$= \left[ \sqrt{\left( \frac{R_n}{2 \Delta p} \right)^2 + \frac{\rho_o x_o \alpha_k}{2 \Delta p \omega}} + \frac{R_n}{2 \Delta p} \right] V_{6\Phi}. \quad (5.31)$$

Задачей проектирования может быть и определение необходимой движущей силы  $\Delta p$  при известных характеристиках фильтрации — ее найдем, записывая (5.22) для конца процесса и переходя к  $V_{6\Phi}$  и  $\alpha_k$ :

$$\frac{\rho_o x_o}{2} \left( V_{6\Phi} \frac{\alpha_k}{\omega} \right)^2 + R_n F \left( V_{6\Phi} \frac{\alpha_k}{\omega} \right) = \Delta p F^2 \frac{\alpha_k}{\omega},$$

откуда

$$\Delta p = \frac{\rho_o x_o}{2} \left( \frac{V_{6\Phi}}{F} \right)^2 \frac{\alpha_k}{\omega} + R_n \frac{V_{6\Phi}}{F}. \quad (5.32)$$

Разумеется, значение  $\Delta p$  не может превышать атмосферного давления.

К числу задач проектирования относится также определение угловой скорости  $\omega$  или уточнение установочного угла  $\alpha_k$  при прочих известных величинах. Здесь целесообразно воспользоваться формулой (5.32), выразив сразу отношение  $\alpha_k/\omega$ :

$$\frac{\alpha_k}{\omega} = \frac{\Delta p - \frac{R_n}{F} V_{6\Phi}}{\frac{\rho_o x_o}{2 F^2} V_{6\Phi}^2} = 2 \left( \frac{\Delta p F^2}{V_{6\Phi}^2} - \frac{R_n F}{V_{6\Phi}} \right). \quad (5.33)$$

Отсюда при заданном угле  $\alpha_k$  определяется необходимая угловая скорость  $\omega$ , и наоборот — при известной  $\omega$  уточняется  $\alpha_k$  (обычно доля погружения в суспензию составляет 0,3—0,4 от поверхности барабана, т.е.  $\alpha_k$  — примерно 2—2,5 радиана).

## 5.2.7. Определение параметров процесса фильтрации

В разд. 5.2.4 было отмечено, что параметры процесса фильтрации  $\rho_o$  и  $R_n$  определяются экспериментальным путем. Задача состоит в их нахождении по зафиксированным в ходе опытов сопряженным величинам переменных  $V$ ,  $\tau$ ,  $\Delta p$  при известной площади  $F$ .

Поскольку требуется определить два параметра фильтрации, то формально достаточно двух опытов с фиксированием упомянутых величин. Но в этом

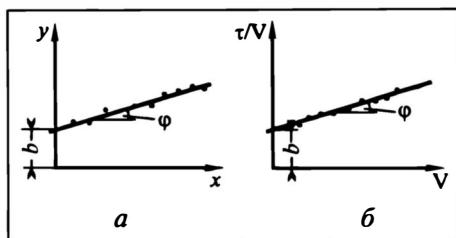


Рис. 5.21. К определению параметров процесса фильтрации:

*a* — иллюстрация общего подхода в случае двух параметров, *б* — линейаризация квадратичной зависимости (5.22) для определения  $\rho_0$  и  $R_n$

случае на численных значениях  $\rho_0$  и  $R_n$  могут существенно сказаться погрешности эксперимента. Поэтому проводится несколько опытов, что позволяет определить  $\rho_0$  и  $R_n$  более точно.

Подчеркнем: опыты должны быть поставлены с *натурными* суспензиями и фильтрующими перегородками, которые будут использованы в реальном производственном процессе (естественно, площадь перегородки  $F$  в условиях лабораторного эксперимента может быть меньше).

Наиболее удобно определять  $R_n$  и  $\rho_0$  в опытах при  $\Delta p = \text{const}$ . В этом случае в ходе опыта получают пары сопряженных значений  $V$  и  $\tau$ , отсчитанных от *начала* опыта.

Общий подход к определению двух параметров какого-либо процесса по опытным данным состоит в представлении связи переменных (в случае фильтрации — базирующихся на  $V$  и  $\tau$ ) в виде линейной зависимости

$$y = kx + b. \quad (o)$$

Здесь  $y$  и  $x$  включают переменные, преобразованные так, чтобы зависимость, построенная по экспериментальным точкам (рис. 5.21, *a*), была линейной. При этом параметры модели (в рассматриваемом случае  $\rho_0$  и  $R_n$ ) входят в параметры уравнения (o), т.е. в  $k$  и  $b$ . На рис. 5.21, *a*:  $b$  — отрезок, отсекаемый на оси ординат (при  $x = 0$ ), а  $k$  — тангенс угла наклона  $\phi$  прямой к оси абсцисс.

В основу определения  $\rho_0$  и  $R_n$  положим квадратичную зависимость (5.22). Ее линейаризация достигается путем деления каждого слагаемого на  $\Delta p F^2 V$ :

$$\frac{\tau}{V} = \frac{\rho_0 x_0}{2\Delta p F^2} V + \frac{R_n}{\Delta p F}. \quad (5.34)$$

Роль переменной  $y$  здесь играет  $\tau/V$ , роль  $x$  —  $V$ .

Найденные в ходе опыта пары сопряженных величин  $\tau_i$  и  $V_i$ , отсчитанных от начала опыта, дополняются вычисленными значениями отношений  $\tau_i/V_i$  (см. ниже):

$\tau$	0	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	...	$\tau_i$	...	$\tau_n$
$V$	0	$V_1$	$V_2$	$V_3$	...	$V_i$	...	$V_n$
$\tau/V$	—	$\tau_1/V_1$	$\tau_2/V_2$	$\tau_3/V_3$	...	$\tau_i/V_i$	...	$\tau_n/V_n$

Затем по сопряженным парам значений  $\tau_i/V_i$  и  $V_i$  строится зависимость типа (5.34), т.е. наносятся точки и через них наилучшим образом (например, по методу наименьших квадратов) проводится прямая  $\tau/V = f(V)$  — см. рис. 5.21, *б*.

Отрезок, отсекаемый на оси ординат, в соответствии с уравнениями (o) и (5.34) равен

$$b = \frac{R_n}{\Delta p F}.$$



Отсюда при известной площади экспериментального фильтра  $F$  и зафиксированном в ходе опыта постоянном перепаде давления  $\Delta p$  рассчитываем искомый параметр  $R_p$ .

Тангенс  $k$  — угла наклона прямой к оси абсцисс — находим из графика (разумеется, с учетом масштабов по осям координат):

$$\operatorname{tg} \varphi = k = \frac{\rho_0 x_0}{2 \Delta p F^2}.$$

При известных  $x_0$ ,  $\Delta p$  и  $F$  определяем второй искомый параметр процесса фильтрования  $\rho_0$ .

## 5.2.8. Фильтрование в поле центробежных сил

Движущая сила  $\Delta p$ , от которой зависит интенсивность фильтрования, может быть сформирована при осуществлении процесса в поле центробежных сил — в аппаратах, называемых **фильтрующими центрифугами**. Устройство таких центрифуг\* сходно с устройством осадительных (см. разд. 5.1.2), только боковая поверхность барабана в фильтрующих центрифугах должна быть *проницаемой* для фильтрата.

**Вертикальная подвесная фильтрующая центрифуга** периодического действия по устройству и принципам работы отличается от осадительной (см. рис. 5.8) тем, что боковая поверхность ротора выполнена не сплошной, а перфорированной; изнутри эта поверхность покрыта фильтрующей тканью. В ходе работы центрифуги фильтрат (фугат) проходит через фильтрующую перегородку, а на ее внутренней поверхности образуется слой осадка. При таком способе вывода фильтрата в фильтрующей центрифуге (в отличие от осадительной) нет необходимости в отводной трубке (поз. 10 на рис. 5.8). Рассматриваемая центрифуга, как и осадительная, работает в две стадии — накопление осадка с получением фильтрата; выгрузка осадка.

На рис. 5.22 изображена схема **горизонтальной центрифуги полунепрерывного действия с ножевой выгрузкой осадка**. На валу 1 укреплен ротор 2 (барабан) с перфорированными боковыми стенками 3 и фильтрующей тканью 4. Ротор закрыт кожухом 11, вал выводится через кожух с помощью сальникового уплотнения 12. Суспензия 1 подается в барабан по линии 7; фильтрат 11 отводится через штуцер 10. Выгрузка осадка 111 производится с помощью загнутого ножа 6 и гидравлической системы 5 (гидравлический цилиндр, работающий по принципу поршневого насоса, и передаточные стержни), а также наклонного лотка 8 для удаления осадка. Чтобы стимулировать транспортирование осадка по лотку, предусмотрен вибратор 9.

Центрифуга работает циклично, но без остановки вращения барабана. Первая стадия — *накопление осадка*: нож опущен к оси вращения, суспензия подается в центрифугу, отводится фильтрат и накапливается осадок. По накоплении кольцевого слоя осадка достаточной толщины подача суспензии прекращается — первая стадия заканчивается. На второй стадии — *выгрузке осадка* — нож постепенно подается вверх (по мере отвода жидкости из гидравлического цилиндра поршень и система стержней, с которыми скреплен нож, поднимаются). При этом вращающаяся масса осадка набегает на лезвие ножа и срезается тонкими слоями; далее осадок через желоб выводится из центрифуги. После удаления всего осадка (нож поднят до верхнего положения) стадия выгрузки

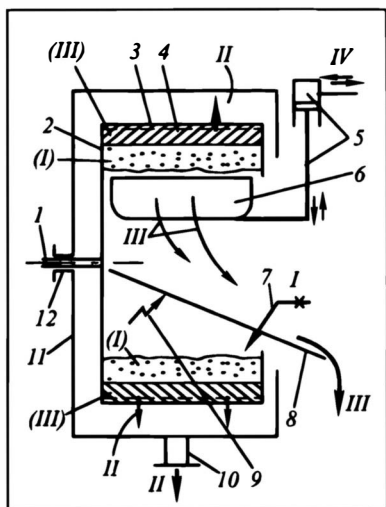
---

\* Подробнее см. [1, 9, 15].

Рис. 5.22. Горизонтальная фильтрующая центрифуга полунепрерывного действия с ножевой выгрузкой осадка:

1 — вал, 2 — ротор, 3 — боковые перфорированные стенки, 4 — фильтрующая ткань, 5 — гидравлический цилиндр, 6 — загнутый нож, 7 — линия подачи суспензии, 8 — лоток, 9 — вибратор, 10 — штуцер, 11 — кожух, 12 — уплотнение;

I — суспензия, II — фильтрат (фугат), III — осадок, IV — гидравлическая жидкость



заканчивается, нож опускается к оси вращения (под действием жидкости, подаваемой в гидравлический цилиндр), и включается подача суспензии — цикл повторяется.

Заметим, что осадок в центрифуге получается более плотным и с меньшим содержанием влаги, нежели в ранее рассмотренных фильтрах.

### Технологический расчет.

Расчет центробежного фильтрования ведется по канве, изложенной в разд. 5.2.4 и 5.2.5 с использованием основных понятий (см. разд. 5.2.3), но с изменениями, обусловленными спецификой процесса. Кольцевой слой осадка располагается в барабане центрифуги в диапазоне от наружного радиуса  $R_2$  цилиндрической фильтровальной перегородки до некоторого *переменного* во времени внутреннего радиуса  $r_0$ ; длину слоя осадка (по образующей), как и в случае осадительной центрифуги, обозначим  $l$ .

**Связь количества получаемого фильтрата с изменяющимся радиусом  $r_0$ .** Выразим объем осадка в некоторый момент времени  $\tau$ :

$$V_{oc} = Vx_o = \pi(R_2^2 - r_0^2)l. \quad (\Pi)$$

Это же выражение может быть получено путем записи накопления осадка за элементарный промежуток времени  $dt$ :

$$dV_{oc} = x_o dV = 2\pi r l dr$$

и последующего интегрирования от начального ( $\tau = 0$ ,  $V = 0$ ,  $r_0 = R_2$ ) до текущего момента времени  $\tau$ , соответствующего  $V$  и  $r_0$ .

Текущее значение  $r_0$  может изменяться от  $r_0' = R_2$  в начале процесса ( $\tau = 0$ ) до некоторого значения  $r_0''$  в конце его ( $\tau = \tau_k$ ). Видимо, минимальному значению  $r_0''$  (максимальной толщине кольцевого слоя осадка) отвечает  $r_0'' = R_1$ .

**Движущая сила  $\Delta p$  процесса фильтрования.** Для ее определения выделим (рис. 5.23) в барабане центрифуги на текущей радиальной координате  $r$  элементарный кольцевой слой толщиной  $dr$ ; высота его —  $l$ . Запишем баланс для переноса импульса (или для равновесия сил), принимая за пространственный контур

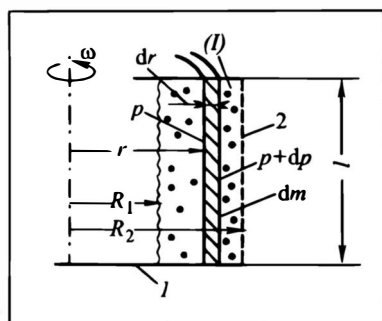


Рис.5.23. К определению движущей силы фильтрования в центрифуге:

1 — барабан, 2 — фильтрующая перегородка

объем элементарного слоя  $2\pi r l dr$  с заключенной в нем массой  $dm$ . Давление на координате  $r$  равно  $p$ , на координате  $r + dr$  оно составляет  $p + dp$ ; внешняя (центробежная) массовая сила трактуется (см. разд. 1.5.1) как источник импульса.

Тогда, пренебрегая изменением количества движения (из-за небольших скоростей жидкости), имеем в направлении радиальной координаты  $r$  (рис. 5.23):

$$p \cdot 2\pi r l - (p + dp) \cdot 2\pi r l + (dm) \omega^2 r = 0$$

или после сокращения на  $r$

$$2\pi l dp = \omega^2 dm.$$

Интегрируя в полных диапазонах перепада давления  $\Delta p$  и распределения массы жидкости  $m$ , находим

$$\Delta p = \frac{m \omega^2}{2\pi l}. \quad (p)$$

Раскрывая  $m = \rho \pi (R_2^2 - R_1^2) l$ , где  $\rho$  — плотность жидкой среды в барабане, получим окончательно после сокращения на  $\pi l$

$$\Delta p = \frac{\rho \omega^2}{2} (R_2^2 - R_1^2). \quad (5.35)$$

**Гидравлическое сопротивление фильтрующей перегородки.** Полагая перегородку *сосредоточенной* на радиусе  $R_2$ , а режим движения фильтрата через нее — ламинарным, запишем по (з):  $\Delta p_n = R_n w_2$ , где индекс "2" указывает, что рассматривается *граничная* скорость в сечении  $2\pi R_2 l$ .

Анализируя гидравлическое сопротивление  $\Delta p_0$  **кольцевого** слоя осадка, распределенного в диапазоне радиусов от  $r_0$  до  $R_2$ , необходимо учесть изменение скорости  $w$  по толщине слоя, т.е. по радиальной координате  $r$ . Расчет и здесь удобно вести на основе скорости  $w_2$ , поскольку введение радиуса  $R_2$  вносит определенность в анализ. Связь текущей (локальной) скорости  $w$  на радиусе  $r$  с граничной  $w_2$  найдем из уравнений расхода:

$$w \equiv \frac{1}{F} \frac{dV}{d\tau}, \quad w_2 \equiv \frac{1}{F_2} \frac{dV}{d\tau}, \quad (c)$$

Рис.5.24. К выводу основного уравнения фильтрования (перегородка  $I$ ) в поле центробежных сил:

$I$  — суспензия,  $II$  — слой осадка, сп — свободная поверхность

откуда, имея в виду  $F = 2\pi r l$  и  $F_2 = 2\pi R_2 l$ :

$$\frac{dV}{d\tau} = wF = w_2 F_2$$

и 
$$w = w_2 \frac{F_2}{F} = w_2 \frac{R_2}{r}. \quad (т)$$

Для элементарной толщины  $dr$  слоя осадка (рис.5.24) лами-  
нарная составляющая формулы  
Эргана запишется с учетом (т),  
если сохранить прежнее обозначение удельного фактора сопроти-  
вления осадка:

$$-\frac{dp_o}{dr} = 150 \frac{(1 - \varepsilon_0)^2}{\varepsilon_0^3} \frac{\mu}{d^2} w \equiv \rho_o w = \rho_o \frac{R_2}{r} w_2; \quad (y)$$

напомним: скорость  $w_2$  изменяется в ходе фильтрования  $w_2 = w_2(\tau)$ .

Обозначим  $p'$  — давление на внутренней границе слоя осадка (радиус  $r_o$ ) и  $p''$  — на внешней (радиус  $R_2$ ). Разделим перемен-  
ные в (y) и проинтегрируем в границах кольцевого слоя осадка  
для момента времени  $\tau$ :

$$-\int_{p'}^{p''} dp_o = \int_{r_o}^{R_2} \rho_o R_2 w_2 \frac{dr}{r},$$

откуда находим связь  $\Delta p_o$ ,  $r_o$  и  $w_2$  в некий произвольный момент времени  $\tau$ :

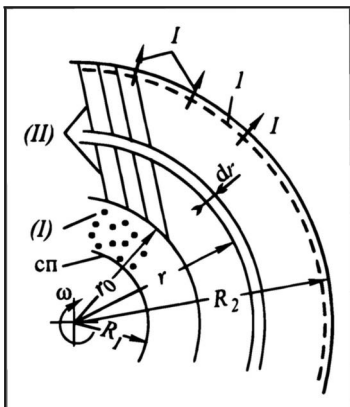
$$p' - p'' \equiv \Delta p_o = \rho_o R_2 w_2 \ln \frac{R_2}{r_o}. \quad (5.36)$$

Поскольку  $w_2$  выражается по (с) через  $V$ , целесообразно  $r_o$  за-  
писать тоже в зависимости от  $V$ , чтобы избавиться от одной из  
переменных. Это можно сделать с помощью (п):

$$r_o = \sqrt{R_2^2 - \frac{V x_o}{\pi l}}. \quad (ф)$$

Отсюда

$$\ln \frac{R_2}{r_o} = \ln \sqrt{R_2^2 / \left( R_2^2 - \frac{V x_o}{\pi l} \right)} = \ln \left( 1 - \frac{x_o}{\pi R_2^2 l} V \right)^{-1/2}.$$



Но  $\pi R_2^2 l = V_6$  – внутренний объем барабана центрифуги. Тогда

$$\ln \frac{R_2}{r_0} = \frac{1}{2} \ln \left( 1 - \frac{V x_0}{V_6} \right)^{-1}.$$

Это значение логарифма поставим в (5.36), учтем фактор сопротивления перегородки  $R_n$  и, разрешив полученное равенство относительно  $w_2$ , придем к основному уравнению для центростремительного фильтрования:

$$w_2 \equiv \frac{1}{F_2} \frac{dV}{dt} = \frac{2\Delta p}{\rho_0 R_2 \ln \left( 1 - \frac{x_0}{V_6} V \right)^{-1} + 2R_n}. \quad (5/37)$$

Далее полученное уравнение может быть рассмотрено применительно к отдельным режимам фильтрования.

Режим  $\Delta p = \text{const}$  соответственно (5.35) реализуется при постоянной угловой скорости  $\omega$  и поддержании неизменным уровня  $R_1$ . Связь  $V$  и  $\tau$  при известной  $F_2$  можно получить, разделяя в (5.37) переменные и интегрируя от начала процесса ( $\tau=0, V=0$ ) до текущего момента времени  $\tau$  и количества фильтрата  $V$  (в пределе – до конца процесса:  $\tau=\tau_k, V=V_k$ ):

$$\int_0^V \left[ \rho_0 R_2 \ln \left( 1 - \frac{x_0}{V_6} V \right)^{-1} + 2R_n \right] dV = \int_0^{\tau} 2\Delta p F_2 d\tau.$$

При этом для  $\tau$  и  $V$  существует ограничение, связанное с минимальным значением  $r_0$  по (т):  $r_0 \leq R_1$ .

Технические трудности могут возникнуть при отыскании интеграла  $\ln \left( 1 - \frac{x_0}{V_6} V \right) dV$ ; показатель степени "–1" интегрирования не осложняет – он выносится как множитель перед  $\ln$ . Искомый интеграл является табличным\*:

$$\int \ln(a+bx) dx = \frac{a+bx}{b} \ln(a+bx) - x,$$

причем для рассматриваемого случая  $a=1$ ,  $b=-x_0/V_6$ . Имея в виду, что при  $a=1$  и нулевом нижнем пределе интеграл обращается в нуль, получим

$$-\int_0^V \ln \left( 1 - \frac{x_0}{V_6} V \right) dV = - \left[ \frac{1 - \frac{x_0}{V_6} V}{-\frac{x_0}{V_6}} \ln \left( 1 - \frac{x_0}{V_6} V \right) \right] = \left( \frac{V_6}{x_0} - 1 \right) \ln \left( 1 - \frac{x_0}{V_6} V \right) + V.$$

---

\* См. [4, поз. 620].

Окончательно после интегрирования находим решение в явном виде относительно  $\tau$ :

$$\tau = \frac{1}{2\Delta p F_2} \left\{ \rho_0 R_2 \left[ \left( \frac{V_6}{x_0} - V \right) \ln \left( 1 - \frac{x_0}{V_6} V \right) + V \right] + 2R_n V \right\}. \quad (5.38)$$

Решения задач проектирования для  $F_2$  (радиус  $R_2$  входит еще в  $V_6$ ) и эксплуатации с определением  $V$  проводятся численными методами.

Режим  $w_2 = \text{const}$  поддерживается при определенном законе изменения  $\Delta p$ , реально – при программировании изменения во времени угловой скорости барабана  $\omega$  соответственно соотношению (р), причем  $\Delta p$  выражено по (5.35).

### 5.2.9. Промывка осадка

С целью очистки осадка от нежелательной примеси фильтрата и (или) более полного извлечения фильтрата в качестве целевого продукта после завершения фильтрования слой образовавшегося ТМ подвергают промывке. Для этого в течение некоторого времени на слой осадка подают *промывную жидкость*, постепенно вымывающую фильтрат из пор осадка (просветов между зернами слоя ТМ).

Эффективность промывки характеризуют степенью извлечения  $\eta_\phi$  фильтрата из осадка; в определении этой величины – *основная задача технологического расчета* стадии промывки.

Подчеркнем, что для понимания подхода к рассмотрению стадии промывки осадка необходимо предварительно ознакомиться с основным понятийным аппаратом и методами анализа главы 8 “Структура потоков”, а также некоторыми результатами, установленными в этой главе.

Для оценки  $\eta_\phi$  обычно принимают\* (иногда подразумевают без оговорок), что жидкостной поток (фильтрат, промывная жидкость) в порах осадка движется в режиме либо идеального вытеснения, либо идеального перемешивания. В обоих случаях приходится прибегать к некоторым феноменологическим умозаключениям и вводить константы, определяемые экспериментально. – модель становится в значительной мере эмпирической. Но и независимо от этого к обоим приведенным предположениям о структуре потока следует относиться критически: в условиях *ламинарного движения* жидкости в порах более обоснованно базироваться на *модели поперечной неравномерности* потока при отсутствии обратного перемешивания.

Качественно характер вымывания фильтрата промывной жидкостью из пор осадка удобно пояснить на примере цилиндрической поры. При подаче промывной жидкости на осадок в первый период времени из поры выходит только фильтрат – с постоянной (начальной) концентрацией  $C_0$ . Так продолжается до тех пор, пока первые порции промывной жидкости, движущие по оси поры с наибольшей скоростью  $w_{\max}$ , не достигнут (к некоторому моменту времени

---

\* См. [1, 6, 17] и др.

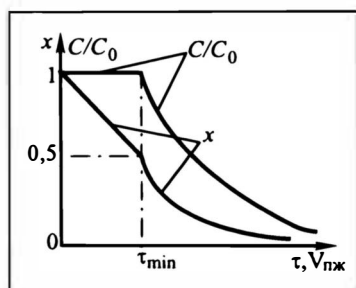


Рис.5.25. Кривые вымывания фильтра из осадка промывной жидкостью

$\tau_{\min}$ ) выходного сечения поры. С момента  $\tau > \tau_{\min}$  выходное сечение будет покидать как промывная жидкость (в приосевых зонах поры), так и фильтрат, содержащийся в поре (ближе к ее боковым стенкам); средняя концентрация фильтрата в смеси с промывной жидкостью  $C < C_0$ . Изменение безразмерной концентрации фильтрата  $C/C_0$  в выходном сечении пор и доли фильтрата  $x$ , остающегося в слое осадка, в зависимости от времени, а в

более общем плане — от количества  $V_{\text{пж}}$  поданной на осадок промывной жидкости, иллюстрируется рис. 5.25: при  $\tau > \tau_{\min}$  кривые носят гиперболический характер (ср. с рис. 8.25). Описание этих кривых позволяет подойти к определению  $\eta_{\text{ф}}$ :

$$\eta_{\text{ф}} = 1 - x.$$

Анализ процесса промывки даже с рядом упрощающих допущений (отсутствие адсорбции фильтрата на зернах осадка, игнорирование изменения вязкости жидкости по радиусу поры) достаточно громоздок и выходит за рамки учебника. Укажем только, что зависимости для определения текущего значения  $C$ , конечного значения  $x$  и, наконец, конечный вид формулы для  $\eta_{\text{ф}}$  получаются на основе общего соотношения типа (8.8) и с использованием понятия о плотности вероятностей распределения элементов потока  $\varphi(\tau)$  в поре по формуле типа (8.29).

## 5.3. ПЕРЕМЕШИВАНИЕ

### 5.3.1. Общие положения

Процессы перемешивания жидкостных, газовых и других одно- и многофазных сред, а также смешения пасто- и порошкообразных материалов весьма широко применяются в химической и родственных технологиях. В ряде случаев (во многих периодических и полунепрерывных биотехнологических процессах, при получении композиционных материалов и т.д.) эффективное перемешивание является одной из важнейших стадий производства и определяет успех технологического процесса в целом.

Перемешивание состоит в многократном относительном перемещении макрочастиц объема среды (элементов, ансамблей, пакетов) под действием импульса (количества движения), передаваемого ей побудителем — струей жидкости или газа, насосом, мешалкой и т.д.

#### *Цели процесса перемешивания*

Можно назвать три **основных цели** осуществления этого процесса:

1) получение "однородных" (равномерных) гомогенных и гетерогенных систем — растворов, суспензий, эмульсий, твердых

Рис.5.26. К влиянию перемешивания на процесс растворения:

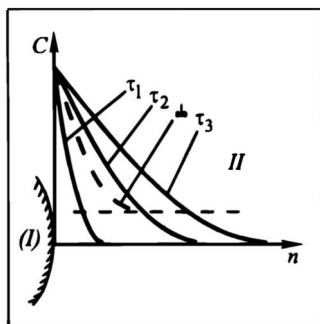
*I* — растворимое твердое зерно, *II* — жидкая фаза (растворитель, раствор)

(порошкообразных) и других смесей — так, чтобы их составы в разных точках рабочей зоны аппарата можно было считать одинаковыми;

2) интенсификация тепло- и массообменных (диффузионных) процессов в гомо- и гетерогенных системах;

3) интенсификация химических превращений.

Причину интенсифицирующего воздействия перемешивания на процессы переноса поясним на примере растворения твердого зерна *I* в жидкости (рис.5.26). Растворение происходит при возникновении градиента концентраций  $dC/dn$  растворимого вещества в приповерхностной зоне: чем круче идет концентрационная кривая у поверхности зерна, тем быстрее растворение. В первые моменты времени ( $\tau_1$ ) контакта зерна с жидкостью этот градиент достаточно велик — растворение идет быстро. С течением времени ( $\tau_3 > \tau_2 > \tau_1$ ) слои жидкости, прилегающие к поверхности зерна, начинают насыщаться растворимым веществом — градиент понижается, и растворение замедляется. Перемешивание жидкости способствует переносу к поверхности зерна свежих (слабо насыщенных) порций жидкости; в результате градиент возрастает (штриховая линия, отмеченная пиктограммой  $\clubsuit$ ), а значит интенсифицируется процесс растворения.



**Явление** перемешивания будет рассматриваться в гл. 8 в связи с его влиянием на протекание процессов переноса. Но там затрагиваются специфические аспекты, связанные с перемешиванием (прежде всего — продольным), возникающим в потоках. Нужно видеть принципиальное отличие этих аспектов анализа от проблематики настоящего раздела: здесь рассматривается процесс перемешивания как технологический прием направленного воздействия на обрабатываемый объект.

### Основные проблемы процессов перемешивания

**Качество (эффективность) перемешивания.** Здесь ряд вопросов.

**Во-первых**, следует условиться\*, что понимать под качеством перемешивания, **как** его количественно характеризовать. Очевидно, это понятие должно отражать отклонение составов в различных точках используемой (исследуемой) смеси от среднего его состава.

\* Некоторые подходы к понятию о качестве перемешивания приведены в [20, 23].



**Средний** состав смеси определяется просто и однозначно — из материального баланса по смешиваемым компонентам. Однако к определению (к формализации) **отклонений** возможны различные подходы — как правило, они реализуются с привлечением статистических методов. Так, можно условиться о способе усреднения отклонений, скажем, суммируя среднеквадратичные их величины (определяя дисперсию) или средние из абсолютных значений отклонений. Для некоторых процессов вполне приемлемо характеризовать качество перемешивания отношением такой усредненной величины к среднему составу смеси. Но для других процессов подобная характеристика недостаточна; надо еще, чтобы отклонение от среднего состава ни в какой точке смеси не превышало некоей предельной величины. Иными словами, в этом случае речь идет о приемлемом **распределении отклонений** от среднего состава.

Напомним: дисперсия  $\sigma^2$  рассчитывается как сумма квадратов отклонений составов  $C_i$  в различных точках рабочей зоны смесителя от среднего состава смеси  $C_{\text{ср}}$ :

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^m (C_i - C_{\text{ср}})^2, \quad (\text{а})$$

где  $m$  — количество отобранных проб,  $i$  — текущий номер пробы.

В целом проблему подхода к формулированию понятия "качество перемешивания" окончательно решить нельзя.

**Во-вторых**, рассматривая какой-нибудь конкретный процесс, следует установить, **какое именно количественное значение** показателя качества перемешивания приемлемо для данного процесса. Это зависит в основном от дальнейшего использования перемешанной смеси. Иначе говоря, приемлемое количественное значение качества перемешивания задают исходя из представлений (часто — весьма общих) о влиянии эффективности перемешивания на качество конечного продукта.

**В-третьих**, необходимо выявить **основные факторы**, влияющие на качество перемешивания, и установить **характер**, а затем и **закономерности** влияния этих факторов. В настоящее время факторы выявляют чаще всего на феноменологическом уровне, а их влияние на качество перемешивания в основном — на эмпирическом. Достоверно установленным здесь можно считать, что *качество перемешивания возрастает с повышением затрат энергии на эту операцию*; даже более определенно: при одинаковых удельных (на 1 м<sup>3</sup> перемешиваемой смеси) затратах энергии качество перемешивания получается примерно одинаковым.

**Кинетика перемешивания.** Период, требуемый для достижения соответствующего качества перемешивания, называется **временем перемешивания**. Заметим, что это время может служить критерием при сравнении эффективности различных перемешива-

вающих устройств. Обычно чем меньше время перемешивания, тем выше эффективность такого устройства.

Представления о кинетике перемешивания в настоящее время строятся на *феноменологической* основе с привлечением опытных данных. Рассмотрим одну из возможных моделей такого рода.

Примем, что перемешивание протекает как *процесс I порядка*, т.е. скорость процесса пропорциональна текущему значению его движущей силы. В качестве движущей силы можно принять текущее значение дисперсии  $\sigma^2$ , но точнее — избыток  $\sigma^2$  над предельной величиной  $\sigma_0^2$ . Понятие о  $\sigma_0^2$  возникает потому, что одновременно с *перемешиванием* в смесителе происходит обратный процесс — *сегрегация*. Дело в том, что смешиваемые компоненты обладают разными свойствами (плотностью, размерами, текучестью и т.п.), и под воздействием внешних сил или движущихся рабочих органов в различных зонах возможно преимущественное накопление отдельных компонентов — это и есть сегрегация. (Пример сегрегации и подход к ее описанию для одного из конкретных процессов приведены в разд.23.4.4.) При достаточно большой (теоретически — при бесконечно большой) продолжительности одновременно протекающих процессов перемешивания и сегрегации в рабочей зоне устанавливается *равновесие* составов, отвечающее предельно достижимому значению дисперсии  $\sigma_0^2$ .

Если в результате перемешивания получается *равномерно* распределенный по объему рабочей зоны продукт (гомогенный или гетерофазный), то  $\sigma_0^2 \rightarrow 0$ ; если *неравномерно*, то  $\sigma_0^2 > 0$ . Численное значение  $\sigma_0^2$ , зависящее от свойств и относительных количеств смешиваемых веществ, устройства и режима работы смесителя, определяется опытным путем.

Итак, с принятыми допущениями скорость изменения (уменьшения во времени) дисперсии для *периодического* процесса смешения запишется как

$$-\frac{d\sigma^2}{d\tau} = k_c (\sigma^2 - \sigma_0^2), \quad (б)$$

где  $k_c$  — эмпирическая константа скорости смешения.

Разделим переменные и проинтегрируем от начального значения дисперсии  $\sigma_n^2$  при  $\tau = 0$  до текущего значения  $\sigma^2$  в момент времени  $\tau$ :

$$\int_{\sigma_n^2}^{\sigma^2} \frac{d\sigma^2}{\sigma^2 - \sigma_0^2} = -k_c \int_0^{\tau} d\tau, \quad (в)$$

откуда

$$\ln \frac{\sigma^2 - \sigma_0^2}{\sigma_n^2 - \sigma_0^2} = -k_c \tau, \quad (г)$$

или

$$\frac{\sigma^2 - \sigma_0^2}{\sigma_n^2 - \sigma_0^2} = \exp(-k_c \tau) ; \quad (д)$$

в случае  $\sigma_0^2 = 0$  выражения (г) и (д) упрощаются.

В задачах *эксплуатации* по (д) при известном времени процесса  $\tau = \tau_k$  определяется качество перемешивания, характеризующее дисперсией  $\sigma^2 = \sigma_k^2$ . В задачах *проектирования* требуемое качество конечного продукта, характеризующее величиной  $\sigma_k^2$ , задано; здесь по (г) при  $\sigma^2 = \sigma_k^2$  рассчитывается необходимое время перемешивания  $\tau = \tau_k$ .

Подчеркнем, что предварительно должны быть поставлены специальные опыты для определения значений  $k_c$  и  $\sigma_0$  применительно к конкретному смесителю.

Для *непрерывного* процесса расчет базируется на среднем времени пребывания перемешиваемой среды в смесительном аппарате  $\tau_{ср} = V/V = G/G$ , где  $V$  и  $G$  — объем и масса смеси в аппарате,  $V$  и  $G$  — объемная и массовая производительности по этой смеси.

На *кинетические закономерности* процесса перемешивания по уравнениям (г), (д) или по каким-то другим соотношениям, отвечающим иным моделям смешения, должны быть наложены *характеристики продольного перемешивания* в смесительном аппарате. Методы представления этих характеристик и операция их наложения на кинетические закономерности технологических процессов (здесь — смесительного процесса) изложены в гл.8.

В задачах *эксплуатации* будут получены конечные значения  $\sigma_k^2$ , в задачах *проектирования* (при заданной  $\sigma_k^2$ ) — необходимый объем рабочей зоны смесителя  $V$  (или  $G$ ) либо максимально допустимая производительность  $V$  (или  $G$ ).

**Затраты энергии на перемешивание.** Проблема определения затрат энергии (мощности) более или менее строго решается (с привлечением некоторых экспериментально определяемых коэффициентов) для *жидких* и *жидкообразных* смесей — суспензий, эмульсий и т.п. Для смешения *сыпучих материалов* (порошков) модели менее обоснованы, и здесь преобладают эмпирические закономерности. Видимо, причина — в слабой разработанности представлений о переносе импульса в сыпучих средах, да еще для весьма сложных по конфигурации рабочих органов и зон смешения.

Ниже проблема затрат энергии на перемешивание рассматривается применительно к жидкостным системам.

### *Способы перемешивания*

Наибольшее распространение в промышленности получили следующие способы перемешивания:

- пневматическое перемешивание — барботаж газа или пара через жидкую (жидкообразную) среду;

- циркуляционное перемешивание — многократное прокачивание жидкости (газа) через рабочую зону с помощью насосов или вентиляторов;

- механическое перемешивание — лопастными или иными мешалками с вращательным (реже — поступательным) их движением.

Кроме того, для перемешивания сред используют и ряд других приемов\*: установка неподвижных турбулизаторов в потоке среды, подлежащей перемешиванию; взаимодействие перемешиваемых сред (инжекция, встречные струи); наложение пульсаций и др.

### **5.3.2. Пневматическое перемешивание**

Пневматическое перемешивание применяется в случае жидкостей с не очень высокой вязкостью. Принципиальная схема пневматического перемешивания показана на рис. 5.27,а.

В нижней части сосуда 1 расположен барботер 4 с отверстиями 9 (часто — 2—3 барботера параллельно). Барботер представляет собой трубу с расположенными по ее длине отверстиями, обычно — парными и обращенными вниз (рис. 5.27, б) во избежание их забивания в случае суспензий и загрязненных жидкостей. Труба вводится в сосуд (емкость) через люк 5 и опирается на подпорку 2. В емкости находится подлежащая перемешиванию жидкостная система 1. В трубу-барботер подается поток газа II, который диспергируется в отверстиях и выходит в жидкостную среду. В своем восходящем движении пузыри интенсивно перемешивают жидкость в вертикальном и горизонтальном направлениях. Пройдя жидкостной слой, газ попадает в сепарационное пространство, где в значительной мере освобождается от захваченных им капель жидкости. Далее через брызгоулавливающее устройство 8 газ выводится из сосуда по линии 7. Предусмотрены линии подачи (6) и отвода (3) жидкости или жидкообразной смеси.

Возможны и другие схемы пневматического перемешивания\*\*, в частности: используются схемы с эрлифтом и циркуляционными трубами; применяются иные способы диспергирования газа.

Пневматическое перемешивание наиболее эффективно в случае необходимости работы с *агрессивными средами*, когда другие перемешивающие устройства (насосы, мешалки) быстро выхо-

---

\* См. [1, 5, 9].

\*\* См. [1, 9, 15].

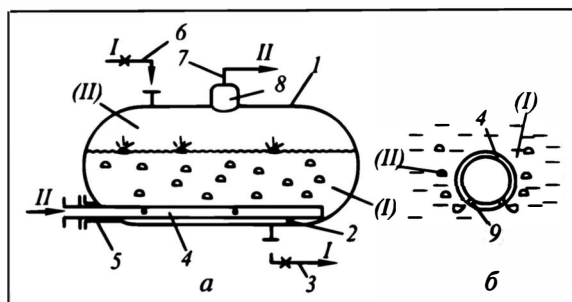


Рис. 5.27. Схема пневматического перемешивания:

*а* — общая схема, *б* — картина барботажного;  
*1* — сосуд (емкость), *2* — подпорка, *3* — линия слива жидкости, *4* — барботер, *5* — люк,  
*6* — линия заливки жидкости, *7* — линия отвода газа, *8* — брызгоуловитель, *9* — отверстия  
 барботера;  
*I* — жидкость, *II* — газ

дят из строя. В этом случае внутреннюю поверхность емкости защищают от коррозии (покрывают эмалью, гуммируют, реже — изготавливают из специальных материалов); барботер изготавливают из нержавеющей стали или других устойчивых к коррозии материалов либо предусматривают частую замену барботеров — они относительно дешевы и просты в изготовлении.

**Достоинства** способа — простота схемы, высокая интенсивность перемешивания. **Недостатки** — брызгоунос и сопутствующие ему потери ценной жидкости; потери возможны и в результате ее испарения в газовые пузыри, если жидкость обладает достаточно высокой летучестью. Нельзя также игнорировать возможную коррозию трубопроводов и аппаратуры унесенной жидкостью, если она химически агрессивна, а газ используется в последующем технологическом процессе. Наконец, необходимо учитывать экологические аспекты, если газ не используется и выбрасывается из емкости в атмосферу. Во всех этих случаях может потребоваться установка специальных устройств для улавливания паров — процесс становится заметно дороже. Удорожание пневматического перемешивания происходит, когда жидкость не допускает соприкосновения с кислородом воздуха; приходится заменять дешевый воздух на более дорогой газ, химически инертный по отношению к перемешиваемой жидкости. Разумеется, возможны технологические процессы, предусматривающие химическое взаимодействие какого-либо газового компонента с перемешиваемой жидкостью (например, кислорода в окислительных процессах); в этих случаях пневматическое перемешивание является, как правило, высокоэффективным методом контакта жидкости и газа.

**Объемный расход** газа на перемешивание  $V$  определяется необходимостью приемлемого качества перемешивания, т.е. (как указано в разд.5.3.1) устанавливается эмпирически для каждого конкретного процесса. Для ориентировочной оценки можно принять, что на  $1 \text{ м}^2$  свободной поверхности жидкости требуется объемный расход газа на уровне  $0,01 - 0,02 \text{ м}^3/\text{с}$ .

**Гидравлическое сопротивление** системы  $\Delta p$  складывается из сопротивлений:

- подводящих трубопроводов (с прямыми участками и местными сопротивлениями) от дутьевого устройства (газодувки и т.п.) до барботера;

- самого барботера, представляющего собой газопровод с путевым расходом;

- гидростатического столба жидкости (более точно — газожидкостной системы; приближенно, с некоторым запасом, — просто жидкости);

- отводящих трубопроводов, включая брызгоулавливающее устройство и последующие линии.

Способы расчета этих сопротивлений рассмотрены (или подходы к их расчету намечены) в разд.2.3.

**Затраты энергии** на перемешивание рассчитываются по известным величинам  $V$  и  $\Delta p$  (либо по степени сжатия газа), как это было показано в гл.4. В частности, при небольших гидравлических сопротивлениях  $\Delta p$ , значительно уступающих абсолютным давлениям газа, мощность компрессора (газодувки, вентилятора) определяется по формуле (4.31):

$$N = \frac{V \Delta p}{\eta},$$

где  $\rho$  — плотность газа;  $\eta$  — КПД дутьевого устройства.

Затраты энергии на пневматическое перемешивание обычно заметно выше, нежели для других способов перемешивания.

### 5.3.3. Циркуляционное перемешивание

Циркуляционное перемешивание осуществляется с помощью насосов (как правило, центробежных либо пропеллерных\*), расположенных *вне* или *внутри* объема перемешиваемой жидкообразной среды — жидкости, суспензии, эмульсии и т.п. В первом случае циркуляция именуется **внешней**, во втором — **внутренней**.

Схема внешнего циркуляционного перемешивания представлена на рис. 5.28, а. Жидкость, находящаяся в сосуде 1, забирается внешним насосом 2 и

---

\* О некоторых иных возможностях организации циркуляционного перемешивания см. [1, 5, 18, 23].

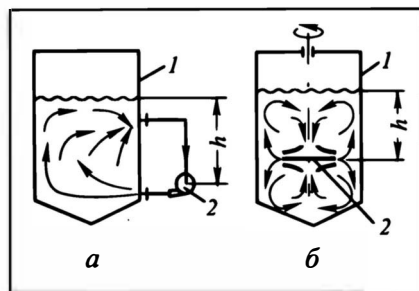


Рис.5.28. Схема циркуляционного перемешивания (стрелками — жидкость):  
*a* — внешнего, *б* — внутреннего;  
*1* — сосуд, *2* — перемешивающее устройство

возвращается в тот же рабочий объем в сосуде. Схема внутренней циркуляции представлена на рис.5.28,б. Побудитель здесь чаще всего — сидящее на валу рабочее колесо центробежного насоса без корпуса с двухсторонним (сверху и снизу) всасыванием; электродвигатель (на схеме не показан), приводящий в движение вал с рабочим колесом, размещается на крышке сосуда. Жидкость засасывается в рабочее колесо по оси и выбрасывается по его периферии, вовлекая в движение весь рабочий объем жидкости. В обоих вариантах циркуляционного перемешивания многократное прокачивание жидкостной среды через рабочий объем приводит к выравниванию свойств этой среды в различных его точках.

Необходимая **производительность** насоса  $V$  определяется приемлемым качеством перемешивания. Обычно эмпирически для каждого конкретного процесса устанавливается требуемая кратность циркуляции  $k_{ц} \equiv V/V$  ( $m^3/c$ )/ $m^3$ , показывающая, сколько раз рабочий объем системы  $V$  должен смениться в единицу времени, чтобы обеспечить заданное качество перемешивания. При известном  $V$  и принятом по опытным рекомендациям  $k_{ц}$  легко найти производительность насоса  $V = k_{ц}V$  и подобрать подходящий насос (см. разд. 3.5).

Следует только иметь в виду, что в случае внутренней циркуляции для рабочего колеса центробежного насоса *без корпуса*, когда области всасывания и нагнетания свободно сообщаются, характерно пониженное значение коэффициента подачи  $\eta_v$ . В частности, для обычного в промышленной практике отношения диаметров рабочего колеса и сосуда на уровне 0,5 — 0,7 значение  $\eta_v = 0,4 - 0,5$  — в отличие от центробежного насоса, снабженного корпусом, где  $\eta_v$  близок к 1.

Основная составляющая **напора** насоса  $H$  — высота слоя жидкости  $h$  над сечением всасывания (см. рис. 5.28). В случае внешней циркуляции к этому еще добавляется гидравлическое сопротивление трубопроводов.

**Мощность** насоса  $N$  определяется по уже известным формулам — на основе производительности  $V$  и напора  $H$  (см.разд.3.1.4).

Характерная особенность используемых для циркуляционного перемешивания центробежных и пропеллерных насосов — сильная зависимость мощности от частоты вращения:  $N \sim n^3$ . В то же время насосы этого типа не могут функционировать с малыми числами оборотов, так как развиваемый ими напор пропорционален  $n^2$  (см. разд. 3.4.1), так что при снижении  $n$  насос не обеспечит надлежащего напора. Поэтому приходится поддерживать достаточно высокие частоты вращения  $n$ , что приводит к весьма большим затратам энергии  $N$ . В случае перемешивания вязких жидкостей и густых суспензий затраты энергии существенно возрастают (прежде всего из-за быстрого увеличения требуемых кратностей циркуляции  $k_u$ ). Это приводит к заметному удорожанию циркуляционного перемешивания.

### 5.3.4. Перемешивание лопастными мешалками

Внутреннее циркуляционное перемешивание с помощью пропеллерных насосов или рабочего колеса центробежных насосов, размещенных в объеме перемешиваемой среды, иначе классифицируется как **быстроходное механическое перемешивание**. В рамках такой классификации перемешивание лопастными мешалками относится к **тихоходному механическому перемешиванию**.

Лопастные мешалки работают с умеренной частотой вращения  $n$ , обычно — на один-два порядка ниже, чем упомянутые насосы при циркуляционном перемешивании. Чаще всего  $n$  находится в диапазоне  $0,5 - 2 \text{ с}^{-1}$  ( $30 - 120 \text{ мин}^{-1}$ ), окружные скорости  $u$  — в диапазоне  $1-6 \text{ м/с}$ . Это позволяет осуществить процесс перемешивания даже весьма вязких жидкообразных сред с приемлемыми затратами энергии.

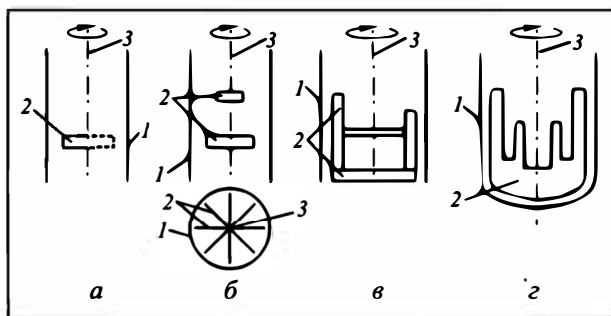


Рис. 5.29. Лопастные мешалки:

*а* — простая лопасть (полулопасть), *б* — многолопастная мешалка, *в, г* — мешалки якорного типа;

*1* — стенки сосуда, *2* — лопасти, *3* — ось вала



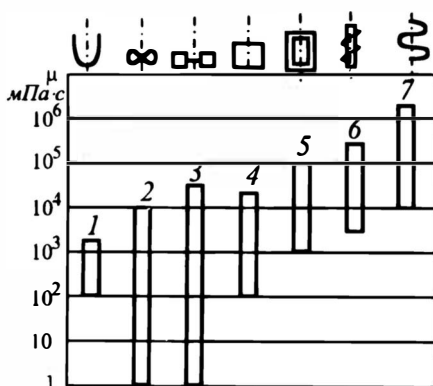


Рис.5.30. Вязкостные диапазоны применения мешалок некоторых типов:

1 — 7 — типы мешалок: 1 — якорная, 2 — пропеллерная, 3 — турбинная с плоскими лопатками, 4 — лопастная, 5 — рамная, 6 — шнековая, 7 — ленточная

Конфигурация лопастных мешалок отличается большим разнообразием; некоторые варианты\* их конструктивного оформления показаны на рис. 5.29.

В простейших вариантах это одна лопасть (или полулопасть) — рис. 5.29, а, на практике — несколько лопастей в одном сечении (скажем, три под углом 60°), иногда и в разных сечениях — рис. 5.29, б. Часто используются лопастные мешалки рамного и якорного типа — рис. 5.29, в, г. В ряде случаев мешалки повторяют форму сосуда-смесителя, особенно — его днища (рис. 5.29, з), дабы воспрепятствовать образованию застойных зон, а при наличии в перемешиваемой среде твердых частиц — их выпадению на стенки и дно сосуда. Отношение диаметров мешалки и сосуда редко превышает 0,7 — 0,8.

Выбор мешалки той или иной конфигурации в значительной мере определяется вязкостью перемешиваемой среды. Рекомендации к выбору наиболее распространенных мешалок для различных диапазонов динамических вязкостей сред представлены на рис. 5.30. При этом в случае *неньютоновских* жидкостей речь идет о кажущихся вязкостях, в случае *многофазных* сред — о расчетной вязкости таких сред.

### *Движение жидкости в окрестности вращающейся лопасти\*\**

В ходе перемешивания лопастной мешалкой радиусом  $R_m$  в рабочем объеме сосуда-смесителя возникает трехмерное течение перемешиваемой среды, которое в цилиндрических координатах определяется (рис.5.31) составляющими результирующей (абсолютной) скорости  $w$ : радиальной  $w_r$ , осевой  $w_z$  и окружной (тангенциальной)  $w_\phi$ , а также характерными углами вектора абсолютной скорости  $w$  с вертикальной плоскостью ( $\alpha$ ) и с горизонтальной плоскостью ( $\beta$ ).

Отдельные составляющие скорости  $w$  рассчитываются из пря-

\* Конструкции лопастных мешалок подробно представлены в [1, 5, 9, 14, 17, 20, 23].

\*\* В анализе этого вопроса и написании раздела принимал участие доц. Б.Г. Варфоломеев.

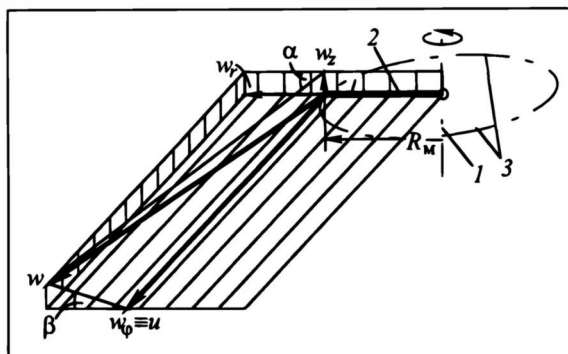


Рис. 5.31. Абсолютная скорость жидкости в сечении мешалки и ее составляющие:

1 — ось вращения, 2 — лопасть, 3 — окружность, описываемая лопастью

моугольного параллелепипеда скоростей:

$$w_r = \frac{w}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}}; (r) \quad w_\varphi = \frac{w \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}}; (\varphi)$$

$$w_z = \frac{w \operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}}; (z)$$

разумеется,  $w^2 = w_r^2 + w_\varphi^2 + w_z^2$ .

Картина движения жидкостной среды, перемешиваемой лопастными мешалками, отличается большой сложностью — различным направлением скоростей в разных точках рабочей зоны, ярко или слабо выраженными областями циркуляции:

— **радиальная** составляющая скорости  $w_r$  направлена от оси вращения к стенкам сосуда-смесителя в непосредственной близости к лопасти-мешалке и в обратном направлении (от стенки к оси) на удалении (вверх и вниз) от плоскости мешалки;

— **осевая** составляющая скорости  $w_z$  направлена от плоскости мешалки вверх и вниз — вблизи стенки сосуда; в остальном объеме рабочей зоны существуют достаточно устойчивые циркуляционные потоки, конфигурация которых зависит от формы лопасти и условий работы мешалки;

— **окружная** (тангенциальная) составляющая скорости  $w_\varphi$  имеет сходные профили над и под мешалкой (пока не сказывается влияние дна сосуда и свободной поверхности жидкости).

В сечении лопасти в непосредственной близости к ней при  $r \leq R_m$  жидкость движется со скоростью вращающейся лопасти; в остальной зоне, ограниченной радиусом  $r < R_m$  в этом же сечении (между лопастями, если их несколько), она движется при-

мерно с той же окружной скоростью, образуя достаточно стабильную вихревую зону. Важно: вихревая зона ограничена (приближенно) радиусом мешалки  $R_m$ ; за пределами этой зоны вихрь вырождается, окружная скорость затухает по радиальной координате из-за возрастающего влияния стенок сосуда.

Сравнение величин  $w_r$ ,  $w_z$  и  $w_\phi$  показывает, что окружные составляющие скорости  $w_\phi$  на порядок и более превышают составляющие  $w_r$  и  $w_z$ . Это обстоятельство позволяет упростить математическое описание процесса перемешивания, ограничившись для рассмотрения только одной составляющей скорости  $w_\phi$  в системе уравнений Навье—Стокса.

Для сокращения записи в последующих преобразованиях обозначим тангенциальную составляющую (т.е. окружную скорость)  $w_\phi \equiv u$ . Тогда в цилиндрических координатах уравнение Навье—Стокса (1.25) для окружной скорости  $u$  имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} = P_\phi - \left[ \frac{\partial u}{\partial \tau} + w_r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{uw_r}{r} + w_z \frac{\partial u}{\partial z} \right] + \\ + \nu \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial w_r}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right\}. \quad (1.25)$$

Применительно к рассматриваемому случаю это уравнение существенно упрощается:

— речь идет о *стационарном* движении лопасти и перемешиваемой жидкости, поэтому  $\partial u / \partial \tau = 0$ ;

— вдоль угловой координаты  $\phi$  *не действует* никакая внешняя массовая сила, так что  $P_\phi = 0$ ;

— членами уравнения, содержащими радиальную и осевую составляющие скорости, *можно пренебречь* вследствие малости этих составляющих в сравнении с тангенциальной:  $w_r, w_z \ll w_\phi$ ;

— окружное движение жидкости полагается *осесимметричным*, поэтому производные от различных составляющих скоростей по координате  $\phi$  равны нулю;

— рассматривается *плоское* движение жидкости, поэтому все производные по оси  $z$  также равны нулю.

В результате уравнение (1.25) для анализируемого плоского тангенциального движения жидкости принимает вид

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0; \quad (5.39)$$

поскольку скорость  $u$  изменяется только с одной независимой переменной  $r$ , то частные производные заменены здесь обыкновенными.

Приведенной записи идентична более удобная для последующего решения:

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d(ur)}{dr} \right] = 0. \quad (5.39a)$$

В тождественности выражений (5.39) и (5.39a) легко убедиться, продифференцировав последнее из них:

$$\begin{aligned} \frac{d(ur)}{dr} &= r \frac{du}{dr} + u \cdot 1; \quad \frac{1}{r} \frac{d(ur)}{dr} = \frac{du}{dr} + \frac{u}{r}; \\ \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d(ur)}{dr} \right] &= \frac{d}{dr} \left[ \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} \right] = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2}! \end{aligned}$$

Проанализируем изменение окружной скорости  $u$  в горизонтальном сечении лопасти (мешалки). При этом средю будем считать *изотропной*, ее свойства — не зависящими от радиальной координаты. Разделяя переменные в (5.39a) и интегрируя первый раз, имеем

$$\frac{1}{r} \frac{d(ur)}{dr} = C' = \text{const}.$$

Повторно разделяем переменные и интегрируем:

$$d(ur) = C' r dr; \quad ur = C_1 r^2 + C_2,$$

откуда получаем *общее решение*:

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad (e)$$

причем  $C_1 \equiv C'/2$ .

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  найдем с помощью граничных условий.

*Для вихревой зоны* ( $r \leq R_m$ ): на оси потока ( $r = 0$ ) окружная скорость  $u = 0$ ; тогда по (e)

$$0 = 0 + \frac{C_2}{r \rightarrow 0},$$

что возможно лишь при  $C_2 = 0$ . Таким образом, для вихревой зоны

$$u = C_1 r. \quad (ж)$$

Поскольку рассматривается установившееся тангенциальное движение с неизменной скоростью  $u(r)$  по угловой координате  $\varphi$ , то очевидно, что  $C_1$  представляет собой угловую скорость  $\omega$  вращения мешалки, с которой перемещаются слои жидкости, прилегающие к лопасти. Окончательно для вихревой зоны

$$u = \omega r. \quad (5.40)$$

Заметим, что принятые здесь допущения о полной стабильности вихревого движения жидкости и об отсутствии влияния стенок сосуда в этой зоне должны привести к следующему:

— к некоторому завышению расчетной скорости  $u$  в сравнении с реальной;

— к реальному уменьшению радиуса зоны вихря  $r_v$  в сравнении с радиусом мешалки  $R_m$ .

Отношение  $r_v/R_m < 1$  оценивается в зависимости от значения критерия Рейнольдса для вращательного движения  $Re_{\omega} \equiv n d_m^2 \rho / \mu$ , где  $d_m = 2R_m$  — диаметр мешалки, а произведение  $n d_m$  пропорционально окружной скорости на наружной кромке лопасти  $u_m = \omega R_m$ . Для оценки границ вихревой области предлагаются эмпирические рекомендации, например — формула

$$\frac{r_v}{R_m} = \frac{Re_{\omega}}{10^3 + 1,6 Re_{\omega}}, \quad (3)$$

из которой следует, что максимальное отношение  $r_v/R_m$ , реализуемое при высоких значениях  $Re_{\omega}$ , составляет  $1/1,6 \approx 0,62$ ; значит, область действия закономерности (5.40) вихревого движения ограничена примерно радиусом  $r_v < 0,6 R_m$ . Заметим, что на практике значения  $Re_{\omega}$  обычно находятся на уровне  $10^4 - 10^5$ .

Для зоны вне вихря ( $r_v < r < R_a$ , где  $R_a$  — радиус аппарата, сосуда) влиянием стенок сосуда пренебречь нельзя, и в общем решении (е) постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  отыскиваются с помощью других граничных условий.

С одной стороны, на стенках сосуда ( $r = R_a$ ) в соответствии с концепцией прилипания  $u = 0$ , так что согласно (е)

$$0 = C_1 R_a + \frac{C_2}{R_a},$$

откуда

$$C_2 = - C_1 R_a^2. \quad (и)$$

С другой стороны, на координате  $r = r_v$  окружная скорость  $u$  в соответствии с (5.40) должна быть равна  $\omega r_v$ ; тогда по (е)

$$\omega r_v = C_1 r_v + \frac{C_2}{r_v} = C_1 r_v - \frac{C_1 R_a^2}{r_v}. \quad (к)$$

Из последнего выражения

$$C_1 = - \frac{\omega r_v}{\frac{R_a^2}{r_v} - r_v} = - \frac{\omega r_v^2}{R_a^2 - r_v^2}. \quad (л)$$

Отсюда по (и)

$$C_2 = \frac{\omega r_v^2 R_a^2}{R_a^2 - r_v^2}. \quad (м)$$

Подставив значения  $C_1$  и  $C_2$  по (л) и (м) в общее решение (е), получим закономерность изменения окружной скорости по радиальной координате для области за пределами вихря:

$$u = \frac{\omega r_B^2}{R_a^2 - r_B^2} \left( \frac{R_a^2}{r} - r \right). \quad (5.41)$$

Из-за некоторого завышения расчетного по (5.40) значения граничной окружной скорости жидкости  $u$  на координате  $r_B$  значения  $u$  в окрестности лопасти также могут оказаться несколько преувеличенными в сравнении с реальными.

В некоторых учебниках и монографиях\* анализ для скорости  $u$  за пределами зоны вихря (тоже для изотропной среды) проводят вне связи с граничным условием  $u = 0$  на стенках сосуда и приходят к выражению

$$u = \omega r_B^2 / r. \quad (н)$$

не отвечающему концепции прилипания: согласно (н) получается, что на стенках сосуда  $u = \omega r_B^2 / R_a > 0$ .

Решения (5.40) и (5.41) удобно представить в обобщенной форме, введя безразмерные координату  $r/R_a$  и окружную скорость  $U \equiv u/\omega r_B$ . Тогда

**для вихревой области:**

$$U = \frac{r}{r_B} = \frac{R_a}{r_B} \frac{r}{R_a}; \quad \begin{aligned} r = 0, \quad r/R_a = 0, \quad U = 0; \\ r = r, \quad r/R_a = r/R_a, \quad U = 1; \end{aligned} \quad (5.40a)$$

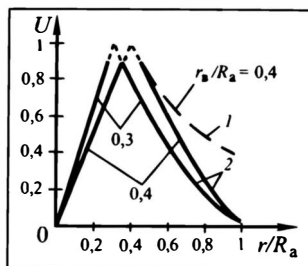
**для области вне вихря:**

$$U = \frac{\frac{R_a}{r} - \frac{r}{R_a}}{\frac{R_a}{r_B} - \frac{r_B}{R_a}}; \quad \begin{aligned} r = r_B, \quad r/R_a = r_B/R_a, \quad U = 1; \\ r = R_a, \quad r/R_a = 1, \quad U = 0. \end{aligned} \quad (5.41a)$$

Из приведенных соотношений следует, что тангенциальное течение жидкости, перемешиваемой лопастными мешалками, в сечении лопасти является автомодельным в рамках группы подобных течений с одинаковыми  $r_B/R_a$ . Иллюстрация зави-

Рис. 5.32. Окружные скорости в сечении мешалки в обобщенных координатах:

1 — зависимость типа (н), 2 — зависимости (5.40) и (5.41)



\* См. [6, 17, 20].

симостей (5.40а), (5.41а) в обобщенных координатах для  $r_B/R_a = 0,3$  и  $r_B/R_a = 0,4$  представлена на рис. 5.32. Там же в целях сравнения приведена зависимость ( $n$ ) для  $r_B/R_a = 0,4$ .

Более обстоятельный анализ, точнее отражающий реальную картину движения жидкости в сечении лопасти, должен учитывать *неизотропность* перемешиваемой среды, прежде всего (в терминах турбулентного течения — см. разд. 2.2.5) — изменение турбулентной вязкости по радиусу в области за пределами вихря.

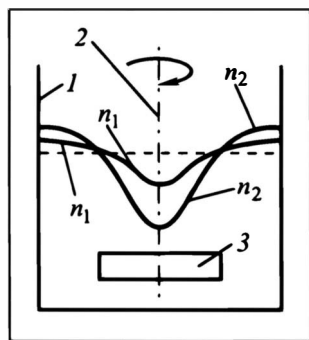
### Центральная воронка

При вращении мешалки, например лопастной, вблизи оси сосуда-смесителя уровень жидкости понижается (образуется воронка), у стенок — повышается. Причина этого явления детально рассмотрена в относящемся к гидростатике разд. 2.1.3 при изучении поведения жидкости в вертикальном вращающемся сосуде: форма свободной поверхности представляет собой параболоид вращения, описываемый общим уравнением (е) в указанном разделе:

$$z_0 = z_* + \frac{\omega^2}{2g} r_0^2.$$

Однако для рассматриваемого случая это уравнение справедливо (и то приближенно) лишь в области вихревого движения, поскольку получено оно для постоянной угловой скорости  $\omega$  во всем диапазоне  $0 \leq r \leq R$ . За пределами вихревой зоны угловая скорость (обозначим ее  $\omega'$ ) понижается с ростом  $r$ , причем закон этого понижения можно получить исходя из известной связи  $u = \omega' r$  на основе формулы (5.41):

$$\omega' = \frac{u}{r} = \frac{\omega r_B^2}{R_a^2 - r_B^2} \left( \frac{R_a^2}{r^2} - 1 \right). \quad (o)$$



Задача о свободной поверхности в этой области — весьма сложна\*. Укажем лишь, что она не принадлежит к задачам гидростатики, так как  $\omega' = \omega'(r)$ , т.е. налицо взаимные перемещения слоев жидкости, вращающихся с переменной по радиальной координате  $r$  угловой скоростью  $\omega'$ .

Рис. 5.33. Центральная воронка:

1 — сосуд, 2 — вал мешалки, 3 — лопасть

\* Теория центральной воронки представлена в [23].

Типичная форма свободной поверхности в аппарате с прямоугольной лопастной мешалкой демонстрируется на рис.5.33, причем  $n_2 > n_1$ .

Наличие центральной воронки вызывает ряд неудобств при проведении технологических процессов: неодинаковые уровни свободной поверхности в различных ее точках, возможность обнажения дна сосуда и перехлеста жидкости через его боковые стенки, уменьшение интенсивности перемешивания и т.п. Поэтому при перемешивании нередко используют устройства (см.ниже), препятствующие развитию центральной воронки.

#### *Затраты энергии на перемешивание лопастными мешалками*

В основе анализа — представления о внешнем обтекании тела, изложенные в разд. 2.7.4. При обтекании тела потоком (вообще при перемещении тела относительно жидкости) возникает местное сопротивление, сила которого в случае тела произвольной формы равна

$$P_n = \xi \frac{w^2}{2} \rho f, \quad (\text{п})$$

где  $w$  — относительная скорость тела и жидкости (на удалении от тела),  $\rho$  — плотность жидкости,  $\xi$  — коэффициент лобового сопротивления.

В формуле (у) упомянутого выше раздела  $f = \pi d^2/4$  — поперечное сечение сферического зерна. В более общем случае тела произвольной формы  $f$  — площадь проекции тела на плоскость, нормальную к направлению его движения в жидкости (рис. 5.34,а);  $f$  называют площадью миделева сечения.

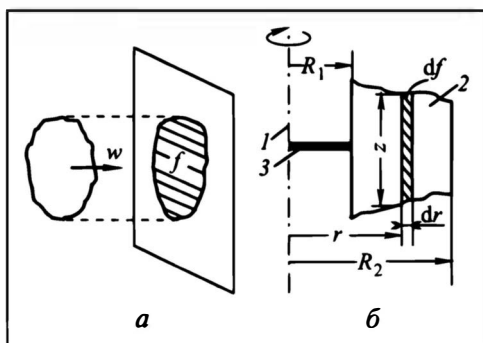


Рис.5.34. К выводу общей формулы для расчета мощности на валу мешалки:

$a$  — поступательное движение тела в жидкости и площадь миделева сечения,  $b$  — к выводу формулы (5.42);

1 — вал мешалки, 2 — лопасть, 3 — несущий стержень



**Вращательное движение лопасти.** В настоящем разделе оно рассматривается в отличие от *поступательного*, описываемого формулой (п). Поэтому при анализе вращения лопасти в этой формуле поступательная скорость  $w$  должна быть заменена на **окружную** скорость  $u$ .

В основе расчета необходимой мощности на валу мешалки лежат затраты энергии на преодоление силы сопротивления  $P_n$ . Найдем сначала *общую формулу* для определения требуемой мощности  $N$ .

Пусть полулопасть 2 произвольной (но известной) формы (рис. 5.34,б) вращается около вертикальной оси 1 с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Протяженность полулопасти по радиальной координате ограничена радиусами  $R_1$  и  $R_2$  (способ крепления полулопасти на валу здесь роли не играет; пусть это, например, тонкий стержень 3, практически не оказывающий сопротивления движению полулопасти в жидкости). В случае поступательного движения использование в ходе анализа постоянной скорости  $w$  затруднений не вызывает; в случае вращательного движения окружная скорость *изменяется с радиусом*. Поэтому применительно к вращающейся лопасти анализ возможен лишь для элементарной площадки  $df$ , заключенной между радиусами  $r$  и  $r + dr$ , где скорость  $u = \omega r$ , с последующим интегрированием в диапазоне изменения радиальной координаты.

Итак, элементарная сила сопротивления движению бесконечно малой площадки  $df$  составляет

$$dP_n = \xi \frac{u^2}{2} \rho df = \xi \frac{\omega^2 r^2}{2} \rho df. \quad (p)$$

При этом  $df$  следует представить как произведение  $zdr$ , где локальный вертикальный размер лопасти  $z$  в общем случае изменяется (см. рис. 5.34,б) с радиальной координатой:  $z = z(r)$ .

Мощность есть работа в единицу времени, а работа равна произведению силы на путь; следовательно, мощность есть произведение силы на путь в единицу времени, т.е. на скорость. Применительно к рассматриваемой элементарной силе  $dP_n$  речь идет об элементарной мощности:

$$dN = (dP_n)u = \xi \frac{\omega^2 r^2}{2} \rho z(dr)\omega r,$$

или

$$dN = \xi \frac{\omega^3}{2} \rho z r^3 dr. \quad (c)$$

Интегрируя это выражение, получаем для самого общего случая:

$$N = \frac{\omega^3 \rho}{2} \int_{R_1}^{R_2} \xi z r^3 dr. \quad (5.42)$$

Важно: последнее выражение справедливо, когда движение лопасти относительно жидкости характеризуется угловой скоростью  $\omega$ . Такая ситуация наблюдалась бы при движении лопасти в неподвижной жидкости (если строго — то в неограниченном ее объеме), например, в начальный (пусковой) период времени. Но в ходе перемешивания жидкость постепенно вовлекается лопастью во вращательное движение, и реальная *относительная* угловая скорость лопасти станет *меньше* — в результате уменьшится и потребляемая мощность  $N$ . Здесь это *плохо*: ведь от затрат энергии прямо зависит качество перемешивания; при снижении  $N$  оно тоже уменьшится.

Чтобы воспрепятствовать заметному падению качества перемешивания, надо не допустить значительного уменьшения реальной относительной угловой скорости. С этой целью на стенках сосуда вдоль его образующей (с небольшим зазором — во избежание застойных зон) перпендикулярно к стенке устанавливают две—четыре вертикальные отражательные пластины (перегородки) шириной порядка  $0,2R$ . Они существенно тормозят движение периферийных масс жидкости, что сохраняет достаточно высокие значения угловой скорости лопасти относительно жидкости в реальных условиях работы мешалки. Заметим: установка продольных пластин одновременно препятствует и развитию центральной воронки при вращении лопасти.

Для вычисления интеграла в (5.42) необходимо располагать значением коэффициента  $\xi$ . Строго говоря, он различен для разных точек лопасти, так как они движутся с разными окружными скоростями  $u$ . Его среднее значение  $\xi_{\text{ср}}$  обычно выносят (соответственно теореме о среднем) за знак интеграла и представляют в виде функции от критерия  $Re_{\text{ц}}$ , причем вид функции зависит от типа и формы перемешивающего устройства. В наиболее интересном для практики диапазоне  $Re_{\text{ц}} > \approx 10^4$  величина  $\xi$  меняется чаще всего мало (что отвечает верхнему автомобильному по  $Re_{\text{ц}}$  режиму). Здесь  $\xi$  может быть просто вынесен за знак интеграла. В обоих случаях ( $\xi = \xi_{\text{ср}}$  и  $\xi = \text{const}$ ) выражение (5.42) принимает вид

$$N = \frac{\xi \omega^3 \rho}{2} \int_{R_1}^{R_2} z r^3 dr. \quad (5.42a)$$

Последующий анализ проводится для формулы (5.42a); значение  $\xi$  полагается постоянным и известным.

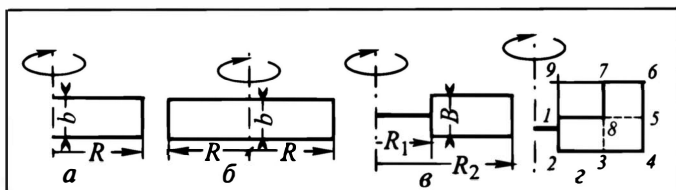


Рис. 5.35. К расчету мощности на валу лопастных мешалок простой формы:

*а* — сплошная полулопасть, *б* — сплошная лопасть, *в* — ограниченная полулопасть, *г* — полулопасть фанснной формы (точки 1—9 относятся к контуру мешалки)

Для вычисления интеграла необходимо знать *конфигурацию лопасти*, т.е. зависимость  $z(r)$ .

**Лопастей простой конфигурации.** Простейшей является мешалка, имеющая форму *сплошной прямоугольной полулопасти*, прилегающей к оси вращения (рис. 5.35, *а*). Пусть ее ширина равна  $b$ , радиус —  $R$ . Для получения конкретного выражения мощности  $N$  в (5.42а) подставим  $z = b = \text{const}$ ,  $R_1 = 0$ ,  $R_2 = R$ . Тогда

$$N_{\text{пл}} = \frac{\xi \omega^3 \rho}{2} b \int_0^R r^3 dr = \frac{\xi \omega^3 \rho b}{8} R^4. \quad (5.43)$$

Из полученного выражения видно, что  $N$  сильно зависит от скорости вращения мешалки ( $\omega$ ,  $n$ ) и еще сильнее — от ее радиального размера  $R$ . Ясно также, что для получения заданной мощности  $N$ , обеспечивающей необходимое качество перемешивания, технолог (конструктор) имеет возможность варьировать значения  $n$  и  $R$ .

В случае *сплошной полной прямоугольной лопасти* (рис. 5.35, *б*) мощность  $N$  получается простым удвоением величины, вычисляемой по формуле (5.43), так как работают две полулопасти:

$$N_{\text{л}} = 2N_{\text{пл}} = \frac{\xi \omega^3 \rho b}{4} R^4. \quad (5.44)$$

В литературе вместо  $\xi$  чаще используют коэффициент  $K_N$ , формируемый на базе выражений типа (5.44), но с заменой  $R$  на  $d_m = 2R$  и выражением ширины лопасти в виде  $b = \psi d_m$ , а угловой скорости — в виде  $\omega = 2\pi n$ . Тогда (5.44) переписывается в виде

$$N_{\text{л}} = \frac{\xi (2\pi n)^3 \rho \psi d_m^5}{8 \cdot 16} = K_N \rho n^3 d_m^5, \quad (5.44a)$$

где  $K_N = \xi \pi^3 \psi / 16$  — коэффициент мощности.

Использование безразмерного коэффициента  $K_N$  (как и  $\xi$ ) вполне отвечает теории гидродинамического подобия, изложенной в разд. 2.2.3; соответственно приведенным там выражениям ( $n$ ) и ( $\omega$ )

$$Eu = f(Re, Fr) \quad \text{или} \quad Eu = f(Re).$$

Рис. 5.36. Типичная зависимость  $K_N = f(Re_u)$ :

1 — без отрагательных перегородок в сосуде, 2 — с отрагательными перегородками в сосуде

Применительно к вращательному движению лопасти при перемешивании критерии Эйлера, Рейнольдса и Фруда преобразуются соответственно:

$$Eu = \Delta p / \rho w^2 \rightarrow Eu_u = \Delta p / \rho n^2 d_m^2;$$

$$Re = wd\rho/\mu \rightarrow Re_u = nd_m^2\rho/\mu;$$

$$Fr = w^2/gd \rightarrow Fr_u = n^2 d_m/g.$$

Следовательно, качественно в общем случае должна быть правомерна запись

$$Eu_u = f(Re_u, Fr_u).$$

В процессах перемешивания соотношение сил инерции и тяжести (т.е.  $Fr_u$ ) обычно учитывают только при наличии центральной воронки. Поэтому в большинстве случаев вполне достаточно зависимости

$$Eu_u = f(Re_u).$$

Связь критерия  $Eu_u$  и коэффициента мощности  $K_N$  установим из следующих соображений. Мешалка, перемещающая жидкообразную среду, представляет собой своеобразный насос. Поэтому для нее справедливо (см. гл. 3) соотношение  $N \sim V\dot{H} \sim f w \Delta p$ . Если теперь учесть принятые выше связи, то  $f \sim d_m^2$  и  $w \rightarrow u \sim nd_m$ , значит  $N \sim d_m^2 (nd_m) \Delta p$ , откуда  $\Delta p \sim N / nd_m^3$ . После подстановки полученного соотношения для  $\Delta p$  в  $Eu_u$  приходим к модифицированному критерию Эйлера для рассматриваемого процесса перемешивания:

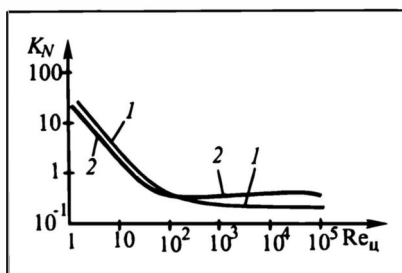
$$Eu_u \sim \frac{N}{\rho n^3 d_m^5} = K_N.$$

Таким образом, коэффициент мощности представляет собой одно из конкретных выражений критерия Эйлера для вращательного движения.

Для практического использования  $K_N$  выражают\* — графически и(или) аналитически — в виде зависимостей от  $Re_u$ , а если необходимо — то и от  $Fr_u$ .

Типичные зависимости  $K_N = f(Re_u)$  приведены на рис. 5.36 для мешалки без отрагательных перегородок в сосуде (кривая 1) и при их наличии (кривая 2). В ламинарной области (малые  $Re_u$ ) кривые располагаются близко; их небольшое смещение обусловлено несколько меньшей относительной скоростью лопасти и жидкости в отсутствие отрагательных перегородок: реальные значения относительной скорости (а значит, и  $Re_u$ ) здесь будут меньше, потому и  $K_N$  — несколько больше.

Автомодельный режим ( $K_N \approx \text{const}$ ) при наличии перегородок наступает при  $Re_u > 10^3$  — приблизительно можно считать, что это соответствует движению лопасти в неподвижной жидкости. При отсутствии перегородок и высоких  $Re_u$  жидкость вовлекается в интенсивное вращательное движение, и реальная относительная скорость (а значит, и  $Re_u$ ) заметно меньше расчетной для неподвижной жидкости. Здесь автомодельный режим наступает при значительно больших расчетных значениях  $Re_u$  — на уровне  $10^4$  и выше. На значения  $K_N$  в этом случае оказывает влияние и образование центральной воронки, т.е. высота



\* Подробные сведения о зависимостях  $K_N$  от  $Re_u$  для различных механических мешалок см. [1, 5, 9, 14, 20, 23].

уровня жидкости над лопастью; поэтому в зависимостях для  $K_N$  появляется и критерий  $Fr_{\text{ц}}$ .

Если прямоугольная *полулопасть ограничена радиусами  $R_1$  и  $R_2$*  (рис. 5.35,б), то интеграл берется в пределах, обозначенных в (5.42):

$$N'_{\text{пл}} = \frac{\xi \omega^3 \rho b}{8} (R_2^4 - R_1^4). \quad (5.45)$$

Тот же результат получается, если из мощности для сплошной прямоугольной полулопасти  $N_{\text{пл}}$  радиусом  $R_2 = R$  вычесть незатрачиваемую мощность  $N^0_{\text{пл}}$  для условной полулопасти радиусом  $R_1$ :

$$N'_{\text{пл}} = N_{\text{пл}} - N^0_{\text{пл}} = \frac{\xi \omega^3 \rho b}{8} R_2^4 - \frac{\xi \omega^3 \rho b}{8} R_1^4.$$

Прием сложения и вычитания мощностей фрагментов лопасти позволяет оценить мощность на валу лопастной мешалки и не столь простой конфигурации.

Например, площадь  $f$  полулопасти якорного типа, показанной на рис. 5.35,з, может быть разбита на составные части несколькими способами:  $f = f(1-2-3-8-1) + f(3-4-6-7-3)$  или  $f = f(1-2-4-5-1) + f(8-5-6-7-8)$ ; в этих случаях результирующая мощность  $N$  получается суммированием мощностей для составляющих площадок полулопастей. Тот же результат получится, если из мощности для площадки  $f(9-2-4-6-9)$  вычесть мощность нефункционирующей площадки  $f(9-1-8-7-9)$ .

Нужно только оговорить, что использование приема сложения (вычитания) мощностей для фрагментов лопасти предполагает неизменность  $\xi$  для различных фрагментов и лопасти в целом.

**Лопастей сложной конфигурации.** Здесь рассматриваются лопасти с изменяющимся по радиусу  $r$  вертикальным размером  $z(r) = \text{var}$ .

Пусть имеется *сплошная полукруглая лопасть* радиусом  $R$  (рис.5.37,а), например — повторяющая форму сферического днища сосуда. С целью использования формулы (5.42а) лопасть удобно рассматривать как две полулопасти; тогда  $R_1 = 0$ ,  $R_2 = R$  и

$$N = \frac{\xi \omega^3 \rho}{2} 2 \int_0^R z r^3 dr. \quad (т)$$

Необходимый для нахождения интеграла закон изменения  $z$  по  $r$  установим из теоремы Пифагора; на текущей радиальной координате  $r$

$$z^2 + r^2 = R^2 \quad \text{и} \quad z = \sqrt{R^2 - r^2}. \quad (y)$$

Подставим в (т) это значение  $z$  и возьмем интеграл

$$\text{Int} = 2 \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} r^3 dr. \quad (ф)$$

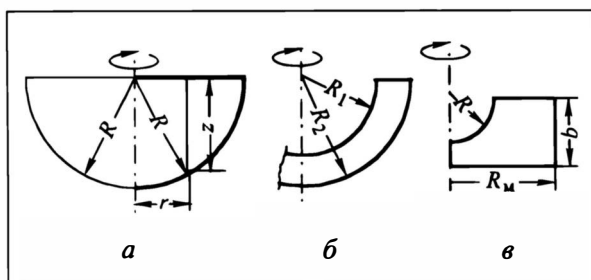


Рис. 5.37. К расчету мощности на валу лопастных мешалок сложной формы:

*а* — сплошная полукруглая лопасть, *б* — полукруглая якорная лопасть, *в* — якорная лопасть фасонной формы

Применим подстановку:

$$s = R^2 - r^2, \quad (\text{x})$$

тогда  $ds = -2rdr$ . Перепишем (ф) в форме, удобной для используемой подстановки:

$$\text{Int} = \int_0^R (R^2 - r^2)^{1/2} (-r^2) (-2rdr) . \quad (\text{ц})$$

Чтобы перейти к новой переменной  $s$ , выразим из (x) величину  $-r^2 = s - R^2$ . Кроме того, при переходе к  $s$  изменятся пределы интегрирования. соответственно (х):

$$\begin{aligned} \text{вместо } r = 0 \text{ будет } s &= R^2, \\ \text{вместо } r = R \text{ будет } s &= 0 . \end{aligned}$$

Теперь интеграл (ц) запишется в виде

$$\text{Int} = \int_{R^2}^0 s^{1/2} (s - R^2) ds = \int_{R^2}^0 (s^{3/2} ds - R^2 s^{1/2} ds) .$$

Интегрируем почленно, предварительно поменяв местами пределы интегрирования и знак в скобке:

$$\int_0^{R^2} (R^2 s^{1/2} ds - s^{3/2} ds) = \frac{2}{3} R^2 s^{3/2} - \frac{2}{5} s^{5/2} \Big|_0^{R^2} = \frac{4}{15} R^5 . \quad (\text{ч})$$

Окончательно, с множителем перед интегралом в (т):

$$N = \frac{\xi \omega^3 \rho}{2} \frac{4}{15} R^5 . \quad (5.46)$$

На практике значительно чаще используются не сплошные, а *якорные полукруглые лопасти* (рис. 5.37, б) с характерными радиусами  $R_1$  и  $R_2$ . Здесь также можно было бы найти закон изменения  $z(r)$  и прямо выполнить операцию интегрирования. Но проще решить задачу *по разности*, вычитая из мощности  $N_2$  (для сплошной лопасти радиусом  $R_2$ ) незатрачиваемую мощность  $N_1$  (для сплошной лопасти радиусом  $R_1$ ):

$$N = N_2 - N_1 = \frac{\xi \omega^3 \rho}{2} \frac{4}{15} (R_2^5 - R_1^5) . \quad (5.47)$$

Если лопасть имеет фасонную форму, показанную на рис. 5.37, в, то мощность на валу мешалки тоже может быть рассчитана по разности — с использованием формул (5.44) и (5.46):

$$N = \frac{\xi \omega^3 \rho}{2} \left( \frac{b R_M^4}{2} - \frac{4}{15} R^5 \right). \quad (5.48)$$

Аналогичный подход позволяет иногда рассчитать затраты энергии на перемешивание лопастями весьма сложной формы.

### 5.3.5. О перемешивании паст и сыпучих материалов

Смешение пастообразных (тестообразных) и сыпучих материалов широко используется в химической и близких отраслях промышленности. Процесс смешения проводится *периодически* (стадии загрузки материала, перемешивания и выгрузки) или *непрерывно*. В ряде случаев смешение совмещают с измельчением твердых компонентов. Конструкции смесителей отличаются широким разнообразием; подробно они описаны в специальной литературе\* и весьма скупко — в учебной. Корпус смесителя может быть *подвижным* и *неподвижным*; в последнем случае перемешивание осуществляется подвижными рабочими органами, перемещающимися внутри корпуса.

В качестве примера упомянем **роторный смеситель**, представляющий собой горизонтальный (иногда несколько наклоненный) барабан, внутри которого с одинаковыми или разными скоростями в противоположных направлениях (по и против часовой стрелки) вращается пара роторов на горизонтально расположенных валах. На рис. 5.38 показаны роторы различной формы.

Расчет смесителей для паст и сыпучих материалов (качество и время перемешивания, параметры работы, расходы энергии) в основном базируется на эмпирических рекомендациях, представляемых в виде таблиц, реже — формул.

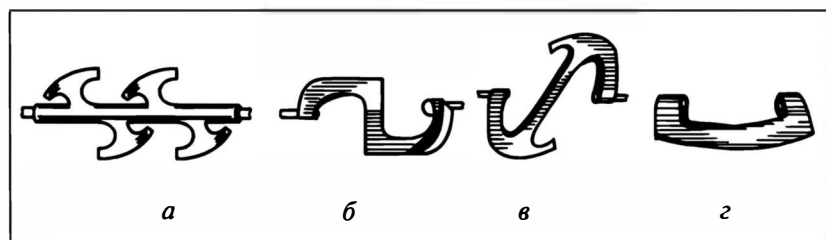


Рис. 5.38. Лопасти роторов для смешения паст и сыпучих материалов:

а — лопасть типа "рыбий хвост", б — лопасть типа Z, в — лопасть типа L, з — спиральная лопасть

\* См. [14, 20, 23].

## 5.4. ДИСПЕРГИРОВАНИЕ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

Диспергирование в системах жидкость—жидкость, газ—жидкость применяется для создания развитых межфазных поверхностей  $F$ , обеспечивающих высокую интенсивность тепло- и массообменных процессов. В этом случае в пропускной способности  $kF$  поверхностной стадии процесса переноса прежде всего существенно увеличивается  $F$ ; кроме того, диспергирование часто сопровождается также повышением коэффициента тепло- или массопередачи  $k$ . Для указанных выше дисперсных систем *размер* капель (пузырьков), их *распределение* по размерам и *межфазная поверхность* являются важными технологическими факторами при организации процессов переноса и расчете тепло- и массообменных аппаратов.

Диаметр капель (пузырьков)  $D$  связан с удельной межфазной поверхностью  $a$  ( $\text{м}^2/\text{м}^3$ ) и объемной долей дисперсной фазы  $\phi$  [ $(\text{м}^3 \text{ дисперсной фазы})/(\text{м}^3 \text{ объема системы})$ ]. Эту связь можно выявить из следующих соображений, например, для системы жидкость—жидкость. Заменим неодинаковые по размерам капли, находящиеся в  $1 \text{ м}^3$  эмульсии, на  $n$  шарообразных капель с теми же суммарной поверхностью и объемом; тогда **средний объемно-поверхностный диаметр** таких капель  $D_{32}$  определяется соотношениями

$$a = \frac{n(\pi D^2)}{1 \text{ м}^3} \quad \text{и} \quad \phi = \frac{n(\pi D^3 / 6)}{1 \text{ м}^3}.$$

Выражая отсюда  $D^3$  и  $D^2$ , получим расчетную формулу для  $D_{32}$ :

$$\frac{D^3}{D^2} \equiv D_{32} = \left( \frac{6\phi}{n\pi} \right) / \left( \frac{a}{n\pi} \right) = \frac{6\phi}{a},$$

откуда

$$a = \frac{6\phi}{D_{32}} = \frac{6(1 - \epsilon)}{D_{32}}, \quad (\text{a})$$

где  $\epsilon$  — объемная доля сплошной (иначе — дисперсионной) среды, т.е. порозность системы.

Выражение (a) тождественно формуле (2.64). Оно показывает, что удельную межфазную поверхность можно увеличивать как путем повышения объемной доли дисперсной фазы (**задержки**)  $\phi$ , так и уменьшением диаметра  $D_{32}$  частиц (капель) в гетерогенной (дисперсной) системе либо одновременным соответствующим изменением  $\phi$  и  $D_{32}$ . Отметим, что величина  $\phi$  определяется конкретным гидродинамическим режимом тепло-массообменного аппарата; подходы к ее расчету будут рассмотрены в дальнейшем.



Диспергирование жидкостей и газов осуществляют различными способами\*. Среди них: механическое диспергирование (мешалки, вращающиеся диски); капельное и струйное (через отверстия и сопла); потоком среды (эжекционные устройства) и др. Некоторые из указанных способов рассмотрены ниже.

#### 5.4.1. Механическое диспергирование

**Диспергирование с помощью мешалок.** В случае диспергирования с помощью мешалок или иных механических устройств в потоке сплошной плотностью  $\rho_c$  среды возникают турбулентные пульсации скорости. Они обуславливают появление разности динамических напоров  $\Delta p = (w_1^2 - w_2^2)\rho_c/2 = \bar{w}^2 \rho_c/2$ , где  $w_1$ ,  $w_2$  — скорости сплошной среды на противоположных концах капли. Отношение силы результирующего динамического напора, стремящегося деформировать и разорвать каплю диаметром  $D$ , к силе поверхностного натяжения, оказывающей обратное воздействие (т.е. направленной на сохранение капли), оценивается критерием Вебера

$$We \equiv \frac{\bar{w}^2 \rho_c D}{\sigma_m},$$

где  $\sigma_m$  — коэффициент поверхностного натяжения на границе капли и сплошной среды.

Повышение критерия  $We$  приводит к увеличению деформации капли, и при достижении его критического значения (на уровне  $We \approx 12$ ) капля разрывается. Следовательно при прочих равных условиях разрыв капли *определяется* величиной  $\bar{w}^2$ , в свою очередь зависящей от масштаба турбулентных пульсаций. Если этот масштаб (обозначим его  $l_n$ ) больше диаметра капли  $D$ , то эти крупные вихри перемещают каплю без ее разрушения. Дробление капель наблюдается, когда масштаб мелких вихрей  $l_n < D$ . Параметр  $\bar{w}^2$ , согласно теории локальной изотропной турбулентности\*\*, для диапазона  $l_n \leq D$  определяется соотношением

$$\bar{w} \sim (e l_n)^{1/3}, \quad (б)$$

где  $e$  — диссипация (рассеяние) энергии в единице массы сплошной среды.

Для практического использования соотношения (б) диссипацию энергии выражают через мощность  $N$ , подводимую кон-

\* Подробнее о диспергирующих устройствах и методах их расчета см. [1, 3, 11, 14].

\*\* См. [10, 12].

кретным диспергатором к массе среды, заключенной в объеме  $V$ :

$$e = \frac{N}{\rho_c V}. \quad (\text{в})$$

Величину  $l_n$  полагают пропорциональной диаметру капли  $D$ . С приведенными допущениями имеем из (б) и (в)

$$\bar{w} = C_1 \left( \frac{ND}{\rho_c V} \right)^{1/3},$$

где  $C_1$  — коэффициент пропорциональности.

Для стабилизированного режима диспергирования (установившиеся скорости дробления и коалесценции капель) критерий Вебера имеет некое постоянное значение  $C_2$ :

$$We = \frac{\bar{w}^2 \rho_c D}{\sigma_m} = \left( C_1 \frac{ND}{\rho_c V} \right)^{2/3} \frac{\rho_c D}{\sigma_m} = C_2,$$

откуда

$$D = C_3 \frac{\sigma_m^{0,6}}{(N/V)^{0,4} \rho_c^{0,2}}, \quad (5.49)$$

причем константа  $C_3$  включает в себя постоянные  $C_1$  и  $C_2$ .

Из (5.49) следует, что размер образующихся капель уменьшается с падением межфазного поверхностного натяжения  $\sigma_m$  и ростом плотности сплошной среды  $\rho_c$ , а также с увеличением подводимой на диспергирование удельной мощности  $N/V$  ( $\text{Вт}/\text{м}^3$ ).

Теория изотропной локальной турбулентности качественно правильно отражает влияние величин  $(N/V)$ ,  $\sigma_m$ ,  $\rho_c$ . Но по этой теории при диспергировании должны получаться капли *одинакового* размера  $D$ . Однако эксперимент обнаруживает *распределение* капель по размерам. Это обусловлено рядом причин; среди них:

— капли находятся в потоке под действием вихря разное время, подчас недостаточное для установления равновесного размера  $D$ , отвечающего формуле (5.49);

— одновременно с диспергированием наблюдается и обратное явление — коалесценция капель, в результате в дисперсии появляются капли *большого* размера, чем это следует из теории;

— в соответствии с соотношением (б) параметр  $\bar{w}$  зависит от  $l_n$ , а величины  $l_n$  в турбулентном потоке сами распределены по размеру; это может привести к образованию и более мелких капель в сравнении с предсказанными теоретически по среднему значению масштаба  $l_n$ .

Таким образом, возникает проблема установления среднего размера капель (пузырей)  $D_{32}$  и закона их распределения по размерам.

Применение формулы (5.49) для определения **среднего диаметра**  $D_{32}$  правомерно при введении поправок на величину задержки  $\phi$  (для систем жидкость—жидкость) и на отношение расчетной (на полное сечение аппарата) скорости газа  $w$  к скорости подъема пузырей  $w_n$  (для систем газ—жидкость). Влияние указанных факторов в настоящее время удается установить только экспериментально.

Для систем жидкость—жидкость рекомендуются расчетные формулы вида

$$D_{32} = C \frac{\sigma_m^{0,6}}{(N/V)^{0,4} \rho_c^{0,2}} \phi^m,$$

для системы газ—жидкость:

$$D_{32} = C \frac{\sigma_m^{0,6}}{(N/V)^{0,4} \rho_c^{0,2}} \phi^m \left( \frac{w}{w_n} \right)^m.$$

Эмпирические константы  $C$ ,  $m$  для конкретных дисперсных систем и конструкций теплообменных аппаратов приводятся в литературе\*.

**Распределение капель (пузырей)** по размерам следует нормально-логарифмическому закону: вероятность логарифма доли капель текущего размера характеризуется нормальным распределением. Этот закон, присущий вообще большому числу случайных событий, установлен теоретически и подтвержден обширным экспериментом. При этом он оказался справедливым для широкого круга дисперсий, получаемых различными способами — как при диспергировании жидкостей и газов, так и при измельчении твердых материалов.

О диспергировании вращающимися дисками. Схема диспергирования жидкости в неподвижной (малоподвижной) газовой среде показана на рис. 5.39. Жидкость *I* подается на диск *I*, вращающийся с определенной скоростью. Под действием центробежной силы жидкость отбрасывается к периферии диска и сплошной пленкой сбрасывается с его поверхности. При дальнейшем удалении от оси вращения ( $r > R$ ) толщина покинувшей

диск пленки в соответствии с уравнением расхода уменьшается, и на некотором расстоянии от кромки диска пленка распадается на капли.

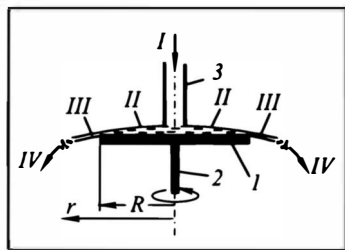


Рис.5.39. Схема диспергирования вращающимся диском:

*I* — диск, *2* — вал, *3* — патрубок подачи жидкости;

*I* — диспергируемая жидкость, *II* — пленка на поверхности диска, *III* — распад пленки на капли, *IV* — поток капель

\* См., например, [20].

Расчет движения пленки по диску и разрушение пленки за его пределами — достаточно сложная задача даже с упрощающими допущениями. В настоящее время расчет базируется на эмпирических соотношениях \*.

#### 5.4.2. Диспергирование при истечении из отверстий и сопел

Режим диспергирования при истечении жидкости из отверстий и сопел может быть капельным и струйным. При **капельном** режиме (низкие скорости истечения) капли образуются *сразу на выходе из отверстий* диспергирующего устройства. При **струйном** режиме (высокие скорости истечения) поверхность струи жидкости находится под воздействием волнообразных периодически повторяющихся колебаний, возникающих под действием шероховатости кромок отверстий и других возмущающих факторов; в результате струя распадается *на некотором удалении* от выходного среза отверстия (сопла) — в месте ее наибольшего сужения.

Пусть выходной диаметр сопла (отверстия) равен  $d$ , а шейки капли —  $d\psi$  ( $\psi < 1$ ). Тогда при вертикальном направлении оси отверстия диаметр капли  $D$ , образующейся при капельном режиме диспергирования, определяется соотношением сил: веса капли и поверхностного натяжения. Вес капли (с учетом выталкивающей силы, если плотности дисперсной  $\rho_d$  и сплошной  $\rho_c$  фаз соизмеримы) равен  $(\pi D^3/6)(\rho_d - \rho_c)g$ ; сила поверхностного натяжения на шейке капли выразится как  $\pi d\psi\sigma_m$  — см. разд. 2.7.5. При **капельном режиме** силами инерции и местным сопротивлением на выходе из отверстия можно пренебречь, и общая формула (2.77) переходит в (2.776):

$$D = \sqrt[3]{\frac{6\sigma_m d\psi}{(\rho_d - \rho_c)g}}. \quad (2.776)$$

Разумеется, при диспергировании жидкости в газовую фазу или наоборот (тогда в знаменателе формулы используется разность  $\rho_c - \rho_d$ ) плотностью газа в сравнении с плотностью жидкости можно пренебречь.

При увеличении скорости истечения диспергируемой жидкости (разд. 2.7.5) возрастает сила инерции струи  $\frac{\pi d^2}{4} \rho_d \frac{w^2}{2}$ , она становится основной силой, конкурирующей с силой поверх-

---

\* См. [1, 14]

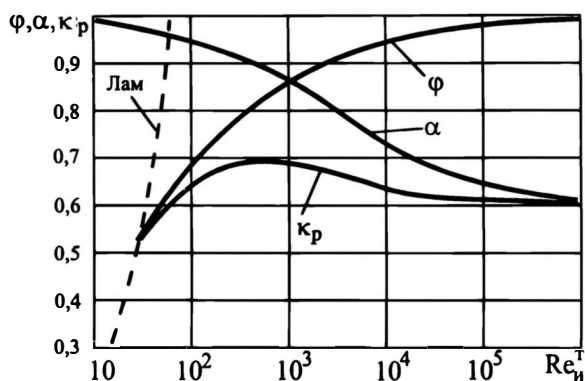


Рис.5.40. Зависимость коэффициентов истечения из отверстия в тонкой стенке от числа Рейнольдса

ностного натяжения, — наступает **струйный режим** диспергирования.

В этом случае диаметр капли  $D$  превышает диаметр струи  $d_c$ : теоретический анализ приводит к соотношению

$$D \approx 1,9d_c. \quad (г)$$

В свою очередь, диаметр струи  $d_c$  связан с диаметром отверстия  $d$  через коэффициент сжатия струи  $\alpha$  (см. разд. 2.6.1):

$$\frac{\pi d_c^2}{4} = \alpha \frac{\pi d^2}{4} \quad \text{и} \quad d_c = d\sqrt{\alpha}. \quad (д)$$

Зависимость коэффициентов скорости  $\phi$ , сжатия струи  $\alpha$  и расхода  $\kappa_p$  от критерия  $Re_{и^т} = w_{и^т} d \rho_d / \mu$  приведена на рис. 5.40, причем теоретическая скорость истечения  $w_{и^т}$  определяется здесь через напор истечения  $H$ :

$$w_{и^т} = \sqrt{2gH}. \quad (е)$$

Критическую скорость  $w_k$ , при которой капельный режим переходит в струйный, оценим, приравняв силы инерции и поверхностного натяжения:

$$\frac{\pi d_c^2}{4} \rho_d \frac{w^2}{2} = \pi d_c \psi \sigma_m,$$

откуда после сокращения на  $\pi d_c$

$$w_k = \sqrt{\frac{8\sigma_m \psi}{\rho_d d_c}}, \quad (4.60)$$

причем отлицием  $\psi$  от 1 нередко пренебрегают.

Строго говоря, величина  $w_k$  по (4.60) относится к ламинарному течению струи. Для развитого турбулентного режима критическая скорость  $w'_k$  рассчитывается по полуэмпирическим формулам\*. Рабочую скорость  $w$  выбирают в интервале  $w_k < w < w'_k$ ; обычно  $w$  находится в диапазоне 1–4 м/с.

В промышленных диспергаторах распыление жидкости ведется через множество отверстий. Во избежание коалесценции капель (а при диспергировании газов — пузырьков) отверстия истечения размещают на достаточном удалении одно от другого; на практике шаг отверстий обычно превышает  $10d$ .

## ЛИТЕРАТУРА к главе 5

1. Гельперин Н.И. Основные процессы и аппараты химической технологии. М.: Химия, 1981. 812 с.
2. Гельперин Н.И., Айнштейн В.Г., Кваша В.Б. Основы техники псевдоожижения. М.: Химия, 1967. 664 с.
3. Головачевский Ю.А. Оросители и форсунки скрубберов химической промышленности. М.: Машиностроение, 1974. 272 с.
4. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы: Пер. с англ. /Под ред. К.А. Семендяева. М.: Наука, 1969. 228 с.
5. Дытнерский Ю.И. Процессы и аппараты химической технологии. М.: Химия, 1995. 768 с.
6. Жужиков В.А. Фильтрование. М.: Химия, 1977. 440 с.
7. Идельчик И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. М.: Машиностроение, 1975. 560 с.
8. Казакова Е.А. Гранулирование и охлаждение азотсодержащих удобрений. М.: Химия, 1980. 287 с.
9. Касаткин А.Г. Основные процессы и аппараты химической технологии. М.: Химия, 1971. 784 с.
10. Коган В.Б. Теоретические основы типовых процессов химической технологии. Л.: Химия, 1977. 592 с.
11. Кутателадзе С.С., Стырикович М.А. Гидродинамика газожидкостных систем. М.: Энергия, 1976. 296 с.
12. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 700 с.
13. Орлов С.П. Дозирующие устройства. М.: Машгиз, 1960. 239 с.
14. Перри Дж. Справочник инженера-химика: Пер. с англ. /Под ред. Н.М. Жаворонкова. Л.: Химия, 1969. 1144 с. (т. I, 640 с.; т. II, 504 с.).
15. Плановский А.Н., Николаев П.И. Процессы и аппараты химической и нефтехимической технологии. М.: Химия, 1972. 494 с.
16. Разумов И.М. Пневно- и гидротранспорт в химической промышленности. М.: Химия, 1979. 248 с.
17. Романков П.Г., Курочкина М.И. Гидромеханические процессы химической технологии. Л.: Химия, 1974. 288 с.

---

\* См., например, [8].

18. *Скоблю А.И., Трегубова И.А., Молоканов Ю.К.* Процессы и аппараты нефтеперерабатывающей и нефтехимической промышленности. М.: Химия, 1982. 584 с.
19. *Соколов В.И.* Современные промышленные центрифуги. М.: Машгиз, 1961. 452 с.
20. *Стренк Ф.* Перемешивание и аппараты с мешалками: Пер. с польск. / Под ред. И.А. Щупляка. Л.: Химия, 1975. 384 с.
21. *Циборовский Я.* Процессы химической технологии: Пер. с польск. / Под ред. П.Г. Романкова. Л.: Госхимиздат, 1958. 932 с.
22. *Чернобыльский И.И., Бондарь А.Г., Гаевский Б.А. и др.* Машины и аппараты химических производств. М.: Машиностроение, 1975. 456 с.
23. *Штербачек З., Тауск П.* Перемешивание в химической промышленности: Пер. с чешск. / Под ред. И.С. Павлушенко. Л.: Госхимиздат, 1963. 416 с.

# ОСНОВЫ ТЕПЛОПЕРЕНОСА

Теплоперенос, иначе — перенос теплоты от тела к телу, от объекта к объекту, от точки к точке занимает особое место среди явлений и процессов переноса.

Во-первых, он широко распространен в химической технологии (в тепловых процессах, во многих процессах разделения, в собственно химических процессах), так что устанавливаемые в этой и следующих главах понятия и закономерности, а также полученные в них соотношения будут прямо использованы при изучении ряда последующих глав (выпаривание, дистилляция и ректификация, сушка и др.) и учебных дисциплин (АСУ ТП, спецтехнологии и т.д.). Этими понятиями, закономерностями, соотношениями очень часто пользуются исследователи, проектировщики, производственники.

Во-вторых, несмотря на множество еще не разрешенных проблем, описание явлений и процессов теплопереноса зачастую проще, нежели массопереноса (во многих проявлениях проще и переноса импульса) в силу линейности значительного числа задач — из-за существенного постоянства входящих в них теплофизических величин. Поэтому подходы здесь нагляднее, легче усваиваются, а сами задачи чаще удается довести до аналитических решений.

И в-третьих, подходы и решения задач теплопереноса нередко служат основой и отправной точкой при анализе более сложных задач — переноса вещества и других субстанций.

**Основные цели** теплопереноса обусловлены характером технологического процесса. Наиболее часто они связаны со следующими моментами:

- подвод теплоты к системе, рабочему телу (целевому продукту, теплоносителю, хладогенту) для повышения (или отвод — для понижения) температуры либо изменения агрегатного состояния (плавления — затвердевания, кипения — конденсации и т.п.); здесь цель — сам теплоперенос;

- сущность самого технологического процесса, заключающегося в подводе (отводе) теплоты, иногда — в изменении агрегатного состояния; здесь без теплопереноса процесс просто невозможен;



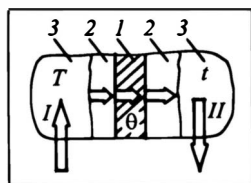


Рис. 6.1. Общая схема теплопереноса:

1 — теплопередающая стенка (поверхность), 2 — пограничные пленки, 3 — области движения теплоносителей вдоль поверхности;

I, II — области горячего и холодного теплоносителей

— выделение (поглощение) теплоты в ходе химических превращений (экзо- и эндотермические реакции), так что необходимо обеспечивать отвод и подвод теплоты реакции либо учитывать влияние накопления теплоты на изменение температуры и ход этой реакции.

Часто в осуществлении химико-технологического процесса реализуются все или несколько из этих целей.

Нередко теплопереносу сопутствует перенос вещества (из одной системы в другую, из одной фазы в другую); как правило, теплоперенос связан с переносом количества движения (импульса) — эту связь учитывают при описании процессов теплопереноса.

В наиболее распространенных случаях (далее будут рассматриваться и другие ситуации) поток теплоты передается от теплоносителя с высокой температурой  $T$  к теплоносителю с низкой —  $t$  через **теплопередающую стенку**. Принципиальная схема такого теплопереноса для фрагмента теплообменного аппарата представлена на рис. 6.1. Теплота (ее поток изображен левой вертикальной стрелкой) *вводится* в исследуемый фрагмент теплообменника с потоком *горячего* теплоносителя под действием постороннего побудителя (например, насоса). Далее поток теплоты через **пограничную пленку**, примыкающую к поверхности со стороны горячего теплоносителя, передается к границе поверхности, проходит через **поверхность** (стенку), затем через **пограничную пленку** со стороны *холодного* теплоносителя (эти потоки теплоты изображены горизонтальными стрелками). Наконец, теплота *выводится* из исследуемого фрагмента с холодным теплоносителем (правая вертикальная стрелка).

Происходящие в ходе переноса теплоты процессы — в целом или на отдельных стадиях — именуются по-разному. В целях большей четкости разграничения понятий в учебнике принята *следующая терминология* (она выдержана и для процессов массопереноса).

**Теплопереносом** (иначе — **тепловым процессом**) именуется *любое* явление (процесс), связанное с переносом теплоты на любой стадии или в целом.

**Элементом** (видом, способом) процесса теплопереноса называется *стадия* (акт), относящаяся к какой-либо одной составляющей теплопереноса: через пограничную пленку — **теплоот-**

дача; в твердой стенке или другой среде возможен **кондуктивный** перенос; теплоперенос **излучением** (на схеме не показан); **поточковый** теплоперенос с движущимся теплоносителем.

Под **теплопередачей** будем понимать перенос теплоты через теплопередающую поверхность (нормально к ней); для схемы на рис. 6.1 это три стадии: перенос теплоты через пограничные пленки и через стенку.

Под **теплообменом** будем понимать теплоперенос в целом, включающий отвод (подвод) теплоты с горячим и холодным теплоносителями; для схемы на рис. 6.1 теплообмен включает пять стадий: три стадии теплопередачи и две — переноса теплоты с потоками теплоносителей.

В главе 6 рассматриваются явления и процессы переноса теплоты, относящиеся к отдельным стадиям. Проблемы теплопередачи и теплообмена являются предметом главы 7.

## 6.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Основополагающим в теплопереносе является понятие **температуры**. Согласно II закону термодинамики теплоперенос самопроизвольно (без затрат механической энергии) происходит от тела (области) с большей температурой к телу (области) с меньшей. Именно разность температур является причиной направленного переноса теплоты. Эта разность температур — **температурный напор** — выступает в качестве **движущей силы** теплопереноса. В ходе теплопереноса может происходить изменение температуры (от точки к точке, во времени и т.п.). При выравнивании температур наступает тепловое равновесие. Совокупность температур дает **температурное поле** с различными (*локальными*) температурами в различных точках пространства. Если наблюдается изменение температур во времени, то говорят еще о *мгновенных* (в данный момент) температурах. В наиболее общих случаях оперируют локальными и мгновенными температурами; в более простых — только локальными или только мгновенными.

Кардинальной проблемой теплопереноса является установление закономерностей изменения температур в пространстве и во времени. При ее разрешении удастся решать конкретные, в том числе — практически важные задачи, связанные с количествами переданной теплоты в системе, в аппарате, со временем процесса, с размерами теплопередающих поверхностей, конечными температурами теплоносителей и др.

Температуры обычно обозначаются символами  $T$ ,  $t$ ,  $\theta$ . Отсчитывают их (как от нуля) от температуры таяния льда (градусы Цельсия, °C) или от абсолютного нуля (градусы Кельвина, K); другие системы измерения и отсчета температур (Реомюра, Фа-

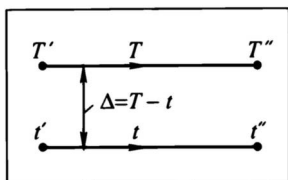


Рис.6.2. Изменение температур потоков теплоносителей и температурный напор

ренгейта и Ренкина) практически вышли из употребления. Специально подчеркнем, что шкалы Цельсия и Кельвина лишь *смещены* одна относительно другой (на 273,16 градуса); при этом цена деления (величина 1

градуса) в обеих системах *одинакова*. Поэтому *разности* температур и численные значения величин, *приходящихся на 1 градус*, в этих шкалах совпадают.

Необходимо четко выделять (рис. 6.2) различные аспекты переноса теплоты в технологических аппаратах:

— перенос *с потоками теплоносителей* (потоковый перенос); при этом происходит изменение температур в направлении движения теплоносителя  $\Delta T = T' - T''$  и  $\Delta t = t'' - t'$  либо изменение его агрегатного состояния — это цель и результат теплопереноса;

— перенос *между потоками теплоносителей* (нормально к их движению); он возникает при наличии температурного напора  $\Delta = T - t$ ; разумеется, в различных точках рабочей зоны значения  $\Delta$  могут быть различными, их определение и усреднение изучается в гл. 7 в связи с проблемами теплообмена.

### Теплофизические свойства рабочих тел

В ходе анализа процессов теплопереноса будем оперировать различными теплофизическими свойствами рабочих тел. Некоторые понадобятся на начальных стадиях изложения (они представлены ниже), другие потребуются и будут введены позднее.

В разд. 1.3.2 было введено понятие о потенциальных полях, в том числе — о поле температур, изотермических поверхностях, градиенте температур  $\partial t / \partial n$ , коэффициенте теплопроводности, обусловлено *противоположное* направление теплового потока и температурного градиента и представлена в форме закона Фурье связь удельного теплового потока  $q$  и градиента  $\partial t / \partial n$ .

Понятие о теплоемкости  $c$  (с указанием ее размерности и единиц измерения) введено в разд. 1.2.3 как количество теплоты, необходимой для изменения на 1 градус единичной массы рабочего тела (вещества). В основном при изучении теплопереноса используют теплоемкость при постоянном давлении  $c_p$  (в гл. 6 и 7 индекс “ $p$ ” опущен). Величина  $c$  в общем случае зависит от температуры, хотя и не всегда существенно. Заметим, что в практических расчетах теплоемкость выражают не только в Дж/(кг·К), но и в кДж/(кг·К).

**Удельной теплотой плавления  $r_{\text{пл}}$  (затвердевания)** называют количество теплоты, необходимой для плавления (выделяющейся при затвердевании) единичной массы вещества; чаще всего  $r_{\text{пл}}$  слабо изменяется с температурой. Измеряется  $r_{\text{пл}}$  в Дж/кг (в таблицах приводится в кДж/кг). Плавление (затвердевание) индивидуальных веществ происходит при неизменной температуре, называемой температурой плавления  $t_{\text{пл}}$ . Она зависит от давления (характер зависимости в соответствии с правилом Ле-Шателье определяется соотношением плотностей вещества в жидком и твердом состояниях).

**Удельной теплотой конденсации  $r$**  (или обратных процессов — **испарения, парообразования**) называют количество теплоты, выделяющейся при конденсации (необходимой для испарения) единичной массы вещества. Измеряется  $r$  в Дж/кг (в таблицах приводится в кДж/кг). Конденсация или кипение индивидуальных веществ происходит при неизменной температуре  $t_{\text{кип}} = \text{const}$ . Она, соответственно правилу Ле-Шателье, возрастает с повышением давления (поскольку плотность пара всегда ниже плотности жидкости).

Аналогичным образом вводится понятие о **теплоте сублимации (десублимации)**.

Значения  $r_{\text{пл}}$ ,  $r$  и проч. при различных давлениях, температурах приводятся в справочной литературе\*.

В тепловых расчетах широко используется понятие об **энтальпии** ("*физическом тепле*", которое "*несет с собой*" тело, поток), обозначаемой чаще всего символами  $H$ ,  $h$ ,  $i$  и измеряемой в Дж/кг (в практических расчетах — часто в кДж/кг). Энтальпию принято отсчитывать от некой температуры  $t_0$  (о ней *условливаются*), при которой принимается  $H$ ,  $h$ ,  $i = 0$ . Чаще всего за начало отсчета энтальпии принимают  $0^\circ\text{C}$ ; в холодильных процессах, дабы не оперировать отрицательными энтальпиями, точку отсчета выбирают ниже (например,  $-100^\circ\text{C}$ ).

При рабочей температуре  $t$ , в отсутствие изменения агрегатного состояния во всем диапазоне от  $t_0$  до  $t$ , энтальпию  $h$  рассчитывают по очевидной формуле:

$$h = \int_{t_0}^t c dt. \quad (\text{a})$$

Если изменением теплоемкости  $c$  с температурой  $t$  можно пренебречь ( $c = \text{const}$ ), то

$$h = c(t - t_0), \quad (\text{б})$$

---

\* См., например, [1, 2, 14, 15, 17] и разл. справочники химика.

а при  $t_0 = 0$  — еще проще:

$$h = ct. \quad (в)$$

Если вещество при  $t_0$  (в частности, при  $0^\circ\text{C}$ ) имеет иное агрегатное состояние, нежели при рабочей температуре, то энтальпия определяется с учетом теплоты фазовых превращений. Для наиболее распространенных теплоносителей значения  $h$  приводятся в справочной литературе\*.

В практических расчетах в подавляющем большинстве случаев оперируют *разностями* энтальпий, поэтому точка отсчета энтальпий и их абсолютные значения роли не играют. Очевидно, в частности, что удельные теплоты представляют собой разности энтальпий вещества на границах фазовых состояний (скажем, сухого насыщенного пара и кипящей жидкости).

### *Характер процессов переноса теплоты*

Наиболее общими и сложными для анализа и расчета являются процессы теплопереноса, в которых температуры изменяются как от точки к точке, так и во времени. Среди **нестационарных** процессов, когда  $t = t(\tau)$ , наиболее просты **безградиентные**, в которых температура в рассматриваемой области *не изменяется в пространстве*:  $\partial t / \partial n = 0$ . Для другой весьма обширной группы процессов, называемых **стационарными**, характерно изменение температур от точки к точке, но в любой точке *отсутствует изменение температуры во времени*:  $\partial t / \partial \tau = 0$ . В дальнейшем предстоит рассмотреть примеры всех этих случаев.

Значительная доля химико-технологических процессов проводится в *непрерывных* режимах, когда характеристики процесса (в том числе и тепловые) остаются неизменными во времени. В *периодических* процессах тепловые характеристики во времени могут изменяться. В этом аспекте непрерывные процессы обычно отождествляют со стационарными, периодические — с нестационарными; такое отождествление в практических целях часто вполне оправданно\*\*. В то же время с физической точки зрения непрерывный процесс может складываться из нестационарных элементарных актов переноса теплоты, и тогда, строго говоря, отождествление неправомерно (пример — прогрев твердых частиц, непрерывно движущихся вдоль теплообменной поверхности: теплообменник может работать в стационарном ре-

---

\* См., например, [1, 2, 14, 15, 17] и разл. справочники химика.

\*\* С позиций теории управления непрерывные процессы, как правило, принципиально нестационарны вследствие спорадических возмущающих и управляющих воздействий, т.е. постоянного отклонения системы от стационарного режима и возврата в этот режим.

жине, тогда как прогрев твердых частиц — нестационарен). Наконец, иногда выделяют *полунепрерывные* процессы (в том числе теплопереноса): один теплоноситель подается непрерывно с постоянной во времени начальной температурой; по второму теплоносителю процесс проводится периодически.

## 6.2. ВИДЫ ТЕПЛОПЕРЕНОСА, ОБЩЕЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ

### 6.2.1. Виды теплопереноса

Выделяют три вида теплопереноса: теплопроводность (кондукцию), конвекцию и излучение.

**Теплопроводностью** называют перенос теплоты при *непосредственном соприкосновении* частиц рабочего тела, имеющих разную температуру, — без перемещения упомянутых частиц. При этом под частицами здесь подразумеваются достаточно крупные образования сплошной среды, существенно превосходящие размерами микрочастицы — атомы, молекулы и т.п.

В газах кондуктивный теплоперенос осуществляется путем диффузии атомов и молекул. В жидкостях эта составляющая переноса теплоты играет подчиненную роль; здесь (как и в твердых телах — диэлектриках) главный вклад в перенос теплоты вносят упругие волны (упругие колебания, соударения). В металлах и эта составляющая имеет второстепенное значение; на первый план в переносе теплоты выходит диффузия электронов.

**Конвекция** представляет собой перенос теплоты за счет перемещения масс рабочего тела (теплоносителя) — жидкого, газообразного, в отдельных процессах и твердого — в рабочей зоне технологического аппарата. В зависимости от причины перемещения масс рабочего тела принято различать:

— *вынужденную* конвекцию, когда перенос рабочего тела вызван действием внешних побудителей (насосов, компрессоров, разности давлений или уровней и т.п.);

— *естественную* конвекцию, когда перемещение масс обусловлено различием плотностей рабочего тела в разных зонах аппарата (пространства вообще); часто такая разность имеет причиной различие в температурах этих зон; разумеется, естественная конвекция возможна только в поле каких-либо внешних массовых сил (например, силы тяжести).

На практике оба этих вида конвективного теплопереноса зачастую сопутствуют друг другу; встречаются ситуации, когда их вообще затруднительно разделить, и напротив, в некоторых случаях один из них играет определяющую роль.

Необходимо подчеркнуть, что в данной главе нас будут интересовать элементарные эффекты, связанные с *нормальными* (по отношению к теплопередающей поверхности) потоками теплоты в ходе конвективного переноса через пограничные слои (конвективный теплоперенос *в направлении движения теплоносителей* рассматривается в гл.7).

В манере конвективного теплопереноса представляют также теплообмен при конденсации паров и кипении жидкостей, хотя, согласно современным воззрениям, определяющую роль здесь играет кондуктивный перенос. В той же конвективной форме представляют и другие процессы пристеночного переноса: при плавлении, в дисперсных системах (например, в псевдоожигенном слое) и др.; некоторые из них затронуты в данной главе.

**Лучистым** (теплоперенос излучением) называют перенос теплоты путем электромагнитных колебаний; он сопровождается превращением тепловой энергии в электромагнитные волны и обратно. Каждое тело постоянно излучает энергию, причем интенсивность этого излучения, обусловленного сложными возмущениями на атомном и молекулярном уровнях, зависит прежде всего от свойств излучающей поверхности и от температуры. Часть излучаемой энергии при попадании на тело *поглощается* им и вновь переходит в теплоту; другая часть *отражается* от поверхности тела или *проходит сквозь тело* (в конечном счете она поглощается другими телами или уходит в окружающую среду). В результате одновременного излучения и поглощения телом разных количеств энергии происходит теплообмен; разумеется, если температура участвующих в лучистом теплопереносе тел одинакова, то потоки излучаемой и поглощаемой энергии одинаковы, и эффект лучистого теплопереноса отсутствует.

Каждому виду переноса теплоты отвечают свои понятийный аппарат и математическое описание — в этом основное содержание данной главы. В расчетных целях иногда удобно один вид теплопереноса представить в терминах и символах другого, т.е. произвести подмену задачи — тогда говорят об **эквивалентных (условных, эффективных)** представлениях.

На практике перенос теплоты часто происходит одновременно несколькими способами — это **сложный** теплоперенос. Каждый из видов теплопереноса вносит свой вклад, его не всегда удается точно установить. Результирующий эффект сложного теплопереноса зависит не только от интенсивности конкретных видов переноса, но и от особенностей их взаимодействия (например, последовательного или параллельного, стационарного или нестационарного). Отдельные задачи, связанные со взаимодействием различных видов теплопереноса, рассматриваются в гл. 7.

### 6.2.2. Удельные тепловые потоки

В основе анализа и расчета разнообразных процессов теплопереноса лежат понятия об **удельных и полных тепловых потоках, сопротивлении переносу и пропускных способностях**, введенные в общем виде в разд. 1.3.2. Напомним и конкретизируем их применительно к переносу теплоты.

Для непрерывных (стационарных) процессов оперируют **потоком теплоты**  $Q$  ( $\text{Вт}=\text{Дж/с}$  в СИ), для периодических (нестационарных) — ее **количеством**  $Q$  ( $\text{Дж}$ ). **Удельным тепловым потоком**  $q$  (**тепловым напряжением**, тепловой нагрузкой) называют поток теплоты, отнесенный к единице теплопередающей поверхности  $F$  [ $\text{Вт/м}^2$ ,  $\text{Дж/(с} \cdot \text{м}^2)$ ]; для непрерывных и периодических процессов соответственно:

$$q = Q/F \text{ и } Q = qF \text{ или } q = Q/F\tau \text{ и } Q = qF\tau. \quad (6.1)$$

В разделе 1.3.2 был приведен **закон Фурье**, устанавливающий связь  $q$  с градиентом температур в условиях **кондуктивного** теплопереноса:

$$q = -\lambda \text{ grad } t = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n}, \quad (1.10), (6.2)$$

причем множитель  $\lambda$  представляет собой коэффициент теплопроводности, знак “минус” (он относится к градиенту) обусловлен противоположным направлением  $q$  и  $\partial t/\partial n$ .

При **конвективном** переносе теплоты от поверхности теплообмена (температура  $\theta$ ) к потоку теплоносителя (температура  $t$ ) для характеристики теплонапряжения используют формулу Ньютона:

$$q = \alpha(\theta - t); \quad (6.3)$$

при переносе теплоты от горячего теплоносителя к холодной поверхности в формуле (6.3), естественно, фигурирует температурный напор  $(t - \theta)$ .

**Полные** тепловые потоки (кондуктивный, конвективный) записываются с учетом выражений (6.1); например, для непрерывного процесса:  $Q = -\lambda F(\partial t/\partial n)$ ;  $Q = \alpha F\Delta$ , где  $\Delta \equiv \theta - t$  или  $\Delta \equiv t - \theta$ .

В случае **лучистого** теплопереноса его интенсивность определяется законом Стефана—Больцмана: удельный поток энергии, **излучаемой** в единицу времени с единицы поверхности абсолютно черного тела, пропорционален четвертой степени **абсолютной** температуры:

$$E_0 = \sigma_0 T^4, \quad (6.4)$$

причем индексом “0” отмечена принадлежность лучистого потока  $E_0$  к абсолютно черному телу (понятие о нем детализировано в разд. 6.9.1);  $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4)$  — **константа излучения абсолютно черного тела**.



Специально подчеркнем, что  $T$  здесь (и в последующих формулах теплопереноса излучением) берется в  $K$ ; в других уравнениях теплопереноса  $T$  чаще всего будет обозначать температуру горячего теплоносителя (обычно в  $^{\circ}C$ ).

Удельный поток  $E_0$  (далее  $E$  для тел, отличающихся от абсолютно черного) имеет ту же размерность, что и  $q$ ; однако это еще не тепловое напряжение, а лишь база для его определения.

### 6.2.3. Об уравнении Фурье—Кирхгофа

Общее математическое описание переноса теплоты (без учета излучения) представляют в виде уравнения Фурье—Кирхгофа, решение которого должно позволить найти температуру в любой точке рабочего пространства в заданный момент времени. Вывод этого уравнения и его анализ приведены в разд. 1.5.2; критерии подобия, получаемые масштабными преобразованиями уравнения Фурье—Кирхгофа и некоторых других соотношений, рассмотрены в разд. 1.8.

В наиболее общей форме уравнение Фурье—Кирхгофа для изотропной среды имеет вид

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z} = a \nabla^2 t + \frac{q_v}{c\rho}, \quad (1.21), (6.5)$$

причем смысл каждого слагаемого, теплофизических величин  $a \equiv \lambda/c\rho$ , удельного источника теплоты  $q_v$  и других параметров обозначен в упомянутых разделах.

В разд. 1.6 на примере уравнения Фурье—Кирхгофа детально рассмотрены его модификации применительно к различным ситуациям (стационарный процесс, отсутствие источников теплоты, теплоперенос в твердом теле — изотропном и анизотропном и др.) и конфигурациям рабочего пространства (плоская, цилиндрическая, сферическая задачи). В разделе 1.7 подробно рассмотрены условия однозначности, с которыми решается уравнение переноса: начальные и граничные.

Введенные в указанных разделах понятия и соотношения будут конкретизированы в настоящей главе в аспекте переноса теплоты. При этом последовательно будут рассмотрены основные закономерности различных видов теплопереноса.

## 6.3. СТАЦИОНАРНЫЙ КОНДУКТИВНЫЙ ПЕРЕНОС ТЕПЛОТЫ ЧЕРЕЗ СТЕНКИ

Закономерности стационарного переноса теплоты путем теплопроводности в отсутствие Источников и Стоков можно получить, анализируя уравнение (6.5) либо используя закон Фурье (6.2). Воспользуемся вторым путем: он проще, в особенности — для неплоских стенок.

### 6.3.1. Плоская однослойная стенка

Пусть на сторонах плоской однослойной стенки толщиной  $\delta_{\text{ст}}$ , теплопроводностью  $\lambda_{\text{ст}}$  и поверхностью  $F$  поддерживаются постоянные температуры  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , причем для определенности  $\theta_1 > \theta_2$ , так что поток теплоты направлен слева направо (рис. 6.3,а). Заметим, что задание  $\theta_1$  и  $\theta_2$  на стенках означает граничные условия I рода. Температура  $\theta$  (отложена по вертикальной оси) изменяется только нормально к поверхности  $F$ , т.е. по оси  $x$  — речь идет об однонаправленном переносе теплоты вдоль этой оси. Начало оси  $x$  удобно совместить с левой границей стенки. Наиболее распространенная задача здесь (как и в случае стенок иной конфигурации) заключается в установлении закона изменения температуры внутри стенки ( $0 \leq x \leq \delta_{\text{ст}}$ ) и определении потока теплоты  $Q$ .

Для установления зависимости  $\theta = \theta(x)$  запишем закон Фурье (6.2), заменив частную производную обыкновенной, поскольку  $\theta$  изменяется только вдоль координаты  $x$ . Из (6.1) и (6.2)

$$Q = -\lambda_{\text{ст}} F \frac{d\theta}{dx},$$

откуда после разделения переменных

$$d\theta = -\frac{Q}{F\lambda_{\text{ст}}} dx \quad (\text{а})$$

и интегрирования получаем

$$\theta = -\frac{Q}{F\lambda_{\text{ст}}} x + C. \quad (\text{б})$$

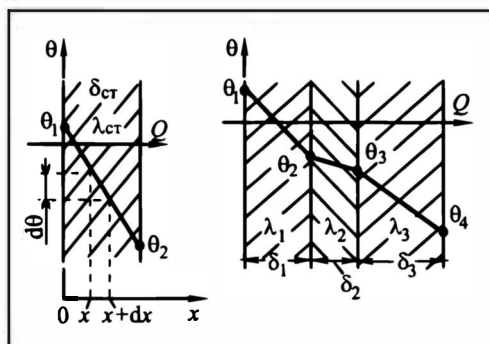


Рис.6.3. К выводу уравнений кондуктивного теплопереноса через плоские стенки — однослойную (а) и многослойную (б)

Постоянная интегрирования  $C$  определяется из условия  $\theta = \theta_1$  при  $x = 0$ ; тогда из (6)  $C_1 = \theta_1$ , и выражение (6) принимает вид

$$\theta = \theta_1 - \frac{Q}{F\lambda_{\text{ст}}} x. \quad (\text{в})$$

Это же выражение можно получить из (а), взяв интегралы с переменными верхними пределами: от  $\theta_1$  до  $\theta$  и от 0 до  $x$ .

Итак, при стационарном кондуктивном теплопереносе в плоской стенке устанавливается *линейный* профиль температур.

К аналогичному выводу приходим, используя в качестве базы для анализа уравнение Фурье—Кирхгофа, сводящееся для рассматриваемого случая к дифференциальному уравнению  $d^2t/dx^2 = 0$ , откуда получается линейное соотношение типа  $\theta = C_1x + C_2$ .

В практических задачах часто требуется связать тепловой поток  $Q$  с геометрическими размерами стенки и граничными температурами  $\theta_1$  и  $\theta_2$ . С этой целью следует в (а) взять *определенный* интеграл — соответственно от  $\theta_1$  до  $\theta_2$  и от 0 до  $\delta_{\text{ст}}$  — либо положить в (в)  $\theta_1 = \theta_2$  при  $x = \delta_{\text{ст}}$ . В обоих случаях

$$\theta_1 - \theta_2 \equiv \Delta\theta = \frac{Q}{F\lambda_{\text{ст}}} \delta_{\text{ст}} \quad \text{и} \quad Q = \frac{\lambda_{\text{ст}}}{\delta_{\text{ст}}} F \Delta\theta. \quad (6.6)$$

Если в (в) подставить значение  $Q/F\lambda_{\text{ст}}$  из (6.6), то получается профиль температур, записанный через граничные величины  $\theta_1$  и  $\theta_2$  вне связи с  $Q$  и  $\lambda_{\text{ст}}$ :

$$\theta = \theta_1 - \Delta\theta \frac{x}{\delta}. \quad (\text{г})$$

Для *плоской* стенки можно провести весь анализ и записать конечные выражения, пользуясь вместо  $Q/F$  тепловым напряжением  $q = \text{const}$ .

$$\text{Напомним, что величины } \frac{\Delta\theta}{Q} = \frac{1}{(\lambda_{\text{ст}} / \delta_{\text{ст}})F} \quad \text{и} \quad \frac{\Delta\theta}{q} = \frac{\delta_{\text{ст}}}{\lambda_{\text{ст}}} \text{ на-}$$

зывают **полным и удельным** (на единицу поверхности теплопереноса) **термическими сопротивлениями**; реже используют величину  $q/\Delta\theta = \lambda_{\text{ст}} / \delta_{\text{ст}}$  — **удельную кондуктивную проводимость**. В курсе ПАХТ мы будем оперировать **пропускной способностью** кондуктивного теплопереноса; для плоской стенки она выражается в виде

$$\frac{Q}{\Delta\theta} = \frac{\lambda_{\text{ст}}}{\delta_{\text{ст}}} F. \quad (\text{д})$$

При достаточно больших  $\Delta\theta$  приходится учитывать заметное изменение  $\lambda_{\text{ст}}$  с температурой. В этом случае в закон Фурье необходимо подставить переменную теплоемкость  $\lambda_{\text{ст}} = \lambda_{\text{ст}}(\theta)$ , так что интегрирование приведет к нелинейным соотношениям, более сложным, нежели (6) — (г) и (6.6). Возможность использования концепции пропускных способностей для таких случаев — проблематична.

### 6.3.2. Плоская многослойная стенка

На практике нередко приходится иметь дело с многослойными плоскими стенками, состоящими из отдельных плотно (без зазоров) прилегающих друг к другу слоев толщиной  $\delta_i$  с теплопроводностями  $\lambda_i$ . Постановка задачи здесь может быть такой же, как для однослойной стенки; различие заключается в том, что известными, как правило, являются лишь температуры на *внешних* границах многослойной стенки — на рис. 6.3,б значения  $\theta_1$  и  $\theta_4$ .

В случае стационарного кондуктивного теплопереноса для каждого из слоев (в рассматриваемом примере их три) можно записать выражение типа (6.6), причем поток теплоты  $Q$ , переносимой *последовательно* через все эти слои, разумеется, один и тот же:

$$Q = \frac{\lambda_1}{\delta_1} F \Delta\theta_1 = \frac{\lambda_2}{\delta_2} F \Delta\theta_2 = \frac{\lambda_3}{\delta_3} F \Delta\theta_3, \quad (e)$$

где  $\Delta\theta_1 = \theta_1 - \theta_2$ ,  $\Delta\theta_2 = \theta_2 - \theta_3$ ,  $\Delta\theta_3 = \theta_3 - \theta_4$ ; величины  $(\lambda_i/\delta_i)F$  представляют собой пропускные способности кондуктивного теплопереноса каждой  $i$ -й плоской стенки.

Чтобы исключить неизвестные промежуточные температуры  $\theta_2$  и  $\theta_3$  (при большем числе слоев — и другие  $\theta_i$  на границах соприкосновения), применим *общий прием*, многократно используемый ниже для анализа сходных ситуаций в процессах тепло- и массопереноса. Решим уравнения системы (e) относительно частных разностей температур и сложим эти разности; при этом промежуточные температуры взаимно уничтожатся, останутся лишь известные (заданные)  $\theta_1$  и  $\theta_4$ :

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 - \theta_2 &= \frac{Q}{F(\lambda_1/\delta_1)} \\ + \theta_2 - \theta_3 &= \frac{Q}{F(\lambda_2/\delta_2)} \\ \theta_3 - \theta_4 &= \frac{Q}{F(\lambda_3/\delta_3)} \end{aligned} \right\} \rightarrow \Delta\theta \equiv \theta_1 - \theta_4 =$$

$$= Q \left( \frac{1}{(\lambda_1/\delta_1)F} + \frac{1}{(\lambda_2/\delta_2)F} + \frac{1}{(\lambda_3/\delta_3)F} \right) = Q \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{(\lambda_i/\delta_i)F} \right), \quad (ж)$$

где  $n$  — число стенок (слоев); здесь  $n = 3$ .

Отсюда поток теплоты через многослойную плоскую стенку составляет

$$Q = \frac{1}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3}} F \Delta\theta = \frac{\Delta\theta}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{(\lambda_i/\delta_i)F}}, \quad (6.7)$$

а пропускная способность для системы из  $n$  последовательных плоских стенок запишется как

$$\frac{Q}{\Delta\theta} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{(\lambda_i / \delta_i) F}}. \quad (3)$$

Из выражений (6.7) и (3) можно видеть, что *при последовательном кондуктивном переносе теплоты складываются термические сопротивления отдельных стадий*, т.е. величины, обратные пропускным способностям.

Разумеется, и в рассматриваемом случае можно полученные выражения представить записанными через  $q = Q/F$ .

### 6.3.3. Цилиндрические стенки

Теплоперенос через цилиндрические стенки — весьма частый случай в химической технологии, например при течении горячего и холодного теплоносителей внутри и снаружи цилиндрических труб и аппаратов. Задача анализа сформулирована в разд. 6.3.1.

Схема стационарного кондуктивного переноса теплоты через *однослойную* цилиндрическую стенку представлена на рис. 6.4: рассматривается участок цилиндра длиной  $l$ , граничные радиусы  $R_1$  и  $R_2$ , температуры  $\theta_1$  и  $\theta_2$ . Анализ теплопереноса здесь ведется на базе *полного* теплового потока  $Q$ , поскольку удельный поток  $q$  *изменяется* вдоль радиальной координаты  $r$  из-за непостоянства поверхности теплопереноса  $F = 2\pi r l$ .

Общая канва анализа остается прежней. Выделим на радиальной координате  $r$  внутри стенки ( $R_1 \leq r \leq R_2$ ) элементарный цилиндрический слой толщиной  $dr$ , на котором температура изменяется от  $\theta$  до  $\theta + d\theta$ , и запишем для этого слоя закон Фурье, учитывая, что речь идет об однонаправленном теплопереносе:

$$Q = -\lambda_{\text{ст}} \frac{d\theta}{dr} 2\pi r l. \quad (и)$$

Разделим переменные:

$$d\theta = -\frac{Q}{2\pi l \lambda_{\text{ст}}} \frac{dr}{r}. \quad (к)$$

Для отыскания закона  $\theta = \theta(r)$  проинтегрируем (к) с переменными

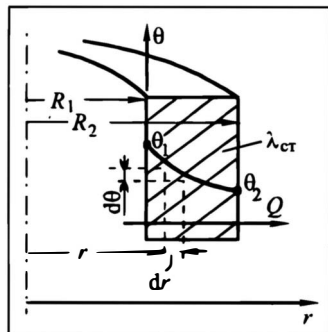


Рис. 6.4. К выводу уравнения кондуктивного теплопереноса через цилиндрическую стенку

верхними пределами:

$$\int_{\theta_1}^{\theta} d\theta = -\frac{Q}{2\pi l \lambda_{ст}} \int_{R_1}^r \frac{dr}{r} \quad \text{и} \quad \theta = \theta_1 - \frac{Q}{2\pi l \lambda_{ст}} \ln \frac{r}{R_1}. \quad (\text{л})$$

Таким образом, для цилиндрической стенки характерен *логарифмический* профиль температур.

Взяв теперь от (к) определенный интеграл в пределах от  $\theta_1$  до  $\theta_2$  и от  $R_1$  до  $R_2$ , получим искомые соотношения:

$$\begin{aligned} \theta_1 - \theta_2 \equiv \Delta\theta &= \frac{Q}{2\pi l \lambda_{ст}} \ln \frac{R_2}{R_1} \\ \text{и} \quad Q &= \frac{2\pi l \lambda_{ст}}{\ln(R_2 / R_1)} \Delta\theta = \frac{\Delta\theta}{\frac{1}{2\pi l \lambda_{ст}} \ln \frac{d_2}{d_1}}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Замена радиусов  $R_1$  и  $R_2$  соответствующими диаметрами обусловлена большей доступностью значений  $d_1$  и  $d_2$  в расчетной практике; произведение  $2\pi l \lambda_{ст}$  перенесено из числителя в знаменатель в целях удобства последующего анализа.

При малой толщине цилиндрической стенки  $\delta = (d_1 - d_2)/2$ , т.е. при  $\delta \ll d_1, d_2$  формулы (6.8) путем предельного перехода (разложением в ряд) при  $d_1 \rightarrow d_2$  обращаются в (6.6). Практически это означает, что при достаточно тонких цилиндрических стенках можно с обусловленной погрешностью вести расчеты не по (6.8), а по более простому соотношению (6.6) для плоской стенки.

Пропускная способность кондуктивного теплопереноса для цилиндрической стенки получается из (6.8):

$$\frac{Q}{\Delta\theta} = \frac{2\pi l \lambda_{ст}}{\ln(d_2 / d_1)}. \quad (\text{м})$$

Теплоперенос через *многослойные* цилиндрические стенки, в соответствии с использованным в разд. 6.3.3 приемом, анализируется путем записи уравнений типа (6.8) относительно частных разностей температур  $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i+1}$ , сложения полученных выражений и исключения (взаимного уничтожения) промежуточных температур. В результате этой операции приходим к очевидному выражению для  $n$ -слойной цилиндрической стенки:

$$Q = \frac{\Delta\theta}{\frac{1}{2\pi l} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}}, \quad (6.9)$$

причем здесь полный температурный напор  $\Delta\theta \equiv \theta_1 - \theta_{n+1}$  базируется на известных граничных температурах  $\theta_1$  и  $\theta_{n+1}$ .

Пропускная способность кондуктивного теплопереноса через многослойную стенку  $Q/\Delta\theta$  легко получается из (6.9).

### 6.3.4. Сферические стенки

Сферические аппараты реже встречаются в химической технологии: это обычно резервуары для жидкостей и газов; нередко их изолируют в тепловом отношении — тогда речь идет о многослойных сферических стенках. Кроме того, анализ кондуктивного теплопереноса через сферические стенки оказывается полезным при модельном рассмотрении некоторых случаев конвективного теплопереноса (см. разд. 6.4.5).

Как и в случае цилиндрической стенки, анализ ведем на базе постоянного *полного* теплового потока  $Q$ , поскольку  $q = \text{var}$  из-за изменения (вдоль радиальной координаты  $r$ ) поверхности теплопереноса  $F = 4\pi r^2$ .

Выделим (рис. 6.5) на радиусе  $r$  внутри *однослойной* стенки ( $R_1 \leq r \leq R_2$ ) элементарный сферический слой толщиной  $dr$ , приращение температуры составит здесь  $d\theta$ . Закон Фурье запишется как

$$Q = -\lambda_{\text{ст}} \frac{d\theta}{dr} 4\pi r^2. \quad (\text{н})$$

Разделим переменные:

$$d\theta = -\frac{Q}{4\pi\lambda_{\text{ст}}} \frac{dr}{r^2} \quad (\text{о})$$

и для установления закона  $\theta = \theta(r)$  возьмем интегралы с переменными верхними пределами, фиксируя  $\theta = \theta_1$  при  $r = R_1$ :

$$\theta = \theta_1 - \frac{Q}{4\pi\lambda_{\text{ст}}} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{r} \right). \quad (\text{п})$$

Таким образом, для сферической стенки характерен *гиперболический* профиль температур.

Взяв теперь от (о) определенный интеграл от  $\theta_1$  до  $\theta_2$  и от  $R_1$  до  $R_2$ , получим

$$\theta_1 - \theta_2 \equiv \Delta\theta = \frac{Q}{4\pi\lambda_{\text{ст}}} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

и

$$Q = \frac{4\pi\lambda_{\text{ст}}}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \Delta\theta = \frac{\Delta\theta}{\frac{1}{2\pi\lambda_{\text{ст}}} \left( \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right)}, \quad (6.10)$$

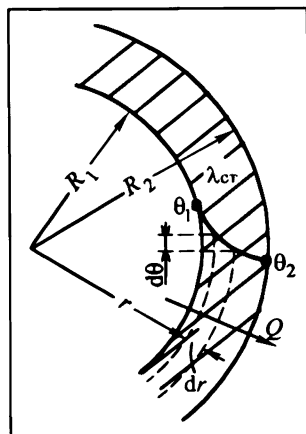
причем целесообразность перехода от радиусов к диаметрам и переноса произведения, содержащего  $\lambda_{\text{ст}}$ , в знаменатель обоснована в разд. 6.3.3.

Рис. 6.5. К выводу уравнения кондуктивного теплопереноса через сферическую стенку

Разумеется, как и для цилиндрической стенки, при  $\delta = (d_2 - d_1)/2 \ll d_1, d_2$  формула (6.10) переходит в более простое выражение (6.6) для плоской стенки, что нередко используют в инженерных расчетах.

Пропускная способность кондуктивного переноса для сферической стенки записывается, исходя из (6.10), следующим образом:

$$\frac{Q}{\Delta\theta} = \frac{2\pi\lambda_{ст}}{\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}}. \quad (p)$$



Поток теплоты через  $n$ -слойную сферическую стенку получается путем исключения промежуточных температур уже известным приемом:

$$Q = \frac{\Delta\theta}{\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \left( \frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_{i+1}} \right)}, \quad (6.11)$$

причем здесь  $\Delta\theta \equiv \theta_1 - \theta_{n+1}$ .

Пропускная способность кондуктивного теплопереноса через многослойную сферическую стенку  $Q/\Delta\theta$  легко получается из (6.11).

## 6.4. КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛОПЕРЕНОС

### 6.4.1. Коэффициент теплоотдачи и число Нуссельта

Под конвективным *здесь* понимается поток теплоты от теплопередающей поверхности к рабочему телу, теплоносителю (или в обратном направлении) **нормально** к этой поверхности — в отличие от переноса теплоты с теплоносителем **вдоль** поверхности (его также именуют конвективным); особенности такого **поточкового** переноса теплоты отдельно или совместно с нормальным теплопереносом рассматриваются в гл. 7. Заметим, что возможны ситуации, когда теплопередающая поверхность отсутствует и нормальный конвективный теплоперенос осуществляется непосредственно от одного теплоносителя к другому.

Общая картина изменения температуры около теплопередающей поверхности рассмотрена в разд. 1.3.2. Приповерх-



ностная область изменения температуры, например при контакте горячего теплоносителя с холодной стенкой, от  $t$  в ядре потока до  $\theta$  на стенке (см. рис. 1.6) называется **пограничным тепловым слоем**, иногда — **пограничной тепловой пленкой**. Для удобства анализа и расчета вводят понятие о *модельном* пограничном слое с четкими границами, в котором сосредоточено все изменение температур  $\Delta t = t - \theta$ ; за пределами этого слоя толщиной  $\delta_\tau$  (в *ядре* потока) температура  $t$  считается постоянной. Тонкий тепловой пограничный слой в чем-то аналогичен пристенному ламинарному (вязкому) подслою в потоке жидкости или газа: в тепловом слое или вязком подслое невелика роль турбулентного переноса (количества движения, теплоты, а также вещества), и потому существен вклад кондуктивного (“молекулярного”) переноса — за счет вязкого трения (перенос импульса), теплопроводности (перенос теплоты), молекулярной диффузии (перенос вещества).

Малая толщина пограничного слоя позволяет пренебречь его кривизной (даже если стенка не является плоской) и считать температурный профиль в слое линейным. Это означает, что количество переданной теплоты через модельный слой можно трактовать как *кондуктивный* теплоперенос через плоскую преграду (не твердую, конечно, а жидкую или газовую — со своей теплопроводностью  $\lambda$ ), описываемый выражением (6.6):

$$Q = \frac{\lambda}{\delta_\tau} F \Delta t. \quad (6.12)$$

Неопределенность в значении толщины  $\delta_\tau$  не позволяет прямо воспользоваться этим соотношением. Поэтому поток теплоты записывают в виде формулы Ньютона — в форме *конвективной теплоотдачи*:

$$Q = \alpha F (t - \theta) = \alpha F \Delta t, \quad (6.13)$$

где  $\alpha$  — **коэффициент теплоотдачи**, представляющий собой поток теплоты в единицу времени через единичную поверхность при единичном температурном напоре [в СИ выражается в  $Вт/(м^2 \cdot К)$ ].

Сопоставление выражений (6.12) и (6.13) для *одного и того же* потока теплоты:

$$\frac{\lambda}{\delta_\tau} F \Delta t = \alpha F \Delta t$$

приводит к модельному соотношению — оно записано ранее в разд. 1.3.2:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\delta_\tau}. \quad (1.12), (6.14)$$

Это соотношение, как правило, не является расчетным, поскольку за редким исключением толщина пограничного слоя  $\delta_\tau$

неизвестна (часто не поддается расчету; иногда изменяется вдоль теплопередающей поверхности). Однако выражение (6.14) позволяет моделировать явления конвективного теплопереноса, помогает выявить рычаги управления его интенсивностью. В самом деле, из (6.14) ясно, что для повышения  $\alpha$  надо включить факторы, уменьшающие толщину пограничного слоя  $\delta_T$ .

В разд. 1.8.4 путем масштабных преобразований выражения (1.12), (6.14) был получен безразмерный комплекс — число Нуссельта  $Nu \equiv \alpha l / \lambda$ , где  $l$  — определяющий линейный размер (в случае цилиндрических и сферических поверхностей — обычно диаметр  $d$ ). Физический смысл  $Nu$  предопределен предпосылками получения соотношения (6.14): этот комплекс характеризует теплоперенос через пограничный слой в форме соотношения конвективного и кондуктивного тепловых потоков — в обоих случаях *по одну сторону* теплопередающей поверхности. Определение  $Nu$  и  $\alpha$  — кардинальная задача конвективного теплопереноса.

Пропускная способность конвективного теплопереноса на стадии теплоотдачи записывается исходя из формулы (6.13):

$$Q/\Delta t = \alpha F. \quad (6.15)$$

Величина  $\alpha F$  может быть использована в рамках концепции пропускных способностей, если  $\alpha$  не является функцией  $Q$  и  $\Delta t$ , иначе говоря — при линейной связи  $Q$  и  $\Delta t$ . В противном случае (нелинейная связь) возможности использования аппарата пропускных способностей пока не определены.

#### **6.4.2. Аналогия в процессах конвективного переноса количества движения и теплоты, а также вещества**

Связь коэффициента теплоотдачи  $\alpha$  с толщиной модельного приграничного слоя  $\delta_T$  устанавливается выражением (6.14). Сходные понятия — интенсивность переноса импульса  $\tau_T$  и толщина ламинарного слоя  $\delta_\mu$  — используются в гидравлике. Это позволяет выявить аналогию в переносе соответствующих субстанций: количества движения (импульса) и теплоты, а если шире — то и вещества при массопереносе.

В самом деле, интенсификация конвективного теплопереноса (повышение  $\alpha$ ) возможна путем уменьшения толщины теплового пограничного слоя  $\delta_T$ , например увеличением скорости теплоносителя около теплопередающей поверхности. Но при этом, как известно из гидравлики, возрастает турбулентность потока и уменьшается толщина приповерхностного ламинарного слоя  $\delta_\mu$ , т.е. растет градиент скоростей у поверхности, а с ним и интенсивность переноса импульса нормально к поверхности (это выражается ростом гидравлического сопротивления).

Сходство в переносе различных субстанций иллюстрируется аналогией в форме записи их удельных потоков с соответствующими градиентами (см. разд. 1.3.2):

$$\text{закон Ньютона} \quad \tau_t = -\mu \frac{\partial w}{\partial n} = -\nu \rho \frac{\partial w}{\partial n}; \quad (\text{а})$$

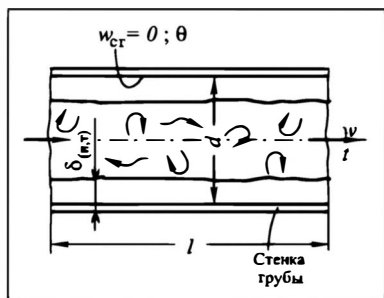
$$\text{закон Фурье} \quad q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} = -\alpha c_p \frac{\partial t}{\partial n}; \quad (\text{б})$$

$$\text{закон Фика} \quad q_b = -D_d \frac{\partial c}{\partial n}. \quad (\text{в})$$

Существенное сходство характерно и для дифференциальных уравнений переноса импульса (Навье — Стокса), теплоты (Фурье — Кирхгофа) и вещества (Фика), а также для условий однозначности к этим уравнениям. При этом в выражениях (а), (б), (в) и в дифференциальных уравнениях переноса величины  $\nu$ ,  $\alpha$  и  $D_d$  характеризуют соответственно скоростное, температурное и концентрационное поля.

Качественная иллюстрация сходства в переносе импульса и теплоты может быть подкреплена количественными оценками аналогии и связей в переносе рассматриваемых субстанций. Анализ будем вести для однонаправленного (от потока к стенке) переноса импульса и теплоты на примере *турбулентного* течения жидкости на участке круглой трубы диаметром  $d$  и длиной  $l$  (рис. 6.6). Цель анализа — сопоставление интенсивности потоков теплоты и импульса.

Полагаем, что в ядре потока существенно выровнены скорость  $w$  и температура  $t$ ; все их изменение сосредоточено в узкой пристеночной области (в пограничных слоях) толщиной  $\delta_n$  при переносе импульса и  $\delta_t$  при переносе теплоты (значения  $\delta_n$  и  $\delta_t$  в общем случае различны; на рисунке это различие не показано). Поэтому выражения (а) и (б) будут применены для



характеристики скоростных и температурных полей именно в пристеночных пограничных слоях. При этом непосредственно у стенки  $\tau_t \equiv \tau_s$ ,  $q \equiv q_s$ ,  $w_{ct} = 0$  (концепция прилипания),  $t = \theta$ .

Производные в (а) и (б) удобно заменить малыми при-

Рис. 6.6. К аналогии в конвективном переносе импульса и теплоты

ращениями *вблизи стенок* трубы: радиуса  $\partial n \rightarrow \delta_n$  или  $\delta_T$  (при переносе импульса и теплоты соответственно);  $\partial w \rightarrow \Delta w = w - w_{\text{ст}} = w$ ;  $\partial t \rightarrow \Delta t = t - \theta$ . Тогда

$$\tau_s = \mu \frac{w}{\delta_n} \quad (\text{а}); \quad q_s = \lambda \frac{\Delta t}{\delta_T}. \quad (\text{б})$$

Искомое соотношение удельных потоков субстанций составит

$$\frac{q_s}{\tau_s} = \frac{\lambda}{\mu} \frac{\Delta t}{w} \left( \frac{\delta_n}{\delta_T} \right). \quad (\text{г})$$

Преобразуем левую часть. Для этого выразим  $q_s$  по (6.13):  $q_s = Q/F = \alpha \Delta t$ . Величину  $\tau_s$  запишем исходя из выражения (и) в разд. 2.2.2:  $4\tau_s/\rho g = \lambda_T(w^2/2g)$ , так что  $\tau_s = (\lambda_T/8)\rho w^2$ . Подставим в (г) значения  $q_s$  и  $\tau_s$ :

$$\frac{\alpha \Delta t}{\frac{\lambda_T}{8} \rho w^2} = \frac{\lambda}{\mu} \frac{\Delta t}{w} \left( \frac{\delta_n}{\delta_T} \right).$$

После сокращений и приведения к безразмерной форме записи имеем

$$\frac{\alpha d}{\lambda} = \frac{\lambda_T}{8} \frac{wd\rho}{\mu} \left( \frac{\delta_n}{\delta_T} \right). \quad (\text{д})$$

Относительно толщины пограничных слоев  $\delta_n$  и  $\delta_T$  можно определенно утверждать, что *при одном и том же потоке субстанции* их рост отвечает увеличению, соответственно, коэффициентов кинематической вязкости  $\nu$  и температуропроводности  $a$ . В сугубо оценочном плане можно предположить, что

$$\frac{\delta_n}{\delta_T} \approx \frac{\nu}{a} = \text{Pr} \quad (\text{е})$$

— так в соотношение вводится критерий Прандтля  $\text{Pr}$ . Разумеется, точнее принять, что  $\delta_n/\delta_T$  есть некая функция от  $\text{Pr}$ . Здесь пока важно подчеркнуть, что введение  $\text{Pr}$  дает возможность *осуществить переход* от  $\delta_n$  к  $\delta_T$ .

Подставим в (д) соотношение  $(\delta_n/\delta_T)$  по (е). Тогда, учитывая, что  $\alpha d/\lambda \equiv \text{Nu}$ ,  $wd\rho/\mu \equiv \text{Re}$ , получим

$$\text{Nu} = \frac{\lambda_T}{8} \text{Re} \cdot \text{Pr} \quad \text{и} \quad \frac{\text{Nu}}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \equiv \text{St} = \frac{\lambda_T}{8}, \quad (6.15)$$

где  $\text{St} \equiv \alpha/(wcp)$  — **критерий Стантона**, характеризующий соотношение тепловых потоков: нормально к теплопередающей поверхности (числитель) и с движущимся теплоносителем (знаменатель).

В силу приближенности связи (е) выражение (6.15) иногда записывают в более общей форме:

$$St = \frac{\lambda_r}{8} f(Pr). \quad (6.15a)$$

Выражения (6.15), (6.15a) демонстрируют аналогию в переносе теплоты и количества движения. Важно подчеркнуть физический смысл этой аналогии — в обоих случаях речь идет о соотношении сходных характеристик:

— коэффициент гидравлического сопротивления представляет собой (см. разд. 2.2.2) соотношение пропускных способностей при переносе импульса: нормально к границе потока ( $\tau_s$ ) и вдоль потока ( $\rho w^2$ );

— критерий Стантона есть соотношение аналогичных тепловых потоков; его можно прямо получить, соотнося соответствующие потоки:  $\alpha F(t - \theta)$  и  $Gc(t' - t'') = wcpf(t' - t'')$ .

Подобный анализ совместно с переносом вещества позволяет распространить аналогию на процессы массопереноса: наряду с тепловым критерием Стантона здесь появляется диффузионный  $St_d \equiv \beta/w$ , где  $\beta$  — коэффициент массоотдачи. При этом сохраняются как физический смысл критерия, так и установленные выше соотношения:  $St_d = Sh/(Re \cdot Sc)$ ,  $Sh \equiv \beta d/D_d$  — число Шервуда (аналог  $Nu$ ),  $Sc = \nu/D_d$  — критерий Шмидта (аналог  $Pr$ ). В целом аналогия трактуется расширительно:

$$St = St_d = \lambda_r/8. \quad (6.156)$$

Отдельной (важной!) проблемой являются границы (пределы) сохранения аналогии в переносе импульса (количества движения), теплоты и вещества. В общем, можно сказать, что тройная аналогия в процессах переноса сохраняется, пока остаются близкими механизмы переноса различных субстанций.

#### 6.4.3. Теплоперенос в условиях вынужденной конвекции

Интенсивность теплообмена при вынужденной конвекции зависит от физических свойств теплоносителя, скорости его движения около теплопередающей поверхности (в канале), формы и размеров канала. В подавляющем большинстве случаев эту зависимость теоретически установить не удается; пользуются эмпирическими соотношениями, базирующимися, как правило, на понятии о тепловом пограничном слое и обычно записываемыми в безразмерной форме. Общий подход к конструированию таких соотношений можно представить следующим образом:

— около поверхности теплопереноса при движении теплоносителя возникает ламинарный пограничный слой, толщина которого  $\delta_n$  определяется значением критерия Рейнольдса  $Re$ ;

— интенсивность теплоотдачи (значения  $Nu$  и  $\alpha$ ) определяется толщиной *теплового пограничного слоя*  $\delta_T$ , связанного с  $\delta_{и}$ , но не тождественного ему;

— связь  $\delta_T$  с  $\delta_{и}$ , как показано в разд. 6.4.2, определяется значением критерия Прандтля  $Pr$ .

Из этих соображений

$$Nu = f(Re, Pr, \dots), \quad (6.16)$$

причем  $Re$  устанавливает толщину ламинарного слоя  $\delta_{и}$ , а  $Pr$  переводит его в  $\delta_T$ , определяющий по (6.14) интенсивность теплоотдачи (т.е.  $Nu$  и  $\alpha$ ).

Интенсивность теплообмена можно также рассчитывать по эмпирическим формулам, основанным на числе Стантона:

$$St = f(Re, Pr, \dots). \quad (6.17)$$

Для химико-технологической практики характерно многообразие аппаратов и схем, работающих в условиях вынужденной конвекции: движение теплоносителей в трубах (в разных режимах) или снаружи труб (вдоль них или поперек, возможно и под углом к их оси), наружное обтекание пучков труб (шахматных, коридорных) и т.д. Каждому случаю отвечают конкретные зависимости типа (6.16) — они приводятся в учебниках, монографиях, справочной литературе\*. В качестве примера приведем одну из формул для расчета  $\alpha$  при турбулентном течении в трубах:

$$Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^{0,4} \epsilon_l. \quad (ж)$$

Соответственно указаниям автора формулы, теплофизические свойства теплоносителя берутся здесь при среднеарифметической величине из его температур на входе в теплообменник и на выходе из него. Множитель  $\epsilon_l$  отражает эффект тепловой стабилизации: на входном участке трубы пристеночный градиент температуры (именно он определяет истинную интенсивность теплопереноса) убывает быстрее температурного напора (входящего в формальные выражения типа 6.13); поэтому  $\alpha$  снижается по ходу движения теплоносителя, постепенно приближаясь к постоянной величине. При  $l/d > 40\div 50$  поправочный множитель  $\epsilon_l$  может быть принят равным 1, при меньших  $l/d$  он превышает 1 (тем больше, чем ниже  $Re$ ). Игнорирование отличия  $\epsilon_l$  от 1 приводит при расчетах интенсивности теплообмена к занижению  $\alpha$ , т.е. к ошибке в запас.

#### 6.4.4. Теплоперенос в условиях естественной конвекции

Интенсивность теплопереноса в условиях естественной конвекции зависит от теплофизических свойств среды, формы и геометрических характеристик теплопередающей поверхности и, конечно, от скорости движения среды около поверхности. Однако в отличие от вынужденной конвекции эта скорость при расчетах заранее не известна, так что критерий  $Re$ , обуславливающий толщину пограничного слоя  $\delta_{и}$  (в конечном итоге —  $\delta_T$  и  $\alpha$ ), заранее найти нельзя; в результате расчетная цепочка

$$Re \rightarrow \delta_{и} \xrightarrow{Pr} \delta_T \rightarrow \alpha$$

не реализуется.

---

\*См., например, [3, 6–8, 11, 15, 18].

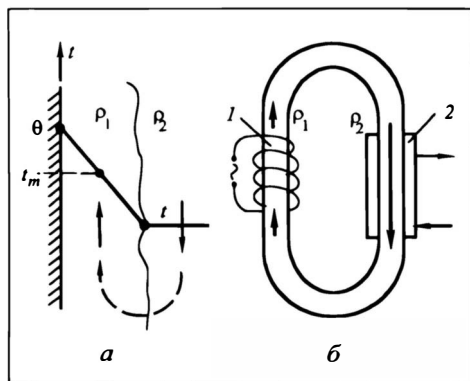


Рис. 6.7. Естественная конвекция:

*a* — около вертикальной поверхности (расчетная схема), *б* — в контуре с естественной циркуляцией;

1 — зона подогрева среды, 2 — зона охлаждения

Пограничный слой при естественной конвекции возникает при движении среды, вызванном разностью ее плотностей у теплопередающей поверхности и на удалении от нее.

Эта разность плотностей в условиях теплопереноса обусловлена прогревом (либо охлаждением) пристеночных слоев среды и их термическим расширением — понижением плотности (либо, наоборот, ее повышением). Схема движения среды (газа, жидкости) у поверхности представлена на рис. 6.7, *a*. В окрестности поверхности (пусть у нее высокая температура  $\theta$ ) образуется нагретый слой среды, более легкой, нежели в отдалении от поверхности, где температура  $t < \theta$ . Средняя температура прогретого слоя может быть приближенно принята равной  $t_m = (\theta + t)/2$ , температура холодных слоев —  $t$ . В результате легкие слои около горячей поверхности поднимаются вверх (в конечном счете они уходят от поверхности); на некотором удалении от поверхности холодные и более тяжелые слои среды опускаются вниз, замещая в нижних зонах поверхности нагревающиеся восходящие слои. Возникает **тяга** (она особо выражена в топочных трубах), ее величина определяет интенсивность движения среды около поверхности (в частности, модельную толщину пограничной пленки). На рис. 6.7, *б* показана естественная циркуляция, возникающая при нагревании и (или) охлаждении среды в замкнутом контуре.

Критерий, контролирующий движение среды, а значит интенсивность теплопереноса у поверхности при естественной конвекции, можно получить из следующих соображений. В гидравлике (разд. 2.7.4) был сформирован критерий Архимеда

$$Ar = \frac{gd^3}{\nu^2} \frac{\rho_r - \rho}{\rho},$$

представляющий собой соотношение сил, препятствующих и способствующих взвешиванию частиц в среде. Сейчас речь идет о подъеме и опускании *слоев* газа (жидкости) вблизи поверхности (пусть ее вертикальная протяженность  $l$ ). Поэтому

вместо размеров частиц в формируемый критерий должна войти высота столба (слоя) среды, совпадающая с вертикальной протяженностью поверхности  $l$ : в случае вертикальной поверхности (пластины, цилиндра) — геометрическая ее высота  $H$ , в случае горизонтального цилиндра или шара — их диаметр  $D$ . Вместо  $\Delta\rho = \rho_T - \rho$  должна фигурировать разность плотностей слоев среды у поверхности (температура  $t_m$ ) и на удалении от нее (температура  $t$ ):  $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$  или  $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2$ , так как принято  $\Delta\rho > 0$ . При этом в знаменателе отношения  $\Delta\rho/\rho$  удобнее ставить плотность теплоносителя на удалении от поверхности  $\rho_2$  при температуре  $t$  (она известна более точно). Дробь  $\Delta\rho/\rho_2$  представим в зависимости от определяющей разности температур  $\Delta t_m = t_m - t$  с помощью температурного коэффициента объемного расширения  $\beta_0$ :  $\rho_1 = \rho_2[1 - \beta_0(t_m - t)]$ . Тогда

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_2} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} = \beta_0(t_m - t) = \beta_0\Delta t_m. \quad (3)$$

Так, из критерия  $Ag$  получается критерий Грасгофа, базирующийся на температурном напоре  $\Delta t_m$ :

$$Gr_m = \frac{gl^3}{\nu^2} \beta_0 \Delta t_m.$$

В таком написании критерий не очень удобен в расчетах, так как требуется рассчитывать среднюю температуру пристеночного слоя  $t_m$ . Удобнее основывать запись критерия на температурном напоре  $\Delta t = \theta - t$ , заданном (известном) при постановке задачи расчета. Переход от  $\Delta t_m$  к  $\Delta t$  прост:

$$\Delta t_m \equiv t_m - t = \frac{\theta + t}{2} - t = \frac{\theta - t}{2} \equiv \frac{\Delta t}{2}.$$

Опустив множитель  $1/2$  (он будет учтен численными значениями коэффициентов в расчетных формулах), получим

$$Gr = \frac{gl^3}{\nu^2} \beta_0 \Delta t. \quad (и)$$

Из изложенных ранее предпосылок следует, что величина  $Gr$  определяет толщину пограничного слоя  $\delta_n$  около поверхности при естественной конвекции, а с помощью критерия  $Pr$  осуществляется переход к  $\delta_T$ , а значит к  $Nu$  и  $\alpha$ :

$$Nu = f(Gr, Pr, \dots). \quad (6.18)$$

В литературе\* имеются попытки теоретического описания естественной конвекции в форме (6.18), однако они базируются

---

\* См., например, [7, 9, 10].



ся на весьма произвольных предположениях о температурном профиле в пристеночном слое среды. Более надежны пока эмпирические зависимости; обычно их представляют в виде степенных соотношений типа

$$\text{Nu} = c_0(\text{Gr} \cdot \text{Pr})^n. \quad (6.19)$$

Конкретные значения  $c_0$  и  $n$  приводятся в литературе в зависимости от значения произведения  $\text{Gr} \cdot \text{Pr}$ . В частности, для ламинарного режима ( $\text{Gr} \cdot \text{Pr} = 5 \cdot 10^2 \div 2 \cdot 10^7$ ) величина  $c_0 = 0,54$ ;  $n = 1/4$ ; для турбулентного ( $\text{Gr} \cdot \text{Pr} = 2 \cdot 10^7 \div 1 \cdot 10^{13}$ ) величина  $c_0 = 0,135$ ,  $n = 1/3$ . Отсюда ясно, что *при турбулентном режиме влияние линейного размера  $l$  на коэффициент теплоотдачи  $\alpha$  вырождается*, так как  $l$  входит одновременно в  $\text{Nu}$  (в первой степени) и в  $\text{Gr}$  (в третьей степени). Дело в том, что при турбулентном режиме длина пути восходящего вихря  $l_0$  около поверхности (до его отрыва) чаще всего существенно меньше протяженности поверхности  $l$  (т.е.  $H$  или  $D$ ), так что  $l$  не может оказывать влияния на интенсивность теплообмена.

По формулам типа (6.19) на  $\text{Nu}$  влияют не  $\text{Gr}$  и  $\text{Pr}$ , а их произведение, что означает уменьшение числа воздействующих на теплообмен факторов. Это не следует ни из каких физических представлений. По-видимому, такие формулы базируются на опытах с воздухом и другими газами, когда  $\text{Pr}$  изменяется мало. В общем же множитель  $c_0$  несколько возрастает при увеличении  $\text{Pr}$ .

Концепция пропускной способности в условиях естественной конвекции теряет определенность, поскольку в выражениях типа (6.18) коэффициент теплоотдачи  $\alpha$  зависит от  $\text{Gr}$ , а значит и от температурного напора  $\Delta t$  — нарушается линейность  $Q$  и  $\Delta t$ .

На практике встречаются случаи, когда теплообмен осуществляется за счет *естественной* и *вынужденной* конвекции. Общий вид расчетных уравнений для этого случая:

$$\text{Nu} = f(\text{Re}, \text{Gr}, \text{Pr}, \dots). \quad (6.20)$$

Такие ситуации обычно возникают при ламинарном режиме течения теплоносителя, так как при турбулентном естественная конвекция, как правило, подавлена вынужденною — вклад последней доминирует.

За пределами рассмотрения остались особенности естественной конвекции в *стесненных* условиях (т.е. в ограниченном пространстве: в щелях, трубах, узких каналах). Строго говоря, естественная конвекция здесь уже не является *свободной*. Эти вопросы детально анализируются в теплотехнической литературе и некоторых учебниках\*.

---

\* См. [3, 6, 7, 11, 18, 19].

### 6.4.5. Конвективная теплоотдача к шару

Тела сферической (или близкой к ней) формы часто фигурируют в задачах переноса. При расчете конвективного переноса теплоты или вещества необходимо располагать значениями коэффициента теплоотдачи  $\alpha$  (или массотдачи  $\beta$ ) к шару или от него. Последующий анализ имеет целью установить нижнюю границу  $\alpha$  и обосновать вид расчетных соотношений.

Будем рассматривать стационарный перенос теплоты от горячей среды с температурой  $t$  к находящемуся в ней холодному шару диаметром  $d$  (рис. 6.8). Пусть температура поверхности шара равна  $\theta$ . При обтекании шара потоком среды около него образуется тепловой пограничный слой — для простоты будем считать его сферическим (на рисунке — штриховая линия). В зависимости от условий движения среды диаметр этого модельного слоя примет некоторое значение  $d_c$ .

Поскольку, согласно принятой модели, теплота через сферический пограничный слой передается теплопроводностью, то поток теплоты в соответствии с (6.10) может быть представлен в виде

$$Q = \frac{2\pi\lambda(t - \theta)}{\frac{1}{d} - \frac{1}{d_c}}, \quad (\kappa)$$

где  $\lambda$  — теплопроводность среды (пограничного слоя).

Тот же поток в терминах и символах конвективного переноса по (6.13) записывается в виде

$$Q = \alpha d^2(t - \theta). \quad (\lambda)$$

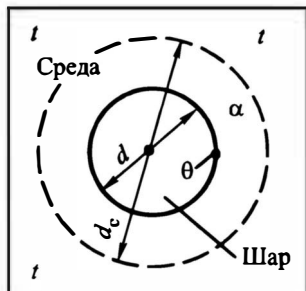
Приравнивая эти выражения, получим после сокращений

$$2\lambda / \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{d_c} \right) = \alpha d^2, \text{ откуда в безразмерной форме}$$

$$\frac{\alpha d}{\lambda} \equiv \text{Nu} = \frac{2}{1 - \frac{d}{d_c}}. \quad (6.21)$$

Если пограничный слой имеет неограниченную толщину  $d_c \rightarrow \infty$  (среда неподвижна либо движется около шара в сугубо ламинарном режиме), то число Нуссельта прини-

Рис. 6.8. К расчету интенсивности теплоотдачи от шара



маст наименьшее значение

$$Nu_{\min} = 2, \quad (6.21a)$$

откуда можно найти минимальное для шара значение коэффициента теплоотдачи  $\alpha_{\min}$ .

Реально, когда толщина пограничного слоя (а значит, и  $d_c$ ) *конечна*, теплоперенос более интенсивен; поэтому для большинства реальных задач расчет  $\alpha$  на основе (6.21a) дает ошибку “в запас”. Толщина ламинарного слоя около поверхности шара определяется критерием Рейнольдса  $Re = wd/\nu$ ; поэтому в расчетной формуле для  $Nu$  должно быть отражено влияние  $Re$ . В то же время необходимо осуществить переход от ламинарного слоя к тепловому — это делается с помощью  $Pr$ . При этом ограниченному диаметру пленки  $d_{пл}$  отвечают значения  $Nu > 2$ . Таким образом, полуэмпирические расчетные соотношения для конвективной теплоотдачи к шару (от шара) можно представить в общей форме:

$$Nu = Nu_{\min} + f(Re, Pr); \quad (6.22)$$

конкретно:

$$Nu = 2 + a_0 Re^{1/2} Pr^{1/3}, \quad (6.22a)$$

причем по данным разных исследователей численные значения  $a_0$  варьируются в пределах от 0,59 до 0,74.

Заметим, что аналогичным образом в конвективном *массопереносе* получают минимальные значения числа Шервуда  $Sh_{\min} = 2$ ; реальная интенсивность массоотдачи от шара к среде описывается соотношением типа (6.22a) — естественно, с заменой  $Pr$  на критерий Шмидта  $Sc$ .

## 6.5. ТЕПЛОПЕРЕНОС ПРИ КОНДЕНСАЦИИ ПАРА

Конденсация паров в химической технологии используется в целях собственно теплопереноса (нагревание какого-нибудь продукта за счет теплоты конденсации пара) либо она сопровождается (является составной частью) некий процесс (выпаривания, дистилляции и др.). Во всех этих случаях необходимо уметь рассчитать интенсивность теплопереноса; в случае конденсации ее представляют в терминах конвективного переноса теплоты, определяя коэффициент теплоотдачи  $\alpha$ .

Будем рассматривать стационарный процесс конденсации насыщенного пара на *вертикальной* поверхности — расчетная схема представлена на рис. 6.9. Пусть температура конденсирующегося пара равна  $T$ , энтальпия —  $H$ . Пар контактирует с более холодной стенкой — ее температура  $\theta_1 < T$ , поэтому и происходит конденсация. Образование пленки конденсата начинается с

Рис. 6.9. Расчетная схема теплоотдачи при конденсации паров:

*I* — конденсат, *II* — поверхность, *III* — пар (*κ* — пространственный контур для составления теплового баланса)

верхней кромки поверхности. Пленка стекает вниз (вдоль оси *z*), причем конденсация происходит по всей высоте поверхности *l*, так что толщина пленки постоянно нарастает сверху вниз (нижняя граница поверхности *z* = *l* на схеме не показана).

В целях упрощения анализа принимается ряд допущений. Основные из них:

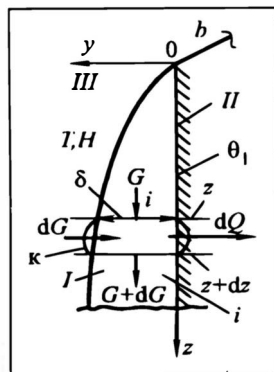
- температура поверхности  $\theta_1$  постоянна вдоль всей длины *l*;
- эффектом ускорения пленки за счет увеличения ее толщины (иначе — инерционными силами) можно пренебречь из-за малости ускорения в сравнении с гравитационным;
- температура пленки конденсата, а с ней и теплофизические свойства пленки постоянны по ее длине;
- трением пленки конденсата о пар можно пренебречь;
- пар не содержит примеси неконденсируемых газов;
- термическое сопротивление при переносе теплоты от конденсирующегося пара к пленке конденсата пренебрежимо мало, все термическое сопротивление сосредоточено в пленке конденсата;
- вследствие малой толщины пленки ее течение можно считать *плоским* (даже если на самом деле вертикальная поверхность криволинейна) и *ламинарным*, так что теплота переносится через пленку (от пара к стенке) путем теплопроводности.

Подчеркнем, что конденсация — один из немногих случаев, когда для определения  $\alpha$  может быть прямо использовано выражение (6.14); т.е. понятие о пограничном слое из модельного здесь становится реальным: толщина пленки конденсата  $\delta$  и есть  $\delta_r$ .

В основе анализа — тепловой баланс; пространственный контур “*κ*” ограничен сечениями *z* и *z* + *dz* (локальная толщина пленки здесь  $\delta$ ), стенкой и свободной поверхностью; ширина фрагмента поверхности (перпендикулярно плоскости чертежа) равна *b*; временной интервал — 1 с.

При составлении баланса потребуется знание массового потока конденсата *G* в сечении *z* и пара *dG* на участке *b**dz*. Они могут быть определены из найденных в разд. 2.4 закономерностей течения тонких пленок, но с учетом непостоянства (по длине поверхности) толщины пленки конденсата  $\delta = \delta(z)$ . Согласно (2.43), объемный поток жидкости равен

$$V = \frac{\rho g b \delta^3}{\mu 3},$$



откуда массовый поток (локальный — в сечении  $z$ ) будет

$$G = \rho V = \frac{\rho^2 g b}{\mu} \frac{\delta^3}{3},$$

а приращение этого потока на участке высотой  $dz$  составит

$$dG = \frac{\rho^2 g b \delta^2}{\mu} d\delta. \quad (a)$$

Здесь  $\rho$  и  $\mu$  — плотность и динамическая вязкость конденсата; в ходе последующего анализа в получаемых соотношениях будут еще фигурировать теплопроводность конденсата  $\lambda$ , его энтальпия  $i$ , а также теплота конденсации  $r$ .

Тепловой баланс в форме  $\text{Пр} - \text{Ух} = 0$  записывается (см. рис. 6.9) как

$$Gi + (dG)H - (G + dG)i - dQ = 0; \quad (б)$$

при этом через фрагмент поверхности  $b dz$  отводится поток теплоты  $dQ$ , прошедший через пленку конденсата толщиной  $\delta$ ; в терминах кондуктивного теплопереноса

$$dQ = \frac{\lambda}{\delta} (T - \theta_1) b dz.$$

Раскрывая скобки в (б), подставляя значение  $dQ$  и учитывая, что  $H - i = r$ , получим

$$r dG = \frac{\lambda}{\delta} (T - \theta_1) b dz,$$

а после подстановки  $dG$  по (а) и сокращений на  $b$ :

$$\frac{r \rho^2 g}{\mu} \delta^2 d\delta = \frac{\lambda}{\delta} (T - \theta_1) dz.$$

Разделим переменные  $\delta$  и  $z$ :

$$dz = \frac{r \rho^2 g \delta^3}{\mu (T - \theta_1) \lambda} d\delta \quad (в)$$

и возьмем интеграл с переменными верхними пределами; нижние пределы  $\delta = 0$  при  $z = 0$ ; тогда

$$z = \frac{r \rho^2 g}{\mu (T - \theta_1) \lambda} \frac{\delta^4}{4}.$$

Решая полученное равенство относительно  $\delta$ , найдем локальную (на расстоянии  $z$  от верхней кромки теплопередающей поверхности) толщину пленки конденсата:

$$\delta = \sqrt[4]{\frac{4 \mu (T - \theta_1) \lambda z}{\rho^2 g r}}. \quad (г)$$

Теперь можно рассчитать **локальный коэффициент теплоотдачи** в сечении  $z$ :

$$\alpha_z \equiv \frac{\lambda}{\delta} = \sqrt[4]{\frac{\lambda^3 \rho^2 r g}{4\mu(T - \theta_1)z}}. \quad (д)$$

В практических расчетах нас интересует **средний по всей высоте  $l$  коэффициент теплоотдачи**  $\alpha_{\text{конд}}$ :

$$\alpha_{\text{конд}} = \frac{1}{l} \int_0^l \alpha_z dz = \frac{1}{l} \sqrt[4]{\frac{\lambda^3 \rho^2 r g}{4\mu(T - \theta_1)}} \int_0^l z^{-1/4} dz = \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{\lambda^3 \rho^2 r g}{4\mu(T - \theta_1)l}}.$$

Окончательно для вертикальных (индекс “в”) поверхностей:

$$\alpha_{\text{конд}}^{\text{в}} = 0,943 \sqrt[4]{\frac{\lambda^3 \rho^2 r g}{\mu(T - \theta_1)l}}. \quad (6.23)$$

Теплофизические параметры  $\lambda$ ,  $\rho$ ,  $\mu$  здесь следовало бы брать при средней температуре пленки конденсата  $t_{\text{ср}} \approx (T + \theta_1)/2$ . Однако, приступая к расчету, мы, как правило, не располагаем значением  $\theta_1$ . Поэтому все физические параметры (для  $r$  это вполне правомерно) рекомендуется брать при известной температуре конденсации  $T$ ; вносимая при этом погрешность невелика: малая разница между  $t_{\text{ср}}$  и  $T$ , корень 4-й степени.

В выражении (6.23) нередко перед радикалом ставится множитель 1,15, что призвано отразить возможный *волновой* режим течения пленки конденсата (при достаточно протяженной поверхности и интенсивной теплоотдаче). Мы рекомендуем сохранить множитель  $0,943 \approx 0,94$  по следующим причинам:

— во-первых, термическое сопротивление на стадии конденсации невелико, так что различие в величинах  $\alpha_{\text{конд}}$ , рассчитанных с множителями 0,94 или 1,15, мало скажется на общей интенсивности теплопереноса;

— во-вторых, более низкие значения множителя и  $\alpha_{\text{конд}}$  могут в известной мере скомпенсировать принятые допущения, поскольку обеспечивают некоторый запас в расчете интенсивности теплоотдачи.

В химико-технологической практике конденсация пара весьма часто происходит на **наружной поверхности горизонтальных труб**. В этом случае анализ должен учитывать изменение наклона поверхности к вертикали при стекании пленки конденсата. Для *одиночной* круглой горизонтальной трубы наружным диаметром  $d_{\text{н}}$  такой анализ приводит к формуле

$$\alpha_{\text{конд}}^{\text{г}} = 0,72 \sqrt[4]{\frac{\lambda^3 \rho^2 r g}{\mu(T - \theta_1)d_{\text{н}}}}, \quad (6.24)$$

причем верхний индекс “г” означает “горизонтальный”.

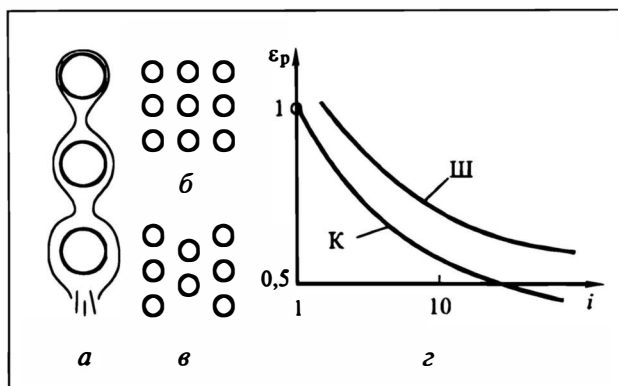


Рис. 6.10. Конденсация на наружной поверхности труб в трубных пучках:

*a* — увеличение толщины пленки конденсата в вертикальном ряду горизонтальных труб, *б* — коридорная компоновка труб в пучке, *в* — шахматная компоновка труб в пучке, *з* — коэффициент рядности для коридорных (К) и шахматных (III) пучков горизонтальных труб

Сходство формул (6.23) и (6.24) очевидно. В целях совместного последующего анализа удобно выделить комплекс теплофизических величин в форме

$$A_0 \equiv \sqrt[4]{\frac{\lambda^3 \rho^2 r g}{\mu}}, \quad (e)$$

а также более общий комплекс, не содержащий температурного напора  $T - \theta_1 = \Delta t$ , но включающий наряду с  $A_0$  множители 0,94 или 0,72 и вертикальную протяженность теплопередающей поверхности  $l$  или  $d_n$  (соответственно для вертикальных стенок и горизонтальных труб). Тогда указанные формулы могут быть представлены единым расчетным соотношением:

$$\alpha_{\text{конд}} = A / \sqrt[4]{T - \theta_1}. \quad (6.25)$$

Интенсивность теплообмена на наружной поверхности горизонтальных труб может иметь определенную специфику. Она не проявляется для одной трубы или нескольких, расположенных в одном горизонтальном ряду. Но она играет роль при расположении труб одна под другой (рис. 6.10, *a*), например в коридорных и шахматных пучках горизонтальных труб (рис. 6.10, *б, в*). Дело в том, что на поверхности любой трубы (кроме размещенных в верхнем ряду) движется пленка конденсата, не только образовавшегося в результате конденсации пара на этой трубе, но и стекающего с расположенных выше труб. Увеличение толщины пленки приводит, согласно (6.14), к понижению  $\alpha_{\text{конд}}$  для  $i$ -й трубы (отсчет сверху) при  $i > 1$ , т.е.  $\alpha_i < \alpha_1$ . Это относи-

тельное уменьшение коэффициента теплоотдачи выражают коэффициентом рядности  $\varepsilon_p \equiv \alpha_i / \alpha_1 \leq 1$ , причем равенство относится к верхнему ряду труб ( $i = 1$ ). Отличие  $\varepsilon_p$  от 1 больше для коридорных пучков труб, нежели для шахматных (рис. 6.10, з).

В связи с рассматриваемым эффектом в формуле (6.24), применительно к трубам в  $i$ -м ряду пучка горизонтальных труб, должен фигурировать корректирующий множитель  $\varepsilon_p^i$ :

$$(\alpha_{\text{конд}}^i)_{\text{пуч}} = \varepsilon_p^i \cdot 0,72 \sqrt[4]{\frac{\lambda^3 \rho^2 r g}{\mu(T - \theta_1) d_n}}; \quad (6.24a)$$

этот коэффициент должен быть также учтен в формуле (6.25), если рассматриваются пучки горизонтальных труб.

Специально подчеркнем, что значения  $\varepsilon_p^i$  на графиках типа приведенных на рис. 6.10, з относятся к *локальным* (в  $i$ -м ряду) коэффициентам теплоотдачи ( $\alpha_{\text{конд}}^i$ ); для получения усредненных коэффициентов по всему трубному пучку надо знать число труб в каждом горизонтальном ряду и рассматривать среднее значение  $(\alpha_{\text{конд}}^i)_{\text{пуч}}$  как средневзвешенную величину. Тем не менее в ряде распространенных учебников и учебных пособий\* воспроизводятся графики для локальных значений  $\varepsilon_p^i$ , но по ним ошибочно рекомендуют отсчитывать значения  $\varepsilon_p$ , средние для всего пучка. Поскольку операция усреднения  $\varepsilon_p^i$  весьма громоздка и неудобна, для расчета (с приемлемой для инженерных задач точностью) *средних* значений  $\varepsilon_p$  предлагается график — единый для коридорных и шахматных пучков. Он приведен в Приложении 6.1 (на рис. 6.18) с пояснениями к использованию.

В случае подачи на конденсацию **перегретого пара** (с температурой  $T_n$ ) к величине  $r$  в соотношениях (6.23) и (6.24) должна быть добавлена теплота перегрева пара  $c_n \Delta T$ , где  $c_n$  — теплоемкость пара,  $\Delta T = T_n - T$ . Формально это должно привести к некоторому (чаще всего — незначительному, поскольку  $c_n \Delta T$  значительно меньше  $r$ ) увеличению  $\alpha_{\text{конд}}$ . Однако при этом часть теплопередающей поверхности будет работать на охлаждение пара от  $T_n$  до  $T$ ; здесь теплопроводность пограничного слоя (пара!) будет намного ниже, чем в зонах конденсации, значит ниже будет и коэффициент теплоотдачи — на этих участках и в среднем. Дабы понизить этот негативный эффект, стараются приблизить перегретый пар к насыщенному состоянию — путем впрыскивания конденсата либо путем барботажного перегретого пара через кипящий конденсат.

Интенсивность теплоотдачи снижается, если в конденсирующемся паре содержатся **неконденсирующиеся газы**: поскольку их теплопроводность на порядок и более ниже, чем у пленки конденсата, резко уменьшается числитель в формуле (6.14). Это снижение весьма существенно; например, примесь воздуха к водяному пару в количестве 5% снижает  $\alpha$  в 5–7 раз. С целью поддержания теплоотдачи на высоком уровне в ряде технологических процессов специально периодически выводят неконденсирующиеся газы из зоны конденсации (вместе с некоторым количеством пара), восстанавливая таким способом высокую теплоот-

---

\* Например, в [8, 14].



дающую способность стадии конденсации. Практически проводят продувку, сдвигая в атмосферу накопившийся в зоне конденсации воздух (теряя при этом, конечно, некоторое количество водяного пара).

Применяя конденсирующийся пар в качестве теплоносителя (наиболее часто — это водяной пар), необходимо в целях экономии полностью использовать его теплоту конденсации, т.е. выпускать из теплообменника только конденсат. Для этого на выходе конденсата из теплообменного аппарата устанавливают специальное устройство — **конденсатоотводчик**<sup>\*</sup>, пропускающий только конденсат, но не пропускающий пар.

Присутствие в выражениях для  $\alpha_{\text{конд}}$  (6.23) — (6.25) температурного напора  $T - \theta_1$  нарушает линейность связи его с потоком теплоты  $Q$ ; это затрудняет использование понятия пропускной способности в расчетах теплопереноса с участием конденсации паров.

## 6.6. ТЕПЛОПЕРЕНОС ПРИ КИПЕНИИ ЖИДКОСТИ

Кипение жидкости в химической технологии используется (как и конденсация паров) непосредственно в целях теплопереноса либо составляет сущность технологического процесса (примеры таких процессов обозначены в разд. 6.5). Во всех этих случаях необходимо определить интенсивность теплопереноса; при кипении ее тоже представляют в терминах конвективной теплоотдачи.

Над свободной поверхностью любой жидкости существует определенное давление паров, возрастающее с температурой жидкости. Если давление паров ниже давления в пространстве над жидкостью, то происходит испарение жидкости со свободной поверхности. Если давление паров станет равным внешнему давлению, то *испарение* может происходить и внутри жидкости с образованием пузырей; такое испарение и называется **кипением**. Согласно сказанному выше, *кипению жидкости соответствует температура, при которой давление паров равно внешнему давлению*.

Будем рассматривать (рис. 6.11) горячую теплообменную поверхность с температурой  $\theta_2$ , омываемую жидкостью при температуре кипения  $t$ , разумеется,  $\theta_2 > t$ , так что теплота от стенки передается кипящей жидкости. На горячей поверхности (стенке) жидкость перегревается, возникают паровые пузырьки; они растут в размерах, отрываются от стенки и уходят в объем кипящей жидкости, а на стенке вновь зарождаются и растут пузыри.

Существуют различные представления о механизме теплопереноса при кипении жидкостей. Простейшее из них вполне укладывается в модель пограничного слоя; с этой позиции правомерно оперировать коэффициентом теплоотдачи  $\alpha_{\text{кип}}$ . Со-

---

<sup>\*</sup> Устройство и принцип работы конденсатоотводчиков см., например, в [3, 8, 16].

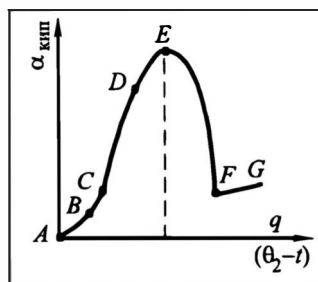
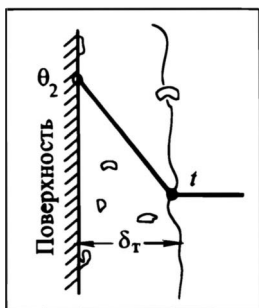


Рис. 6.11. Расчетная схема теплоотдачи при кипении жидкостей

Рис. 6.12. Изменение коэффициента теплоотдачи при кипении в зависимости от тепловой нагрузки и температурного напора

гласно такому представлению, отрывающиеся и мигрирующие в объем жидкости паровые пузыри турбулизируют жидкость вблизи теплопередающей поверхности. Это приводит к значительному уменьшению толщины теплового пограничного слоя  $\delta_T$  и, в соответствии с выражением (6.14), к росту  $\alpha_{\text{кип}}$ .

На рис. 6.12 демонстрируется общий характер изменения  $\alpha_{\text{кип}}$  с тепловой нагрузкой  $q$ ; аналогичный характер имеет зависимость  $\alpha_{\text{кип}}$  от температурного напора  $\theta_2 - t$  (различие будет лишь в масштабах по оси абсцисс). На участке  $AB$  при малых  $q$  и  $(\theta_2 - t)$  кипения нет, теплоотдача происходит за счет естественной конвекции, коэффициенты теплоотдачи невелики. Правее точки  $B$ , т.е. при более высоких  $q$  и  $(\theta_2 - t)$ , жидкость начинает кипеть, появляются пузырьки пара. На участке  $BC$  они возникают только на поверхности и с небольшой частотой — это пристеночное кипение с не очень существенным ростом  $\alpha_{\text{кип}}$ . Далее, с повышением  $q$  и  $(\theta_2 - t)$ , частота возникновения — отрыва и размеры пузырей нарастают (участок  $CD$ ), и наблюдается быстрый рост  $\alpha_{\text{кип}}$  — согласно модели пограничного слоя (благодаря уменьшению  $\delta_T$ ). Однако за пределами точки  $D$  рост  $\alpha_{\text{кип}}$  замедляется, интенсивность теплоотдачи проходит через максимум, после чего наблюдается резкое падение  $\alpha_{\text{кип}}$  (участок  $DEF$ ). Такой характер изменения  $\alpha_{\text{кип}}$  обусловлен слиянием большого числа пузырей в паровую пленку, блокирующую (поначалу — частично, а с ростом  $q$  — все в большей мере) теплопередающую поверхность от контакта с жидкостью. В результате пузырьковое кипение переходит в пленочное. А поскольку теплопроводность пара много меньше, нежели жидкости, то согласно (6.14) интенсивность теплоотдачи при этом должна понижаться. Слабый рост  $\alpha_{\text{кип}}$  правее точки  $F$  вызван

главным образом некоторым увеличением теплопроводности пара с температурой.

Тепловая нагрузка и температурный напор, отвечающие точке  $E$ , называются **критическими**:  $q_{кр}$  и  $(\theta_2 - t)_{кр}$ . Определение критических величин важно для энергетиков: превышение  $q_{кр}$  и  $(\theta_2 - t)_{кр}$ , сопровождающееся резким понижением  $\alpha_{кип}$ , чревато опасностью выхода из строя тепловых элементов энергетических установок (перегрев, перегор труб). В целях ориентировки: при кипении воды под атмосферным давлением  $q_{кр} \approx 10^3 \text{ кВт/м}^2$ ,  $(\theta_2 - t)_{кр} \approx 25^\circ \text{C}$ ,  $\alpha_{кип}^{кр} \approx 45 \cdot 10^3 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{K)}$ . Для химической технологии эти моменты менее актуальны, поскольку рабочая область нагрузок обычно на порядок ниже критических; однако во избежание падения интенсивности технологического процесса и здесь нужно контролировать рабочие значения  $q$  и  $(\theta_2 - t)$ , дабы не выйти за критический порог\*.

Теоретическое описание теплоотдачи при кипении — весьма сложная задача. Поэтому обычно обращаются к *эмпирическим соотношениям*, ограничиваясь областью тепловых нагрузок, интересных для той или иной практической сферы. Для химической технологии эта область лежит на участке  $CD$ , она охватывает диапазон  $q$  от 10 до  $100 \text{ кВт/м}^2$  (или несколько более). Эмпирические формулы удобно представить в виде степенных соотношений

$$\alpha_{кип} = Bq^n, \quad (a)$$

причем  $B$  отражает свойства кипящей жидкости. Показатель степени  $n$ , по разным данным, колеблется чаще всего в пределах  $0,6 - 0,75$ ; наиболее часто встречается  $n = 0,7$  — эта цифра принята для последующего анализа:

$$\alpha_{кип} = Bq^{0,7}. \quad (б)$$

В расчетном плане интенсивность теплоотдачи удобнее выражать в зависимости от температурного напора  $(\theta_2 - t)$ . Поскольку, согласно (6.3),  $q = \alpha \Delta t$ , то

$$\alpha_{кип} = B[\alpha_{кип}(\theta_2 - t)]^{0,7},$$

откуда

$$\alpha_{кип} = B_0 (\theta_2 - t)^{2,33}, \quad (6.26)$$

причем  $B_0 \equiv B^{1/0,3} = B^{3,33}$  — коэффициент, отражающий, как и  $B$ , свойства кипящей жидкости.

Значения  $B$  и  $B_0$  для каждой кипящей жидкости должны определяться экспериментально. При отсутствии опытных данных может быть предложен следующий прагматический путь их оценки. Детально изучают теплоотдачу к наиболее распространенному кипящему теплоносителю — воде и получают эмпи-

---

\* Сведения о  $q_{кр}$ ,  $(\theta_2 - t)_{кр}$  и способах их оценки приводятся в учебниках и монографиях по теплопереносу [7, 9, 11, 19] и др.

рические формулы, позволяющие рассчитать искомые параметры для воды  $B_{\text{в}}$  и  $B_{0\text{в}}$ . Затем проводят сравнительный эксперимент, изучая теплоотдачу к кипящим воде и интересующей нас жидкости при *одинаковых тепловых нагрузках*  $q$  (такой эксперимент достаточно прост). В результате получают **относительный коэффициент теплоотдачи**  $\varphi$ :

$$\left( \frac{\alpha_{\text{кип}}}{\alpha_{\text{кип в}}} \right)_{q=\text{idem}} = \varphi = \frac{Bq^{0,7}}{B_{\text{в}}q^{0,7}} = \frac{B}{B_{\text{в}}}, \quad (\text{в})$$

причем индекс “в” здесь и в последующих расчетных соотношениях относится к кипящей воде. Далее, очевидно:  $B = \varphi B_{\text{в}}$ .

Поскольку практические расчеты удобнее вести на основе температурных напоров, то

$$\left( \frac{\alpha_{\text{кип}}}{\alpha_{\text{кип в}}} \right)_{(\theta_2 - t) = \text{idem}} = \frac{B_0(\theta_2 - t)^{2,33}}{B_{0\text{в}}(\theta_2 - t)^{2,33}} = \frac{B_0}{B_{0\text{в}}} = \left( \frac{B}{B_{\text{в}}} \right)^{3,33} = \varphi^{3,33}. \quad (\text{г})$$

Таким образом, при известных  $B_{0\text{в}}$  и  $\varphi$  нетрудно определить значение  $B_0$  для рабочей жидкости:

$$B_0 = B_{0\text{в}}\varphi^{3,33} \quad \text{и} \quad \alpha_{\text{кип}} = B_{0\text{в}}\varphi^{3,33}(\theta_2 - t)^{2,33}. \quad (6.26\text{а})$$

Для определения величин  $B_{0\text{в}}$  и  $\varphi$  предложены различные формулы. Наиболее распространенные из них приведены ниже.

В диапазоне давлений от 0,007 до 0,5 МПа (это практически охватывает нужды химической технологии) в зависимости от давления  $p$  (выражено в барах):

— при кипении воды в большом объеме

$$B_{0\text{в}} = 40p^{0,57}; \quad (\text{д})$$

— при кипении восходящего потока воды в трубах теплообменных контуров

$$B_{0\text{в}} = 46p^{0,57}. \quad (\text{е})$$

Значения коэффициентов  $\varphi$  при кипении:

— индивидуальных веществ — в зависимости от значений критических давлений\*

$$\varphi = (p_{\text{кр}}/p_{\text{кр.в}})^{0,52}; \quad (\text{ж})$$

— индивидуальных веществ (в отсутствие сведений о  $p_{\text{кр}}$ ) и их смесей

$$\varphi = \left( \frac{M_{\text{в}}\rho}{M\rho_{\text{в}}} \right)^{0,47} \left( \frac{\mu_{\text{в}}}{\mu} \right)^{0,06}, \quad (\text{з})$$

где  $M$  — молярная масса,  $\rho$  — плотность жидкости,  $\mu$  — ее динамическая вязкость;

— водных растворов неорганических веществ

$$\varphi = \frac{M_{\text{в}}}{M} \left( \frac{\nu_{\text{в}}}{\nu} \right)^{0,23} \left( \frac{p}{p_{\text{s}}} \right)^{0,3}, \quad (\text{и})$$

где  $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости,  $p$  — рабочее давление,  $p_{\text{s}}$  — давление паров воды при температуре кипения раствора.

---

\* Критические давления для ряда распространенных веществ по [17] приведены в Приложении 6.2.

В формулах для  $\phi$  физические свойства воды и кипящих жидкостей берутся при их температурах кипения под атмосферным давлением.

Из выражений (6.26) и (6.26а) следует, что при кипении жидкостей, как и при конденсации паров, связь  $Q$  и температурного напора нелинейна, поскольку  $\alpha_{\text{кип}}$  зависит от  $(\theta_2 - t)$ . Это приводит к затруднениям в использовании концепции пропускных способностей.

## 6.7. ТЕПЛОТДАЧА ОТ ПОВЕРХНОСТИ В ПСЕВДООЖИЖЕННОМ СЛОЕ

Среди дисперсных систем с твердой фазой наибольший интерес в аспекте интенсивности теплопереноса представляет собой псевдоожигенный слой, в особенности — при псевдоожигении газами. Химико-технологические процессы (массоперенос, химические реакции), проводимые в псевдоожигенном слое, нередко сопровождаются выделением или поглощением теплоты, которую необходимо отвести из слоя (подвести в него). С этой целью *непосредственно в слое* размещают теплопередающую поверхность: коэффициенты теплоотдачи от слоя к поверхности  $\alpha_{\text{пс}}$  достаточно велики, так что удастся обойтись весьма компактными поверхностями.

Подчеркнем: здесь рассматривается теплоперенос *слой — поверхность*; вопросы межфазного теплообмена рассматриваются в разд. 7.11.

Коэффициент теплоотдачи  $\alpha_{\text{пс}}$  зависит прежде всего от скорости ожигающего агента  $w$  и его теплофизических свойств, а также от размера псевдоожигаемых твердых частиц. Типичная зависимость  $\alpha_{\text{пс}}$  от  $w$  представлена на рис. 6.13. В неподвижном слое ( $w$  ниже скорости начала псевдоожигения  $w_0$ ) интенсивность теплоотдачи невелика. При достижении  $w_0$  и ее превышении  $\alpha_{\text{пс}}$  быстро растет. Далее с повышением  $w$  он достигает максимального значения  $\alpha_{\text{max}}$  (при  $w = w_{\text{opt}}$ ) и затем начинает понижаться (обычно — весьма медленно). Заметим, что индекс *opt* (“оптимальный”) введен энергетиками; реально максимум  $\alpha_{\text{пс}}$  достигается при скоростях, совсем не обязательно оптимальных для технологического процесса. Ход

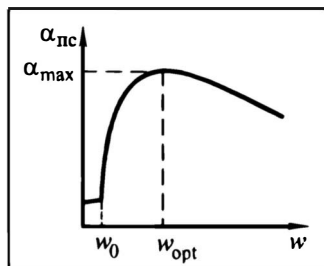


Рис. 6.13. Изменение коэффициента теплоотдачи  $\alpha_{\text{пс}}$  от поверхности к псевдоожигенному слою со скоростью газа  $w$

кривой  $\alpha_{\text{пс}}$  —  $w$  на рис. 6.13 характерен для газового псевдоожигения (неоднородный слой), при жидкостном псевдоожигении максимум  $\alpha_{\text{пс}}$  выражен слабее.

Характер изменения  $\alpha_{\text{пс}}$  от  $w$  качественно напоминает зависимость  $\alpha_{\text{кпл}}$  от температурного напора  $\theta_2 - t$  (см. разд. 6.6). Такое сходство обусловлено аналогией в механизме теплоотдачи в этих системах. В аспекте представлений о пограничном слое после перехода в псевдоожигенное состояние начинается интенсивное движение твердых частиц около теплопередающей поверхности, это приводит к уменьшению толщины теплового пристеночного пограничного слоя и возрастанию  $\alpha_{\text{пс}}$ . Однако при существенном повышении  $w$  поверхность в значительной мере блокируется газовыми пузырями, т.е. малотеплопроводной фазой (как и при кипении — паровой пленкой), и  $\alpha_{\text{пс}}$  снижается.

Более современные представления о механизме теплопереноса стенка—псевдоожигенный слой базируются на “пакетной модели”. В соответствии с нею определяющую роль в переносе теплоты играют неустойчивые образования твердых частиц — “пакеты”. В кратковременном контакте с горячей поверхностью пакет прогревается (за счет его *теплопроводности*), забирая от поверхности теплоту. Газовый пузырь, подойдя к поверхности, отбрасывает пакет в ядро псевдоожигенного слоя. После ухода пузыря от поверхности на его место приходит новый пакет частиц — так осуществляется перенос теплоты от поверхности к слою (или в обратном направлении). С увеличением скорости  $w$  повышается частота появления пузырей у поверхности (а с ней и частота смены пакетов) и уменьшается продолжительность контакта отдельного пакета с поверхностью — поэтому возрастает интенсивность теплоотдачи, т.е.  $\alpha_{\text{пс}}$ . При высоких скоростях  $w > w_{\text{орт}}$  газовых пузырей становится много, растет время их контакта с поверхностью и ее доля, занятая малотеплопроводными пузырями, — поэтому начинается снижение  $\alpha_{\text{пс}}$  с ростом  $w$ .

Описанный выше механизм отражает вклад кондуктивной составляющей  $\alpha_{\text{конд}}$  в общий теплоперенос  $\alpha_{\text{пс}}$ . Параллельно теплота передается непосредственно от газового потока к поверхности — конвективная составляющая  $\alpha_{\text{конв}}$ . В целом  $\alpha_{\text{пс}} = \alpha_{\text{конд}} + \alpha_{\text{конв}}$ .

В области мелких частиц (граница проходит вблизи размера  $d \approx 1$  мм) величина  $\alpha_{\text{пс}}$  уменьшается с увеличением  $d$ . Такой характер зависимости  $\alpha_{\text{пс}}$  от  $d$  не противоречит пакетному механизму теплопереноса.

Для мелких частиц вклад  $\alpha_{\text{конв}}$  мал, так как скорости газа не очень велики; определяющую роль в  $\alpha_{\text{пс}}$  играет  $\alpha_{\text{конд}}$ , а она уменьшается с ростом  $d$ . Для крупных частиц вклад  $\alpha_{\text{конв}}$  и  $\alpha_{\text{конд}}$  становится соизмеримым, а  $\alpha_{\text{конв}}$  растет со скоростью (для крупных частиц она выше); здесь возможен и рост  $\alpha_{\text{пс}}$  с  $d$ , особенно при  $d > 2 - 3$  мм.

Увеличение теплопроводности газа сопровождается закономерным возрастанием  $\alpha_{\text{пс}}$  — это наглядно следует из пленочного механизма теплопереноса [см. выражение (6.14)].

В литературе\* приводятся многочисленные расчетные формулы для  $\alpha_{\text{max}}$ ,  $w_{\text{орт}}$  и значений  $\alpha_{\text{пс}}$  на восходящей и нисходящей ветвях кривой  $\alpha_{\text{пс}}$  —  $w$ . Ниже представлены расчетные соотношения для  $w_{\text{орт}}$  и  $\alpha_{\text{max}}$ .

---

\* См., например, [4, 5].

Экспериментально установлено, что при псевдооживлении мелких частиц значения  $w_{\text{opt}}$  сдвинуты в сторону скоростей витания  $w_n$ , а крупных — в сторону скоростей начала псевдооживления  $w_0$ . Поэтому для оценки  $w_{\text{opt}}$  оказалось пригодным соотношение, составленное из фрагментов формул Тодеса для  $w_n$  (2.72) и  $w_0$  (2.71a):

$$\text{Re}_{\text{opt}} = \frac{w_{\text{opt}} d}{\nu} = \frac{\text{Ar}}{18 + 5,22\sqrt{\text{Ar}}}, \quad (\text{a})$$

причем  $d$  здесь — диаметр частиц (не теплообменных труб и других теплопередающих элементов).

Достаточно пологие максимумы на кривой  $\alpha_{\text{пс}} - w$  (т.е. невозможность четкой фиксации значения  $w_{\text{opt}}$ ) придают этой формуле оценочный характер; эксперимент позволяет считать такую оценку вполне удовлетворительной.

Для расчета  $\alpha_{\text{max}}$  в области достаточно мелких частиц (велик вклад  $\alpha_{\text{конд}}$ ) наиболее надежной является формула Забродского, учитывающая вклад диаметра частиц  $d$  и теплофизических свойств газа —  $\rho$  и  $\lambda$  (все величины — в СИ):

$$\alpha_{\text{max}} \approx (\alpha_{\text{конд}})_{\text{max}} = 35,7\rho^{0,2}\lambda^{0,6}d^{-0,36}. \quad (\text{б})$$

В области крупных частиц заметно сказывается вклад конвективной составляющей\*  $\alpha_{\text{конв}}$ , так что общий коэффициент теплоотдачи будет выше рассчитанного по формуле (б).

## 6.8. ПОРЯДОК КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕПЛООТДАЧИ

Инженер должен представлять себе *порядок* величин коэффициентов теплоотдачи для различных случаев теплопереноса. Это дает возможность:

— суметь сделать прикидочный расчет процесса, не располагая расчетными формулами и точными сведениями о значениях свойств веществ;

— оценить результаты расчетов, проведенных по теоретическим или эмпирическим формулам (их правильность, соответствие физическим представлениям);

— разумно принимать стартовые значения коэффициентов теплопереноса при итерационных расчетах (см. гл. 7).

В данном разделе приводятся *диапазоны преимущественных значений*  $\alpha$  для наиболее часто встречающихся ситуаций конвективного теплопереноса.

Для *воздуха умеренной* ("комнатной") *температуры* характерен следующий диапазон значений  $\alpha$ :

Ситуация	$\alpha$ , Вт/(м <sup>2</sup> ·К)
Естественная конвекция (например, от тепловой изоляции аппарата при температуре ее поверхности 40—50 °С)	5—12
Вынужденная конвекция (контакт со стенками труб и т.п.)	10—30
Вынужденная конвекция (теплообмен с поверхностью в слое насадки, неподвижном зернистом слое)	20—50
Псевдооживленный слой — поверхность	200—400

\* См. [5].

При использовании *других газов* (в том числе воздуха иной температуры) коэффициенты теплоотдачи при прочих равных эксплуатационных условиях зависят прежде всего от теплопроводности газа  $\lambda$ . Если индексом "взд" обозначить воздух умеренной температуры, а индексом "г" — газ, то приближенно

$$\frac{\alpha_g}{\alpha_{\text{взд}}} \approx \left( \frac{\lambda_g}{\lambda_{\text{взд}}} \right)^{2/3}. \quad (a)$$

Для *воды* (в жидком состоянии) при вынужденном ее движении внутри труб или при наружном их обтекании со скоростью 0,3—2 м/с коэффициент теплоотдачи будет в пределах  $\alpha = 1000 \div 3000 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ .

Для *водных растворов*  $\alpha$  зависит от концентрации растворенного вещества: при низкой концентрации  $\alpha$  мало отличается от характерного для воды; при увеличении концентрации изменение  $\alpha$  может быть значительным. Скажем, для водных растворов солей с ростом их концентрации  $\alpha$  снижается из-за увеличения вязкости раствора и сопутствующего утолщения пограничной пленки.

В случае *органических жидкостей*  $\alpha$  ниже, чем для воды, в 5—7 раз, поскольку у этих жидкостей в 4—5 раз ниже теплопроводность, к тому же примерно в 2 раза ниже теплоемкость.

Для *кипящей воды* в типичных технологических аппаратах и режимах характерны  $\alpha$  на весьма высоком уровне:  $\alpha = 5000 \div 10000 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ .

Для *кипящих водных растворов* неорганических веществ  $\alpha$  ниже, чем для воды, — для слабоконцентрированных снижение невелико, для высококонцентрированных — иногда весьма существенно. Здесь все определяется значением относительного коэффициента  $\phi$  (см. разд. 6.6).

Для *кипящих органических жидкостей* величины  $\alpha$  ниже, чем для воды — примерно на порядок — прежде всего из-за более низких значений теплопроводности  $\lambda$ ; здесь также все определяется в конечном счете значениями  $\phi$  — чаще всего для органических жидкостей они не выше 0,4.

В случае *конденсирующегося водяного пара* значения  $\alpha$  очень велики — на уровне 7000—20000  $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ .

При *конденсации паров органических веществ*  $\alpha$  ниже, чем в случае водяного пара, примерно на порядок. Причина ясна при рассмотрении формул (6.23), (6.24): у органических жидкостей (конденсата) существенно ниже, чем у воды, теплопроводность  $\lambda$  и теплота конденсации  $r$  (значения  $\rho$  и  $\mu$  — обычно сопоставимы); в ряде случаев на  $\alpha$  может заметно отразиться значение вязкости  $\mu$  — для некоторых органических жидкостей оно существенно выше, чем у воды.

Надо иметь в виду, что величины  $\alpha$  в некоторых режимах работы могут выходить за пределы указанных диапазонов, но ориентировку приводимые цифры дают.

## 6.9. ТЕПЛОПЕРЕНОС ИЗЛУЧЕНИЕМ

Лучистый теплоперенос в химических и смежных областях производства встречается реже и вносит чаще всего меньший вклад, чем кондукция и конвекция. Он важен прежде всего в ряде высокотемпературных процессов, а также в тех случаях, когда другие виды теплопереноса характеризуются низкой интенсивностью — тогда вклад лучистого переноса теплоты оказывается ощутимым (пример: потери теплоты от стенок изолированного аппарата в окружающую среду). По указанным при-



чинам проблемы лучистого теплопереноса изложены в учебнике достаточно лаконично\*, рассмотрены лишь наиболее существенные моменты.

### 6.9.1. Общие понятия

Из полного потока лучистой энергии  $Q_0$ , падающей на тело (рис. 6.14, а), часть  $Q_A$  — поглощается, другая,  $Q_R$ , — отражается, третья  $Q_D$  — проходит сквозь тело:

$$Q_0 = Q_A + Q_R + Q_D. \quad (a)$$

Отношение  $Q_A/Q_0 \equiv A$  характеризует *поглощательную* способность тела,  $Q_R/Q_0 \equiv R$  — *отражательную*,  $Q_D/Q_0 \equiv D$  — *пропускательную*; очевидно:

$$A + R + D = 1. \quad (b)$$

Каждая из безразмерных величин  $A$ ,  $R$ ,  $D$  может изменяться от 0 до 1 — при соответствующем изменении других величин, конечно.

Если  $A = 1$  ( $R = 0$ ,  $D = 0$ ), то тело поглощает всю падающую на него энергию; тогда оно называется **абсолютно черным**. Практически хорошо (не строго целиком, разумеется) излучение поглощают шероховатые поверхности (независимо от их цвета).

Если  $R = 1$  ( $A = 0$ ,  $D = 0$ ), то вся падающая на тело энергия отражается; при геометрически “правильном” полном отражении тело называют **зеркальным**, при диффузном — **абсолютно белым**. Практически хорошей отражательной способностью обладают гладкие (в особенности — полированные) поверхности — тоже независимо от их цвета.

Если  $D = 1$  ( $A = 0$ ,  $R = 0$ ), то тело абсолютно проницаемо для излучения — **прозрачно, диатермично**.

Значения  $A$ ,  $R$  и  $D$  зависят от природы тела, его температуры и, кроме того, от длины волн излучения. Для теплового излучения (длины волн в диапазоне от 0,4 до 40 мкм) твердые тела и жидкости (исключая очень тонкие их прослойки) практически непрозрачны — **атермичны**. Здесь

$$D = 0, \quad A + R = 1. \quad (b)$$

Из последнего равенства следует, что тела, хорошо поглощающие лучистую энергию, плохо ее отражают (и наоборот).

Интенсивность **собственного излучения** абсолютно черного тела  $E_0$  определяется законом Стефана—Больцмана (6.4). Для описания излучения реальных тел вводят понятие о **сером теле**, собственное излучение которого составляет определенную долю  $\varepsilon_c$  (если строго, то для всех длин волн — одинаковую) от

---

\* Подробнее см. [6, 7, 11 — 13, 19] и др.

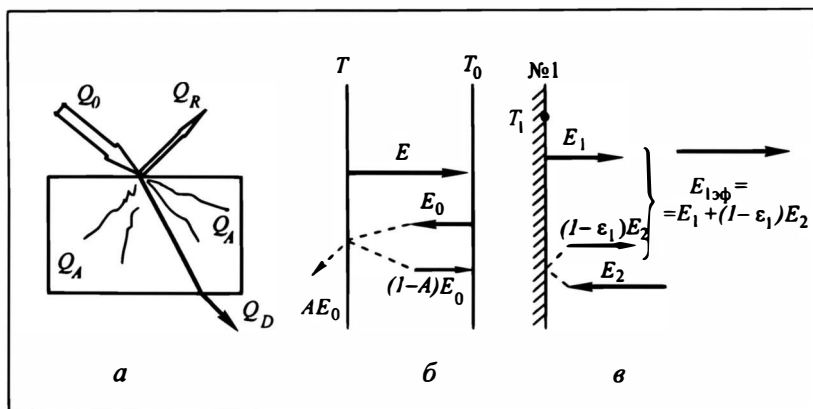


Рис. 6.14. К общим понятиям лучистого теплопереноса:

*а* — к взаимодействию тела с падающим на него лучистым потоком, *б* — к связи степени черноты и поглощательной способности, *в* — к понятию об эффективном лучистом потоке

излучения абсолютно черного тела. При этом величина  $\epsilon_c$ , называемая **степенью черноты**, зависит от природы излучающей поверхности, ее состояния, а также в определенной мере и от температуры. Конкретные значения  $\epsilon_c$  приводятся в литературе\*. С учетом степени черноты поток энергии, излучаемой телом,  $E = \epsilon_c E_0$ , так что

$$E = \epsilon_c \sigma_0 T^4, \quad (г)$$

причем в расчетах лучистого теплопереноса  $T$  — в градусах абсолютной шкалы (К).

Для установления связи  $\epsilon_c$  с характеристиками взаимодействия тела и лучистой энергии рассмотрим (рис. 6.14, б) две параллельные атермичные поверхности, расположенные так близко, что лучистый поток от одной из них обязательно попадает на другую. Пусть при этом одна поверхность абсолютно черная (ее температура  $T_0$ ), а другая — серая (ее температура  $T$ ). Поток лучистой энергии от серой поверхности  $E$  полностью поглощается абсолютно черной поверхностью, для которой по определению  $A = 1$ ,  $\epsilon_c = 1$ . В то же время часть лучистого потока от абсолютно черной поверхности  $E_0$ , попадая на серую поверхность, поглощается ею ( $AE_0$ ); оставшаяся часть  $(1 - A)E_0$  — отражается (и затем поглощается абсолютно черной поверхностью). Если, например,  $T > T_0$ , то для серой поверхности баланс теплоты (в расчете на  $1 \text{ м}^2$ ) запишется как разность отдаваемого и поглощаемого потоков:

$$q' = E - AE_0. \quad (д)$$

\* См., например, [11, 12, 14, 19].

Это выражение справедливо при *любых* значениях  $T$  и  $T_0$  — от этих температур зависят величины лучистых потоков теплоты  $E$  и  $E_0$ . В случае  $T = T_0$  устанавливается тепловое равновесие между телами и  $q' = 0$ . Тогда  $AE_0 = E$ , так что  $E/E_0 = A$ . Но это отношение выше было названо степенью черноты; таким образом,  $\varepsilon_c = A$ , и в последующем анализе одинаково правомерно оперировать символами  $\varepsilon_c$  либо  $A$ .

Поверхность тела не только сама излучает энергию, но и взаимодействует с падающим на него излучением, часть которого добавляется к собственному излучению тела. *Полный* поток лучистой энергии, складывающийся из *собственного* и *отраженного* потоков, называется **эффективным** излучением тела  $E_{\text{эф}}$ . Его можно найти из следующих соображений (рис. 6.14, в). Собственное излучение  $E_1$  поверхности №1 определяется ее температурой и физическими свойствами. Если извне на нее падает удельный поток лучистой энергии  $E_2$ , то отраженная часть этого потока составит  $(1 - \varepsilon_1)E_2$ , где  $\varepsilon_1$  — степень черноты поверхности №1. Тогда эффективный удельный поток от поверхности №1 составит

$$E_{1\text{эф}} = E_1 + (1 - \varepsilon_1)E_2. \quad (\text{е})$$

Это выражение используется ниже для определения интенсивности лучистого теплообмена между телами.

### 6.9.2. Лучистый теплоперенос между двумя телами

Задачу будем решать в наиболее простом варианте, рассматривая теплоперенос (рис. 6.15) между двумя равными по площади параллельными пластинами №1 и №2. Пластины обращены друг к другу излучающими сторонами, так что излучение с одной из них полностью попадает на другую. Удельный поток энергии от поверхности №1 обозначим  $E_{1\text{эф}}$ , от поверхности №2 —  $E_{2\text{эф}}$ . Удельный (на  $1 \text{ м}^2$ ) и полный (на всю поверхность  $F$ ) потоки лучистой энергии в единицу времени составляют

$$q = E_{1\text{эф}} - E_{2\text{эф}} \quad \text{и} \quad Q = qF = (E_{1\text{эф}} - E_{2\text{эф}})F. \quad (\text{ж})$$

Значения эффективных тепловых потоков определяются на базе формулы (е), однако с учетом того, что извне на каждую поверхность падают тоже *эффективные* лучистые потоки (скажем, на поверхность №1 поток  $E_{2\text{эф}}$ , а не  $E_2$ ). Поэтому

$$\begin{cases} E_{1\text{эф}} = E_1 + (1 - \varepsilon_1)E_{2\text{эф}}, \\ E_{2\text{эф}} = E_2 + (1 - \varepsilon_2)E_{1\text{эф}}. \end{cases}$$

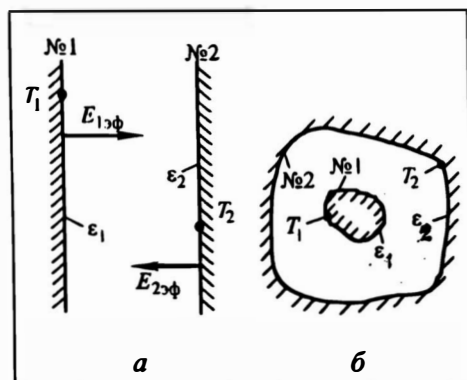


Рис. 6.15. Расчетные схемы к формулам теплопереноса излучением:  
 а — плоские параллельные поверхности, б — выпуклая и охватывающая поверхности

Решим эту систему, например, методом подстановки. Тогда

$$E_{1\text{эф}} = E_1 + (1 - \varepsilon_1)[E_2 + (1 - \varepsilon_2)E_{1\text{эф}}],$$

откуда

$$E_{1\text{эф}} = \frac{E_1 + E_2 - \varepsilon_1 E_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2}$$

и совершенно симметрично

$$E_{2\text{эф}} = \frac{E_1 + E_2 - \varepsilon_2 E_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2}.$$

Теперь возможно рассчитать  $q$  и  $Q$  по (ж); например, после очевидных сокращений

$$Q = \frac{\varepsilon_2 E_1 - \varepsilon_1 E_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2} F.$$

Подстановка сюда значений  $E_1$  и  $E_2$  по (г) дает

$$Q = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \sigma_0 T_1^4 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sigma_0 T_2^4}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2} F.$$

Это выражение для плоских параллельных поверхностей ( $F_1 = F_2 \equiv F$ ) принято представлять в виде

$$Q = \frac{\sigma_0 F (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$$

или в более лаконичной форме — с использованием понятия о

приведенной степени черноты  $\varepsilon_{\text{пр}}$ :

$$Q = \varepsilon_{\text{пр}} \sigma_0 F (T_1^4 - T_2^4), \quad (6.27)$$

где

$$\varepsilon_{\text{пр}} \equiv \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}. \quad (6.28)$$

Заметим, что в инженерных расчетах вместо величин  $T^4$  часто используют  $(T/100)^4$ , заменяя одновременно  $\sigma_0$  на  $C_0 \equiv \sigma_0 \cdot 10^8$ . Считают, что такая форма записи практически несколько удобнее.

Более общим случаем является теплообмен между телами произвольной формы — первым (выпуклым) площадью  $F_1$  и вторым, полностью его охватывающим, площадью  $F_2$ . В этом случае, если расчет базировать на поверхности  $F_1$ , расчетная формула записывается сходно\* с (6.27), однако приведенная степень черноты выражается иначе:

$$Q = \varepsilon_{\text{пр}} \sigma_0 F_1 (T_1^4 - T_2^4), \quad (6.27a)$$

$$\varepsilon_{\text{пр}} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{F_1}{F_2} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)}. \quad (6.28a)$$

Легко видеть, что при  $F_1 = F_2$  (случай равных плоских параллельных или очень близких криволинейных поверхностей) формула (6.28a) переходит в (6.28). Если же речь идет о потере телом теплоты в окружающее пространство за счет излучения, то, положив для этого пространства  $F_2 \rightarrow \infty$ , получим по (6.28a):  $\varepsilon_{\text{пр}} = \varepsilon_1$ ; далее расчет ведут с использованием формулы (6.27a), т.е. на основе поверхности  $F_1$ .

На практике нередко лучистый теплоперенос происходит одновременно с конвективным; пример: потери в окружающую среду от поверхности нагретого технологического аппарата — излучением, а также естественной конвекцией (с коэффициентом теплоотдачи  $\alpha_k$ ). В таких случаях иногда удобно произвести *подмену задачи*, записав теплоперенос излучением в манере конвективной теплоотдачи, т.е. ввести понятие о “коэффициенте теплоотдачи излучением”  $\alpha_{\text{л}}$ . Это делается путем формального приравнивания тепловых потоков, записанных в физически обоснованной форме (6.27) и в форме, принятой для конвективной теплоотдачи (6.13):

$$Q = \varepsilon_{\text{пр}} \sigma_0 F (T_1^4 - T_2^4) = \alpha_{\text{л}} F (T_1 - T_2),$$

откуда

$$\alpha_{\text{л}} = \frac{\varepsilon_{\text{пр}} \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4)}{T_1 - T_2}. \quad (3)$$

---

\* Громоздкость анализа, приводящего к формулам (6.27a), (6.28a), не позволяет привести его в учебнике; см. [7, 9, 11, 12].

Далее можно использовать в расчетах “суммарный” коэффициент теплоотдачи  $\alpha_k + \alpha_l$ .

Разумеется, в таком представлении связь  $Q$  и  $(T_1 - T_2)$  остается нелинейной, поскольку  $\alpha_l$  сложным образом зависит от уровней температуры и температурного напора.

### 6.9.3. Экранирование

Экраны в химической технологии, в энергетике, в металлургии чаще всего устанавливают, когда нужно понизить интенсивность лучистого теплопереноса *между теплообменными поверхностями или от поверхности к окружающей среде*. Кроме того, иногда наличие экрана присуще самой технологической системе. Во всех этих случаях необходимо уметь рассчитать воздействие экрана на интенсивность теплопереноса.

Подход к расчету эффекта экранирования рассмотрим (рис. 6.16) на примере стационарного лучистого теплопереноса для двух плоских параллельных поверхностей, между которыми расположен *тонкий* экран Э — его степень черноты  $\varepsilon_3$ . Температуры излучающих поверхностей —  $T_1$  и  $T_2$  (пусть  $T_1 > T_2$ ); температура обеих поверхностей экрана  $T_3$  — одинакова (так как экран тонкий). Согласно (6.27), лучистые потоки теплоты от горячей поверхности №1 к экрану и от него к более холодной поверхности №2 составят

$$Q_{31} = \varepsilon_{1пр} \sigma_0 F (T_1^4 - T_3^4) \quad \text{и} \quad Q_{32} = \varepsilon_{2пр} \sigma_0 F (T_3^4 - T_2^4), \quad (\text{и})$$

причем степени черноты определены выражениями типа (6.28):

$$\varepsilon_{1пр} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_3} - 1} \quad \text{и} \quad \varepsilon_{2пр} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_3} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}. \quad (\text{к})$$

В случае стационарного теплопереноса  $Q_{31} = Q_{32} \equiv Q_3$ . Используя уже известный прием (см. разд. 6.3.2), исключим неизвестную заранее величину  $T_3$ :

$$+ \left. \begin{aligned} T_1^4 - T_3^4 &= \frac{Q_3}{\varepsilon_{1пр} \sigma_0 F} \\ T_3^4 - T_2^4 &= \frac{Q_3}{\varepsilon_{2пр} \sigma_0 F} \end{aligned} \right\} \rightarrow T_1^4 - T_2^4 = \frac{Q_3}{\sigma_0 F} \left( \frac{1}{\varepsilon_{1пр}} + \frac{1}{\varepsilon_{2пр}} \right).$$

Отсюда

$$Q_3 = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_{1пр}} + \frac{1}{\varepsilon_{2пр}}} \sigma_0 F (T_1^4 - T_2^4) = \varepsilon_{пр.э} \sigma_0 F (T_1^4 - T_2^4). \quad (6.29)$$

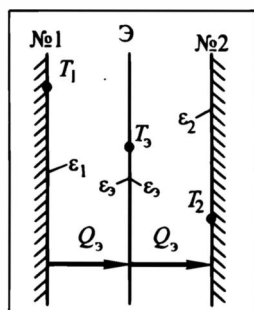


Рис. 6.16. Схема экранирования (плоский экран)

Для выявления эффекта экранирования следует сопоставить лучистые потоки теплоты без экрана и с экраном. При отсутствии экрана выражение (6.27) содержит множитель  $\epsilon_{\text{пр}}$ , рассчитываемый по (6.28). Раскроем значение соответствующего множителя в (6.29) при наличии экрана:

$$\epsilon_{\text{пр.э}} \equiv \frac{1}{\frac{1}{\epsilon_{1\text{пр}}} + \frac{1}{\epsilon_{2\text{пр}}}} =$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_3} - 1\right) + \left(\frac{1}{\epsilon_3} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1\right) + \frac{2}{\epsilon_3} - 1}. \quad (\text{л})$$

Очевидно, что  $\epsilon_{\text{пр.э}} < \epsilon_{\text{пр}}$ : знаменатель выражения (л) явно больше, нежели выражения (6.28), поскольку  $\epsilon_3 \leq 1$ . Это означает, что наличие экрана понижает интенсивность лучистого теплопереноса:  $Q_3 < Q$ , где  $Q$  — тепловой поток в отсутствие экрана. Для оценки степени этого понижения примем, что  $\epsilon_{1\text{пр}} = \epsilon_{2\text{пр}} = \epsilon_{\text{пр}}$ . Тогда  $\epsilon_{\text{пр.э}} = \epsilon_{\text{пр}}/2$ , и, следовательно,  $Q_3 = Q/2$  — установка одного экрана вдвое понизила интенсивность лучистого потока теплоты. Тот же анализ ситуации с двумя, с тремя, с  $N$  параллельными экранами приводит при одинаковых  $\epsilon_{\text{пр}}$  к соотношению

$$Q_{3N} = \frac{Q}{N+1}. \quad (\text{м})$$

Для системы тел, изображенных на рис. 6.15,б, с установкой экрана между телами (он охватывает меньшее из них) анализ усложняется. Его надо вести с учетом излучающих поверхностей  $F_1$ ,  $F_2$  и экранирующей поверхности  $F_3$  (причем  $F_1 < F_3 < F_2$ ). Ход анализа с использованием выражений типа (6.28а) аналогичен продемонстрированному выше.

#### 6.9.4. Об излучении газов\*

С проблемой излучения газов (значит и поглощения ими лучистой энергии) химическая технология встречается при осуществлении высокотемпературных процессов. Одно- и двух-

\* Подробнее см. [7, 9, 11, 12, 19].

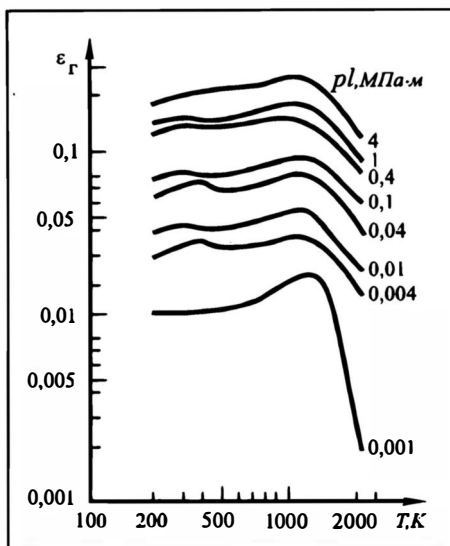
Рис. 6.17. Влияние основных факторов на степень черноты  $\text{CO}_2$

атомные газы — диатермичны (теплопрозрачны); однако трех- и многоатомные газы и пары обладают способностью теплоизлучения и теплопоглощения в определенных диапазонах длин волн (эти диапазоны зависят от природы газа, его температуры и давления). Пожалуй, наиболее часто в химической технологии приходится учитывать излучение-поглощение в среде водяного пара и диоксида углерода, а в процессах обжига — и диоксида серы.

Для технических расчетов лучистого теплопереноса между газом (чаще всего — горячим, температура  $T_r$ ) и телом (температура  $T_t$ , поверхность  $F$ , степень черноты  $\varepsilon_t$ ) феноменологически постулируют возможность использования формулы (6.27) с подстановкой в нее разности  $(T_r^4 - T_t^4)$  и приведенной степени черноты  $\varepsilon'_{пр}$ , отыскиваемой по соотношению типа (6.28):

$$\varepsilon'_{пр} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_r} + \frac{1}{\varepsilon_t} - 1}. \quad (6.30)$$

Нахождение  $\varepsilon_t$  затруднений не вызывает; проблема состоит в определении интегральной (результатирующей по всем волновым диапазонам) степени черноты газообразной среды  $\varepsilon_r$ , специфичной для каждого газа, пара и существенно изменяющейся с температурой. Кроме того, интенсивность излучения (поглощения) зависит от частоты взаимодействия теплового луча с молекулами (атомами) газообразной среды, значит от давления газа  $p$  и толщины газовой прослойки  $l$ ; обычно влияние этих факторов учитывают совместно — в виде произведения  $(pl)$ . На рис. 6.17 (на примере  $\text{CO}_2$ ) иллюстрируется влияние основных параметров\* на  $\varepsilon_r$ . Заметим, что для водяных паров значения  $\varepsilon_r$  заметно выше, чем для  $\text{CO}_2$ .



\* Подробнее см. [7, 9, 11, 12, 19].



Степень черноты смеси газов не является аддитивной величиной.

Более детальные диаграммы для определения  $\epsilon_r$  приведены в ряде учебников по теплопередаче\* и в справочной литературе\*\*.

#### ЛИТЕРАТУРА к главе 6

1. *Бретшнайдер С.* Свойства газов и жидкостей: Пер. с польск./ Под ред. П.Г. Романкова. М.—Л.: Химия, 1966. 536 с.
2. *Варгафтик Н.Б.* Справочник по физическим свойствам газов и жидкостей. М.: Физматгиз, 1963. 708 с.
3. *Гельперин Н.И.* Основные процессы и аппараты химической технологии. М.: Химия, 1981. 812 с.
4. *Гельперин Н.И., Айништейн В.Г., Кваша В.Б.* Основы техники псевдоожижения. М.: Химия, 1967. 664 с.
5. *Гельперин Н.И., Айништейн В.Г.* // Псевдоожижение, гл.Х "Теплообмен"/ Под ред. И.Ф. Дэвидсона, Д. Харрисона: Пер. с англ. / Под ред. Н.И. Гельперина. М.: Химия, 1974. 760 с.
6. *Гребер Г., Эрк С., Григуль У.* Основы учения о теплообмене: Пер. с нем./ Под ред. А.А. Гухмана. М.: ИЛ, 1958. 568 с.
7. *Исаченко В.П., Осипова В.А., Сухомел А.С.* Теплопередача. М.: Энергия, 1969. 440 с.
8. *Касаткин А.Г.* Основные процессы и аппараты химической технологии. М.: Химия, 1971. 784 с.
9. *Кутателадзе С.С.* Основы теории теплообмена. М.: Атомиздат, 1979. 416 с.
10. *Маньковский О.Н., Толчинский А.Р., Александров М.В.* Теплообменная аппаратура химических производств. Л.: Химия, 1976. 368 с.
11. *Михеев М.А.* Основы теплопередачи. М.—Л.: Госэнергоиздат, 1956. 392 с.
12. *Михеев М.А., Михеева И.М.* Основы теплопередачи. М.: Энергия, 1977. 342 с.
13. *Нацокин В.В.* Техническая термодинамика и теплопередача. М.: Высшая школа, 1980. 469 с.
14. *Павлов К.Ф., Романков П.Г., Носков А.А.* Примеры и задачи по курсу процессов и аппаратов химической технологии. Л.: Химия, 1987. 574 с.
15. *Перри Дж.* Справочник инженера-химика: Пер. с англ./ Под ред. Н.М. Жаворонкова. Л.: Химия, 1969. 1144 с.
16. *Плановский А.Н., Николаев П.И.* Процессы и аппараты химической и нефтехимической технологии. М.: Химия, 1972. 494 с.
17. *Рид Р., Шервуд Т.* Свойства газов и жидкостей: Пер. с англ./ Под ред. А.Н. Плановского. М.: Гостоптехиздат, 1964. 334 с.
18. Справочник по теплообменникам: Пер. с англ. / Под ред. О.Г. Мартыненко и др. М.: Энергоатомиздат, 1987. 913 с.
19. *Хоблер Т.* Теплопередача и теплообменники: Пер. с польск. / Под ред. П.Г. Романкова. Л.: Госхимиздат, 1961. 820 с.

---

\* Подробнее см. [7, 9, 11, 12, 19].

\*\* См., например, [15, 18].

## ПРИЛОЖЕНИЯ К ГЛАВЕ 6

### Приложение 6.1. К ОПРЕДЕЛЕНИЮ СРЕДНЕГО КОЭФФИЦИЕНТА РЯДНОСТИ ДЛЯ ПУЧКОВ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ТРУБ

Средний коэффициент рядности  $\epsilon_r$  для различных горизонтальных трубных пучков из  $N_T$  труб определяется по графику на рис. 6.18 в зависимости от среднего числа труб в вертикальном ряду  $n_r$ .

*Шахматному* расположению труб отвечает их размещение в трубных решетках по сторонам шестиугольника (или, что то же самое, в вершинах равностороннего треугольника), т.е. по схеме 1 на рис. 6.19. При большом общем числе труб  $N_T$  в свободном пространстве сегментов между цилиндрическим корпусом и внешним шестиугольником размещают дополнительные трубы (на схеме не показаны). *Коридорному* расположению отвечает размещение труб в углах квадрата, т.е. по схеме 2. Здесь обычно — менее развитые поверхности теплообмена  $F$ . Реже используется размещение труб по *концентрическим окружностям*.

При *шахматном* расположении труб (схема 1) значение  $n_r$  находят как среднеарифметическое из чисел труб на стороне шестиугольника ( $n_c$ ) и по его диагонали ( $n_d$ ):

$$n_r = \frac{n_c + n_d}{2}. \quad (\text{П6.1a})$$

При *коридорном* расположении труб значение  $n_r$  равно числу труб в вертикальном ряду, если оно в каждом ряду одинаково. В случае компоновки теплообменника с разным числом труб в вертикальных рядах (как показано на схеме 2) берут средневзве-

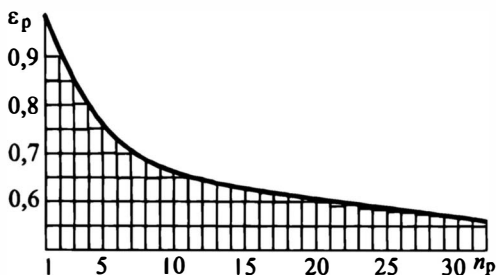


Рис. 6.18. Зависимость коэффициента рядности  $\varepsilon_p$  от среднего числа труб в вертикальном ряду ( $n_p$ )

шенное значение  $n_p$ :

$$n_p = n_{\min} + \left( \frac{n_{\max} + n_{\min}}{2} - 1 \right) \left( 1 - \frac{n_{\min}}{n_{\max}} \right). \quad (\text{П6.16})$$

В табл. П6.1 приведены геометрические характеристики пучков, необходимые для расчета среднего числа труб  $n_p$  в вертикальном ряду для обеих схем, представленных на рис. 6.19. Там же содержатся формулы, связывающие общее число труб  $N_T$  с характерными величинами (см. схемы 1 и 2):  $n_c$  и  $n_p$ ,  $n_{\max}$  и  $n_{\min}$ .

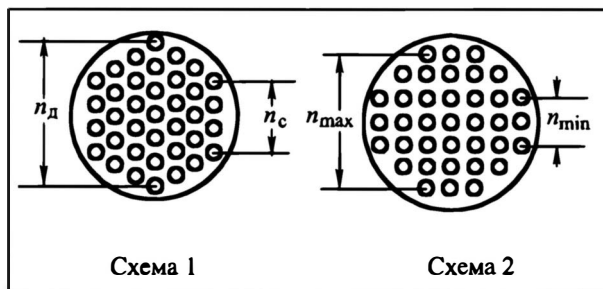


Рис. 6.19. Варианты размещения труб в теплообменнике

**Таблица Пб.1. Геометрические характеристики пучков труб  
в теплообменной аппаратуре**

Число труб при шахматном их расположении			Число труб при коридорном их расположении		
в пучке (не считая труб в сегментах) $N_T$	на стороне шестигульника $n_c$	по диагонали $n_d = 2n_c - 1$	в пучке $N_T$	минимальное в вертикальном ряду $n_{\min}$	максимальное в вертикальном ряду $n_{\max}$
7	2	3	5	1	3
19	3	5	12	2	4
34	4	7	21	3	5
61	5	9	37	3	7
91	6	11	52	4	8
127	7	13	69	5	9
169	8	15	97	5	11
217	9	17	120	6	12
271	10	19	145	7	13
331	11	21	185	7	15
397	12	23	216	8	16
469	13	25	264	8	18
547	14	27	357	9	21
631	15	29	$N_T = n_{\min} n_{\max} + 2[(n_{\max} - 2) + (n_{\max} - 4) + \dots + n_{\min}]$ <p>П р и м е ч а н и е. Нарастивание значений вычитаемого <math>a_i = 2, 4, 6 \dots</math> прекращается, и ряд обрывается при <math>n_{\max} - a_i = n_{\min}</math>.</p>		
721	16	31			
817	17	33			
919	18	35			
1026	19	37			
1141	20	39			
$N_T = 3n_c(n_c - 1) - 1$					

## Приложение 6.2. К РАСЧЕТУ ОТНОСИТЕЛЬНОГО КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛООТДАЧИ ПРИ КИПЕНИИ

*Таблица Пб.2, Критические давления для некоторых индивидуальных веществ\**

Вещество	$P_{кр},$ атм	Вещество	$P_{кр},$ атм	Вещество	$P_{кр},$ атм
Аммиак	111,5	Изопропанол	53,0	Уксусная кислота	57,1
Анилин	52,3	<i>n</i> -Крезол	50,8	Фенол	60,5
Ацетилен	61,6	<i>m</i> -Ксилол	36,0	Фреон-12	39,6
Ацетон	46,6	<i>o</i> -Ксилол	36,9	Хлор	76,1
Ацетонитрил	47,7	Метанол	78,5	Хлорбензол	44,6
Бензол	48,6	Метилформиат	59,2	Хлороводород	81,6
Бромбензол	44,6	Оксид азота	65,0	Хлорметил	65,9
Бромэтил	61,5	Пиридин	60,0	Хлороформ	54,0
Бутадиен	42,7	Пропан	42,0	Циклогексан	40,0
Вода	218,0	Пропанол	50,2	Тетрахлорид	
Гептан	27,0	Сероводород	88,9	углерода	45,0
Диметилвый эфир	53,0	Сероуглерод	76,0	Этилацетат	37,8
Диоксид серы	77,7	Триэтиламин	30,0	Этилбензол	38,0
Диэтиламин	36,6				

\* Поскольку в расчетную формулу (ж) для  $\phi$  в разд. 6.6 входит отношение критических давлений ( $P_{кр}/P_{кр,в}$ ), то в переходе от физических атмосфер к единицам СИ нет необходимости.

# ТЕПЛОПЕРЕДАЧА И ТЕПЛООБМЕН

Виды теплопереноса, рассмотренные в гл. 6, в реальных теплообменных аппаратах встречаются в различных сочетаниях в форме сложного теплопереноса. Его математическое описание определяется присутствием тех или иных видов переноса теплоты, способом их сочетания, направлением и структурой потоков теплоносителей, их агрегатным состоянием и характером изменения последнего, стационарностью или нестационарностью теплопереноса (или его элементарных актов), некоторыми особенностями теплообменных поверхностей и рядом других обстоятельств. Изучение основных закономерностей сложного теплопереноса является предметом настоящей главы. Первоначально в ней дана классификация теплообменников, затем последовательно рассмотрены теплопередача и теплообмен.

## 7.1. КЛАССИФИКАЦИЯ ТЕПЛООБМЕННИКОВ

Теплообменными аппаратами называют устройства для передачи теплоты от горячих сред (теплоносителей) к холодным. О назначении конкретных аппаратов говорят их названия: подогреватель, холодильник, испаритель, конденсатор, кристаллизатор, дистиллятор и т.д. — в общем, **теплообменник** (в некоторых процессах — **холодообменник**). Соответственно назначению различные теплообменники имеют свои особенности; нас здесь более всего интересуют *общие* моменты в их работе и методах расчета. Однако в отдельных разделах главы будут отмечены и особенности, присущие различным теплообменным аппаратам.

По *способам организации контакта* горячего и холодного теплоносителей различают следующие типы теплообменников.

**Рекуператоры** (поверхностные теплообменники). В них теплоносители, имеющие различные температуры, разделены теплообменной поверхностью. Можно сказать, что теплоносители здесь *разъединены в пространстве, но объединены во времени*. Теплообмен в рекуператорах может осуществляться как в периодическом (нестационарном) режиме, так и в непрерывном (стационарном). Рекуперативные теплообменники представлены в химической технологии наиболее широко.

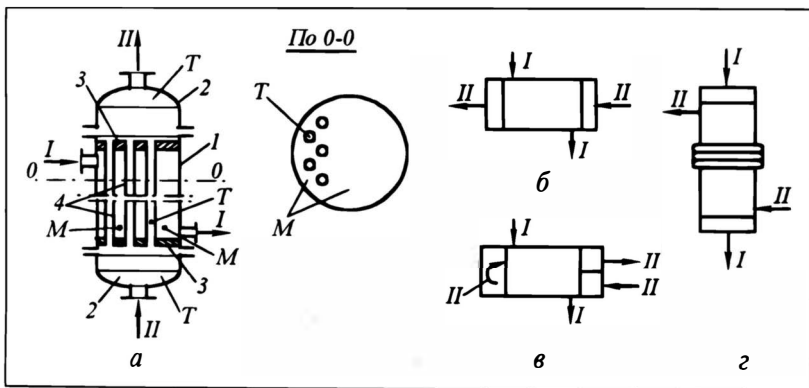


Рис. 7.1. Кожухотрубные теплообменники:

а — основные конструктивные элементы:

1 — корпус, 2 — крышки, 3 — трубные решетки, 4 — теплообменные трубки (Т — трубное пространство, М — межтрубное пространство; I и II — горячий и холодный теплоносители);

б—г — типичные схемы кожухотрубных аппаратов: б — одноходовой, в — двухходовой (по трубному пространству), г — с линзовым компенсатором термических напряжений

К простейшим рекуператорам относятся аппараты с **рубашками** и **змеевиками** (чаще всего это малопроизводительные аппараты *периодического* действия). К весьма простым аппаратам *непрерывного* действия относятся теплообменники типа “**труба в трубе**”, где один из теплоносителей движется по внутренней трубе, а другой — в кольцевом пространстве (между внутренней и наружной трубами).

Наиболее распространены в химической технологии **кожухотрубные** теплообменники (рис. 7.1,а). Здесь важно четко различать **трубное пространство** (в нем движется один теплоноситель) и **межтрубное** (другой теплоноситель). Трубное пространство отделено от межтрубного стенками труб и трубными решетками, в которых эти трубы закреплены. Трубное и межтрубное пространства *не сообщаются* друг с другом.

Кожухотрубные теплообменники могут быть вертикальными и горизонтальными. Один из простейших вариантов — **одноходовой** (по трубному и межтрубному пространствам) — схематически показан на рис.7.1,б. С целью повышения скорости потока теплоносителя, а также при необходимости применения более коротких труб используют **многоходовые** теплообменники; схема двухходового (по трубному пространству) теплообменника приведена на рис.7.1,в. При большой разнице температур корпуса и труб из-за различия в их температурных удлинениях могут возникнуть **термические напряжения**, приводящие к нарушению плотности закрепления труб в трубных решетках. Для уменьшения этих напряжений применяют различные компенсирующие устройства. Примером их могут служить **линзовые компенсаторы**, устанавливаемые на корпусе теплообменни-

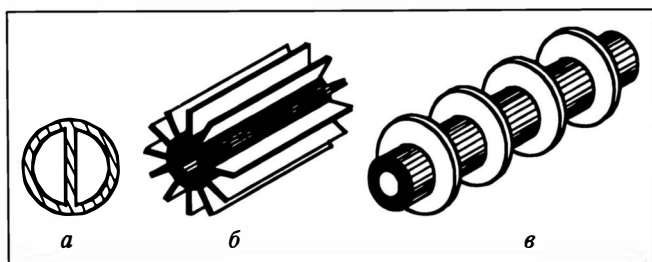


Рис. 7.2. Оребренные трубы:

*а* — внутреннее продольное ребро; *б* — наружные продольные ребра, *в* — наружные поперечные ребра

ка (рис. 7.1,з): линзы работают (как “тармошка”) не на сжатие – расширение, а на изгиб; с такого вида напряжением конструкция справляется легче. Существуют и другие способы компенсации температурных напряжений, а также конструкции, вообще свободные от них (теплообменники “с плавающей головкой”, штыковые).

При необходимости интенсификации теплопередачи и создания компактных теплообменников весьма широко применяют **ребристые поверхности**. На рис.7.2 показаны оребренные трубы, используемые при продольном (вид *б* — прямоток, противоток) и поперечном (вид *в* — перекрестный ток) движении теплоносителей. Цель здесь — развитие теплопередающей поверхности в зоне движения одного из теплоносителей — того, со стороны которого интенсивность теплоотдачи *ниже* и подлежит увеличению. Чаще всего применяют **наружное оребрение** труб, так как **внутреннее** (вид *а*) — сложнее в изготовлении, к тому же достигнутое здесь увеличение теплообменной поверхности сравнительно невелико.

При наружном оребрении внутрь трубы направляют поток теплоносителя, характеризующегося в рабочих условиях *более высокой* интенсивностью теплоотдачи к стенкам трубы.

**Регенераторы.** В рабочей зоне теплообменника размещают какую-либо насадку, играющую роль промежуточного аккумулятора теплоты (рис.7.3). Горячий и холодный теплоносители *попеременно* контактируют с насадкой, то нагревая ее, то охлаждая, при этом сами, соответственно, охлаждаясь и нагреваясь от нее. Можно сказать, что теплоносители здесь *объединены в пространстве, но разъединены во времени*. В качестве насадки используют материалы, химически инертные по отношению к теплоносителям. Форма и материал элементов насадки определяются целями и особенностями теплообмена в регенераторе: в ряде высокотемпературных процессов это обычно массивные, регулярно уложенные (с зазорами) кирпичи; засы-



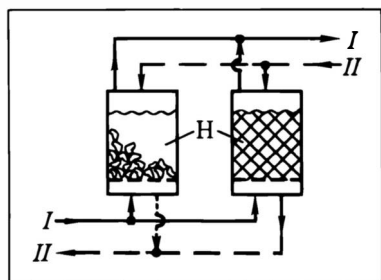


Рис. 7.3. Регенератор:

*I* и *II* — горячий и холодный теплоносители; Н — насадка

паннные навалом керамические кольца (в случае агрессивных сред); иногда — тонкая гофрированная лента из высокотеплопроводного материала (например, алюминия), свернутая спиралью в рулоны (в холодильных процессах), и др.

Процесс теплообмена в регенераторе в принципе нестационарен. Дабы не нарушать непрерывности технологического процесса в аппаратах до и после регенератора, устанавливают несколько (минимум — два) регенераторов параллельно с попеременным переключением потоков горячего и холодного теплоносителей: одни из них работают в данный момент в режиме нагрева насадки, другие — в режиме ее охлаждения; спустя некоторый промежуток времени регенераторы переключают, изменяя режим работы на противоположный.

**Контактные (смесительные) теплообменники.** Здесь теплоренос происходит при непосредственном соприкосновении теплоносителей (рабочих тел): они *объединены в пространстве и во времени*. Теплообмен возможен как в непрерывном, так и в периодическом режиме либо в некоторых промежуточных режимах. В качестве рабочих тел могут быть взяты газы или взаимно растворимые жидкости, если, конечно, в дальнейшем не требуется их раздельное использование. Чаше всего необходимо последующее раздельное использование теплоносителей; тогда могут быть выбраны только рабочие тела, легко отделяемые друг от друга: газ и жидкость, газ и твердые частицы и т.п.

В качестве примера контактного теплообменника на рис. 7.4 показан **пневможелоб** — аппарат с псевдооживленным слоем твердого материала. Горячий исходный твердый материал подается в аппарат (последний слабо наклонен к горизонту). Ожижающий агент (он же — холодный теплоноситель) — воздух. В ходе процесса твердый материал охлаждается, перемещаясь под уклон; воздух нагревается и выводится из аппарата сверху.

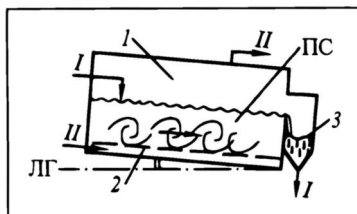
Контактные теплообменники нередко используются также в системах жидкость—газ, пар: барботаж газа (пара) через слой жидкости; теплообмен в скрубберах на насадке, орошаемой сверху жидкостью при подаче газа снизу; впрыск диспергированной жидкости в газовую среду (кстати, в среду другой жидкости — тоже, тогда это системы жидкость—жидкость).

Рис. 7.4. Смесительный теплообменник с псевдоожженным слоем:

1 — теплообменный аппарат (пневможелоб), 2 — газораспределительная решетка, 3 — промежуточный сборник твердого материала;

I — твердый материал, II — газ (воздух);

ЛГ — линия горизонта, ПС — псевдоожженный слой



Более детально конструкции разнообразных теплообменных аппаратов (упомянутых выше и других) и описание их работы приведены в учебной и справочной литературе\*.

## 7.2. ТЕПЛОПЕРЕДАЧА (ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ)

В соответствии с классификацией, установленной в гл. 6, под теплопередачей понимают перенос теплоты *нормально* к поверхности контакта. Это означает, что в рамках теплопередачи не рассматриваются эффекты, связанные с переносом теплоты *вдоль* теплопередающей поверхности с движущимися теплоносителями (от входа в теплообменник к его выходу); такой теплоперенос, именуемый теплообменом, изучается в разд. 7.5 и далее.

В процессе теплопередачи происходит взаимодействие отдельных стадий теплопереноса, рассмотренных в гл. 6. Строго говоря, последовательный кондуктивный перенос теплоты через многослойные стенки (когда складываются кондуктивные термические сопротивления) или параллельный перенос ее пакетами частиц и конвекцией в псевдоожженном слое (когда складываются проводимости  $\alpha_{\text{конд}}$  и  $\alpha_{\text{конв}}$ ) вполне можно отнести к теплопередаче.

Простейшие схемы стационарной последовательной и параллельной теплопередачи представлены на рис. 7.5.

В случае последовательного переноса один и тот же поток теплоты  $Q$  (или отнесенный к единице теплопередающей поверхности  $q = Q/F$ ) последовательно проходит через пограничный слой со стороны горячего теплоносителя (его температура  $T$ , коэффициент теплоотдачи  $\alpha_1$ ), стенку (толщина  $\delta_{\text{ст}}$ , коэффициент теплопроводности  $\lambda_{\text{ст}}$ ) и пограничный слой со стороны холодного теплоносителя (температура  $t$ , коэффициент теплоотдачи  $\alpha_2$ ). Разумеется, при контактной теплопередаче кондуктивный теплоперенос через стенку отсутствует, остаются лишь стадии конвективного переноса через пограничные слои.

\* См. [2, 5, 8, 14—16], а также отраслевые каталоги, нормали.

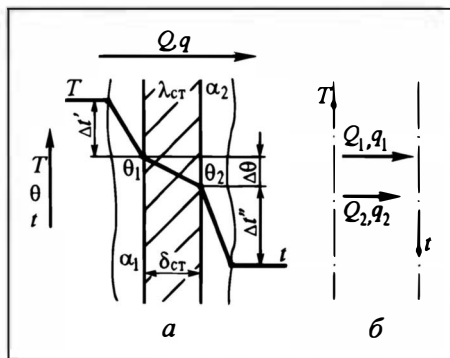


Рис. 7.5. Простейшие схемы теплопередачи:

*a* — последовательный перенос теплоты, *б* — параллельный перенос теплоты

В случае параллельного переноса тепла может передаваться различными потоками  $Q_1$  и  $Q_2$  под действием общего температурного напора — одинаковыми или разными механизмами. Это может быть, например,

кондуктивный поток через зоны различной теплопроводности или же потоки теплоты одновременно за счет естественной конвекции и излучения (теплопотери в окружающую среду от стенок нагретого аппарата).

Заметим, что технологические ситуации, связанные с *последовательным* теплопереносом и необходимостью его расчета, встречаются в химической технологии значительно чаще.

В основе анализа и расчета теплопереноса нормально к теплопередающей поверхности лежит **уравнение теплопередачи**, записываемое, как правило, в манере *конвективного* теплопереноса — см. (6.13):

$$Q = kF\Delta. \quad (7.1)$$

Однако в отличие от (6.13) здесь используются не частные температурные напоры  $\Delta t'$  или  $\Delta t''$  (рис. 7.5, *a*), а *полный*:  $\Delta = T - t$ . Соответственно в уравнение входят не частные коэффициенты теплоотдачи  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , а **коэффициент теплопередачи**  $k$ , зависящий от интенсивности теплопереноса на отдельных его стадиях ( $\alpha_1$ ;  $\alpha_2$ ;  $\lambda_{ст}$  и  $\delta_{ст}$ ). Этот коэффициент  $k$  представляет собой количество теплоты, передаваемой в единицу времени через единицу поверхности при *полном* единичном температурном напоре в 1 градус;  $k$  измеряется в  $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$  — в СИ.

Величину  $k$  трактуют как **удельную проводимость** поверхностной теплопередачи,  $1/k$  — **удельное термическое сопротивление** (но не для отдельной стадии, а для совокупности стадий в целом). **Пропускная способность** сложного процесса теплопередачи вводится обычным образом:

$$\frac{Q}{\Delta} = kF. \quad (7.2)$$

В случае отсутствия зависимости составляющих переноса (прежде всего коэффициентов теплоотдачи, а значит и  $k$ ) от

частных температурных напоров, т.е. при линейной связи  $Q$  и  $\Delta$ , концепция пропускных способностей для теплопередачи получает вполне четкую трактовку (см. ниже).

Знание коэффициентов теплопередачи необходимо при решении задач проектирования и эксплуатации:

— при проектировании — когда требуется найти теплообменную поверхность  $F$  при известных  $Q$  и  $\Delta$ ;

— при эксплуатации — когда при известной поверхности определяемой величиной обычно является  $Q$  или одна из температур.

Расчет коэффициента теплопередачи — одна из кардинальных задач поверхностного теплопереноса.

### 7.3. КОЭФФИЦИЕНТ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ

#### 7.3.1. Общая концепция коэффициента теплопередачи при последовательном теплопереносе

Будем рассматривать стационарную последовательную теплопередачу от горячего теплоносителя через стенку к холодному — в соответствии с рис. 7.5,а. Запишем поток теплоты на каждой стадии конвективного (по формулам типа 6.13) и кондуктивного (типа 6.6) теплопереноса с учетом характерных частных температурных напоров, считая стенку плоской:

$$Q = \alpha_1 F (T - \theta_1); \quad Q = \frac{\lambda_{\text{ст}}}{\delta_{\text{ст}}} F (\theta_1 - \theta_2); \quad Q = \alpha_2 F (\theta_2 - t); \quad (\text{a})$$

напомним, что  $\alpha_1 F$ ,  $\frac{\lambda_{\text{ст}}}{\delta_{\text{ст}}} F$  и  $\alpha_2 F$  — пропускные способности

отдельных стадий теплопереноса.

Для определения коэффициента теплопередачи  $k$  исключим промежуточные температуры  $\theta_1$  и  $\theta_2$  (они, как правило, не известны). С этой целью выразим из (а) частные разности температур и сложим их (этот прием уже применялся в гл. 6):

$$\left. \begin{aligned} T - \theta_1 &= \frac{Q}{\alpha_1 F} \\ + \theta_1 - \theta_2 &= \frac{Q}{(\lambda_{\text{ст}} / \delta_{\text{ст}}) F} \\ \theta_2 - t &= \frac{Q}{\alpha_2 F} \end{aligned} \right\} \rightarrow T - t \equiv \Delta = Q \left( \frac{1}{\alpha_1 F} + \frac{1}{(\lambda_{\text{ст}} / \delta_{\text{ст}}) F} + \frac{1}{\alpha_2 F} \right). \quad (\text{б})$$

Запишем равенство (б) в форме (7.1), решив его относительно  $Q$ :

$$Q = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 F} + \frac{1}{(\lambda_{\text{ст}} / \delta_{\text{ст}}) F} + \frac{1}{\alpha_2 F}} \Delta = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_{\text{ст}}}{\lambda_{\text{ст}}} + \frac{1}{\alpha_2}} F \Delta. \quad (\text{в})$$

Из сопоставления выражений (в) и (7.1) ясно, что

$$kF = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 F} + \frac{1}{(\lambda_{\text{ст}} / \delta_{\text{ст}}) F} + \frac{1}{\alpha_2 F}} \quad \text{и} \quad k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_{\text{ст}}}{\lambda_{\text{ст}}} + \frac{1}{\alpha_2}}. \quad (7.3)$$

Физический смысл этих выражений четче выявляется при сопоставлении обратных величин:

$$\frac{1}{kF} = \frac{1}{\alpha_1 F} + \frac{1}{(\lambda_{\text{ст}} / \delta_{\text{ст}}) F} + \frac{1}{\alpha_2 F} \quad \text{и} \quad \frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_{\text{ст}}}{\lambda_{\text{ст}}} + \frac{1}{\alpha_2}. \quad (7.3a)$$

Из (7.3a) видно, что *при последовательном переносе теплоты полное термическое сопротивление  $1/k$  равно сумме частных*. В терминах пропускных способностей: величина, обратная полной пропускной способности последовательного поверхностного теплопереноса  $1/(kF)$ , равна сумме обратных величин пропускных способностей стадий. Это означает, что величина, обратная пропускной способности теплопередачи в целом, *больше* любой из величин, обратных частной пропускной способности стадии. Следовательно, *сама полная пропускная способность при последовательном переносе меньше пропускной способности любой из стадий* (конвективных, кондуктивной). С позиций расчетной практики: коэффициент теплопередачи при последовательном теплопереносе *не может быть больше* какого-либо из коэффициентов теплоотдачи (или величины  $\lambda_{\text{ст}}/\delta_{\text{ст}}$ ). Это важно и в плане выбора способа интенсификации теплопередачи (см. разд. 7.9.2), а также для самоконтроля в практических расчетах.

В случае многослойной стенки подобный анализ, включающий рассмотрение двух конвективных стадий (с  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ ) и  $n$  кондуктивных (см. разд. 6.3.2), приводит к формуле

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}. \quad (7.36)$$

Следует указать, что эта формула справедлива лишь в случае плотного прилегания стенок — одна к другой. Реально между стенками могут существовать зазоры. Несмотря на малую их толщину (порядка сотых, редко — десятых долей

миллиметра), при заполнении малотеплопроводным газом (воздухом, например) они могут создавать заметные термические сопротивления, вполне соизмеримые с прочими, введенными в расчет (особенно если эти прочие сопротивления невелики). При измерении температур стенок такие “контактные сопротивления” проявляются (фиксируются приборами) в виде температурных скачков на границах стенок.

### 7.3.2. Расчет коэффициентов теплопередачи

**Коэффициент теплопередачи при вынужденном движении теплоносителей, не изменяющих агрегатного состояния.** Сохраняется линейная связь теплового потока  $Q$  и частных тепловых напоров, так что последние не влияют на частные коэффициенты теплоотдачи  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  (тем более на  $\lambda_{\text{ст}}/\delta_{\text{ст}}$ ). Коэффициент теплопередачи при этом также получается не зависящим от  $\Delta$ . В данном и некоторых других случаях возможно прямое использование формул (7.3) для расчета  $k$  и  $kF$ .

В рассматриваемом случае  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  определяются независимо — по эмпирическим (редко — по теоретическим) зависимостям, например, представленным в критериальной форме — типа (6.16), (6.17);  $\lambda_{\text{ст}}$  — по материалу труб (его выбирают с учетом свойств теплоносителей);  $\delta_{\text{ст}}$  — по сортаменту теплообменных труб.

Формулы (7.3), разумеется, остаются справедливыми и при изменении агрегатного состояния одного или обоих теплоносителей. Однако в случае конденсации паров  $\alpha_1$  зависит от  $\Delta t'$ , а в случае кипения жидкостей —  $\alpha_2$  от  $\Delta t''$ . При этом частные температурные напоры  $\Delta t'$  и  $\Delta t''$  не заданы *перед началом* расчета (их возможно найти *после* расчета  $k$ ); известен лишь полный температурный напор  $\Delta = T - t$ . Поэтому для изменяющегося агрегатного состояния хотя бы одного из теплоносителей при всей правомерности формул (7.3) ими нельзя прямо воспользоваться, необходимо искать иные пути. Эти соображения справедливы и для других случаев, когда какой-либо коэффициент теплоотдачи зависит от пристеночного температурного напора; например, при расчете теплотерь в окружающую среду в случае естественной конвекции  $\alpha$  зависит от движущей силы  $(\theta_2 - t)$ , входящей в критерий Грасгофа, а величина  $\theta_2$  для задачи эксплуатации и ряда задач проектирования заранее не известна.

Ниже на отдельных примерах показан путь расчета  $k$  для таких случаев.

**Коэффициент теплопередачи от конденсирующегося пара к вынужденному потоку теплоносителя, не изменяющего своего агрегатного состояния.** С целью получения расчетного выражения для  $k$  воспользуемся методом исключения промежуточных

(неизвестных!) температур. Первоначально выпишем тепловые потоки для отдельных стадий, учитывая, что, согласно (6.25),  $\alpha_{\text{конд}} \equiv \alpha_1 = A/(T - \theta_1)^{1/4}$ :

$$Q = \alpha_1 F (T - \theta_1) = AF (T - \theta_1)^{3/4};$$

$$Q = \frac{\lambda_{\text{ст}}}{\delta_{\text{ст}}} F (\theta_1 - \theta_2); \quad Q = \alpha_2 F (\theta_2 - t).$$

При этом  $\alpha_2$  определяется независимо, например на основе числа Нуссельта, найденного по соответствующей эмпирической формуле.

Решаем эти равенства относительно частных температурных напоров и исключаем промежуточные температуры  $\theta_1$  и  $\theta_2$ :

$$\left. \begin{aligned} T - \theta_1 &= \left( \frac{Q}{AF} \right)^{4/3} \\ + \quad \theta_1 - \theta_2 &= \frac{Q \delta_{\text{ст}}}{\lambda_{\text{ст}} F} \\ \theta_2 - t &= \frac{Q}{\alpha_2 F} \end{aligned} \right\} \rightarrow T - t = \Delta = \frac{Q}{F} \left( \frac{Q^{1/3}}{A^{4/3} F^{1/3}} + \frac{\delta_{\text{ст}}}{\lambda_{\text{ст}}} + \frac{1}{\alpha_2} \right),$$

откуда

$$Q = \frac{1}{\frac{Q^{1/3}}{A^{4/3} F^{1/3}} + \frac{\delta_{\text{ст}}}{\lambda_{\text{ст}}} + \frac{1}{\alpha_2}} F \Delta,$$

или, если по (7.1) заменить  $Q/F = k\Delta$ , то

$$Q = \frac{1}{\frac{k^{1/3} \Delta^{1/3}}{A^{4/3}} + \frac{\delta_{\text{ст}}}{\lambda_{\text{ст}}} + \frac{1}{\alpha_2}} F \Delta. \quad (\text{г})$$

Сопоставляя (г) с (7.1), имеем

$$\frac{1}{k} = \frac{k^{1/3} \Delta^{1/3}}{A^{4/3}} + \frac{\delta_{\text{ст}}}{\lambda_{\text{ст}}} + \frac{1}{\alpha_2} \quad \text{и} \quad k = \left( \frac{k^{1/3} \Delta^{1/3}}{A^{4/3}} + \frac{\delta_{\text{ст}}}{\lambda_{\text{ст}}} + \frac{1}{\alpha_2} \right)^{-1}. \quad (7.4)$$

Первое из этих соотношений позволяет, путем его сравнения с (7.3а), выявить физический смысл первого слагаемого в правой части: очевидно, это  $1/\alpha_1$ . Заметим, что в случае пучков горизонтальных труб в знаменателе этого слагаемого, соответственно (6.24а), дополнительно появится множитель  $\varepsilon_p$ .

Значение  $k$  по (7.4) легко определяется методом простой итерации при предварительно найденных  $\Delta$ ,  $A$ ,  $\alpha_2$  и известных

$\lambda_{\text{ст}}, \delta_{\text{ст}}$ . Заметим, что для отыскания  $A$  полезно предварительно оценить  $F$  по уравнению (7.1), задаваясь ориентировочным значением  $k$  (ниже меньшего  $\alpha$ , принятого по рекомендациям раздела 6.8). Это оценочное значение  $F$  позволяет по каталогам взять  $H$  или  $d_H$  и найти  $\epsilon_p$ , входящие в  $A$ , а также поперечное сечение трубного или межтрубного пространства, необходимое для расчета критерия Рейнольдса, далее числа Нуссельта и  $\alpha_2$ . Принятое ориентировочное значение  $k$  целесообразно использовать в качестве стартового при итерационном расчете коэффициента теплопередачи по второй из формул (7.4).

**Коэффициент теплопередачи от конденсирующегося пара к кипящей жидкости.** Подход к расчету  $k$  аналогичен предыдущему, но коэффициент теплоотдачи  $\alpha_2$  выражают по (6.26):  $\alpha_{\text{кип}} \equiv \alpha_2 = B_0(\theta_2 - t)^{2,33}$ , а если удобно, то по (6.26а) через  $\phi$ . Поток теплоты на отдельных стадиях:

$$Q = \alpha_1 F(T - \theta_1) = AF(T - \theta_1)^{3/4}; \quad Q = \frac{\lambda_{\text{ст}}}{\delta_{\text{ст}}} F(\theta_1 - \theta_2);$$

$$Q = \alpha_2 F(\theta_2 - t) = B_0 F(\theta_2 - t)^{3,33}.$$

Решаем эти равенства относительно частных температурных напоров и исключаем промежуточные  $\theta_1$  и  $\theta_2$ :

$$\left. \begin{aligned} T - \theta_1 &= \left( \frac{Q}{AF} \right)^{4/3} \\ + \quad \theta_1 - \theta_2 &= \frac{Q\delta_{\text{ст}}}{\lambda_{\text{ст}}F} \\ \theta_2 - t &= \left( \frac{Q}{B_0F} \right)^{0,3} \end{aligned} \right\} \rightarrow T - t = \Delta = \frac{Q}{F} \left( \frac{Q^{1/3}}{A^{4/3}F^{1/3}} + \frac{\delta_{\text{ст}}}{\lambda_{\text{ст}}} + \frac{Q^{-0,7}}{B_0^{0,3}F^{-0,7}} \right).$$

Отсюда после подстановки  $Q/F = k\Delta$  получаем

$$Q = \frac{1}{\frac{k^{1/3}\Delta^{1/3}}{A^{4/3}} + \frac{\delta_{\text{ст}}}{\lambda_{\text{ст}}} + \frac{k^{-0,7}\Delta^{-0,7}}{B_0^{0,3}}} F\Delta \quad (\text{д})$$

Сопоставляя (д) с (7.1), имеем

$$\frac{1}{k} = \frac{k^{1/3}\Delta^{1/3}}{A^{4/3}} + \frac{\delta_{\text{ст}}}{\lambda_{\text{ст}}} + \frac{k^{-0,7}\Delta^{-0,7}}{B_0^{0,3}}$$

и

$$k = \left( \frac{k^{1/3}\Delta^{1/3}}{A^{4/3}} + \frac{\delta_{\text{ст}}}{\lambda_{\text{ст}}} + \frac{k^{-0,7}\Delta^{-0,7}}{B_0^{0,3}} \right)^{-1} \quad (7.5)$$



Первое из этих соотношений при его сопоставлении с (7.3а) выявляет физический смысл третьего слагаемого в правой части: очевидно, это  $1/\alpha_2$ . Второе из выражений (7.5) является расчетным; как и в предыдущем случае,  $k$  определяют методом простой итерации — при предварительно найденных значениях  $\Delta$ ,  $A$ ,  $B_0$  и известных  $\lambda_{ст}$ ,  $\delta_{ст}$ . Здесь также полезно оценить поверхность теплопередачи  $F$  по ориентировочному значению  $k$ . Последнее целесообразно принять в качестве стартового  $k$  при итерационной процедуре расчета  $k$  по (7.5).

Такой же подход используется для расчета коэффициента теплопередачи от вынужденного горячего потока [здесь уже  $\alpha_1$  определяется независимо, например из уравнений типа (6.16)] к кипящей жидкости, от горячего теплоносителя к окружающей среде, а также в других технологических ситуациях, когда какой-нибудь частный коэффициент теплопереноса зависит от частного температурного напора.

Выше была рассмотрена теплопередача через чистые поверхности. В реально работающих теплообменниках на стенках (с одной или с обеих сторон) возможно появление отложений (*загрязнения*), создающих дополнительное термическое сопротивление, а значит — понижающих коэффициент теплопередачи. Этот негативный эффект учитывают одним из следующих способов:

— физически обоснованным введением дополнительного термического сопротивления  $r_3 = \delta_3/\lambda_3$  (здесь  $\delta_3$  — толщина отложений,  $\lambda_3$  — их теплопроводность); некоторые рекомендации к величинам  $\delta_3$  и  $\lambda_3$  (или сразу к  $r_3$ ) приводятся в справочниках\*; величина  $r_3$  присутствует в виде дополнительного слагаемого в уравнениях типа (7.3) и производных от него (7.4), (7.5) и т.п.:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_{ст}}{\lambda_{ст}} + \frac{\delta_3}{\lambda_3} + \frac{1}{\alpha_2}}; \quad (7.36)$$

— формальным уменьшением “рабочего” значения  $k$  в сравнении с рассчитанным по полученным выше соотношениям:

$$k_{раб} = (0,7 \div 0,9) k;$$

этот путь оправдан лишь слабой доступностью и невысокой достоверностью сведений о  $\delta_3$  и  $\lambda_3$ .

### 7.3.3. Коэффициент теплопередачи при параллельном теплопереносе

В случае параллельного переноса (рис. 7.5,б) тепловые потоки за счет разных механизмов — складываются (иногда — с учетом доли теплопередающей поверхности, отвечающей тому или иному механизму теплопереноса). Так, в случае потока теплоты от нагретой поверхности в окружающую среду одновременно работают механизмы естественной конвекции (коэф-

---

\* См., например, [5, 13, 14].

фициент теплоотдачи  $\alpha_{\text{е.к}}$ ) и излучения (эквивалентный коэффициент теплоотдачи  $\alpha_{\text{л}}$ ). В результате

$$Q = Q_{\text{е.к}} + Q_{\text{л}}; \quad q = q_{\text{е.к}} + q_{\text{л}}; \quad k = \alpha_{\text{е.к}} + \alpha_{\text{л}}. \quad (7.6)$$

В процессе передачи теплоты через зернистый слой, продуваемый газовым потоком, теплоперенос обычно представляют в терминах и символах кондукции, оперируя *эквивалентной теплопроводностью*:

$$\lambda_{\text{э}} = \lambda_{\text{конд}} + \lambda_{\text{конв}} + \lambda_{\text{л}}, \quad (7.7)$$

складывающейся из параллельно работающих кондуктивного, конвективного и лучистого механизмов переноса теплоты. Тогда в случае плоского зернистого слоя толщиной  $\delta$ , расположенного между параллельными пластинами, имеем

$$k \equiv \frac{\lambda_{\text{э}}}{\delta} = \frac{\lambda_{\text{конд}}}{\delta} + \frac{\lambda_{\text{конв}}}{\delta} + \frac{\lambda_{\text{л}}}{\delta}. \quad (7.7a)$$

Из приведенных примеров ясно, что *в случае параллельного переноса складываются проводимости, пропускные способности*. Поэтому результирующий коэффициент теплопередачи *не может быть меньше* любого из частных коэффициентов теплоотдачи (частных эффектов).

## 7.4. ОТДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ

Ниже представлены некоторые характерные примеры использования рассмотренных представлений о теплопередаче для решения отдельных химико-технологических задач.

### 7.4.1. Распределение температур в катализаторной зоне в круглой трубе

Среди задач химической технологии нередко встречаются связанные с гетерогенными химическими реакциями, отличающимися высокими тепловыми эффектами и проводимыми в непрерывном режиме при движении газа (жидкости) через неподвижный слой зерен катализатора. При этом катализаторная зона может иметь различную конфигурацию. Часто реакция протекает селективно (с минимумом побочных продуктов) и хорошими выходами лишь в определенном достаточно узком интервале температур; чтобы удержать процесс в этом температурном интервале, необходимо отводить теплоту экзотермической реакции (либо подводить — в случае эндотермической). Это делается с помощью теплоносителя снаружи катализаторной трубы — холодного или горячего, кипящего или конденсирующегося. Для грамотной организации такого процесса необходимо уметь рассчитывать температурное поле в катализаторной зоне, т.е. определять интенсивность переноса теплоты внутри слоя катализатора и между этим слоем и стенкой, ограничивающей зону катализатора. Это позволит, например, выбрать диаметр катализаторной трубки, рационально организовать теплосъем (теплоотвод) и т.п.

Будем рассматривать стационарный экзотермический процесс в круглой трубе радиусом  $R$ , заполненной слоем катализатора (рис. 7.6). В такой системе теплота реакции отводится через стенки трубы к теплоносителю — часто кипящей воде под давлением (величина давления позволяет воздействовать на уровень температур в катализаторной зоне). Пусть тепловой эффект в единицу времени на единицу объема катализаторного слоя равен  $q_V$ . Температуру в слое на радиальной координате  $r$  обозначим  $T$ , по оси слоя —  $T_0$ , на его внешней границе —  $T_R$ , на обращенной к слою стенке трубы —  $\theta$ , кипящего теплоносителя —  $t$ .

Для простоты полагаем, что вдоль катализаторной трубки температура не изменяется (иначе говоря, продольный перенос теплоты не рассматривается); обсуждается только изменение температур по радиальной координате. Теплота в сечении слоя катализатора переносится за счет кондукции (внутри зерен и в точках их соприкосновения) и конвекции (при движении синтез-газа между зернами); определенный вклад может вносить и излучение. Интенсивность теплопереноса удобно выражать, используя понятие эквивалентной теплопроводности — соответственно формуле (7.7). Коэффициент теплоотдачи от слоя катализатора к стенкам трубы обозначим  $\alpha$ .

Составляющая  $\lambda_{\text{конд}}$  зависит\* от теплопроводности материала зерен катализатора и еще более — от порозности слоя  $\epsilon_0$  и теплопроводности газа  $\lambda$ . Составляющую  $\lambda_{\text{конв}}$  обычно представляют в форме  $\lambda_{\text{конв}}/\lambda = B \text{Pe}$ , где  $\text{Pe} = \text{Re} \cdot \text{Pr}$ , а  $B$  находят\* в зависимости от отношения диаметров катализаторной трубки и зерна  $D/d$ , а также формы зерен; порядок  $B \approx 0,1$ . Составляющая  $\lambda_d$  в зернистом слое играет, как правило, подчиненную роль из-за относительно невысоких температур и многократного взаимного экранирования зерен. Коэффициент теплоотдачи от слоя к стенке  $\alpha$  определяют по эмпирическим и полуэмпирическим соотношениям\*.

В основу анализа положим уравнение стационарного теплопереноса в твердом теле с источником теплоты (1.21ж'), представив лапласиан в полярных координатах по (1.23б):

$$a_3 \left( \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} \right) + \frac{q_V}{c_p} = 0, \quad (\text{a})$$

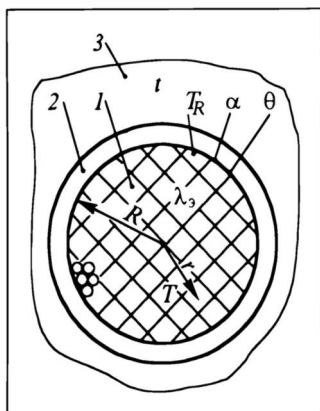
причем частные производные заменены обыкновенными, поскольку рассматривается (рис. 7.6) однонаправленный (по координате  $r$ ) перенос теплоты.

---

\* Зависимости типа  $\lambda_{\text{конд}}/\lambda = f(\epsilon_0, \lambda_g/\lambda)$ ,  $\lambda_{\text{конв}}/\lambda = f(\text{Pe})$  и значения  $B$  приведены в [1 — 3], формулы для  $\alpha$  — в [1, 2].

Рис. 7.6. К расчету температурного поля в каталитической зоне:

1 — слой катализатора, 2 — стенка трубки, 3 — зона кипящего теплоносителя



Раскроем значение  $a_3 \equiv \lambda_3/c\rho$  и, произведя в (а) очевидные сокращения, получим

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{q_V}{\lambda_3} = 0. \quad (7.8)$$

Для решения этого дифференциального уравнения обозначим  $U \equiv dT/dr$ . Тогда

$$\frac{dU}{dr} + \frac{U}{r} + \frac{q_V}{\lambda_3} = 0. \quad (6)$$

Перенесем последнее слагаемое в правую часть и домножим все члены равенства на  $rdr$ :

$$r dU + U dr = -\frac{q_V}{\lambda_3} r dr. \quad (в)$$

В левой части (в) стоит полный дифференциал  $d(Ur)$ , так что

$$d(Ur) = -\frac{q_V}{\lambda_3} r dr.$$

Интегрируем:

$$Ur = -\frac{q_V}{\lambda_3} \frac{r^2}{2} + C_1 \quad \text{и} \quad U \equiv \frac{dT}{dr} = -\frac{q_V}{2\lambda_3} r + \frac{C_1}{r}. \quad (г)$$

Разделяя в последнем равенстве переменные и интегрируя повторно, получаем

$$T = -\frac{q_V}{4\lambda_3} r^2 + C_1 \ln r + C_2. \quad (д)$$

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  находим из граничных условий:

— при  $r = 0$  по условию осевой симметрии температурного поля  $dT/dr = 0$ ; отсюда по второму из равенств (г) тождественно  $C_1 = 0$ ; это ясно и из (д): при  $r = 0$ ,  $C_1 \neq 0$ , иначе  $|T| \rightarrow \infty$ , что противоречит физическому смыслу рассматриваемого процесса;

— при  $r = R$  (внешние частицы каталитического слоя) действуют граничные условия III рода типа (о) в разд. 1.8.4; для участка трубы длиной  $l$

$$-\lambda_3 \frac{dT}{dr} 2\pi R l = \alpha (T_R - \theta) 2\pi R l; \quad (е)$$

Подставим в (е) производную  $dT/dr$  по (г) и  $T_R$  по (д) — в обоих случаях при  $r = R$  с уже установленным значением  $C_1 = 0$

$$-\lambda_3 \left( -\frac{q_V}{2\lambda_3} R \right) = \alpha \left( -\frac{q_V R^2}{4\lambda_3} + C_2 - \theta \right);$$

отсюда

$$C_2 = \theta + \frac{q_V R^2}{4\lambda_3} \left( 1 + \frac{2\lambda_3}{\alpha R} \right).$$

С найденными значениями  $C_1$  и  $C_2$  уравнение (д) температурного поля (профиль температур) в круглом сечении зернистого слоя катализатора запишется как

$$T = \theta + \frac{q_V R^2}{4\lambda_3} \left( 1 + \frac{2\lambda_3}{\alpha R} - \frac{r^2}{R^2} \right). \quad (7.9)$$

Температурный перепад в стенке трубы, как правило, очень мал. Если при этом теплота реакции снимается кипящей жидкостью (высокие коэффициенты теплоотдачи снаружи трубы), то температуру  $\theta$  без существенной погрешности можно принять равной температуре кипящей жидкости  $t_{\text{кип}}$ . В противном случае величину  $\theta$  придется рассчитывать с помощью уже известных уравнений теплопереноса либо оперировать величиной  $t_{\text{кип}}$  вместо  $\theta$  и коэффициентом теплопередачи  $k$  вместо  $\alpha$ .

Формула (7.9) позволяет решать конкретные эксплуатационные и проектные задачи. В частности,

— температура на оси трубки ( $r = 0$ ):

$$T_0 = \theta + \frac{q_V R^2}{4\lambda_3} \left( 1 + \frac{2\lambda_3}{\alpha R} \right); \quad (7.9a)$$

— температура в слое катализатора на его границе со стенкой ( $r = R$ ):

$$T_R = \theta + \frac{q_V R}{2\alpha}; \quad (7.9б)$$

— температурный интервал в слое катализатора:

$$\Delta T \equiv T_0 - T_R = \frac{q_V R^2}{4\lambda_3}; \quad (7.9в)$$

— температурный скачок на границе слоя катализатора со стенкой:

$$T_R - \theta = \frac{q_V R}{2\alpha}; \quad (7.9г)$$

— максимальный размер катализаторной трубки при максимально допустимом температурном интервале  $\Delta T$ :

$$R = \sqrt{\frac{4\lambda_3 \Delta T}{q_V}}, \quad d = 2R. \quad (7.9д)$$

#### 7.4.2. Перенос теплоты через стержень бесконечной длины

На примере приведенной ниже относительно простой задачи можно продемонстрировать подход к решению ряда более сложных задач, встречающихся в химической технологии и энергетике (в частности, о теплопереносе к оребренным поверхностям при различной конфигурации ребер).

Будем рассматривать стационарный теплоперенос через тонкий твердый стержень известной теплопроводности  $\lambda_\tau$ , постоянных сечения  $f$  и периметра  $\Pi$ , закрепленный своим основанием в некой стенке (рис. 7.7,а). Температура в основании стержня  $T_0$  поддерживается постоянной. Стержень омывается потоком среды постоянной температуры  $t$  (пусть для определенности  $t < T_0$ , значит меньше и температуры в любой точке стержня  $t < T$ , так что стержень отдает теплоту). Коэффициент теплоотдачи от стержня к среде  $\alpha$  постоянен и известен. Стержень — *тонкий* в тепловом отношении; это означает, что в его поперечном сечении отсутствует перепад температуры, она изменяется только по длине стержня  $x$ . Требуется установить закон изменения температуры стержня  $T(x)$  и потоки теплоты (через сечение  $f$ ; от стержня к среде) на любой координате  $x$ , направленной вдоль стержня и отсчитываемой от его основания.

Для отыскания зависимости  $T(x)$  выделим на координате  $x$  элемент протяженностью  $dx$  и запишем для элементарного контура “к” тепловой баланс — он будет характеризоваться отсутствием Источников, Стоков и Накопления теплоты. Приход за счет теплопроводности в левое сечение контура составит  $-\lambda_\tau(dT/dx)f$ ; Уход — тоже за счет теплопроводности из правого сечения:

$$-\lambda_\tau \frac{d}{dx} (T + dT)f = -\lambda_\tau \left( \frac{dT}{dx} + \frac{d^2T}{dx^2} dx \right) f;$$

Уход за счет конвекции в поток среды равен  $\alpha(T - t)\Pi dx$ . В целом

$$-\lambda_\tau \frac{dT}{dx} f - \left[ -\lambda_\tau \left( \frac{dT}{dx} + \frac{d^2T}{dx^2} dx \right) f \right] - \alpha(T - t)\Pi dx = 0. \quad (\text{ж})$$

В целях сокращения записи удобно обозначить  $T - t \equiv \theta$  (при этом из-за постоянства  $t$  очевидно  $dT = d\theta$ ). Тогда после простых преобразований получим из (ж)

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{\alpha\Pi}{\lambda_\tau f} \theta = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\theta \equiv T - t = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}, \quad (3)$$

где  $m$  — корень характеристического уравнения  $m^2 - \alpha\Pi/(\lambda_\tau f) = 0$ , так что  $m_{1,2} = \pm \sqrt{\alpha\Pi/(\lambda_\tau f)}$ .

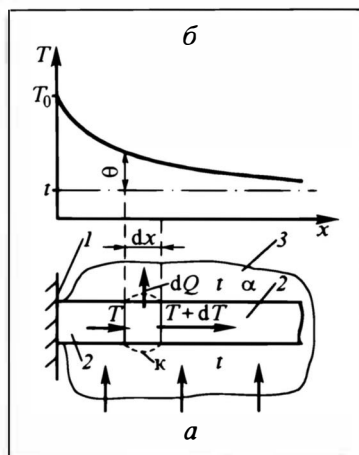


Рис. 7.7. Теплопередача через бесконечно длинный стержень:

*a* — расчетная схема: 1 — основание стержня, 2 — стержень, 3 — среда ( $\kappa$  — контур);  
*б* — температурный профиль

Значение постоянной интегрирования  $C_1$  определяем из граничного условия: при  $x \rightarrow \infty$ ,  $\theta \neq \infty$ ; это условие соблюдается лишь при  $C_1 = 0$ .

Значение постоянной  $C_2$  определим из граничного условия в основании стержня: при  $x = 0$ ,  $\theta = \theta_0 = T_0 - t$ ; тогда из (3) при  $C_1 = 0$  имеем  $C_2 = \theta_0$ .

С найденными значениями  $C_1$  и  $C_2$  выражение (3) принимает вид

$$T - t = (T_0 - t)e^{-mx}, \quad (7.10)$$

где  $m \equiv \sqrt{\alpha \Pi / (\lambda_{\tau} f)}$ .

Характерный вид этой зависимости изображен на рис. 7.7, б.

Поток теплоты вдоль стержня в любом поперечном сечении на координате  $x$  может быть представлен в форме Прихода (либо Ухода):  $Q(x) = -\lambda_{\tau} \left( \frac{dT}{dx} \right)_x f$ . Поскольку из (7.10) произ-

водная  $dT/dx = -(T_0 - t)m e^{-mx}$ , то

$$Q(x) = \lambda_{\tau} (T_0 - t) m e^{-mx} f = (T_0 - t) \sqrt{\lambda_{\tau} \alpha \Pi f} e^{-mx}. \quad (7.11)$$

Полное количество теплоты  $Q$ , отдаваемое стержнем среде в единицу времени, может быть рассчитано двумя путями:

— как поток теплоты  $Q(x)$  в сечении  $x = 0$ , поскольку вся теплота, поступающая через основание стержня, в конечном счете отдается среде; тогда по (7.11) при  $x = 0$

$$Q = Q_0 = (T_0 - t) \sqrt{\lambda_{\tau} \alpha \Pi f}; \quad (7.11a)$$

— как интегральный поток теплоты от стержня к среде; на выделенном элементарном участке:

$$dQ = \alpha (T - t) \Pi dx = \alpha (T_0 - t) \Pi e^{-mx} dx;$$

тогда по всей длине стержня

$$Q = \alpha (T_0 - t) \Pi \int_0^{\infty} e^{-mx} dx = \frac{\alpha (T_0 - t)}{m} \Pi e^{-mx} \Big|_0^{\infty},$$

и при подстановке пределов и значения  $m$  получается формула (7.11a).

Если стержень имеет конечную длину или более сложную конфигурацию (трапециевидную, кольцевидную и т.д.), то при сохранении подхода в общем — конкретные решения получаются значительно более сложными\*.

### 7.4.3. Критическая и целесообразная толщина тепловой изоляции

Тепловая изоляция предназначена для снижения теплопотерь труб и аппаратов (чаще всего — цилиндрических), в холодильных процессах — для снижения притока теплоты к аппаратам извне. Смысл изоляции — в понижении пропускной способности поверхностного теплопереноса путем создания дополнительного кондуктивного термического сопротивления за счет слоя малотеплопроводного материала на стенках аппарата (рис. 7.8,а). Изоляционные материалы обычно отличаются низкой плотностью, они содержат воздушные прослойки и полости (шлаковата, пенобетон, вспученные материалы типа перлита, различные засыпки).

Расчет теплопотерь для изолированного в тепловом отношении объекта ведется по той же канве, что и для плоской стенки (см. разд. 7.3.1), но с учетом кривизны, как это было сделано для цилиндрических многослойных неплоских стенок (см. разд. 6.3.3), поскольку толщина слоя изоляции нередко сопоставима с радиусом ее кривизны.

Пусть внутренний диаметр трубы или аппарата равен  $d_1$ , наружный —  $d_2$ , слоя изоляции —  $d_n$ ; температура горячего теплоносителя внутри трубы —  $T$ , на ее внутренней стенке —  $\theta_1$ , на наружной —  $\theta_2$ , на границе слоя изоляции со средой  $\theta_n$ , в среде —  $t$ . Коэффициент теплопроводности материала стенки —  $\lambda_{ст}$ , изоляции —  $\lambda_n$ . Коэффициенты теплоотдачи к внутренней и от наружной стенок трубы равны  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . В целях упрощения будем считать  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  известными и найденными. Для  $\alpha_1$  это обычно оправданно [расчетные формулы типа (6.16)]; для  $\alpha_2$  — не всегда: если в некоторых проектных задачах температура  $\theta_2$  задана (по условиям техники безопасности, например), то  $\alpha_2$  определяется по формулам типа (6.19) на основе рассчитанного критерия Gr; в других случаях могут возникнуть затруднения в определении  $\alpha_2$ .

Запишем поток теплоты от участка трубы длиной  $l$  по отдельным стадиям:

— от теплоносителя к внутренней поверхности стенки трубы:  $Q = \alpha_1(T - \theta_1)\pi d_1 l$ ;

— через стенку трубы — по (6.8):  $Q = \frac{2\pi/\lambda_{ст}}{\ln(d_2/d_1)} (\theta_1 - \theta_2)$ ;

— через слой изоляции (аналогично):  $Q = \frac{2\pi/\lambda_n}{\ln(d_n/d_2)} (\theta_2 - \theta_n)$ ;

— от поверхности слоя изоляции к среде:  $Q = \alpha_2(\theta_n - t)\pi d_n l$ .

Эти выражения разрешим относительно частных температурных напоров и

---

\* См. [6, 9, 11, 12] и др.



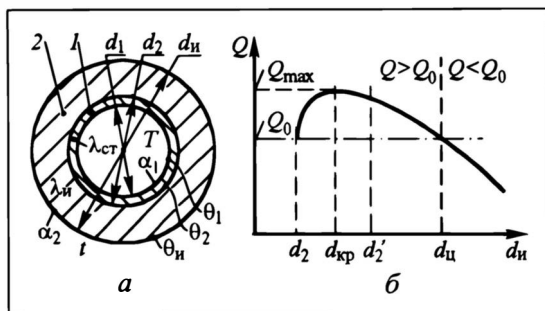


Рис. 7.8. Критическая и целесообразная толщина тепловой изоляции: а — расчетная схема, б — зависимость теплотерь от толщины изоляции; 1 — стенка трубы, 2 — изоляция

исключим промежуточные температуры:

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} T - \theta_1 &= \frac{Q}{\pi d_1 \alpha_1} \\ \theta_1 - \theta_2 &= \frac{Q}{2\pi \lambda_{ст}} \ln \frac{d_2}{d_1} \\ \theta_n - \theta_2 &= \frac{Q}{2\pi \lambda_n} \ln \frac{d_n}{d_2} \\ \theta_2 - t &= \frac{Q}{\pi d_n \alpha_2} \end{aligned} \right\} \rightarrow T - t = \\
 & = Q \left( \frac{1}{\pi d_1 \alpha_1} + \frac{\ln(d_2 / d_1)}{2\pi \lambda_{ст}} + \frac{\ln(d_n / d_2)}{2\pi \lambda_n} + \frac{1}{\pi d_n \alpha_2} \right)
 \end{aligned}$$

Отсюда

$$Q = \frac{T - t}{\frac{1}{\pi d_1 \alpha_1} + \frac{1}{2\pi \lambda_{ст}} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\pi \lambda_n} \ln \frac{d_n}{d_2} + \frac{1}{\pi d_n \alpha_2}}. \quad (7.12)$$

Из этого уравнения не вполне очевиден характер влияния толщины слоя изоляции  $\delta_n = (d_n - d_2) / 2$  на величину теплотерь  $Q$ . В самом деле, с ростом  $\delta_n$  (значит, и  $d_n$ ) растет третье слагаемое в знаменателе, понижая  $Q$ , так как падает пропускная способность этой кондуктивной стадии; но одновременно уменьшается последнее слагаемое, поскольку растет пропускная способность этой конвективной стадии  $\alpha_2 F_n$  — из-за увеличения  $F_n = \pi d_n l$ , а это повышает  $Q$ .

Ситуации, в которых независимая переменная (здесь  $d_n$ ), содержащаяся в расчетных слагаемых, сомножителях и т.п., противоположным образом влияет на функцию (здесь  $Q$ ), нередки в химической технологии. В таких ситуациях интересен (иногда определеннее: целесообразен, в ряде случаев — просто необходим) анализ на экстремум. Такой анализ для выражения (7.12) облегчен тем, что числитель не зависит от  $d_n$ , поэтому можно искать экстремум знаменателя  $Z_n$ . Приравняем нулю  $dZ_n/d(d_n)$ ; учтем при этом, что первые два слагаемых в  $Z_n$  от  $d_n$  не зависят; также выразим  $\ln(d_n/d_2) = \ln d_n - \ln d_2$ , тогда вычитаемое тоже не зависит от  $d_n$ . Итак,

$$\frac{dZ_n}{d(d_n)} = 0 + 0 + \frac{1}{2\pi \lambda_n} \frac{1}{d_n} - 0 - \frac{1}{\pi \alpha_2} \frac{1}{d_n^2} = 0. \quad (ж)$$

Диаметр изоляции, соответствующий экстремуму, и отвечающая ему толщина изоляции называются **критическими**  $d_{кр}$ ,  $\delta_{кр}$ . После сокращений и очевидных преобразований, а также перехода от  $d_{кр}$  к  $R_{кр} = d_{кр}/2$  (так принято при написании критерия Био) получаем

$$\frac{\alpha_2 d_{кр}}{\lambda_{и}} = 2 \quad \text{и} \quad \frac{\alpha_2 R_{кр}}{\lambda_{и}} \equiv Bi_{кр} = 1. \quad (7.13)$$

Анализ на знак второй производной в точке экстремума показывает, что  $Zn$  проходит через минимум; значит, при  $d_{кр}$  теплопотери проходят через максимум. Таким образом, при наращивании слоя изоляции теплопотери  $Q$  могут сначала повышаться, достигая  $Q_{max}$ ; при дальнейшем росте  $d_{и}$  они понижаются. Такой характер функции  $Q(d_{и})$  определяется соотношением пропускных способностей двух стадий теплопереноса: кондукции через слой изоляции и конвекции от изоляции к среде. При малых  $\delta_{и}$ ,  $d_{и}$  пропускная способность конвективной стадии может быть меньше, нежели кондуктивной; тогда конвективная стадия контролирует интенсивность теплопередачи в целом: с увеличением пропускной способности  $\alpha_2 F_{и}$  (за счет роста  $F_{и}$ ) поток теплоты  $Q$  возрастает. При больших  $d_{и}$  одновременно с ростом  $\alpha_2 F_{и}$  снижается пропускная способность кондуктивной стадии, теперь уже эта стадия — медленная, она контролирует процесс: поток теплоты  $Q$  в целом уже зависит от характера влияния  $d_{и}$  именно на этой стадии.

Характер зависимости  $Q$  от  $d_{и}$  показан на рис. 7.8, б. Из рисунка следует, что не при всех значениях  $d_{и}$  теплопотери  $Q$  ниже, чем для *неизолированной* трубы или аппарата  $Q_0$ . Чтобы гарантировать  $Q < Q_0$ , необходим диаметр изоляции, превышающий величину  $d_{ц}$ , называемую **целесообразной**. Значение  $d_{ц}$  определяется из равенства  $Q = Q_0$ . И если цель — снижение теплопотерь (так чаще всего и бывает), то необходимо выдержать условие  $d_{и} > d_{ц}$ .

Положение точки  $d_{кр}$  определяется выражением (7.13). Разрешая его относительно  $R_{кр}$  или  $d_{кр}$  (проектная задача), получаем формулу  $d_{кр} = 2(\lambda_{и}/\alpha_2)$ , указывающую на рост  $d_{кр}$ ,  $\delta_{кр}$  с  $\lambda_{и}$ . Следовательно, использование *плохого* изоляционного материала (высокие  $\lambda_{и}$ ) сдвигает  $d_{кр}$  ( $d_{ц}$  — тоже) в область больших значений  $d_{и}$ : может потребоваться весьма толстая изоляция для выполнения условия  $d_{и} > d_{ц}$ . В то же время при низких  $\lambda_{и}$  (*хорошая* изоляция) вполне возможно, что  $d_{кр}$  окажется меньше  $d_{ц}$  — в этом случае изоляция любой толщины способствует снижению теплопотерь.

В выражение (7.13) не входит диаметр аппарата, так что  $d_{кр}$  получается независимо от  $d_2$ . Поэтому вполне возможны ситуации  $d_2 < d_{кр}$  и  $d_2' > d_{кр}$ . Первый случай обычно характерен для труб небольшого диаметра ( $d_2'$  и на рис. 7.8, б), второй — для аппаратов промышленных размеров (если, конечно, изоляция не очень плохая). В последнем случае проблема критической толщины изоляции теряет актуальность: любое наращивание изоляции сопровождается снижением теплопотерь.

Подход к определению целесообразной толщины изоляции указан выше: приравниваются выражения  $Q$  для неизолированного и изолированного аппаратов. При этом получаются весьма громоздкие соотношения, разрешимые только численными методами.

Задача о  $\delta_{кр}$ ,  $d_{кр}$  представляет, как правило, лишь методический интерес: явление, конкуренция пропускных способностей. Практику скорее интересует проблема *целесообразной* толщины изоляции, поскольку важно понизить теплопотери. Собственно величины  $\delta_{кр}$ ,  $d_{кр}$  были бы интересны, если бы нужно было с помощью покрытия обеспечить максимальный тепловой поток  $Q$  (правда, тогда вряд ли остался бы правомочным термин “изоляция”).

Аналогичный анализ может быть проведен применительно к *сферическим* аппаратам. Для *плоских* стенок проблем критической и целесообразной толщины изоляции, разумеется, не существует, поскольку поверхность теплопереноса,

связанная с конвективной пропускной способностью, не изменяется при наращивании слоя изоляции; поэтому здесь увеличению толщины этого слоя всегда сопутствует уменьшение теплопотерь.

## 7.5. ТЕПЛООБМЕН (ОСНОВНЫЕ ПРОБЛЕМЫ И ПОЛОЖЕНИЯ)

### 7.5.1. Круг задач

Теплообмен в дополнение к *нормальному* (к теплопередающей поверхности) переносу теплоты рассматривает (см. рис. 6.1) еще перенос теплоты с *потоками теплоносителей* вдоль этой поверхности. Теплообмен включает теплопередачу как составную часть; самостоятельное значение (вне связи с теплообменом) в реальных задачах теплопередача приобретает весьма редко. Заметим, что особенности теплообмена, связанные с движением теплоносителей, могут в некоторых случаях оказывать влияние на закономерности собственно теплопередачи.

При переносе теплоты вдоль поверхности с теплоносителями возникают эффекты, связанные с характеристиками движения этих теплоносителей. Поэтому на интенсивность теплообмена в общем случае оказывают влияние взаимное направление движения теплоносителей и структура их потоков (в предельных ситуациях — идеальное вытеснение ИВ и идеальное перемешивание ИП). Все это существенно расширяет круг теплообменных задач.

Цель теплообмена — изменение температуры или агрегатного состояния одного из рабочих тел. В ряде задач проектирования рабочее тело удается полностью идентифицировать, включая величину его потока, начальные и конечные параметры; в этом случае его часто называют **целевым**. Другое рабочее тело (или другие рабочие тела), с которым целевое обменивается теплотой, в таких задачах называют **теплоносителем**. Строго говоря, оба потока, конечно, являются теплоносителями.

При изменении температуры массового потока  $G$  в ходе теплообмена (вдоль поверхности; во времени) в тепловых расчетах участвует теплоемкость  $c$ , являющаяся составной частью потоковой пропускной способности  $Gc$ ; в задачах теплопередачи теплоемкость не присутствует. Изменение температуры любого из теплоносителей (или сразу обоих) сопровождается изменением температурного напора  $\Delta$  вдоль теплообменной поверхности (в нестационарных процессах — и во времени). В этих условиях теряет определенность уравнение теплопередачи в форме (7.1), поскольку  $\Delta = \text{var}$ . Возникает проблема усреднения температурного напора. В стационарных процессах речь

идет об усреднении *локальных* значений  $\Delta$  *вдоль поверхности теплообмена*  $F$ ; поэтому, в отличие от (7.1), в уравнении теплообмена должна фигурировать **средняя** (по поверхности  $F$ ) **движущая сила** (температурный напор); тогда поток теплоты

$$Q = kF\Delta_{\text{ср}}. \quad (7.14)$$

В нестационарных процессах приходится усреднять *мгновенные* значения  $\Delta$  *по времени*  $\tau$  (если вдоль поверхности температурный напор не изменяется), и тогда количество теплоты

$$Q = kF\Delta_{\text{ср}}\tau. \quad (7.15)$$

При изменении температурного напора одновременно вдоль поверхности и во времени проблема усреднения температурного напора усложняется.

Операция усреднения начинается записью уравнений теплообмена в дифференциальной форме с использованием *локального* или *мгновенного* температурного напора  $\Delta = T - t$ :

$$dQ = k\Delta df \quad \text{и (или)} \quad dQ = kF\Delta dt. \quad (a)$$

Последующее интегрирование и приведение полученных соотношений к виду (7.14) и (7.15) призвано дать расчетную формулу для  $\Delta_{\text{ср}}$  — с усреднением по поверхности или по времени соответственно. Осуществление интегрирования требует знания ряда связей (текущих температуры и поверхности либо времени) и граничных условий. Реализация таких операций — предмет последующего изложения.

Решение задач *эксплуатации и проектирования* наряду с общими моментами имеет свою специфику. Например, в стационарных проектных задачах обычно заданы начальные и конечные температуры теплоносителей, так что *удается рассчитать*  $\Delta_{\text{ср}}$  и, предварительно определив  $k$  (см. разд. 7.3), воспользоваться выражением (7.14) для отыскания  $F$ :

$$F = \frac{Q}{k\Delta_{\text{ср}}}. \quad (7.14a)$$

В задачах эксплуатации чаще известны только начальные температуры теплоносителей ( $F$ , конечно, тоже), и  $\Delta_{\text{ср}}$  *сразу рассчитать не удастся*; это вызывает затруднения в определении  $Q$  по (7.14), необходимо искать особые пути расчета.

Отдельная проблема — **контактный теплообмен**, в частности — потока теплоносителей с твердыми телами. Здесь нередко теплоперенос весьма сложен (процесс нестационарен в целом или в своих элементарных актах), непростым является и математическое описание. Некоторые такие случаи будут рассмотрены ниже.

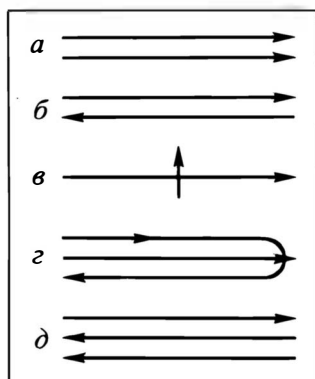


Рис. 7.9. Схемы движения теплоносителей:

Простые: *а* — прямоток, *б* — противоток; сложные: *в* — перекрестный ток, *г* — смешанный ток 1-2, *д* — тройной поток

В зависимости от особенностей технологического процесса и его конструктивного оформления возможно различное *взаимное направление* движения теплоносителей; некоторые схемы их движения демонстрируются на рис. 7.9. Первые две (параллельное движение теплоносителей), называемые **простыми**, могут быть оформлены в виде **прямотока** (вид *а*) либо **противотока** (вид *б*).

Остальные схемы именуют **сложными**: на рисунке в качестве примера показаны: **перекрестный ток** (вид *в*); **смешанный ток 1-2** (вид *г*) — его индексация указывает, что первый теплоноситель делает один ход, а второй — два; **тройной поток** (вид *д*), когда в одном аппарате первый теплоноситель обменивается теплотой сразу с двумя отдельными потоками. Взаимное направление движения теплоносителей важно в технологическом и расчетном плане, в частности: при установлении средних температурных напоров, конечных температур теплоносителей, количеств переданной теплоты.

Технологическая задача в процессах теплообмена — получение целевого продукта в заданном количестве с необходимыми параметрами. Величина основного параметра в уходящем из теплообменника целевом продукте контролируется измерительными устройствами (если, например, параметр — температура, то в качестве датчиков используют термопары, термометры сопротивления и др.). При отклонении параметра от заданного значения на процесс накладывают *управляющее воздействие*, чаще всего связанное с изменением потока (количества) теплоносителя. Способы и организация таких воздействий изучаются в курсе «Автоматические системы управления технологическими процессами».

### 7.5.2. Потоки энтальпий и тепловые балансы

В ходе тепловых расчетов приходится оперировать потоками (в стационарных процессах) или количествами (в нестационарных) энтальпий. *Поток* энтальпии записывается как произведение массового потока теплоносителя на его энтальпию:  $Gh$ ; в СИ это  $(кг/с) \cdot (Дж/кг) = Дж/с = Вт$  (в реальных расчетах обыч-

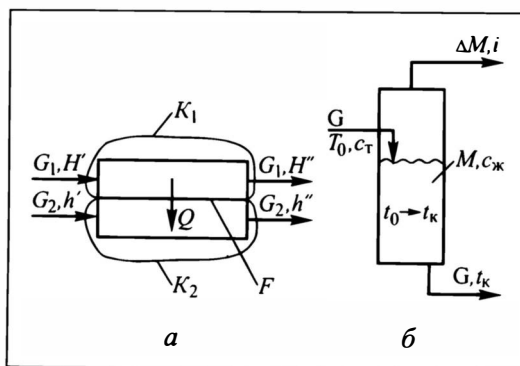


Рис. 7.10. К составлению тепловых балансов:

*а* — непрерывный процесс ( $K_1$  и  $K_2$  — контуры), *б* — периодический процесс

но  $\kappa Bm$ ). Аналогично записывается количество энthalпии, только  $G$  в этом случае выражается не в  $\text{кг/с}$ , а в  $\text{кг}$ , так что  $Gh$  измеряется в  $\text{Дж}$ ,  $\text{кДж}$ . Возможные способы выражения энthalпий  $H$ ,  $h$ ,  $i$  и единиц их измерения рассмотрены в разд. 6.1.

Важнейшим способом (иногда — составной частью) математического описания является **тепловой баланс**, позволяющий анализировать теплообменные процессы и вести технологические расчеты. Рассмотрим некоторые типичные случаи составления теплового баланса.

Пусть имеется **стационарный** (непрерывный) процесс без Источников и Стоков теплоты. В теплообменник подаются (рис. 7.10, *а*) потоки горячего и холодного теплоносителей (их взаимное направление пока безразлично)  $G_1$  и  $G_2$  с энthalпиями на входе в теплообменник соответственно  $H'$  и  $h'$  и на выходе из него  $H''$  и  $h''$ . Поток теплоты передается от горячего теплоносителя к холодному через теплообменную поверхность  $F$ . В качестве пространственных контуров  $K_1$  и  $K_2$  выбирают отдельно зоны движения горячего и холодного теплоносителей (один из них может выступать в качестве целевого); временной интервал равен 1 с. В соответствии с общим правилом составления балансов запишем Приходы и Уходы теплоты (Накопление для стационарного процесса отсутствует) отдельно для  $K_1$  и  $K_2$  контуров:

$$G_1 H' - G_1 H'' - Q = 0 \quad \text{и} \quad G_2 h' + Q - G_2 h'' = 0, \quad (7.16)$$

откуда

$$Q = G_1 (H' - H'') = G_2 (h'' - h'). \quad (7.16a)$$

Если при неизменном агрегатном состоянии теплоносителей энthalпии представить в форме  $H = c_1 T$  и  $h = c_2 t$ , то при постоянных (не зависящих от температуры) теплоемкостях  $c_1$  и  $c_2$

выражение (7.16а) удобно использовать в виде

$$Q = G_1 c_1 (T' - T'') = G_2 c_2 (t'' - t'), \quad (7.166)$$

причем верхние индексы ( ' ) и ( '' ) относятся к входу теплоносителей в аппарат и выходу из него соответственно.

Строго говоря, в каждой из зон существуют еще продольные *кондуктивные* тепловые потоки. Дело в том, что при изменении температур движущихся теплоносителей (пусть в режиме ИВ) существуют отличные от нуля продольные градиенты температур  $dT/dx$  и  $dt/dx$ , где  $x$  — продольная координата. Однако интенсивность продольного кондуктивного теплопереноса чаще всего пренебрежимо мала в сравнении с тепловыми потоками, переносимыми движущимися теплоносителями. Поэтому при анализе процессов теплопереноса с теплоносителями, движущимися в режиме ИВ, вклад этой кондуктивной составляющей, как правило, игнорируется.

В ходе теплообмена поток может изменять агрегатное состояние. Пусть, например, горячий поток входит в аппарат в состоянии сухого насыщенного пара, а выходит из него в результате полной конденсации — в виде кипящей (а не переохлажденной ниже температуры насыщения  $T_H$ ) жидкости. Тогда  $H' - H'' = r_1$ , т.е. теплоте конденсации, так что по горячему теплоносителю

$$Q = G_1 r_1. \quad (7.16в)$$

Если при этом второй теплоноситель не меняет агрегатного состояния, то тепловой баланс (7.16а) примет вид

$$Q = G_1 r_1 = G_2 c_2 (t'' - t'). \quad (7.16г)$$

Аналогично записывается поток теплоты, если речь идет о подаче в аппарат кипящей жидкости и выводе из него сухого насыщенного пара:  $Q = G_2 r_2$ .

В более общем случае исходный пар может быть перегрет до температуры  $T' > T_{\text{нас}}$ , а образовавшийся конденсат переохлажден до  $T'' < T_{\text{нас}}$ . Тогда первое из выражений (7.16а) будет включать фрагменты, отвечающие охлаждению пара до температуры насыщения (конденсации, кипения), собственно конденсации и переохлаждения конденсата:

$$Q = G[c_{п1}(T' - T_{\text{нас}}) + r + c_{ж1}(T - T'')], \quad (7.16д)$$

где  $c_{п1}$  и  $c_{ж1}$  — теплоемкости горячего теплоносителя в парообразном и жидком состояниях.

В целом возможны различные сочетания, выражающие баланс тепловых потоков. Например, при переносе теплоты от конденсирующегося пара к кипящей жидкости

$$Q = G_1 r_1 = G_2 r_2. \quad (7.16е)$$

В необходимых случаях в тепловых балансах могут быть отражены тепловые эффекты, а также другие фазовые превраще-

ния (плавления-кристаллизации; сублимации-десублимации и т.п.).

С помощью представленных выше и подобных соотношений удастся при прочих известных величинах рассчитать неизвестные поток теплоносителя, одну из температур (на входе в теплообменник либо на выходе из него) или тепловой поток  $Q$ .

В качестве примера *нестационарного* (периодического) теплообмена рассмотрим аппарат (рис. 7.10,б) с холодной жидкостью — ее количество  $M$ , теплоемкость  $c_{\text{ж}}$ , начальная температура  $t_0$ . В аппарат вводят  $G$  кг горячих металлических шариков (их теплоемкость  $c_{\text{т}}$ ) с температурой  $T_0$ , превышающей температуру кипения жидкости  $t_{\text{нас}}$ . В результате интенсивного теплового контакта рабочие тела (шарики и жидкость) принимают одинаковую конечную температуру  $t_{\text{нас}}$ . С такой температурой шарики выводятся из аппарата. Жидкость при этом нагревается до  $t_{\text{нас}}$ , частично испаряется; пары (их энтальпия  $i$ ) выводятся из аппарата. Требуется найти количество испарившейся жидкости  $\Delta M$ .

Для составления теплового баланса выберем в качестве пространственного контура весь аппарат, а за временной интервал — весь процесс. При этом условимся для определенности отсчет времени процесса начинать *после загрузки* жидкости в аппарат, но *до подачи* в него горячих шариков, а заканчивать *после* вывода шариков из аппарата, но *до слива* из него жидкости. (Можно принять и другие условия отсчета времени: результат будет тем же.) Тогда в отсутствие Источников и Стоков, но с учетом Накопления тепловой баланс запишется:

$$Gc_{\text{т}}T_0 - Gc_{\text{т}}t_{\text{нас}} - \Delta Mi = (M - \Delta M)c_{\text{ж}}t_{\text{нас}} - Mc_{\text{ж}}t_0. \quad (б)$$

Выражение (б) легко приводится к виду, четко проясняющему физический смысл рассматриваемого процесса:

$$Gc_{\text{т}}(T_0 - t_{\text{нас}}) = Mc_{\text{ж}}(t_{\text{нас}} - t_0) + \Delta M(i - c_{\text{ж}}t_{\text{нас}}), \quad (в)$$

т.е. теплота, отдаваемая металлическими шариками при их охлаждении от  $T_0$  до  $t_{\text{нас}}$ , идет на подогрев всей жидкости до  $t_{\text{нас}}$  и испарение части ее; при этом  $(i - c_{\text{ж}}t_{\text{нас}}) = r$  — теплоте испарения жидкости.

Из выражений (б) или (в) получается решение поставленной задачи:

$$\Delta M = \frac{Gc_{\text{т}}(T_0 - t_{\text{нас}}) - Mc_{\text{ж}}(t_{\text{нас}} - t_0)}{r}. \quad (г)$$

Далее можно проанализировать различные ситуации. Так, при получении в результате расчета по (г) значения  $0 \leq \Delta M \leq M$



величина  $\Delta M$  отвечает сформулированной задаче. Если расчет дает  $\Delta M < 0$ , это означает, что конечная температура жидкости ниже  $t_{\text{нас}}$ , так что испарения не происходит (т.е. реально  $\Delta M = 0$ ). Если расчет приводит к  $\Delta M > M$ , это означает, что вся жидкость испарилась и получился перегретый пар температурой выше  $t_{\text{нас}}$ . Естественно, в двух последних случаях исходный тепловой баланс должен отличаться от записанного в форме (б).

В дальнейшем предстоит многократно использовать различные тепловые балансы, в том числе записанные первоначально для элементарного пространственного контура, содержащего элементарную теплообменную поверхность  $df$ , и для элементарного временного интервала  $dt$ .

## 7.6. СРЕДНИЙ ТЕМПЕРАТУРНЫЙ НАПОР

Проблема заключается в определении среднего (по поверхности теплообмена  $F$ ) температурного напора в **проектных стационарных задачах**, когда известны (заданы) температуры теплоносителей — на входе в теплообменник и на выходе из него (не исключено — постоянные по  $F$  при изменении агрегатного состояния или идеальном перемешивании потоков). Знание  $\Delta_{\text{ср}}$  позволяет далее рассчитать необходимую теплообменную поверхность  $F$  по формуле (7.14а).

### 7.6.1. Характерные температурные профили

Типичные температурные профили для простейших вариантов движения теплоносителей вдоль поверхности теплообмена  $F$  (по текущей координате  $f$ ) представлены на рис. 7.11. При этом для каждого отдельного варианта область температурного профиля горячего теплоносителя ( $T$ ) находится выше, нежели холодного ( $t$ ). Варианты (а) и (з) иллюстрируют изменение температур при движении горячего и холодного теплоносителей в режиме идеального вытеснения (ИВ) без изменения агрегатного состояния. Скорость изменения температур  $T$  и  $t$  зависит здесь от пропускных способностей соответствующих стадий теплопереноса  $G_1c_1$  и  $G_2c_2$ : более высокому значению  $Gc$  отвечает более медленное изменение температуры (пунктирные кривые). При  $Gc \rightarrow \infty$  теплоноситель сохранил бы неизменной свою температуру вдоль поверхности. Варианты (б) и (д) иллюстрируют температурные профили при движении теплоносителей в режиме идеального перемешивания (ИП). Здесь наблюдается скачкообразное изменение температур на входе в теплообменник от *входных* значений  $T'$  и  $t'$  до постоянных по всей

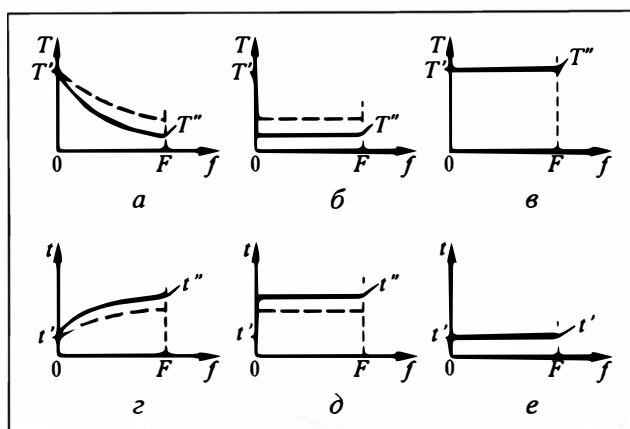


Рис. 7.11. Характерные температурные профили горячего (а — в) и холодного (г — е) теплоносителей:

а, г — движение теплоносителей в режиме ИВ; б, д — в режиме ИП; в, е — при изменении агрегатного состояния теплоносителей

поверхности *выходных* температур  $T''$  и  $t''$ . Уровень  $T''$  и  $t''$  и здесь зависит от пропускных способностей потокового теплопереноса  $G_1c_1$  и  $G_2c_2$ . Наконец, варианты (в) и (е) относятся к изменяющемуся агрегатному состоянию теплоносителей — например, к конденсации горячего и кипению холодного. Здесь температуры тоже постоянны вдоль поверхности  $F$ , но в отличие от ИП — на уровнях входных температур  $T'$  и  $t'$ .

В реальных теплообменниках возможно сочетание этих температурных профилей (возможны, конечно, и иные профили); при этом ход температурных кривых зависит еще и от направления взаимного движения теплоносителей. Ниже проблемы, связанные с ходом температурных кривых, рассматриваются применительно к простым схемам движения теплоносителей и простейшим вариантам структуры потоков — ИВ и ИП.

### 7.6.2. Средние температурные напоры

Стационарное *прямоточное* движение в режиме ИВ теплоносителей, не изменяющих агрегатного состояния. Расчетная схема и качественный ход температурных кривых показаны на рис. 7.12. Выделим элементарные контуры с поверхностью теплообмена  $df$  и запишем тепловые балансы.

Для горячего теплоносителя (контур  $k_1$ ):

$$G_1c_1T - G_1c_1(T + dT) - dQ = 0 \quad \text{и} \quad dQ = -G_1c_1dT. \quad (\text{а})$$

Для холодного теплоносителя (контур  $k_2$ ):

$$G_2c_2t + dQ - G_2c_2(t + dt) = 0 \quad \text{и} \quad dQ = G_2c_2dt. \quad (\text{б})$$

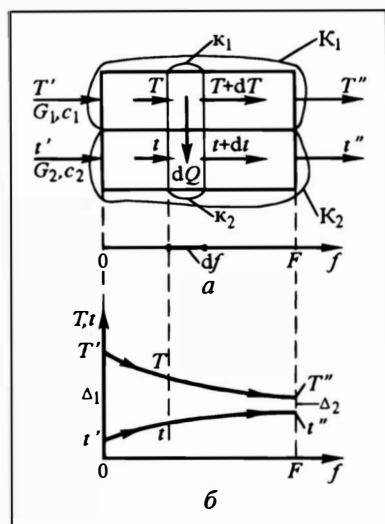


Рис. 7.12. К расчету среднего температурного напора при прямоточном движении теплоносителей в режиме ИВ:

$a$  — расчетная схема ( $K_1$  и  $K_2$ ,  $k_1$  и  $k_2$  — контуры),  $b$  — температурный профиль

Вместе с тем для элементарной поверхности  $df$  в соответствии с (7.1) можно записать уравнение теплопередачи

$$dQ = k\Delta df = k(T - t)df; \quad (в)$$

таким образом,

$$dQ = -G_1 c_1 dT = G_2 c_2 dt = k(T - t)df. \quad (г)$$

Тепловые балансы для полного теплообменного пространства (поверхность  $F$ ) отдельно для горячего и хо-

лодного теплоносителей (контуры  $K_1$  и  $K_2$ ) уже были записаны ранее:

$$G_1 c_1 T' - G_1 c_1 T'' - Q = 0 \quad \text{и} \quad Q = G_1 c_1 (T' - T''); \quad (д)$$

$$G_2 c_2 t' + Q - G_2 c_2 t'' = 0 \quad \text{и} \quad Q = G_2 c_2 (t'' - t'). \quad (е)$$

Вместе с тем для всей поверхности  $F$  можно записать уравнение теплообмена (7.14); тогда в целом

$$Q = G_1 c_1 (T' - T'') = G_2 c_2 (t'' - t') = kF\Delta_{cp}. \quad (ж)$$

Поделим (по отдельности для каждого теплоносителя) соответствующие фрагменты формул (г) и (ж). После сокращения на  $Gc$  и  $k$  получим

$$\frac{dT}{T'' - T'} = \frac{dt}{t'' - t'} = \frac{(T - t)df}{F\Delta_{cp}} \equiv \gamma, \quad (з)$$

причем последняя дробь обозначена  $\gamma$  для сокращения последующих преобразований; знак “минус” при  $dT$  учтен изменением знака разности в знаменателе первой дроби.

Далее вывод формулы для  $\Delta_{cp}$  можно вести различными путями. Один из наиболее простых реализуется следующим образом. Выразим из (з) элементарные приращения температур и вычтем одно из другого:

$$dT = \gamma(T'' - T'), \quad dt = \gamma(t'' - t');$$

$$dT - dt = d(T - t) = \gamma[(T'' - T') - (t'' - t')].$$

Группируя в последнем выражении температурные напоры по входному и выходному сечениям  $T' - t' \equiv \Delta_1$  и  $T'' - t'' \equiv \Delta_2$  и подставляя значение  $\gamma$  в заключительное равенство (3), имеем после разделения переменных и интегрирования:

$$\int_{T'-t'}^{T''-t''} \frac{d(T-t)}{T-t} = \frac{(T''-t'') - (T'-t')}{F\Delta_{\text{ср}}} \int_0^F df \quad \text{и}$$

$$\ln \frac{T''-t''}{T'-t'} = \frac{(T''-t'') - (T'-t')}{F\Delta_{\text{ср}}} F.$$

Сокращая на  $F$ , получаем в более лаконичной записи (через  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ ):

$$\Delta_{\text{ср}} = \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{\ln(\Delta_2 / \Delta_1)},$$

или лучше  $\Delta_{\text{ср}} = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\ln(\Delta_1 / \Delta_2)}.$  (7.17)

Таким образом, средний по поверхности теплообмена температурный напор рассчитывается как *среднелогарифмическая* величина. Предпочтительность второго из выражений (7.17) обусловлена тем, что при прямотоке  $\Delta_1 > \Delta_2$ .

Продемонстрируем вехи еще одного простого подхода к определению  $\Delta_{\text{ср}}$ . Для вывода воспользуемся одним из свойств

*производных пропорций*: если имеется равенство  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , то оста-

ется справедливым производное равенство  $\frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d}$ . С этим замечанием имеем из (3):

$$\frac{dT - dt}{(T'' - T') - (t'' - t')} = \gamma, \quad (\text{и})$$

и последующий вывод (подстановка значения  $\gamma$ , разделение переменных и интегрирование) проводится по изложенной выше канве.

Аналогичный подход к определению  $\Delta_{\text{ср}}$  применим для *противотока* теплоносителей (без изменения агрегатного состояния; режим ИВ). Расчетная схема и возможный температурный профиль изображены на рис.7.13. Различие с прямотоком — в тепловом балансе (контур  $k_2$ ) для холодного теплоносителя. Соответственно расчетной схеме

$$G_2 c_2 (t + dt) + dQ - G_2 c_2 t = 0 \quad \text{и} \quad dQ = -G_2 c_2 dt. \quad (\text{к})$$

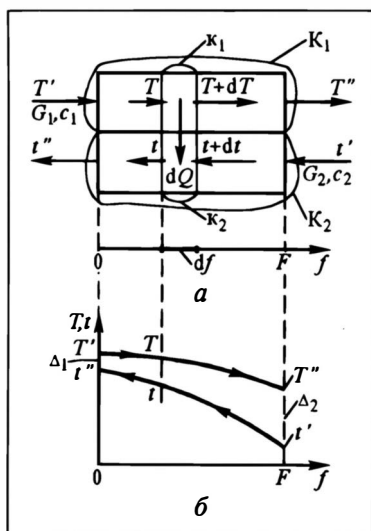


Рис. 7.13. К расчету среднего температурного напора при противоточном движении теплоносителей в режиме ИВ:

*a* — расчетная схема ( $K_1$  и  $K_2$ ,  $k_1$  и  $k_2$  — контуры), *б* — температурный профиль

Дальнейший путь аналогичен проделанному для прямотока. Его этапы:

$$\frac{dT}{T'' - T'} = \frac{dt}{t' - t''} = \frac{(T - t)df}{F\Delta_{cp}} \equiv \gamma;$$

$$dT = \gamma(T'' - T'), \quad dt = \gamma(t' - t'');$$

$$dT - dt = d(T - t) = \gamma[(T'' - T') - (t' - t'')]$$

$$= \gamma[(T'' - t') - (T' - t'')],$$

причем  $T' - t'' = \Delta_1$  и  $T'' - t' = \Delta_2$  — температурные напоры

на левом и правом концах теплообменника, отличающиеся от сформированных в условиях прямотока.

Подстановка значения  $\gamma$ , разделение переменных и интегрирование дают

$$\int_{T' - t''}^{T'' - t'} \frac{d(T - t)}{T - t} = \frac{(T'' - t') - (T' - t'')}{F\Delta_{cp}} \int_0^F df \quad \text{и}$$

$$\ln \frac{T'' - t'}{T' - t''} = \frac{(T'' - t') - (T' - t'')}{F\Delta_{cp}} F.$$

После сокращения на  $F$  получаем в лаконичной форме записи (через  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ ) выражение, формально совпадающее с (7.17), однако с *иным* смыслом концевых температурных напоров  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ . При этом в случае противотока удобным может оказаться любое из выражений (7.17); первой ставится большая из величин  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  — это всегда температурный напор, отвечающий выходу теплоносителя с большей пропускной способностью  $G_c$ .

Среднегарифмический температурный напор меньше среднеарифметического:  $\Delta_{cp} \leq \Delta_{ap} = (\Delta_1 + \Delta_2)/2$ , причем знак равенства отвечает случаю  $\Delta_1 = \Delta_2$ . В литературе по теплообмену обычно считают незначительным различие в  $\Delta_{cp}$  и  $\Delta_{ap}$  при  $0,5 \leq \Delta_1/\Delta_2 \leq 2$ : на границах этого диапазона указанное различие составляет 4%. Отсюда рекомендация: при небольших отличиях в  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  вести расчеты на основе  $\Delta_{ap}$ . Такая рекомендация не учитывает, что при замене  $\Delta_{cp}$  на  $\Delta_{ap}$  погрешность получается не «в запас»; поэтому рассчитанная поверхность теплообмена

будет несколько занижена в сравнении с реально необходимой. Лучше, независимо от величины  $\Delta_1/\Delta_2$ , использовать в расчетах среднелогарифмический температурный напор  $\Delta_{\text{ср}}$ .

Анализ задач проектирования позволяет установить соотношение средних температурных напоров для противотока ( $\Delta_{\text{ср}}$ ) и прямотока ( $\Delta_{\text{ср}}$ ):  $\Delta_{\text{ср}} \geq \Delta_{\text{ср}}$ . Это означает, что при одинаковых концевых температурах теплоносителей  $T'$ ,  $T''$ ,  $t'$  и  $t''$  для переноса заданного количества теплоты  $Q$  в случае *противотока* можно обойтись *меньшей* поверхностью  $F$ , чем для *прямотока*, а для заданной поверхности  $F$  — передать *больше* теплоты  $Q$ . Вообще при движении теплоносителей в режиме ИВ из всех схем наибольший температурный напор характерен для противотока, наименьший — для прямотока.

Однако преимущество противотока не ограничивается экономией капитальных затрат (возможность провести процесс с меньшей  $F$ ). Часто значительно существеннее энергетическое выгоды. Пусть заданы поток и граничные температуры целевого продукта (например,  $T'$  и  $T''$ ) и известна начальная температура теплоносителя  $t'$ . При прямотоке, очевидно, всегда  $t'' < T''$ ; при противотоке  $t'' < T'$ , что совсем не исключает  $t'' > T''$ . Значит, при противотоке теплоноситель  $G_2$  может быть нагрет (в данном примере) до более высокой выходной температуры; следовательно, для передачи заданного количества теплоты  $Q = G_1 c_1 (T' - T'')$  *расход теплоносителя  $G_2$  будет меньше* — по (д), поскольку  $(t'' - t')$  стало больше.

Средний температурный напор рассчитывается как среднелогарифмический и в тех случаях, когда температура *одного из теплоносителей постоянна* (кипение, конденсация, течение в режиме ИП), а второй движется вдоль теплообменной поверхности в режиме ИВ. При этом постоянная температура устанавливается на уровне  $T = T'$  (конденсация),  $t = t'$  (кипение),  $T = T''$  или  $t = t''$  (для режима ИП), причем уровень  $T''$  или  $t''$  определяется равенствами типа (7.16). Способ формирования концевых температурных напоров для всех этих случаев очевиден.

Важно, что при неизменной температуре одного из теплоносителей (тем более — обоих) все схемы взаимного направления движения теплоносителей (простые и сложные) с точки зрения температурных напоров становятся *равноценными*.

Если температуры *обоих теплоносителей  $T$  и  $t$  постоянны* по всей поверхности, то по  $F$  не изменяется и температурный напор; его надо рассчитывать просто как разность  $\Delta_{\text{ср}} = T - t$ . При конденсации и кипении значения  $T = T'$  и  $t = t'$  опреде-

ляются рабочим давлением в зонах конденсации и кипения и  $\Delta_{\text{ср}} = T' - t'$ . Значения температур  $T = T''$  и  $t = t''$  при движении теплоносителей в режиме ИП, когда  $\Delta_{\text{ср}} = T'' - t''$ , определяются равенством типа (7.16б): напомним, что в задачах проектирования выходная температура одного из теплоносителей (целевого) — известна.

Наконец, в случае равенства пропускных способностей  $G_{1c1} = G_{2c2}$  при движении потоков в режиме ИВ температуры теплоносителей изменяются вдоль поверхности, но  $\Delta_1 = \Delta_2$ . Прямое использование среднелогарифмического температурного напора по формуле (7.17) приводит к неопределенности. В ее раскрытии нет необходимости (хотя это и возможно), поскольку в любой точке поверхности здесь  $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \text{const}$ , так что  $\Delta_{\text{ср}} = \Delta_1 = \Delta_2$ .

Аналогичные подходы позволяют подойти к определению средних температурных напоров в случае *сложных схем движения* теплоносителей. Выводы формул и конечные выражения  $\Delta_{\text{ср}}$  для ряда таких случаев приводятся в литературе\*. Эти выражения содержат пропускные способности стадий: поверхностной  $kF$  и потоковых  $G_{1c1}$  и  $G_{2c2}$  — в виде безразмерных комплексов:

$$a \equiv kF/(G_{1c1}); \quad b \equiv kF/(G_{2c2}); \quad b/a \equiv G_{1c1}/(G_{2c2}), \quad (7.18)$$

причем критерии  $a$  и  $b$  в зарубежной литературе называют **числами единиц переноса теплоты**.

Громоздкие выражения для  $\Delta_{\text{ср}}$ , характерные для сложных схем, не очень удобны для инженерных расчетов; поэтому предлагается следующий графоаналитический метод определения  $\Delta_{\text{ср}}$ . Предварительно по входным и выходным температурам рассчитывают среднелогарифмический температурный напор  $\Delta_c$  как для *противотока*, а далее отыскивают поправочный множитель  $\varepsilon_{\Delta} \leq 1$ , чтобы перейти от противотока к рассчитываемой сложной схеме. В этих целях вводят безразмерные температурные комплексы:

$$R^* \equiv \frac{T' - T''}{t'' - t'} \quad \text{и} \quad P^* \equiv \frac{t'' - t'}{T' - t'}. \quad (\text{л})$$

Легко видеть, что  $R^* = a/b = G_{2c2}/(G_{1c1})$ ;  $P^*$  также представляет собой отношение пропускных способностей — процесса теплообмена в целом и  $G_{2c2}$ . По полученным аналитически вы-

---

\* См. [2, 15].

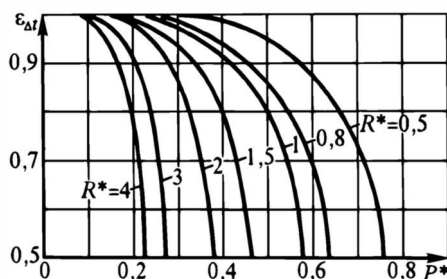


Рис. 7.14. К определению средней движущей силы для смешанного тока 1-2

разжениям для  $\Delta_{\text{ср}}$  применительно к различным схемам движения теплоносителей построены графики  $\varepsilon_{\Delta t} = f(R^*, P^*)$ . С помощью найденных по таким графикам значений  $\varepsilon_{\Delta t}$  определяют  $\Delta_{\text{ср}}$ :

$$\Delta_{\text{ср}} = \ddot{\Delta}_{\text{с}} \varepsilon_{\Delta t}. \quad (7.19)$$

В качестве примера на рис. 7.14 приведен график для определения  $\Delta_{\text{ср}}$  в случае смешанного тока 1-2.

Средние температурные напоры  $\Delta_{\text{ср}}$  определялись выше в предположении о независимости теплоемкостей потоков от температур и постоянстве коэффициентов теплопередачи по поверхности  $F$ . Первое допущение часто оправдано небольшими температурными интервалами: теплоемкости изменяются мало, так что вполне можно оперировать средними их значениями. Второе допущение правомерно (иногда приближенно), когда коэффициенты теплопередачи не зависят от температурных напоров, меняющихся вдоль поверхности; такие ситуации нередки: вынужденное движение теплоносителей или постоянство температур теплоносителей вдоль теплообменной поверхности. В противном случае (скажем, конденсация или кипение с одной стороны поверхности, неизменность агрегатного состояния при движении в режиме ИВ — с другой) нужно, строго говоря, рассматривать локальные значения  $k$  и учитывать их изменение вдоль поверхности  $F$  вместе с температурным напором  $\Delta$ . Покажем, как это можно сделать применительно к теплообмену между конденсирующимся паром и теплоносителем, не изменяющим агрегатного состояния, — здесь  $k$  зависит от локального  $\Delta$  соответственно (7.4).

Запишем для элементарной поверхности  $df$  и полной  $F$  выражения типа (в) и (е), ограничившись переносом теплоты с холодным теплоносителем:

$$G_2 c_2 dt = k(T - t)df \quad \text{и} \quad Q = G_2 c_2(t'' - t'), \quad (\text{м})$$

причем для конденсирующегося пара  $T = T' = \text{const}$ .

Поделив почленно одно выражение на другое, получим

$$\frac{dt}{t'' - t'} = \frac{k(T - t)df}{Q} \quad \text{и} \quad \frac{dt}{k(T - t)} = \frac{t'' - t'}{Q} df. \quad (\text{н})$$

\* Соответствующие графики для других схем движения теплоносителей приведены, например, в [11, 12, 16; 13 и 15 — особенно подробно].



Для сокращения записи обозначим  $T - t \equiv \Delta = \text{var}$  и представим разность  $t'' - t'$  в виде  $(T - t') - (T - t'') = \Delta_1 - \Delta_2$ . Интегрируем второе соотношение (н) от  $\Delta_1$  до  $\Delta_2$  и от 0 до  $F$ :

$$\frac{\Delta_2 - \Delta_1}{Q} F = \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} \frac{d\Delta}{k\Delta} \quad \text{или} \quad Q = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\int_{\Delta_1}^{\Delta_2} \frac{d\Delta}{k\Delta}} F. \quad (o)$$

В последнем из выражений (o) величина, стоящая в правой части перед  $F$ , представляет собой среднее по поверхности произведение  $(k\Delta)_{\text{ср}}$ , в отличие от  $\Delta_{\text{ср}}$  в (7.14). Разумеется, при  $k = \text{const}$  выражение (o) закономерно переходит в (7.14).

Вычисление интеграла в (o) принципиальных затруднений не вызывает, так как при любом значении  $\Delta$  в интервале от  $\Delta_1$  до  $\Delta_2$  локальная величина  $k$  может быть рассчитана по формуле (7.4).

### 7.6.3. Проектный выбор теплообменника

Технологам, как правило, не приходится проектировать теплообменники, задача проектирования стоит перед ними обычно в аспекте его **проектного выбора** — по каталогам. Этот выбор ведется в следующем порядке:

- по параметрам (расходу, т.е. производительности; свойствам; входной и выходной температурам) целевого продукта определяется поток теплоты  $Q$ ;

- по известным температурам обоих теплоносителей на концах теплообменника соответственно схеме их движения рассчитывается средний температурный напор  $\Delta_{\text{ср}}$ ;

- выбирается расчетная формула для коэффициента теплопередачи  $k$ , отвечающая физическим процессам в теплообменнике (см. разд. 7.3).

При этом возможны затруднения, поскольку заранее (до расчета и выбора теплообменника) не известны высота и диаметр труб (они необходимы в случае теплообмена при конденсации), сечение трубного и (или) межтрубного пространства (их нужно знать для расчета  $Nu$  и  $\alpha$  по  $Re$ ) и т.п. Поэтому обычно приходится выполнить предварительный расчет, задавшись ориентировочным (см. разд. 6.8) значением  $k_{\text{ор}}$  и оценив ориентировочную поверхность теплообмена  $F_{\text{ор}}$  по формуле (7.14a). Это позволяет в первом приближении выбрать теплообменник с определенными — указанными в каталоге — геометрическими характеристиками, с тем чтобы использовать соответствующую расчетную формулу для  $k$ . Далее:

- проводят расчет  $k$  и находят расчетную поверхность теплообмена  $F_{\text{расч}}$ ;

- окончательно выбирают по каталогу теплообменник с подходящим значением  $F$  так, чтобы выполнялось условие:

все отклонения от расчетных величин должны давать погрешность “в запас” (скажем,  $F \geq F_{\text{расч}}$  и т.п.).

При невозможности подобрать подходящий теплообменник расчет и выбор проводят заново, сообразуясь с опытом предыдущего расчета.

## 7.7. ТЕПЛОВОЙ ПОТОК

Эксплуатационные задачи рассматривают ситуации, когда известны потоки теплоносителей и их температуры на входе в аппарат  $T'$  и  $t'$ , а также параметры, определяющие интенсивность теплопереноса между теплоносителями (через поверхность теплообмена в рекуператоре, например). Для задач эксплуатации выражение (7.14), безусловно, остается справедливым, но для расчета теплового потока  $Q$  оно не может быть прямо использовано, так как известны лишь *входные* температуры. На *выходе* из теплообменника температуры  $T''$  и  $t''$  не заданы, поэтому величину  $\Delta_{\text{ср}}$  найти нельзя (исключение — теплообмен между конденсирующимся паром и кипящей жидкостью, когда  $\Delta_{\text{ср}} = T' - t'$  известна по условиям процесса). В таких ситуациях методику расчета  $Q$  целесообразно основывать на разности входных температур теплоносителей  $\Delta_* \equiv T' - t'$ .

Рассмотрим подход к определению  $Q$  для некоторых простейших случаев.

### 7.7.1. Тепловой поток при движении теплоносителей в режиме идеального перемешивания

Эта технологическая ситуация в расчетном плане — одна из самых простых. Рассмотрим теплообменник (рис.7.15), в котором оба теплоносителя движутся (без изменения агрегатного состояния) в режиме идеального перемешивания (символ ИП, на рисунке — мешалки). Поэтому температуры в теплообменнике каждого теплоносителя — *постоянны по поверхности теплообмена* и равны таковым на *выходе*  $T''$  и  $t''$ . Подлежащий последующему переносу к холодному теплоносителю поток теплоты  $Q$ , вносимый с горячим теплоносителем (его пропускная способность  $G_1 c_1$ ), последовательно проходит через тепловой пограничный слой с горячей стороны (пропускная способ-

ность  $\alpha_1 F$ ), стенку  $\left( \frac{\lambda_{\text{ст}}}{\delta_{\text{ст}}} F \right)$ , пограничный слой с холодной сто-

роны ( $\alpha_2 F$ ) и уносится холодным теплоносителем (пропускная способность  $G_2 c_2$ ). Запишем выражения для  $Q$  применительно ко всем отдельным стадиям теплопереноса [см. выражение (а)]

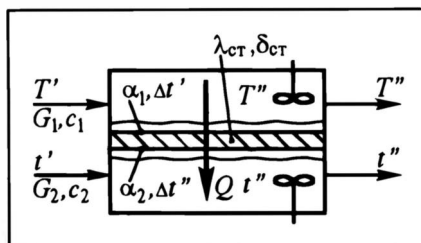


Рис. 7.15. Расчетная схема эксплуатационной задачи при идеальном смешении теплоносителей

в разд. 7.3.1 и (7.166) в разд. 7.5.2]:

$$\begin{aligned} Q &= G_1 c_1 (T' - T'') = \alpha_1 F (T'' - \theta_1) = \\ &= \frac{\lambda_{СТ}}{\delta_{СТ}} (\theta_1 - \theta_2) = \alpha_2 F (\theta_2 - t'') = G_2 c_2 (t'' - t'), \end{aligned} \quad (a)$$

причем  $\theta_1$  и  $\theta_2$  — температуры стенки (здесь постоянные вдоль  $F$ ) со стороны горячего и холодного теплоносителей соответственно.

Решим равенства (а) относительно частных разностей температур и исключим все промежуточные температуры, оставив лишь известные  $T'$  и  $t'$ :

$$\left. \begin{aligned} T' - T'' &= \frac{Q}{G_1 c_1} \\ T'' - \theta_1 &= \frac{Q}{\alpha_1 F} \\ + \quad \theta_1 - \theta_2 &= \frac{Q}{(\lambda_{СТ} / \delta_{СТ}) F} \\ \theta_2 - t'' &= \frac{Q}{\alpha_2 F} \\ t'' - t' &= \frac{Q}{G_2 c_2} \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow T' - t' \equiv \Delta_* = Q \left( \frac{1}{G_1 c_1} + \frac{1}{\alpha_1 F} + \frac{1}{(\lambda_{СТ} / \delta_{СТ}) F} + \frac{1}{\alpha_2 F} + \frac{1}{G_2 c_2} \right).$$

Отсюда получается выражение для искомого потока теплоты:

$$Q = \frac{T' - t'}{\frac{1}{G_1 c_1} + \frac{1}{\alpha_1 F} + \frac{1}{(\lambda_{СТ} / \delta_{СТ}) F} + \frac{1}{\alpha_2 F} + \frac{1}{G_2 c_2}}, \quad (7.20)$$

или в более лаконичной записи, если все (три) *поверхностные* стадии теплопереноса объединить в одну стадию *теплопередачи*:

$$Q = \frac{T' - t'}{\frac{1}{G_1 c_1} + \frac{1}{kF} + \frac{1}{G_2 c_2}}. \quad (7.20a)$$

Для большей общности с последующим изложением перепишем (7.20a), представив слагаемые в знаменателе правой части в форме безразмерных комплексов:

$$Q = \frac{(T' - t')kF}{\frac{kF}{G_1 c_1} + \frac{kF}{kF} + \frac{kF}{G_2 c_2}} = \frac{kF\Delta^*}{a + 1 + b}, \quad (7.20б)$$

где символами  $a \equiv kF/(G_1 c_1)$  и  $b \equiv kF/(G_2 c_2)$  обозначены (по формулам 7.18) отношения пропускных способностей поверхностной и отдельных потоковых стадий теплообмена.

### 7.7.2. Тепловой поток

**при прямоточном и противоточном движении теплоносителей**

В случае *прямоточного* движения обоих теплоносителей (без изменения агрегатного состояния) в режиме идеального вытеснения температуры  $T$  и  $t$  изменяются вдоль  $F$ , так что анализ несколько усложняется. Выражения для  $Q$  с записью стадий теплопередачи (в целом) принимают вид

$$Q = G_1 c_1 (T' - T'') = kF \Delta_{\text{ср}} = G_2 c_2 (t'' - t'). \quad (б)$$

Чтобы исключить из конечных формул не известные заранее температуры  $T''$  и  $t''$ , выразим их из первого и последнего равенств (б):

$$T'' = T' - \frac{Q}{G_1 c_1}, \quad t'' = t' + \frac{Q}{G_2 c_2}$$

и подставим в среднее равенство (б), раскрывая написание  $\Delta_{\text{ср}}$ :

$$Q = kF \frac{(T' - t') - \left[ \left( T' - \frac{Q}{G_1 c_1} \right) - \left( t' + \frac{Q}{G_2 c_2} \right) \right]}{\ln \frac{T' - \frac{Q}{G_1 c_1}}{\left( T' - \frac{Q}{G_1 c_1} \right) - \left( t' + \frac{Q}{G_2 c_2} \right)}} = \frac{Q \left( \frac{1}{G_1 c_1} + \frac{1}{G_2 c_2} \right)}{\ln \frac{\Delta^*}{\Delta^* - Q \left( \frac{1}{G_1 c_1} + \frac{1}{G_2 c_2} \right)}} kF.$$

Отсюда после сокращения на  $Q$  (при этом  $Q$  под знаком  $\ln$  остается)

$$\ln \frac{\Delta^*}{\Delta^* - Q \left( \frac{1}{G_1 c_1} + \frac{1}{G_2 c_2} \right)} = \frac{kF}{G_1 c_1} + \frac{kF}{G_2 c_2} \equiv a + b. \quad (г)$$

Потенцируем и разрешаем полученное равенство относительно искомого потока теплоты:

$$\frac{\Delta^*}{\Delta^* - Q \left( \frac{1}{G_1 c_1} + \frac{1}{G_2 c_2} \right)} = e^{(a+b)};$$

$$Q = \frac{(e^{(a+b)} - 1) \Delta^*}{e^{(a+b)} \left( \frac{1}{G_1 c_1} + \frac{1}{G_2 c_2} \right)} = \frac{1 - e^{-(a+b)}}{\frac{1}{G_1 c_1} + \frac{1}{G_2 c_2}} \Delta^*. \quad (7.21)$$

Как и в случае ИП, знаменатель (7.21) можно привести к безразмерному виду, домножив его (числитель — тоже) на  $kF$ :

$$Q \equiv \dot{Q} = \frac{kF \Delta^* (1 - e^{-(a+b)})}{\frac{kF}{G_1 c_1} + \frac{kF}{G_2 c_2}} = kF \Delta^* \frac{(1 - e^{-(a+b)})}{a + b}. \quad (7.21a)$$

В случае **противоточного** движения теплоносителей в режиме ИВ (и также без изменения агрегатного состояния) остаются справедливы равенства (б), но  $\Delta_{ср}$  формируется по-иному (см. разд. 7.6.2). Подставим значения  $T''$  и  $t''$  в выражение  $\Delta_{ср}$  для противотока:

$$Q = kF \frac{\left( T' - t' - \frac{Q}{G_2 c_2} \right) - \left( T' - \frac{Q}{G_1 c_1} - t' \right)}{\ln \frac{T' - t' - \frac{Q}{G_2 c_2}}{T' - t' - \frac{Q}{G_1 c_1}}} = kF \frac{Q \left( \frac{1}{G_1 c_1} - \frac{1}{G_2 c_2} \right)}{\ln \frac{\Delta^* - \frac{Q}{G_2 c_2}}{\Delta^* - \frac{Q}{G_1 c_1}}}.$$

Отсюда (после сокращения на  $Q$ )

$$\ln \frac{\Delta^* - \frac{Q}{G_2 c_2}}{\Delta^* - \frac{Q}{G_1 c_1}} = \frac{kF}{G_1 c_1} - \frac{kF}{G_2 c_2} \equiv a - b. \quad (д)$$

Потенцируем и разрешаем полученное равенство относительно искомого потока теплоты:

$$\frac{\Delta^* - \frac{Q}{G_2 c_2}}{\Delta^* - \frac{Q}{G_1 c_1}} = e^{(a-b)}; \quad Q = \frac{1 - e^{(b-a)}}{\frac{1}{G_1 c_1} - \frac{1}{G_2 c_2}} \Delta^*, \quad (7.22)$$

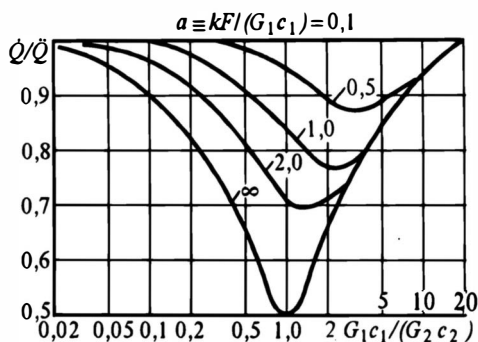


Рис. 7.16. Сравнительная интенсивность теплопереноса при прямотоке и противотоке в задачах эксплуатации

или с безразмерными комплексами в знаменателе:

$$Q \equiv \dot{Q} = kF\Delta_* \frac{1 - e^{(b-a)}}{a - be^{(b-a)}}. \quad (7.22a)$$

Заметим, что в случаях прямотока и противотока из (7.21a) и (7.22a) легко найти пропускные способности теплообмена в целом  $Q/\Delta_*$ .

Полученные выражения для потоков теплоты при прямотоке  $\dot{Q}$  и противотоке  $\dot{Q}$  позволяют провести их сопоставление в условиях эксплуатационной задачи теплообмена. На рис. 7.16 показана зависимость  $\dot{Q}/\dot{Q}$  от  $G_1c_1/(G_2c_2) = b/a$  при различных  $kF/(G_1c_1) = a$ . Можно констатировать, что при очень малых и очень больших значениях комплекса  $G_1c_1/(G_2c_2)$ , а также при малых  $kF/(G_1c_1)$  прямоток и противоток в аспекте интенсивности теплопереноса равноценны. Это объясняется малым изменением в указанных условиях температуры одного из теплоносителей вдоль теплообменной поверхности: например, согласно равенству (б), при  $G_1c_1/(G_2c_2) \rightarrow 0$  очевидно  $t \approx \text{const}$  (поскольку  $t'' - t' \rightarrow 0$ ); соответственно при  $G_1c_1/(G_2c_2) \rightarrow \infty$  будет  $T \approx \text{const}$ ; наконец, при  $kF/(G_1c_1) \rightarrow 0$  получается  $(T' - T'')/\Delta_{\text{ср}} \rightarrow 0$ , т.е. опять-таки  $T \approx \text{const}$ . А при постоянстве температур одного из теплоносителей, как указано в разд. 7.6.2, взаимное направление их потоков перестает сказываться на интенсивности теплообмена. Однако при сопоставимости значений  $G_1c_1$ ,  $G_2c_2$  и  $kF$  интенсивность теплопереноса для прямотока всегда ниже, чем для противотока: на рис. 7.16 в этом случае  $\dot{Q}/\dot{Q} < 1$ , причем при  $G_1c_1 = G_2c_2$  и  $kF \gg G_1c_1$ ,  $G_2c_2$  —

ровно вдвое. Это легко показать и путем прямого деления  $\dot{Q}$  на  $\ddot{Q}$  с последующими предельными переходами — сначала с учетом  $a = b$ , а затем  $a \rightarrow \infty$ .

Аналогичным способом получаются выражения для  $Q$ , если один из теплоносителей движется в режиме ИВ, а другой — в режиме ИП. Надо только соответственно записать выражение для среднелогарифмического напора  $\Delta_{\text{ср}}$ . Еще проще получить формулу для  $Q$ , если один из потоков изменяет агрегатное состояние. Например, в случае конденсации пара надо учесть постоянство температуры  $T = T' = \text{const}$ , приняв пропускную способность этой стадии бесконечно большой\*: как бы  $G_1 c_1 \rightarrow \infty$ . Тогда  $a \equiv kF/(G_1 c_1) \rightarrow 0$ , и выражения (7.21a) и (7.22a) превращаются в более простое:

$$Q = kF\Delta_* \frac{1 - e^{-b}}{b}. \quad (7.21б)$$

Наконец, если оба теплоносителя изменяют агрегатное состояние, то проще всего воспользоваться выражением (7.20a), положив в нем  $G_1 c_1, G_2 c_2 \rightarrow \infty$ , или (7.20б) с учетом  $a, b \rightarrow 0$ . Тогда

$$Q = kF\Delta_*, \quad (7.14), (7.20в)$$

т.е. при изменении агрегатного состояния обоих теплоносителей задачи эксплуатации и проектирования применительно к отысканию  $\Delta_{\text{ср}}$  совпадают, поскольку температуры вдоль всей поверхности теплообмена заданы  $T = T', t = t' —$  и постоянны, а  $\Delta_* = \Delta_{\text{ср}}$ .

Для ряда более сложных схем движения теплоносителей (смешанные токи; движение теплоносителей в режимах, промежуточных между ИВ и ИП, и др.) также получены\*\* выражения для  $Q$ .

Из выражений (7.20б), (7.21a), (7.22a) легко получаются значения средних температурных напоров — путем сопоставления с (7.14) для рассматриваемых случаев, соответственно:

$$\Delta_{\text{ср}} = \Delta_* \frac{1}{a+1+b}; \quad \Delta_{\text{ср}} = \Delta_* \frac{1 - e^{-(a+b)}}{a+b}; \quad \Delta_{\text{ср}} = \Delta_* \frac{1 - e^{(b-a)}}{a - be^{(b-a)}}. (е)$$

Для сложных схем движения теплоносителей тоже могут быть найдены выражения, связывающие  $\Delta_{\text{ср}}$  и  $\Delta_*$  с помощью отношений пропускных способностей ( $a$  и  $b$ ).

\* Здесь не следует, конечно, анализировать, что именно устремляется к бесконечности —  $G_1$  или  $c_1$ ; речь идет о математическом приеме, отвечающем рассматриваемому переходу.

\*\* Наиболее подробные сведения можно найти в [15].

## 7.8. ИЗМЕНЕНИЕ ТЕМПЕРАТУР ВДОЛЬ ТЕПЛООБМЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Качественно характер изменения температур теплоносителей вдоль поверхности теплообмена затрагивался в разд. 7.6.1. В ряде технологических задач необходимо знание локальных температур теплоносителей  $T$  и  $t$  в различных точках теплообменной поверхности, иначе говоря — количественных закономерностей их изменения по  $F$ . Это позволит, в частности, найти конечные температуры  $T''$  и  $t''$  в задачах эксплуатации. Для иллюстрации подходов к отысканию упомянутых закономерностей обратимся к **прямотоку** теплоносителей при их движении в режиме ИВ и без изменения агрегатного состояния.

Для этого случая из теплового баланса для элементарной поверхности теплообмена  $df$  в разд. 7.6.2 были получены соотношения (б)—(г); представим их в несколько иной форме:

$$G_1 c_1 dT + k(T - t)df = 0 \quad \text{и} \quad G_2 c_2 dt - k(T - t)df = 0. \quad (\text{а})$$

Введем относительную координату  $x \equiv f/F$ ; тогда  $df = Fdx$ , и из (а) получается система дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{dT}{dx} = -\frac{kF}{G_1 c_1} (T - t) = -a(T - t), \\ \frac{dt}{dx} = \frac{kF}{G_2 c_2} (T - t) = b(T - t). \end{cases} \quad (\text{б})$$

Эта система должна решаться с граничными условиями для точки начала отсчета поверхности теплообмена  $f$ :

$$T = T' \quad \text{и} \quad t = t' \quad \text{при} \quad x = 0. \quad (\text{в})$$

Наиболее общий способ решения — повышение порядка дифференциальных уравнений при сведении системы (б) к уравнению относительно одной из переменных (здесь  $T$  или  $t$ ). Выразим из первого уравнения системы (б) температуру второго теплоносителя  $t = T + \frac{1}{a} \frac{dT}{dx}$  и продифференцируем ее по  $x$ :

$\frac{dt}{dx} = \frac{dT}{dx} + \frac{1}{a} \frac{d^2 T}{dx^2}$ . А теперь подставим во второе уравнение системы найденные значения  $dt/dx$  и  $t$ :

$$\frac{dT}{dx} + \frac{1}{a} \frac{d^2 T}{dx^2} = b \left[ T - \left( T + \frac{1}{a} \frac{dT}{dx} \right) \right].$$



откуда

$$\frac{d^2T}{dx^2} + (a+b) \frac{dT}{dx} = 0. \quad (\Gamma)$$

Решение этого однородного дифференциального уравнения второго порядка имеет вид

$$T = \lambda_1 e^{k_1 x} + \lambda_2 e^{k_2 x}, \quad (\Delta)$$

где  $k_1, k_2$  — корни характеристического уравнения

$$k^2 + (a+b)k = 0, \text{ так что } k_1 = 0, k_2 = -(a+b).$$

Тогда

$$T = \lambda_1 + \lambda_2 e^{-(a+b)x}. \quad (\epsilon)$$

Подставив в выражение для  $t$  это значение  $T$  и производную  $dT/dx = -\lambda_2(a+b)e^{-(a+b)x}$ , получим

$$t = \lambda_1 - \lambda_2 \frac{b}{a} e^{-(a+b)x}. \quad (\text{ж})$$

Постоянные интегрирования  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  найдем из граничных условий (в):

$$T' = \lambda_1 + \lambda_2 \quad \text{и} \quad t' = \lambda_1 + \lambda_2 \left(1 - \frac{a+b}{a}\right) = \lambda_1 - \frac{b}{a} \lambda_2.$$

Отсюда

$$\lambda_1 = T' - \Delta_* \frac{a}{a+b} = t' + \Delta_* \frac{b}{a+b}, \quad \lambda_2 = \Delta_* \frac{a}{a+b}, \quad (3)$$

где  $\Delta_* = T' - t'$ .

Подставив значения постоянных интегрирования в (е) и (ж), имеем окончательно

$$T = T' - \Delta_* \frac{a}{a+b} (1 - e^{-(a+b)x}); \quad (7.23)$$

$$t = t' + \Delta_* \frac{b}{a+b} (1 - e^{-(a+b)x}). \quad (7.24)$$

На входе в теплообменник ( $x = 0$ ) тождественно  $T = T'$  и  $t = t'$ ; на выходе из него ( $x = 1$ ) получается

$$T'' = T' - \Delta_* \frac{a}{a+b} (1 - e^{-(a+b)}); \quad (7.23a)$$

$$t'' = t' + \Delta_* \frac{b}{a+b} (1 - e^{-(a+b)}). \quad (7.24a)$$

Найденные соотношения позволяют проследить изменение температурного напора вдоль поверхности  $F$ ; из (7.23) и (7.24) следует

$$T - t = T' - t' - \Delta_* \left( \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} \right) (1 - e^{-(a+b)x}) \quad \text{или} \quad \Delta = \Delta_* e^{-(a+b)x} \quad (7.25)$$

Можно убедиться, что из (7.25) по теореме о среднем непосредственно получается известное уже выражение (7.17) для среднелогарифмического температурного напора  $\Delta_{\text{ср}} = \int_0^1 \Delta dx$ .

При этом надо учесть, что получаемые в ходе интегрирования фрагменты имеют следующий смысл применительно к прямо-току:  $\Delta_* = \Delta_1$ ;  $\Delta_* e^{-(a+b)} = \Delta_2$ ;  $a + b = \ln(\Delta_1/\Delta_2)$ .

Продемонстрированный способ определения температурных кривых пригоден также для противотока и многих сложных схем движения теплоносителей. При этом в общем случае изменяются исходные дифференциальные уравнения и граничные условия. В литературе приводятся и другие (более частные) подходы к описанию профилей температур.

## 7.9. ЛИМИТИРУЮЩИЕ СТАДИИ В ПРОЦЕССАХ ТЕПЛОПЕРЕНОСА

### 7.9.1. Общие понятия

Стадии, составляющие процессы переноса, могут быть сложным образом связаны между собой: последовательно, параллельно, последовательно-параллельно. Так, при переносе теплоты соответственно схеме на рис. 6.1 выделяются пять последовательных стадий, соответственно схеме на рис. 7.5 — три последовательные и две параллельные. Каждой стадии отвечает своя интенсивность; для некоторых стадий в качестве характеристики интенсивности выступает ее пропускная способность. Как общий случай, интенсивность теплопереноса в целом зависит от интенсивности составляющих его стадий, причем конкретная форма этой зависимости обусловлена особенностями взаимосвязей отдельных стадий.

В ряде случаев некая стадия последовательного переноса протекает значительно медленнее других — тогда ее называют **лимитирующей (определяющей, контролирующей)**. Теоретически можно считать, что продолжительность всех остальных стадий

---

\* См., например, [2, 6, 11, 12, 16].

много меньше таковой не только для лимитирующей стадии, но даже для погрешности в определении продолжительности лимитирующей стадии. Практически достаточно, чтобы игнорирование этих остальных стадий вносило ошибку, не выходящую за пределы приемлемой точности расчета. Это означает, что теоретически или практически вполне можно ограничиться анализом *только лимитирующей* стадии (полагая, что движущая сила может быть целиком отнесена к этой стадии) — без сколько-нибудь заметной потери точности расчета. Это, как правило, существенно упрощает и облегчает анализ, поскольку избавляет от необходимости определения характеристик нелимитирующих стадий.

Поэтому построение необходимо начинать с анализа на лимитирующую стадию — наличие или отсутствие, особенности (если ее удалось выявить), способы воздействия. Без такого анализа возможны *ошибки, связанные с неосознанной подменой задачи*, а значит и с неверными рекомендациями в практическом осуществлении процесса; не исключена и неграмотная постановка научного исследования.

Ниже проблема лимитирующей стадии рассматривается в основном для последовательного переноса (параллельный перенос затронут весьма кратко) — стационарного и нестационарного. При этом по мере возможности к анализу привлекается концепция пропускных способностей: основная задача формулируется как выражение пропускной способности теплопереноса в целом  $Q/\Delta$ . в зависимости от пропускных способностей отдельных стадий и как упрощение соотношений для  $Q/\Delta$ . при наличии какой-либо лимитирующей стадии.

### **7.9.2. Пропускные способности и лимитирующие стадии при стационарном теплопереносе**

Пусть теплообмен происходит в рекуперативном теплообменнике, включающем в наиболее полном варианте пять *последовательных* стадий (см. рис. 6.1): подвод теплоты в рабочую зону с горячим теплоносителем; перенос ее через пограничный слой от этого теплоносителя к горячей поверхности теплопередающей стенки; через стенку; от ее холодной поверхности через пограничную пленку к холодному теплоносителю; отвод теплоты из рабочей зоны с холодным теплоносителем.

К наиболее наглядным результатам приводит анализ теплопереноса при движении обоих теплоносителей в режиме *идеального перемешивания*. Воспользуемся выражением (7.20), раз-

решив его относительно  $Q/\Delta_*$ :

$$\frac{Q}{\Delta_*} = \frac{1}{\frac{1}{G_1 c_1} + \frac{1}{\alpha_1 F} + \frac{1}{(\lambda_{\text{ст}}/\delta_{\text{ст}})F} + \frac{1}{\alpha_2 F} + \frac{1}{G_2 c_2}}, \quad (7.26)$$

или более лаконично:

$$\frac{Q}{\Delta_*} = \frac{1}{\frac{1}{G_1 c_1} + \frac{1}{kF} + \frac{1}{G_2 c_2}}, \quad (7.26a)$$

либо, наконец, с безразмерными комплексами  $a \equiv kF/(G_1 c_1)$ ,  $b \equiv kF/(G_2 c_2)$  в знаменателе:

$$\frac{Q}{\Delta_*} = \frac{1}{\frac{kF}{G_1 c_1} + \frac{kF}{kF} + \frac{kF}{G_2 c_2}} kF = \frac{1}{a + 1 + b} kF. \quad (7.266)$$

В самом общем случае у слагаемых в знаменателе (7.26) могут быть разные поверхности:  $F_1$ ,  $F_2$  и т.д.

В знаменателе выражений (7.26), (7.26a) стоят величины, обратные пропускным способностям отдельных стадий. Из этих выражений следует, что *увеличение пропускной способности любой из стадий* (т.е. уменьшение отвечающей ей обратной величины) *снижает влияние этой стадии на интенсивность процесса в целом*. Напротив, *уменьшение пропускной способности какой-либо стадии повышает ее влияние на процесс*; при *существенном* уменьшении пропускной способности стадии она может стать *лимитирующей*.

Если, например,  $kF \ll G_1 c_1$ ,  $G_2 c_2$  [или, что то же самое применительно к (7.266),  $a, b \ll 1$ ], то перенос теплоты лимитируется теплопередачей через поверхность, поскольку величина  $1/(kF)$  значительно превосходит остальные слагаемые в знаменателе выражения (7.26a). В этом случае говорят о *теплопереносе в условиях поверхностной задачи*. Для расчета теплопереноса здесь необходимо знание всех кинетических характеристик ( $\alpha_1$ ;  $\alpha_2$ ;  $\lambda_{\text{ст}}$  и  $\delta_{\text{ст}}$ ;  $F$  и т.п.); в то же время пропускные способности теплопереноса с потоками теплоносителей  $G_1 c_1$  и  $G_2 c_2$  в этом случае роли не играют, их воздействие на процесс пренебрежимо мало. Для интенсификации теплопереноса здесь надо повышать  $kF$ ; при этом может возникнуть вопрос, какая из стадий поверхностного теплообмена ( $\alpha_1$  или  $\alpha_2$  либо кондукция через стенку) является лимитирующей. Если, скажем,  $\alpha_1 F \ll \alpha_2 F$ ,  $(\lambda_{\text{ст}}/\delta_{\text{ст}})F$ , то, как показано в разд. 1.8.6 (анализ по значению критерия Био), процесс контролируется *теплоотда-*

чей со стороны горячего теплоносителя; именно ее и надо интенсифицировать. Воздействовать при этом возможно на коэффициент теплоотдачи  $\alpha_1$  (турбулизация потока с помощью специальных устройств, увеличение скорости его движения около теплообменной поверхности и т.п.) или на поверхность теплообмена, развивая ее со стороны меньшей пропускной способности, например путем применения оребренных поверхностей (см. рис. 7.2).

Если же  $G_1 c_1 \ll \alpha_1 F, (\lambda_{ст}/\delta_{ст})F, \alpha_2 F$  и  $G_2 c_2$  (т.е.  $a \rightarrow \infty$ ), то лимитировать теплоперенос будет подвод теплоты в рабочую зону с горячим теплоносителем, поскольку слагаемое  $1/(G_1 c_1)$  значительно превосходит по величине все остальные. В этом случае говорят о **теплопереносе в условиях потоковой задачи по горячему теплоносителю**. Аналогично, при существенно малой пропускной способности  $G_2 c_2$  ( $b \rightarrow \infty$ ) задача будет **потоковой по холодному теплоносителю**. В случае любой из потоковых задач технолога не интересуют кинетические характеристики теплопереноса (типа  $\alpha, \lambda_{ст}, F$  и т.п.), поскольку расчет ведется на основе пропускной способности  $Gc$  одного из теплоносителей — того, что лимитирует процесс.

При движении теплоносителей в режиме **идеального вытеснения** конечные результаты не столь наглядны, хотя качественно они не изменяются.

Из выражений (7.21) и (7.21a) для **прямотока** имеем

$$\frac{Q}{\Delta_*} = \frac{1 - e^{-(a+b)}}{\frac{1}{G_1 c_1} + \frac{1}{G_2 c_2}} \quad \text{и}$$

$$\frac{Q}{\Delta_*} = \frac{1 - e^{-(a+b)}}{\frac{kF}{G_1 c_1} + \frac{kF}{G_2 c_2}} kF = \frac{1 - e^{-(a+b)}}{a + b} kF. \quad (7.27)$$

Пусть подвод теплоты с горячим теплоносителем не влияет на теплоперенос:  $G_1 c_1 \rightarrow \infty, a \rightarrow 0$ . Тогда из (7.27)

$$\frac{Q}{\Delta_*} = \frac{1 - e^{-b}}{b} kF = G_2 c_2 (1 - e^{-b}) = G_2 c_2 (1 - e^{-kF/G_2 c_2}) \quad (7.27a)$$

— интенсивность процесса определяется пропускными способностями  $G_2 c_2$  и  $kF$ .

Симметричная ситуация — при  $G_2 c_2 \rightarrow \infty$ : эта пропускная способность перестает влиять на теплоперенос в целом:

$$\frac{Q}{\Delta_*} = \frac{1 - e^{-a}}{a} kF = G_1 c_1 (1 - e^{-kF/G_1 c_1}). \quad (7.27б)$$

В рассмотренных случаях теплообмен происходит в условиях смешанной задачи: влияют поверхностный теплоперенос и одна из потоковых стадий. Если же пропускные способности обеих потоковых стадий велики ( $G_1c_1, G_2c_2 \rightarrow \infty, a, b \rightarrow 0$ ), то множитель перед  $kF$  в (7.27) дает неопределенность. Раскроем ее, представив экспоненту в виде ряда

$$1 - e^z = z - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} - \dots,$$

где символ  $z$  имеет в данном случае смысл  $(a + b)$ . Тогда при малых  $z$   $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-z}}{z} = 1$ , так что

$$\frac{Q}{\Delta_*} = kF; \quad (7.27в)$$

это — **поверхностная** задача теплопереноса, и потоковые стадии не играют роли, так как их пропускные способности велики.

Наконец, в случае  $kF \rightarrow \infty$  ( $a, b \rightarrow \infty$ ) перестает играть роль теплопередача: поверхность способна пропустить любое количество теплоты, подводимой (отводимой) теплоносителями при полном выравнивании их выходных температур ( $T'' = t''$ ) — все определяется их пропускными способностями. Уравнение (7.27) в этом случае принимает вид, характерный для **балансовой** задачи по двум теплоносителям:

$$\frac{Q}{\Delta_*} = \frac{1}{\frac{1}{G_1c_1} + \frac{1}{G_2c_2}}. \quad (7.27г)$$

Если при этом еще, например,  $G_1c_1 \ll G_2c_2$ , то

$$\frac{Q}{\Delta_*} = G_1c_1. \quad (7.27д)$$

К аналогичным выводам приводит анализ\* *противоточного* теплопереноса — на основе уравнений (7.22), (7.22а):

$$\frac{Q}{\Delta_*} = \frac{1 - e^{(b-a)}}{\frac{1}{G_1c_1} - \frac{1}{G_2c_2} e^{(b-a)}} \quad \text{и} \quad \frac{Q}{\Delta_*} = \frac{1 - e^{(b-a)}}{a - be^{(b-a)}} kF. \quad (7.28)$$

При сопоставимости всех трех пропускных способностей  $G_1c_1, G_2c_2$  и  $kF$  (или, как указано выше, хотя бы двух из них) задача теплопереноса будет **смешанной**.

---

\* Такой анализ выполнен в разд.10.9.3 применительно к противоточному процессу *массопереноса*.

Анализ в свете лимитирующих стадий позволяет с иных позиций трактовать сопоставление прямотока и противотока (см. рис. 7.16). При очень малых или очень больших отношениях потоковых пропускных способностей  $G_{1c1}/(G_{2c2})$  теплоперенос происходит в области потоковой задачи, соответственно по горячему (индекс "1") или холодному (индекс "2") потоку; поэтому другие стадии (в том числе связанные с тепловым взаимодействием теплоносителей) просто не влияют на процесс в целом. В области чисто поверхностной задачи [ $kF/(G_{1c1}) \equiv a \rightarrow 0$ ] также все лимитируют поверхностные эффекты ( $kF$ ) — независимо от потоковых стадий  $G_{1c1}$  и  $G_{2c2}$ . И только при сопоставимости потоковых стадий и не слишком малых значениях  $kF$ , т.е. в условиях смешанной задачи, общая интенсивность теплопереноса не безразлична к взаимному направлению потоков теплоносителей.

В учебной и научной литературе достаточно подробно анализируется теплоперенос в условиях *поверхностной* задачи — для различных схем движения теплоносителей, с выделением лимитирующих стадий в пределах  $kF$  и т.п. *Потоковые и балансовые* задачи теплопереноса, также нередко встречающиеся в технологических процессах, как правило, не рассматриваются. Это не только обедняет анализ, но иногда приводит даже к прямо ошибочным выводам и рекомендациям, поскольку *потоковая* стадия теплопереноса без оговорок трактуется в понятиях (т.е. в терминах и символах) *поверхностной* задачи — на основе пропускной способности  $kF$  или ее составляющих  $\alpha F$ .

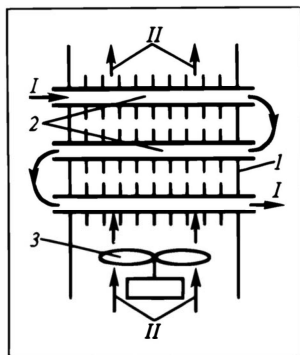
В простейшем варианте подмена потоковой задачи и ее представление в форме поверхностной заключается в записи и использовании выражений типа (7.27в) вместо правомерного в рассматриваемых условиях (7.27д) или аналогичного на основе  $G_{2c2}$ . Совершенно очевидно, что пропускная способность такого процесса, формально записанная как  $kF$  (либо  $\alpha F$ ), окажется пропорциональной величине  $Gc$ . И не случайно экспериментаторы, неосознанно подменяющие потоковую стадию поверхностной, закономерно получают коэффициенты теплопередачи и теплоотдачи прямо пропорциональными первой степени скорости теплоносителя и обратно пропорциональными поверхности контакта  $F$ . В действительности такие зависимости, конечно, не связаны с особенностями кинетики теплообмена, это лишь результат игнорирования потокового механизма теплопереноса, т.е. подстановки  $kF$  или  $F$  вместо  $Gc$ , откуда с неизбежностью следует  $k, \alpha \sim Gc/F$ .

Наглядным примером подмены задачи является коллизия с аппаратами воздушного охлаждения (АВО), предназначенными для отвода теплоты холодным воздухом от конденсирующегося или горячего продукта (рис. 7.17) взамен водя-

Рис. 7.17. Схема аппарата воздушного охлаждения:

1 — корпус теплообменника, 2 — оребренные трубы, 3 — вентилятор;

I — целевой продукт, II — воздух



ных холодильников (с целью экономии воды она становится дефицитной). В корпусе 1 в несколько рядов один над другим расположены оребренные трубы 2, внутри которых последовательно либо параллельно движется продукт. Отбирающий теплоту холодный воздух нагнетается вентилятором 3. Ребра на трубах установлены с целью интенсификации теплопереноса, поскольку со стороны воздуха коэффициенты теплоотдачи, а с ними и пропускные способности  $\alpha_1 F$  и  $kF$  без оребрения

— невелики: именно  $\alpha_1 F$  в отсутствие ребер лимитирует теплоперенос в целом.

Для увеличения производительности АВО по целевому продукту, т.е. для повышения теплового потока  $Q$  было решено, в соответствии с концепциями *теплопередачи*, еще более развить поверхность  $F$  со стороны воздушного потока. Однако при реализации этого решения было установлено *понижение*  $Q$ . Снижение интенсивности теплоотдачи к ребрам может наблюдаться не только при более густом оребрении труб, но и в случае увеличения числа их вертикальных рядов.

Такую «аномалию» можно было предвидеть при всестороннем анализе процесса. Дело в том, что при увеличении  $F$  за счет оребрения задача теплопереноса *перестает* быть *поверхностной* — ведь значения  $kF$  достаточно велики из-за больших  $F$ ; задача *приближается к потоковой по воздуху*. Поэтому дальнейшее развитие  $F$  ничего дать не может; хуже того, из-за увеличения гидравлического сопротивления воздушному потоку (больше рядов труб, гуще их оребрение) снижается производительность вентилятора, т.е. *уменьшается пропускная способность стадии, контролирующей процесс в целом*; поэтому и падает  $Q$ . Совершенно очевидно, что для интенсификации теплопереноса в этих условиях надо увеличивать не  $kF$  (оно и без того достаточно велико), а пропускную способность лимитирующей стадии —  $G$  для воздушного потока.

При *параллельном* теплопереносе одновременно разными ( $n$ ) механизмами пропускные способности стадий складываются, так что при одинаковом температурном напоре пропускная способность процесса в целом составляет в простейшем варианте

$$\frac{Q}{\Delta^*} = \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i, \quad (7.29)$$

причем в форме  $\alpha_i F_i$  здесь записаны условно пропускные способности любой отдельной стадии теплопереноса (не обязательно конвективной).

В частности, в случае простой *поверхностной* задачи

$$\frac{Q}{\Delta^*} = kF = \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i. \quad (7.29a)$$

Очевидно, что при параллельном переносе результирующая пропускная способность процесса в целом будет *больше* (иначе: *не может быть меньше*) любой частной, в том числе — самой



большой пропускной способности отдельной стадии. Таким образом, для параллельного переноса термин “лимитирующая стадия” приобретает смысл, противоположный характерному для последовательного переноса. И здесь для управления процессом следует воздействовать прежде всего на самую *быструю* стадию, имеющую наибольшую пропускную способность.

### 7.9.3. О пропускных способностях в нестационарных процессах

Отличительная особенность нестационарных процессов заключается в появлении Накопления среди составляющих баланса (исключая стадии с нулевыми пространственными контурами — см. разд. 1.3.1). При осуществлении нестационарных процессов (периодических, полунепрерывных) также используется понятие пропускных способностей; остаются правомерными и общие подходы к анализу теплопереноса, изложенные в предыдущих разделах применительно к стационарным процессам. При этом пропускные способности типа  $\alpha F$ ,  $kF$ , как и ранее, относятся к тепловым потокам *в единицу времени*. Однако пропускные способности типа  $Gc$  для тех теплоносителей, где речь идет о Накоплении теплоты, относят к *продолжительности процесса в целом* — соответственно тому, что и  $G$  здесь уже не *поток* теплоносителя ( $кг/с$ ), а его *количество* ( $кг$ ).

В периодических процессах пропускные способности вообще относят к продолжительности процесса в целом, оперируя не потоками теплоты, а их количествами; это касается и количеств энтальпий в тепловых балансах. Предстоит оперировать пропускными способностями  $Gc$  (если  $G$  —  $кг$ ) и  $Gct$  (если  $G$  —  $кг/с$ ),  $kFt$  (или  $\alpha Ft$  — в случае теплообмена с твердыми телами, например); при необходимости эти величины записываются в дифференциальной форме (например,  $\alpha Fdt$  или  $kFdt$ ). Безразмерные комплексы (критерии) в этих случаях могут выражаться в форме  $kFt/(G_1c_1)$ , если  $G_1$  — количество теплоносителя, или  $G_1c_1/(G_2c_2t)$ , если в полунепрерывном процессе  $G_1$  — количество теплоносителя ( $кг$ ), а  $G_2$  — поток ( $кг/с$ ).

Особенности использования понятия пропускных способностей применительно к нестационарному теплопереносу и анализ последнего на лимитирующую стадию — предмет последующего изложения.

## 7.10. НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ТЕПЛООБМЕН С ТВЕРДЫМИ ТЕЛАМИ

### 7.10.1. Основные понятия

Среди технологических процессов значительное место занимает теплообмен с твердыми телами. Такие процессы могут осуществляться в *непрерывном и периодическом* режимах. В пер-

вом случае это чаще всего теплообменники смешения с непрерывным вводом и выводом твердого материала (теплообмен осуществляется с непрерывно движущейся сплошной средой — газом или жидкостью). Непрерывный теплообмен возможен также при наличии в твердом теле Источника (Стока) теплоты — скажем, при проведении каталитической гетерогенной реакции с тепловым эффектом: теплота реакции воспринимается здесь сплошной средой при постоянных локальных температурах твердого материала и среды. Во втором случае (периодические и полунепрерывные процессы) теплообмен является *нестационарным*: температура твердых тел (крупные элементы, зерна, мелкие частицы) изменяется во времени, в уравнениях теплового баланса появляется составляющая “Накопление”; среда обычно имеет постоянную входную температуру, температура среды на выходе из рабочей зоны может изменяться во времени. Заметим, что при осуществлении стационарных (применительно к рабочей зоне теплообменника) процессов отдельные акты теплопереноса (по отношению к индивидуальному зерну, например) чаще всего нестационарны.

В основе расчета теплообмена с твердыми телами лежит уравнение Фурье — Кирхгофа в форме

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t + \frac{q_v}{c_p} \quad (1.21\text{ж}), (7.30)$$

или в отсутствие Источников и Стоков теплоты:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t. \quad (1.21\text{ж}'), (7.30\text{а})$$

Эти уравнения решаются с условиями однозначности (см. разд. 1.7), формулируемыми в соответствии со спецификой конкретного процесса теплопереноса. Среди них — **начальное** условие, описывающее исходное распределение температур в твердом теле, и **граничные** условия, отражающие особенности его взаимодействия со сплошной средой на границах (иногда и внутри тела) в процессе теплопереноса.

Масштабные преобразования уравнения Фурье — Кирхгофа и граничных условий приводят (разд. 1.8) к критериям подобия Фурье  $Fo \equiv a\tau/R^2$ , Био  $Bi \equiv \alpha R/\lambda_{ст}$  и геометрическим симплексам (безразмерным координатам) типа  $x/l$ ,  $r/R$ , где  $x$  и  $r$  — натуральные координаты,  $l$  и  $R$  — определяющие размеры твердого тела (зерна).

Чаще всего в химико-технологических процессах зерно омывается потоком сплошной среды, так что на его границах осуществляется конвективный теплообмен, интенсивность которого характеризуется коэффициентом теплоотдачи  $\alpha$ , поверхностью теплопереноса  $F$  и температурным напором  $(\theta - t)$

или ( $t - \theta$ ); перенос теплоты внутри тела характеризуется его теплопроводностью  $\lambda_t$  и внутренним градиентом температур ( $d\theta/dn$ ). Соотношение этих эффектов и выражается значениями  $Bi$ . Напомним, что среди граничных условий наиболее общими являются условия III рода, отвечающие ограниченным значениям  $Bi$ . Если теплоперенос лимитируется конвективным переносом теплоты *снаружи* тела, то  $Bi \rightarrow 0$  (практически — стремится к малым значениям, определяемым допустимой погрешностью анализа, расчета). Тогда граничные условия III рода вырождаются в *безградиентный* теплообмен (температура тела постоянна по всему его объему) — говорят о **теплообмене в условиях внешней задачи**. Если же теплоперенос лимитируется распространением теплоты *внутри* тела, то  $Bi \rightarrow \infty$  (практически — к достаточно высоким значениям, обеспечивающим приемлемую точность) и граничные условия III рода вырождаются в условия I рода — говорят о **теплообмене в условиях внутренней задачи**.

В разд. 1.8.6 было показано, что критерий Био может трактоваться в аспекте соотношения пропускных способностей. При этом конвективному поверхностному переносу теплоты на границе с твердым телом отвечает пропускная способность  $\alpha F$  (аналог использованной в предыдущих разделах величины  $kF$ ). Соответственно в числе критериев будет фигурировать комплекс “ $a$ ” в написании для стационарных процессов в форме  $a \equiv \alpha F / Gc$  (вместо  $kF / Gc$ ), а для нестационарных — возможно (в зависимости от постановки задачи), в форме  $\alpha F_t / Gc$ .

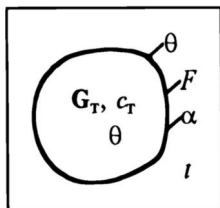
Ниже рассмотрены характерные случаи нестационарного теплообмена твердого тела со сплошной средой.

### 7.10.2. Нестационарный безградиентный теплообмен с твердым телом

Пусть высокотеплопроводное тело массой  $G_t$ , теплоемкостью  $c_t$  омывается (рис. 7.18) потоком сплошной среды (газ, жидкость) постоянной температуры  $t$ . Примем для определенности, что начальная температура тела  $\theta_0$  ниже  $t$ . Требуется найти закон изменения температуры тела во времени  $\theta$  ( $\tau$ ).

Вследствие высокой теплопроводности твердого тела (в расчетном смысле  $\lambda_t \rightarrow \infty$ ), критерий  $Bi \equiv \alpha R / \lambda_t \rightarrow 0$  (практически для шара в инженерных расчетах достаточно  $Bi \leq 0,1 \div 0,2$ ). Поэтому нагрев тела можно считать *безградиентным*: во всех его точках, в том числе и на поверхности, температура в каждый момент времени одинакова. Интенсивность нагрева определяется внешним конвективным теплопереносом через поверхность тела  $F$ ; теплоотдача зависит от характеристик движущейся среды около поверхности, выражается она коэффици-

Рис. 7.18. К расчету безградиентного теплообмена с твердым телом



ентом теплоотдачи  $\alpha$  — будем считать его известным и постоянным в ходе процесса.

В качестве пространственного контура выберем само твердое тело (границы контура — поверхность  $F$ ) и запишем тепловой баланс для элементарного интервала времени  $d\tau$ . Приход теплоты соответственно выражению (а) из разд. 7.5 равен  $dQ = \alpha F(t - \theta)d\tau$ . Накопление составляет  $d(G_T c_T \theta) = G_T c_T d\theta$ . Тогда в отсутствие Источников и Стоков, а также Ухода теплоты получим

$$\alpha F(t - \theta)d\tau - 0 + 0 - 0 = G_T c_T d\theta.$$

Разделяя переменные и интегрируя при  $t = \text{const}$  от начального состояния до *текущего*, получаем искомую связь  $\theta$  и  $\tau$ :

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{t - \theta} = \frac{\alpha F}{G_T c_T} \int_0^{\tau} d\tau \quad \text{и} \quad \ln \frac{t - \theta_0}{t - \theta} = \frac{\alpha F \tau}{G_T c_T}. \quad (7.31)$$

Отсюда время, необходимое для нагрева тела до температуры  $\theta$  (разумеется,  $\theta \leq t$ ), будет

$$\tau = \frac{G_T c_T}{\alpha F} \ln \frac{t - \theta_0}{t - \theta}, \quad (7.31a)$$

а температура тела к моменту времени  $\tau$  составит

$$\theta = t - (t - \theta_0) \exp \left( -\frac{\alpha F \tau}{G_T c_T} \right). \quad (7.31b)$$

Из выражений (7.31) и (7.31b) видно, что процесс контролируется отношением пропускных способностей  $\alpha F t / G_T c_T$ .

### 7.10.3. Нестационарный теплообмен с шаром в граничных условиях III и I рода

Нестационарный теплообмен с телом в **граничных условиях III рода** анализируется ниже на примере симметричного нагрева сферы. Требуется найти закон изменения температуры тела  $\theta = \theta(r, \tau)$ .

Рассмотрим первоначально процесс *качественно*. Шар радиусом  $R$  (его плотность  $\rho_T$ , теплоемкость  $c_T$ , теплопроводность  $\lambda_T$ ) с начальной температурой  $\theta_0$  (пусть для простоты она одинакова по объему шара) помещают в среду с более высокой температурой  $t$  (пусть в течение всего процесса она, тоже для простоты анализа, поддерживается неизменной). Интенсивность теплообмена на наружной границе шара определяется

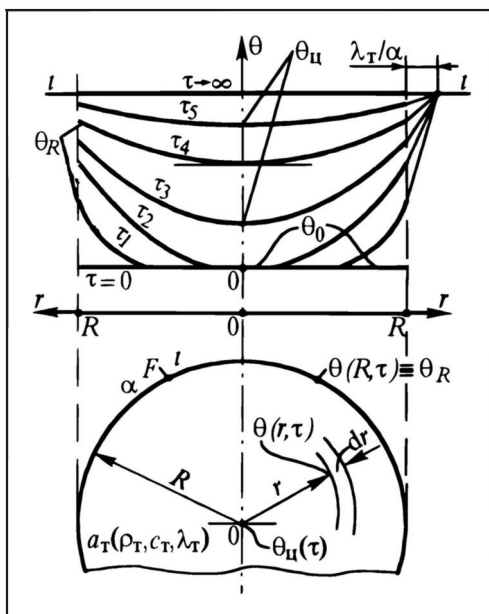


Рис. 7.19. К расчету нестационарного теплообмена с шаром в граничных условиях III рода

коэффициентом теплоотдачи  $\alpha$ ; внутри шара — теплопроводностью  $\lambda_T$  (пусть  $\lambda_T$  не зависит от  $\theta$ ).

Качественная картина изменения  $\theta$  по радиальной координате  $r$  и во времени  $\tau$  представлена на рис. 7.19. При  $\tau = 0$  (начало процесса)  $\theta_0(r) = \text{const}$ . В моменты времени  $\tau_1, \tau_2 > 0$  поверхностные слои шара приняли более высокую температуру (при  $\tau_2 > \tau_1$  они, естественно, нагрелись больше), центральные зоны шара пока еще сохраняют температуру  $\theta_0$ . Далее (моменты времени  $\tau_3, \tau_4, \dots$ ) изменение температуры захватывает все точки шара. С течением времени температура на поверхности (а за ней — и внутри шара) все более приближается к температуре среды  $t$ ; при  $\tau \rightarrow \infty$  во всех точках шара  $\theta \rightarrow t$ .

В основе количественного анализа — уравнение Фурье — Кирхгофа для твердого тела в отсутствие Источников и Стоков теплоты в форме (7.30) с выражением лапласиана в сферических координатах по (1.266):

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a_T \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right), \quad 0 < r < R, \quad (7.32)$$

где  $a_T \equiv \lambda_T / (c_T \rho_T)$ .

Нетрудно убедиться, что это выражение тождественно более удобной записи:

$$\frac{\partial(\theta r)}{\partial \tau} = a_{\tau} \frac{\partial^2(\theta r)}{\partial^2 r}, \quad 0 < r < R, \quad (7.32a)$$

так что при решении будем отыскивать произведение  $\theta r$ .

Запишем условия однозначности, сформулированные выше словесно.

Начальное условие:

$$\tau = 0, \quad \theta(r, 0) = \theta_0, \quad 0 \leq r \leq R. \quad (7.33a)$$

Граничное условие III рода (оно может быть записано для всей поверхности шара  $F$  либо для единицы поверхности):

$$r = R, \quad \alpha(t - \theta_R)F = -\lambda_{\tau} \left( \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)_{r=R} F, \quad \tau \geq 0. \quad (7.33b)$$

Условие симметрии:

$$r = 0, \quad \frac{\partial \theta(0, \tau)}{\partial r} = 0, \quad \tau \geq 0. \quad (7.33b)$$

Согласно условию (7.33б), наклон температурных кривых у поверхности шара определяется прямыми, выходящими из точки с координатами  $t$ ;  $R + \lambda_{\tau}/\alpha$ . Из условия (7.33в) с очевидностью следует (см. рис. 7.19): температурные кривые в любой момент времени симметричны относительно центра шара (абсцисса  $r = 0$ ), так что касательные к температурным кривым (на рисунке для иллюстрации — к кривой при  $\tau = \tau_4$ ) в точке  $r = 0$  параллельны оси  $r$ . Иначе: тангенсы угла наклона касательных к оси  $r$  (т.е. производные  $\partial \theta / \partial r$ ) в центре шара равны нулю. Заметим, что условие (7.33в) выражает еще и *ограниченность* температуры в ходе процесса: ни при каких  $\tau$  не может быть  $\theta \rightarrow \infty$ .

Полная процедура решения уравнений (7.32) — (7.32a) с граничными условиями (7.33) приводится в литературе\*. Продemonстрируем начальные стадии анализа, позволяющие обосновать общий вид решения.

Наиболее наглядным является решение методом "разделения переменных" (более общие методы — за пределами\* учебника). Будем искать зависимость  $\theta r = f(r, \tau)$  в виде произведения двух функций —  $f_r$ , зависящей *только* от  $r$ , и  $f_{\tau}$ , зависящей *только* от  $\tau$ . Тогда (7.32a) переписывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(f_r f_{\tau}) = a_{\tau} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(f_r f_{\tau}), \quad (a)$$

---

\* См., например, [7, 10].

и после выполнения операции дифференцирования (с учетом, что  $f_r$  не зависит от  $\tau$ , а  $f_\tau$  — от  $r$ )

$$f_r \frac{\partial f_\tau}{\partial \tau} = a_\tau f_\tau \frac{\partial^2 f_r}{\partial r^2} \quad \text{или} \quad f_r f'_\tau = a_\tau f_\tau f''_r.$$

Разделяя переменные, т.е. собирая в различные части равенства функции, зависящие только от  $r$  и только от  $\tau$ , получим

$$\frac{f'_\tau}{f_\tau} = a_\tau \frac{f''_r}{f_r}. \quad (б)$$

Левая часть равенства (б) не зависит от координаты  $r$ , следовательно значение  $f'_\tau/f_\tau$  одинаково для любого  $r$ ; правая часть (б) не зависит от времени  $\tau$  — следовательно, значение  $f''_r/f_r$  одинаково для любого  $\tau$ . Такая ситуация при соблюдении равенства (б) возможна только в том случае, когда левая и правая части равенства постоянны — для любых  $r$  и  $\tau$ . Эту постоянную величину удобно записать в виде  $(-a_\tau k^2)$  — смысл такой формы записи будет ясен из последующего анализа (здесь лишь заметим:  $k$  — вещественное число, так что  $k^2 > 0$ ). Таким образом,

$$\frac{f'_\tau}{f_\tau} = a_\tau \frac{f''_r}{f_r} = -a_\tau k^2 = \text{const}. \quad (б')$$

Из левой части (б'):  $f'_\tau = (-a_\tau k^2) f_\tau$ , т.е. первая производная функции равна самой функции, умноженной на некую постоянную величину. Такой функцией является экспонента, под знаком которой перед аргументом  $\tau$  стоит упомянутая постоянная  $(-a_\tau k^2)$ :

$$f_\tau = \exp(-a_\tau k^2 \tau) \equiv e^{-a_\tau k^2 \tau}. \quad (в)$$

Здесь становится ясным смысл знака “минус” в написании постоянной величины: при безграничном увеличении  $\tau$  функция  $f_\tau$  (а с ней и искомая температура  $\theta$ ) будет *ограничена* — в соответствии с физическим смыслом процесса и граничным условием (7.33в).

Из правой части (б') — после сокращения на  $a_\tau$ :  $f''_r = -k^2 f_r$ , т.е. вторая производная функции равна самой себе (но с обратным знаком), умноженной дважды на постоянный множитель  $k$ . Такими функциями являются  $\sin$  и  $\cos$ , в которых перед аргументом  $r$  стоит множитель  $k$ , либо их линейная комбинация:

$$f_r = A \sin(kr) + B \cos(kr). \quad (г)$$

В результате на основе частных решений (в) и (г) для каждой переменной  $\tau$  и  $r$  можно записать

$$\theta r = f_r f_\tau = [A \sin(kr) + B \cos(kr)] e^{-a_\tau k^2 \tau}$$

или

$$\theta = \theta(r, \tau) = \left[ \frac{A \sin(kr)}{r} + \frac{B \cos(kr)}{r} \right] e^{-a_\tau k^2 \tau}. \quad (д)$$

Это выражение должно быть справедливо для любой точки шара при  $r \leq R$ . Однако при приближении к его центру ( $r \rightarrow 0$ ) лишь первое слагаемое в квадратных скобках (д) остается ограниченным (один из “замечательных” пределов), а второе — безгранично возрастает. Это противоречие физическому смыслу и условию об ограниченности  $\theta$  устраняется при  $B = 0$ . Тогда

$$\theta(r, \tau) = A \frac{\sin(kr)}{r} e^{-a_\tau k^2 \tau}. \quad (е)$$

Решение (е) является частным: поскольку  $\sin$  — функция периодическая, то граничное условие (7.33б) может быть удовлетворено при различных (не любых,

конечно) значениях  $k$  — каждому из них отвечает свое  $A$ . В результате общее решение получается в виде бесконечной последовательности слагаемых типа правой части выражения (е):

$$\theta(r, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sin(k_n r)}{r} e^{-a_\tau k_n^2 \tau}. \quad (\text{ж})$$

Далее определяют  $k_n$  — из граничного условия (7.32б) и  $A_n$  — из начального условия (7.32а); в учебнике эта весьма громоздкая процедура определения  $k_n$  и особенно  $A_n$  не приводится\*. Отметим лишь, что  $k_n$  удобно выразить в форме  $\mu_n/R$ ; тогда  $a_\tau k_n^2 \tau = \mu_n^2 a_\tau \tau / R^2 = \mu_n^2 Fo$ , а под знаком  $\sin$  будет стоять  $k_n r = \mu_n r / R$ , причем  $\mu_n$  — безразмерная величина. Поскольку  $k_n$  определяются из граничных условий III рода, то они, как и производные от них величины  $\mu_n$ , должны зависеть от значения критерия  $Bi$ . Величины  $A_n$  сложным образом выражаются через  $\mu_n$  (или через  $Bi$ ).

Решение (ж) с целью повышения его общности удобно представить целиком в безразмерной форме. Так в левой части появляется безразмерный температурный комплекс  $(t - \theta)/(t - \theta_0)$  или  $(\theta - \theta_0)/(t - \theta_0)$ . Например, с установленным отдельно выражением для  $A_n$

$$\theta^* \equiv \frac{t - \theta}{t - \theta_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \mu_n - \mu_n \cos \mu_n}{\mu_n - \sin \mu_n \cos \mu_n} \frac{\sin\left(\mu_n \frac{r}{R}\right)}{\frac{r}{R}} e^{-\mu_n^2 Fo}. \quad (7.34)$$

При подстановке в это выражение  $r = 0$  и  $r = R$  получаются соответственно температуры в центре шара  $\theta_c$  и на его поверхности  $\theta_R$ .

В тепловых балансах фигурирует *средняя* (по объему и массе шара) температура шара  $\bar{\theta}$ . Ее находят, записывая энтальпию элементарного шарового слоя радиусом  $r$ , толщиной  $dr$  (фрагмент слоя показан на рис. 7.19) в виде  $c_T \rho_T dV = c_T \rho_T 4\pi r^2 dr$  и вычисляя (путем интегрирования) полную энтальпию шара. Эта же полная энтальпия может быть записана через среднюю температуру  $\bar{\theta}$  для всей массы шара:

$$\int_0^R \theta c_T \rho_T 4\pi r^2 dr = \bar{\theta} c_T \rho_T \frac{4}{3} \pi R^3. \quad (3)$$

Отсюда

$$\bar{\theta} = \frac{3}{R^3} \int_0^R \theta r^2 dr, \quad (7.35)$$

причем  $\theta$  под интегралом выражается уравнением (7.34). После выполнения операции интегрирования получается значение  $\bar{\theta} = \bar{\theta}(\tau)$ , не зависящее, естественно, от  $r$ . В безразмерной форме после интегрирования выражение для  $\bar{\theta}$  имеет вид\*\*

$$\bar{\theta}^* \equiv \frac{t - \bar{\theta}}{t - \theta_0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (7.36)$$

где безразмерные коэффициенты  $B_n$  выражаются через  $\mu_n$  и  $Bi$ .

С помощью выражения (7.36) определяют количество теплоты  $Q$ , воспринятой шаром при его нагревании за время  $\tau$  (или отданной при охлаждении). Для

\* Детальные преобразования с получением  $k_n$ ,  $\mu_n$  и  $A_n$  приведены в [10].

\*\* Детальные преобразования с получением  $B_n$  приведены в [10].



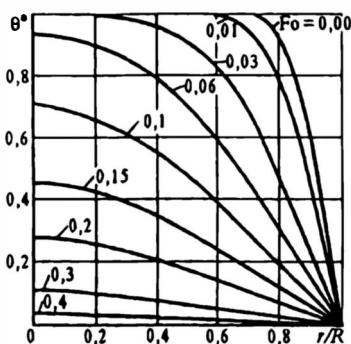


Рис. 7.20. Распределение температур в шаре при теплообмене в условиях внутренней задачи

этого вычтем из единицы левую и правую части равенства:

$$1 - \frac{t - \bar{\theta}}{t - \theta_0} \equiv \frac{\bar{\theta} - \theta_0}{t - \theta_0} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\mu_n^2 F_0}. \quad (3)$$

Знаменатель в левой части равенства имеет смысл начальной движущей силы:  $t - \theta_0 \equiv \Delta^*$ . Очевидно, что  $Q = G_T c_T (\bar{\theta} - \theta_0)$ , где  $G_T$  и  $c_T$  — масса и теплоемкость шара. Значит,

$$Q = G_T c_T \Delta^* \left( 1 - \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\mu_n^2 F_0} \right), \quad (7.37)$$

а пропускная способность

$$\frac{Q}{\Delta^*} = G_T c_T \left( 1 - \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\mu_n^2 F_0} \right). \quad (7.38)$$

Если теплообмен с шаром происходит в условиях внутренней задачи (граничные условия I рода), то интенсивность внешнего теплопереноса бесконечно велика в сравнении с внутренним, так что температура поверхности шара принимает температуру среды:  $\theta_R = t$ . При этом критерий  $Bi \rightarrow \infty$  и его влияние вырождается,  $\mu_n$  уже не зависит от  $Bi$ ; анализ дает  $\mu_n = \pi n$ , тогда  $\sin \pi n = 0$ ,  $\cos \pi n = (-1)^{n+1}$ . В результате из (7.34) получается

$$\theta^* \equiv \frac{t - \theta}{t - \theta_0} = \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n+1} \frac{\sin\left(\pi n \frac{r}{R}\right)}{\pi n \frac{r}{R}} e^{-\pi^2 n^2 F_0}, \quad (7.34 \text{ а})$$

а из (7.36)

$$\bar{\theta}^* \equiv \frac{t - \bar{\theta}}{t - \theta_0} = \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-\pi^2 n^2 F_0} \quad (7.36 \text{ а})$$

Соответственно трансформируются выражения для  $Q$  и  $Q/\Delta^*$ .

Существенно, что при не очень малых значениях критерия Фурье ряды быстро сходятся, так что вполне можно ограничиться первым членом разложения, например:

$$\bar{\theta}^* \approx \frac{6}{\pi^2} e^{-\pi^2 F_0}; \quad (7.36 \text{ б})$$

в этом случае для  $F_0 \geq 0,1$  погрешность не превышает 1,3%.

Для иллюстрации на рис. 7.20 приведены температурные кривые для случая теплообмена с шаром в условиях внутренней задачи, построенные по формуле (7.34а).

Аналогичным методом (разумеется, с иным способом выражения лапласиана и записью граничных условий) подходят к решению задач для цилиндра, пластин, несколько сложнее —

для тел другой формы. И здесь решения получаются, как правило, в виде бесконечных рядов. Продемонстрированный подход может, с определенными ограничениями, оказаться полезным и при решении некоторых задач массопереноса.

Если теплообмен с шаром происходит в условиях *внешней* задачи ( $Bi \rightarrow 0$  и его влияние вырождается), то получаются формулы, переходящие в решение для безградиентного теплопереноса — типа (7.31) при подстановке  $F$  и  $G_T$  для шара. Однако этот переход сопряжен с весьма непростыми преобразованиями, поэтому задачу безградиентного теплообмена проще решать непосредственно, как это сделано в разд. 7.10.2.

## 7.11. МЕЖФАЗНЫЙ ТЕПЛООБМЕН В ПСЕВДООЖИЖЕННОМ СЛОЕ

В разд. 6.7 рассмотрен теплоперенос “теплопередающая поверхность — псевдоожженный слой”. В настоящем разделе анализируется **межфазный теплообмен** — между псевдоожженными твердыми частицами и оживающим агентом (пусть для определенности — газом). Этот анализ наглядно иллюстрирует сферу действия и соотношение *внешней* и *поточковой* (балансовой) задач теплопереноса; сделано это применительно к теплообменнику смешения.

Общая схема теплообменника с псевдоожженным слоем, работающего в стационарном режиме, представлена на рис. 7.21, а. Количество твердого материала в аппарате поперечным сечением  $f_a$  поддерживается в ходе теплообмена постоянным  $G_0$ ; порозность слоя равна  $\varepsilon$ . В аппарат непрерывно подается поток горячих частиц  $G_T$  размером  $d$  и температурой  $\theta'$  и холодный газ — его поток  $G$ , температура  $t'$ . Цель процесса

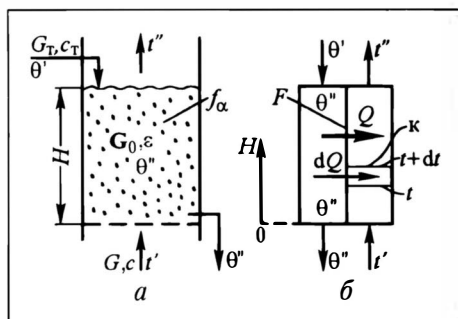


Рис. 7.21. Межфазный теплообмен в псевдоожженном слое:  
а — схема процесса, б — расчетная схема

— охлаждение твердых частиц до температуры  $\theta''$ . Цель анализа — найти связь температур твердого материала и газа с параметрами процесса и геометрическими характеристиками псевдооживленного слоя. Расчетная схема представлена на рис.7.21,б.

### 7.11.1. Межфазный теплообмен в тонком псевдооживленном слое

Пусть в *тонком* псевдооживленном слое частицы полностью доступны контакту с газом (застойные зоны отсутствуют). Малые размеры частиц и не слишком малая их теплопроводность позволяют считать теплообмен с ними безградиентным. Псевдооживленные частицы находятся в состоянии очень интенсивного движения — практически слой можно считать системой идеального перемешивания; поэтому температура частиц по всему объему слоя одинакова и равна температуре на выходе их из аппарата  $\theta''$ . Примем, что газ движется в режиме ИВ — это близко к реальности, если частицы не обладают заметными адсорбционными свойствами по отношению к газу.

Температуру газа на выходе из слоя  $t''$  находим из теплового баланса (временной интервал — 1 с; пространственный контур — весь псевдооживленный слой), записанного сразу в форме (7.166):

$$G_T c_T (\theta'' - \theta') = Gc(t'' - t'). \quad (7.39)$$

Для установления профиля температур в слое рассмотрим элементарный контур “к” в зоне движения газа (рис.7.21,б):

$$Gct + dQ - Gc(t + dt) = 0.$$

При коэффициенте теплоотдачи от частиц к газу  $\alpha$  элементарный тепловой поток равен  $dQ = \alpha(\theta'' - t)dF$ . Тогда

$$\alpha(\theta'' - t)dF = Gcdt \quad \text{и} \quad \frac{dt}{\theta'' - t} = \frac{\alpha}{Gc} dF. \quad (a)$$

После интегрирования от 0 до  $F$  и от  $t'$  до  $t$  (при  $\theta'' = \text{const}$ ) получаем температурный профиль газа, выраженный через отношение пропускных способностей:

$$\ln \frac{\theta'' - t}{\theta'' - t'} = -\frac{\alpha F}{Gc} \quad \text{и} \quad \frac{\theta'' - t}{\theta'' - t'} = \exp\left(-\frac{\alpha F}{Gc}\right). \quad (7.40)$$

Если под  $F$  понимать не текущую, а полную поверхность контакта частиц и газа, то в (7.40) вместо текущей температуры газа  $t$  будет стоять конечная  $t''$ .

В целях наглядности и удобства практических расчетов выразим поверхность теплообмена ( $dF$ ,  $F$ ) через высоту слоя. Удельная поверхность твердых частиц в соответствии с (2.64)

выражается (с заменой  $\varepsilon_0$  на  $\varepsilon$ , поскольку здесь речь идет не о неподвижном, а о псевдоожигенном слое):  $F_{\text{уд}} = 6(1 - \varepsilon)/d$ . Полная поверхность контакта для слоя высотой  $H$  будет  $F = F_{\text{уд}} f_a H$ . Тогда  $F = 6(1 - \varepsilon) f_a H/d$ , и (7.40) преобразуется к виду

$$\ln \frac{\theta'' - t'}{\theta'' - t''} = \frac{\alpha}{Gc} \frac{6(1 - \varepsilon) f_a}{d} H \quad \text{и}$$

$$\frac{\theta'' - t''}{\theta'' - t'} = \exp \left[ - \frac{\alpha}{Gc} \frac{6(1 - \varepsilon) f_a}{d} H \right]. \quad (7.40a)$$

Первое из этих выражений удобно использовать при решении задач *проектирования* — для определения необходимой высоты слоя:

$$H = \frac{Gc}{\alpha f_a} \frac{d}{6(1 - \varepsilon)} \ln \frac{\theta'' - t'}{\theta'' - t''}. \quad (7.40б)$$

Важно, что при меньшей высоте слоя не удастся достигнуть снижения температуры частиц до заданной величины  $\theta''$ , поскольку поверхность межфазного контакта  $F$  недостаточна, и температурные изменения  $(\theta' - \theta'')$  и  $(t' - t'')$  будут меньше необходимых.

В рассматриваемой ситуации интенсивность теплообмена определяется двумя стадиями — *поверхностной* (применительно к твердым частицам — *внешней*) и *поточковой* (по сплошной среде — газу). Поэтому и в математическом описании присутствует отношение пропускных способностей этих стадий  $\alpha F/Gc$ . Теплообмен здесь происходит в условиях *смешанной* задачи. Заметим: при очень больших пропускных способностях  $Gc$  газового потока его температура практически не изменялась бы при движении через тонкий псевдоожигенный слой (ТПС); тогда задача теплопереноса была бы строго *внешней*.

Второе из выражений (7.40a) удобно использовать при решении задач *эксплуатации* — для определения температуры газа  $t''$  на выходе из псевдоожигенного слоя. Если вместо полной высоты слоя  $H$  в это уравнение подставить текущую вертикальную координату, отсчитанную от основания слоя, то уравнение будет описывать температурный профиль газа в слое, т.е. изменение  $t$  по высоте слоя.

В условиях внешней или смешанной задачи температура газа, уходящего из псевдоожигенного слоя,  $t''$  заметно отличается от температуры частиц в слое  $\theta''$ . Именно в этом смысле слой именуется **тонким**.

Зависимость  $t''$  от  $H$  представлена на начальном участке (см. рис.7.22, область ТПС): налицо достаточно быстрое (экспоненциальное) приближение кривой  $t''(H)$  к уровню  $\theta''$ . При этом

для более крупных частиц (на рисунке — пункт “к”) это приближение происходит медленнее (так как меньше  $F_{уд}$ , значит, меньше и множитель в экспоненте перед  $H$ ), а для более мелких — быстрее (пункт “м”; *большие значения  $F_{уд}$* ).

### 7.11.2. Вырождение смешанной задачи в потоковую (балансовую)

Станем увеличивать высоту псевдоожиженного слоя  $H$ . При этом температура уходящего газового потока  $t''$  будет все в большей мере приближаться к  $\theta$ . При некоторой высоте слоя  $H = h_a$  (а в случае изменения температуры газа *по высоте* слоя — на некоторой координате  $h_a$  внутри слоя) разница в температурах  $\theta$  и  $t''$  станет несущественной, а сами эти температуры — просто неразличимыми. Величину  $h_a$  называют **высотой активного участка** (рис. 7.22). Ее определяют, исходя из допустимой погрешности расчета: разность  $\theta'' - t''$  считается неразличимой, если она составляет малую долю  $\psi$  от первоначальной, т.е. на входе газа в слой  $\theta'' - t'$ . Чаще всего границу незначимости разности  $\theta'' - t''$  проводят по величине

$$\psi = \frac{\theta'' - t''}{\theta'' - t'} = 0,01 - 0,05; \quad (6)$$

иначе: остаточный температурный напор на выходе из слоя составляет 1—5% от начального (входного). Пока  $\psi$  превышает эту величину, теплообмен полагают протекающим в условиях внешней или смешанной задачи: играет роль конвективный перенос (его пропускная способность  $\alpha F$ ),  $t''$  и  $\theta$  вполне различимы — это и есть область **тонкого** псевдоожиженного слоя (ТПС).

При нарастании высоты слоя, т.е. при  $H \geq h_a$ , температуры  $t''$  и  $\theta$  становятся неразличимыми — налицо тепловое равновесие (т.е. практически полная рекуперация теплоты в условиях идеального перемешивания одного из теплоносителей). Здесь с обусловленной погрешностью можно считать  $t'' = \theta$  — это область **высокого** псевдоожиженного слоя (ВПС).

Оценки высоты активного участка  $H = h_a$  по формуле (7.406) для частиц, обычно используемых в практике псевдоожижения, приводят к величинам  $h_a$ , измеряемым миллиметрами или (в случае крупных частиц) несколькими десятками миллиметров. Повышение  $H$  сверх  $h_a$  ничего не дает с точки зрения теплообмена (он практически завершен в слое высотой  $h_a$ ) и вредно с точки зрения энергозатрат (при увеличении  $H$  растет сопротивление псевдоожиженного слоя, а значит и затраты энергии на дутье). И тем не менее в подавляющем большинстве случаев межфазный теплообмен в псевдоожиженном слое протекает в условиях  $H > h_a$ ,  $H \gg h_a$ . Дело в том, что в аппаратах промышленных размеров тонкие псевдоожиженные слои структурно неустойчивы: вероятны случайные выбросы твердого материала в каком-то месте в соседние участки и образование канала (свища), не содержащего твердого материала; сюда (по пути наименьшего сопротивления) пойдет основная доля газа, а на других участках скорость упадет

Рис. 7.22. Температурные кривые при межфазном теплообмене в псевдоожигенном слое (м — мелкие частицы, к — крупные частицы)

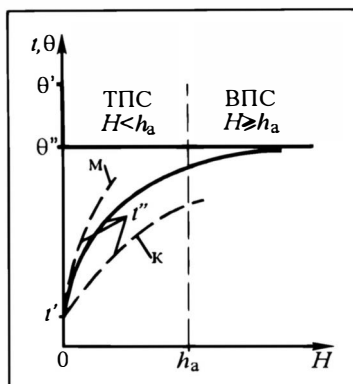
и возникнут застойные зоны. Поэтому процесс ведут со слоем высотой не ниже 100—200 мм, чтобы случайно возникший свищ был тут же “засыпан” твердым материалом из соседних зон.

Итак, на практике межфазный теплообмен осуществляется почти исключительно в высоком псевдоожигенном слое (ТПС иногда используют лишь в исследовательских целях). При

этом для тепловых расчетов не требуется знания кинетических характеристик типа  $\alpha F$ , здесь вполне достаточно уравнения теплового баланса (7.39), упрощенного условием теплового равновесия. В задачах эксплуатации при заданных  $G_T$  и  $G$  определяемыми будут температуры  $t'' = \theta''$ ; в задачах проектирования (при заданных  $G_T$  и  $\theta''$ ) определению подлежит нецелевой поток теплоносителя  $G$  (возможна и противоположная задача: заданы  $G$  и  $t''$ , определению подлежит поток  $G_T$ ). Здесь именно поток теплоносителя будет лимитировать теплоперенос; иначе говоря, задача становится **поточковой** по этому теплоносителю.

Таким образом, когда в тонком псевдоожигенном слое поверхность теплообмена (с ней и пропускная способность  $\alpha F$ ) ограничена, межфазный теплообмен происходит в условиях внешней (поверхностной) или чаще — смешанной задачи; расчет ведется по уравнениям типа (7.40а). Но в высоком слое существенно нарастает  $F$  (с ней и  $\alpha F$ ), и внешний теплоперенос перестает влиять на процесс в целом. И тогда **смешанная задача вырождается в балансовую (поточковую)**; расчет ведется по уравнению баланса (7.39) с дополнительным условием  $t''' = \theta''$ .

В литературе имеются попытки трактовать **поточковую задачу в терминах внешней**. Это, разумеется, подмена задачи: вместо  $G_c$  (в других ситуациях  $G_{TcT}$ ) записывают  $\alpha F$ . Совершенно очевидно, что при этом получают “балансовые коэффициенты теплоотдачи”  $\alpha_6 \sim G_c/F$ , потерявшие свой изначальный кинетический смысл. Их абсолютная величина может (при малых  $G$ ) оказаться на 2—4 порядка ниже, чем это следует из предельного значения критерия Нуссельта  $Nu_{\min} = 2$ . К практическим рекомендациям, предлагаемым на основе “балансовых” коэффициентов теплоотдачи, надо относиться с большой осторожностью.



Заметим, что неосознанная подмена потоковой задачи и представление ее в терминах внешней, в более общем плане — поверхностной, — нередкая ошибка в химической и теплотехнической литературе при описании процессов тепло- и массопереноса (примером могут служить некоторые процессы в тонких пленках).

## 7.12. РЕГУЛЯРНЫЙ РЕЖИМ ТЕПЛООБМЕНА ТЕЛА СО СПЛОШНОЙ СРЕДОЙ

При нестационарном теплообмене тела со средой процесс теплопереноса проходит несколько стадий. На первой — температура в разных точках тела сильно зависит от начального ее распределения в теле — это состояние называют **неупорядоченной стадией**. При увеличении времени наступает **упорядоченная стадия**, когда тело уже “не помнит” начального распределения температур, температурное поле изменяется во времени только в зависимости от геометрических характеристик, теплофизических свойств тела и условий теплообмена на его границах. Такой режим получил название **регулярного**. Для некоторых технологических ситуаций обозначают и третью стадию — практическое **тепловое равновесие**.

При высокой теплопроводности тела и небольшой его толщине (точнее, при высокой температуропроводности и  $Fo \rightarrow \infty$ ) режим нагревания (охлаждения) тела с самого начала является регулярным, стадия неупорядоченного состояния отсутствует. В этом случае тело называют *тонким*: температура его внутренних зон в своем изменении не отстает от поверхностных, теплообмен является безградиентным.

Регулярный режим достаточно широко встречается в практике теплопереноса — при нагревании и остывании тел различной формы в среде *постоянной* температуры (среда при этом может быть неподвижной либо омывать тело с определенной скоростью); в этом случае говорят о **регулярном режиме 1-го рода**. Температура среды может *изменяться во времени* по определенному закону. Если это линейное изменение, то говорят о **регулярном режиме 2-го рода**, если периодическое (например, синусоидальное), то — о **режиме 3-го рода**. В этих последних случаях описание и использование регулярного режима построено на *отставании* температуры тела  $\theta$  от изменяющейся температуры среды  $t$ . Такие технологические ситуации могут встретиться при термической обработке тел в случае программированного изменения температуры среды. Наконец, различного рода регулярные режимы используются в экспериментальных целях — при необходимости определения коэффи-

циента теплоотдачи или некоторых теплофизических свойств тела (например, теплоемкости или теплопроводности).

Некоторые задачи и возможности регулярного режима показаны ниже применительно к нагреванию (охлаждению) шарообразного тела.

### 7.12.1. Регулярный режим 1-го рода

Наиболее наглядно основные понятия и закономерности регулярного режима вводятся и выявляются в случае постоянной температуры среды.

Будем рассматривать нагрев шара радиусом  $R$ , массой  $G_T$  в среде с температурой  $t$ . Пусть начальная температура шара  $\theta_0$  постоянна по его объему, температуропроводность материала шара —  $a_T$ , коэффициент теплоотдачи от среды —  $\alpha$ . Используем общие соотношения (7.34) и (7.36), исключив из рассмотрения неупорядоченный нагрев, т.е. примем достаточно большие значения времени  $\tau$  и критерия  $Fo$  (для шара  $Fo > 0,1$ ). Тогда без существенной погрешности в рассматриваемых бесконечных последовательностях можно ограничиться первым членом ряда — получатся экспоненциальные зависимости с одинаковой скоростью изменения температуры для любой точки внутри шара, т.е. для любой координаты  $r/R$ . Скорость нагрева (охлаждения) любой точки тела при этом определяется величиной  $\mu_1$ , а это функция от критерия Био  $Bi \equiv \alpha R / \lambda_T$ .

В *крайних* теплообменных ситуациях\* общие выражения (7.34), (7.36) [либо (7.31) при  $Bi \rightarrow 0$ ] в зависимости от типа задачи принимают различный вид:

— *внешняя* задача теплопереноса ( $Bi \rightarrow 0$ , практически  $Bi \lesssim 0,1$ ; безградиентный теплообмен); из формулы (7.31) с учетом  $F = 4\pi R^2$  и  $G_T = \rho_T(4/3)\pi R^3$  относительная избыточная температура

$$\theta^* \equiv \frac{t - \theta}{t - \theta_0} = \exp\left(-\frac{\alpha F}{G_T c_T} \tau\right) = \exp\left(-\frac{3\alpha}{\rho_T c_T R} \tau\right); \quad (7.31в)$$

— *внутренняя* задача теплопереноса ( $Bi \rightarrow \infty$ , практически  $Bi \gtrsim 100$ ; в ряде случаев можно ограничиться значением 40; граничные условия I рода); из (7.34а) относительная избыточная температура в любой точке внутри шара составляет

$$\theta^* \equiv \frac{t - \theta}{t - \theta_0} = 2 \frac{\sin\left(\pi \frac{r}{R}\right)}{\pi \frac{r}{R}} \exp(-\pi^2 Fo); \quad (7.37а)$$

---

\* Регулярный режим для тел произвольной формы при *промежуточных* значениях  $Bi$  рассмотрен в [6, 11, 12]; ряд полезных соотношений для регулярного режима можно получить на основе анализа, приведенного в [10] для постоянной и изменяющейся во времени температуры среды.



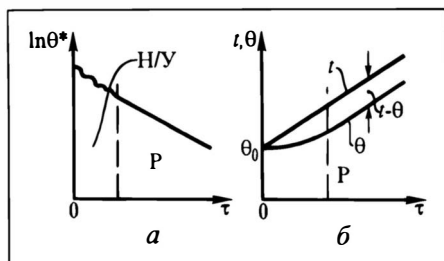


Рис. 7.23. Изменение температуры во времени при регулярном режиме:

*a* — регулярный режим 1-го рода (*H/Y* — стадия неупорядоченного изменения температур, *P* — стадия регулярного режима 1-го рода);

*b* — регулярный режим 2-го рода (*P* — стадия регулярного режима 2-го рода)

из (7.36) — относительная средняя избыточная температура будет

$$\bar{\theta}^* \equiv \frac{t - \bar{\theta}}{t - \theta_0} = \frac{6}{\pi^2} \exp(-\pi^2 Fo) = \frac{6}{\pi^2} \exp\left(-\frac{\pi^2 a_\tau}{R^2} \tau\right). \quad (7.38a)$$

Все эти зависимости можно представить в форме

$$\ln \theta^*, \ln \bar{\theta}^* = -m\tau + C, \quad (7.41)$$

где параметр  $m \equiv \partial \ln \theta^* / \partial \tau$  (а для безградиентного теплообмена и средней температуры  $m \equiv d \ln \bar{\theta}^* / d\tau$ ), называемый темпом охлаждения, представляет собой положительный множитель перед  $\tau$  (в экспоненте),  $C$  — постоянная величина. Значения  $m$  и  $C$  определяются величиной  $Bi$ ; в частности, при  $Bi \rightarrow 0$ , как видно из (7.31в),  $m = 3\alpha/(\rho_T c_T R)$ ,  $C = 0$ , а при  $Bi \rightarrow \infty$ , по (7.37а) и (7.38а),  $m = \pi^2 a_\tau / R^2 = \pi^2 \lambda_\tau / (c_T \rho_T R^2)$ ,  $C = \ln 2 \frac{\sin(\pi r/R)}{\pi r/R}$  при операциях с ло-

кальным  $\theta^*$  и  $C = \ln 6/\pi^2$  при операциях со средним  $\bar{\theta}^*$ .

В полулогарифмических координатах зависимость (7.41) представляет собой (рис. 7.23,а) падающую прямую, тангенс угла которой с осью абсцисс по абсолютной величине равен  $m$ . При этом  $m$  одинаков для любой точки внутри тела и для средней его температуры; различие отражается величинами  $C$ . Получив в ходе эксперимента прямые  $\ln \theta^* - \tau$ , нетрудно определить  $m$  и найти неизвестные составляющие темпа  $m$  при остальных известных величинах, например:

—  $\alpha$  при  $Bi \rightarrow 0$  (если известны  $c_T$ ,  $\rho_T$  и  $R$ ) или  $c_T$  (при известных  $\rho_T$ ,  $R$  и  $\alpha$ );

—  $a_\tau$  и  $\lambda_\tau$  при  $Bi \rightarrow \infty$  (если известны  $c_T$ ,  $\rho_T$  и  $R$ ) или  $c_T$  (при известных  $\rho_T$ ,  $\lambda_\tau$  и  $R$ ).

### 7.12.2. Регулярный режим 2-го рода

Будем для простоты рассматривать шар высокой теплопроводности ( $Bi \rightarrow 0$ ), т.е. безградиентный теплообмен. Сохраним начальное условие для шара (температуру  $\theta_0$ ); пусть среда так-

же первоначально находится при этой температуре  $\theta_0$ , но с момента времени  $\tau = 0$  температура ее начинает изменяться по линейному закону

$$t = \theta_0 + s\tau,$$

где  $s = \text{const}$ .

Цель анализа — определение закона изменения температуры шара во времени  $\theta = \theta(\tau)$ .

Запишем тепловой баланс (контур — шар) для элементарного промежутка времени  $d\tau$  аналогично выражению (а) в разд. 7.1.1.1, подставив в него значение  $t$  в зависимости от  $\tau$ :

$$\alpha F(t - \theta)d\tau = G_T c_T d\theta \quad \text{и} \quad \alpha F(\theta_0 - \theta + s\tau)d\tau = G_T c_T d\theta. \quad (\text{а})$$

Отсюда

$$\frac{d\theta}{d\tau} + \frac{\alpha F}{G_T c_T}(\theta - \theta_0) = \frac{\alpha F}{G_T c_T} s\tau. \quad (\text{б})$$

Неоднородное дифференциальное уравнение (б) решается, например, методом варьирования произвольной постоянной; в этих целях предварительно решают соответствующее однородное уравнение с нулевой правой частью, а затем постоянную интегрирования представляют зависимой от аргумента. В целом дифференциальное уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad (\text{в})$$

имеет решение

$$y = \left[ \int Q e^{\int P dx} dx + C_0 \right] e^{-\int P dx}. \quad (\text{г})$$

В рассматриваемом случае  $y$  имеет смысл  $\theta - \theta_0$ ,  $x$  — смысл  $\tau$ ,  $P \equiv \alpha F / (G_T c_T) = \text{const}$ ;  $Q \equiv [\alpha F / (G_T c_T)] s\tau = P s\tau$ . Поскольку здесь  $P = \text{const}$  и  $\int P dx = P x$ , то решение упрощается, и выражение (г) принимает вид

$$y = \left[ \int Q e^{Px} dx + C_0 \right] e^{-Px}. \quad (\text{д})$$

Если теперь в (д) подставить  $Q = P s x$ , то

$$y = \left[ \int P s x e^{Px} dx + C_0 \right] e^{-Px} = \left[ P s \frac{Px - 1}{P^2} e^{Px} + C_0 \right] e^{-Px} = \frac{s}{P} (Px - 1) + C_0 \exp(-Px). \quad (\text{е})$$

Подставив вместо табличных переменных  $y$  и  $x$  их физические значения и раскрыв смысл  $P$ , имеем

$$\theta - \theta_0 = s \frac{G_T c_T}{\alpha F} \left( \frac{\alpha F}{G_T c_T} \tau - 1 \right) + C_0 \exp \left\{ - \left[ \alpha F / (G_T c_T) \right] \tau \right\} = s\tau - s \frac{G_T c_T}{\alpha F} + C_0 \exp \left( - \frac{\alpha F}{G_T c_T} \tau \right). \quad (\text{ж})$$

Для определения постоянной интегрирования  $C_0$  воспользуемся начальным условием:  $\theta = \theta_0$  при  $\tau = 0$ . Тогда

$$0 = s \frac{G_T c_T}{\alpha F} \cdot (-1) + C_0 \quad \text{и} \quad C_0 = \frac{G_T c_T}{\alpha F} s.$$

С этим значением  $C_0$  получаем окончательное решение:

$$\theta = \theta_0 + s\tau - s \frac{G_T c_T}{\alpha F} (1 - \exp \{ - [\alpha F / (G_T c_T)] \tau \}). \quad (7.42)$$

Закон изменения температур среды и шара во времени иллюстрируется рис. 7.23,б. Интересно, что при достаточно больших  $\tau$ , когда экспонента становится пренебрежимо малой, разность температур среды и тела сохраняет постоянное значение, т.е. линии температур среды  $t$  и тела  $\theta$  становятся параллельными (иногда такой режим называют квазистационарным):

$$t - \theta = (\theta_0 + \pi\tau) - \left( \theta_0 + \pi\tau - s \frac{G_\tau c_\tau}{\alpha F} \right) = s \frac{G_\tau c_\tau}{\alpha F} = s \frac{\rho_\tau c_\tau R}{3\alpha} = \text{const.} \quad (3)$$

Легко показать, что при иной начальной температуре среды  $t_0 \neq \theta_0$  для достаточно больших  $\tau$  разность  $t - \theta$  также будет определяться выражением (3).

Вывод о постоянстве температурного напора  $t - \theta$  подсказывает способ достаточно простого экспериментального определения коэффициента теплоотдачи — путем измерения температур  $t$  и  $\theta$  в процессе теплообмена в условиях регулярного режима 2-го рода (при известных массе тела, его теплоемкости и поверхности). Для тела (вообще) и шара

$$\alpha = s \frac{G_\tau c_\tau}{F(t - \theta)}; \quad \alpha = s \frac{\rho_\tau c_\tau R}{3(t - \theta)}. \quad (к)$$

Анализ регулярного режима 3-го рода выходит за пределы учебника\*.

### 7.13. О ТЕРМОСИФОНАХ И ТЕПЛОВЫХ ТРУБАХ

Термосифоны и тепловые трубы призваны решать проблему переноса больших потоков теплоты. При этом температурные напоры на самих устройствах — невелики, т.е. практически весь располагаемый температурный напор реализуется за пределами устройства — при подводе к нему теплоты и ее отводе со стороны внешних целевого продукта и теплоносителя. Термосифоны и тепловые трубы наибольшее применение сейчас находят в энергетике и строительной индустрии (рекуперация теплоты, размораживание, кондиционирование воздуха, криогенные процессы); в меньших масштабах их используют в химической технологии и смежных отраслях промышленности (сушка, газификация углей, пищевая и фармацевтическая промышленность и др.). Возможности этих устройств весьма велики, так что можно говорить о благоприятных перспективах их использования. Ниже изложены принципы работы термосифонов и тепловых труб и дана их краткая характеристика\*\*.

\* См., например, [10].

\*\* Более подробные сведения о работе тепловых труб с детальным анализом и математическим описанием см. [4, 15].

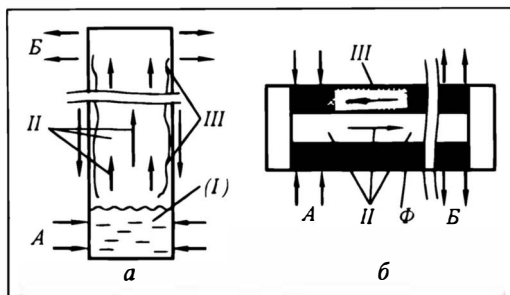


Рис. 7.24. Термосифоны и тепловые трубы:

*a* — термосифон, *б* — тепловая труба;  
*I* — жидкость, *II* — пар, *III* — конденсат;  
*A*, *B* — зоны подвода и отвода теплоты, *Ф* — фитиль

**Термосифон** (рис. 7.24, *a*) представляет собой вертикальную трубу, в которой помещено небольшое количество рабочего тела (воды или другой жидкости); труба вакуумирована и плотно закрыта. На нижнем конце трубы расположена зона подвода теплоты *A*, на верхнем — зона отвода *B*. Теплота от находящегося снаружи термосифонной трубы горячего теплоносителя в зоне *A* подводится к воде, что вызывает ее испарение; образовавшиеся пары поднимаются вверх, попадают в зону *B*, где теплота отдается холодному теплоносителю (он также находится снаружи термосифонной трубы). При этом пары конденсируются и конденсат под действием силы тяжести стекает по стенкам вниз и возвращается в зону испарения *A*. Между теплопередающими зонами *A* и *B* находится адiabатный участок, где отсутствует теплоперенос нормально к поверхности трубы; на этом участке происходит продольный (по трубе) перенос теплоты с потоком рабочего тела (пара и конденсата). Таким образом, при функционировании термосифона осуществляется перенос теплоты — в конечном счете от горячего теплоносителя к холодному.

Поскольку теплота конденсации (испарения) для различных рабочих тел (особенно для воды) весьма велика, то даже при небольших разностях температур между концами термосифона могут транспортироваться значительные количества теплоты. Если оперировать терминами кондуктивного теплопереноса, то можно констатировать, что термосифон обладает продольной эквивалентной теплопроводностью  $\lambda_c$ , превышающей таковую для самых теплопроводных металлов (медь, серебро, алюминий) в сотни и тысячи раз. Практически пропускная способность термосифонной трубы вряд ли может явиться лимитирующим фактором в общем переносе теплоты от горячего к холодному теплоносителю.

Существенный *недостаток* термосифона — возврат конденсата в зону испарения под действием гравитационных сил. Это диктует расположение горячей зоны испарения обязательно ниже более холодной зоны конденсации, что ограничивает возможности использования термосифона.

**Тепловая труба** свободна от указанного недостатка. В общем она конструктивно близка к термосифону, но зоны испарения (горячий участок) и конденсации (холодный участок) здесь могут быть расположены произвольно — в соответствии с требованиями технологического процесса. Такая возможность обеспечивается возвратом конденсата в зону испарения под действием *капиллярных сил* — по *фитилю* (пористой структуре).

В качестве примера на рис. 7.24, *б* показана горизонтальная тепловая труба. На ее периферии расположен фитиль *Ф* (на рисунке заштрихован), в приосевых

зонах оставлено свободное пространство. Левый участок *А* (зона испарения) контактирует с горячим внешним теплоносителем, правый *Б* (зона конденсации) — с холодным; между зонами *А* и *Б* — адиабатный участок. Пары рабочего тела от горячего конца тепловой трубы по свободному пространству перемещаются к холодному концу, где конденсируются; конденсат по фитилю (кольцевая пристеночная зона) возвращается в горячую зону испарения. Таким образом, в итоге теплота переносится от горячего теплоносителя к холодному.

Важнейшие требования к рабочему телу — высокое поверхностное натяжение и хорошая смачиваемость фитиля, низкая вязкость (с целью обеспечения быстрого возврата конденсата в зону испарения по фитилю), возможно большие теплопроводность конденсата и теплота конденсации (чтобы обеспечить интенсивный теплообмен на концах трубы с горячим и холодным теплоносителями). В качестве рабочего тела в тепловых трубах используют воду, спирты, углеводороды и их производные, некоторые газы (в сжиженном состоянии) и металлы (в расплавах). Выбор рабочего тела зависит от рабочей температуры; тепловые трубы могут работать близко к абсолютному нулю (несколько градусов К) и при температурах до 2000 К.

Основные требования к фитилю: максимальный капиллярный напор (с этой целью при прочих равных условиях следует стремиться к малому размеру пор); минимальное гидравлическое сопротивление движению конденсата (здесь, напротив, надо стремиться к увеличению размера пор) — противоречие разрешается в ходе технологического компромисса. В качестве фитилей используют: тканое волокно и войлок, мелкие сетки, спеченные пористые структуры (керамические, металлические), засыпки мелкозернистых материалов, системы из тонких каналов, канавок и т.п. Размер пор в фитилях обычно составляет от 0,01 до 0,1 мм. Фитили в зоне испарения должны плотно прилегать к стенкам трубы (для обеспечения хорошего теплообмена со стенками). Кипение рабочего тела в этой зоне должно быть исключено (во избежание разрушения пористой структуры).

Разумеется, для рабочих тел и материала фильтров общим требованием является достаточная химическая инертность и термическая устойчивость.

Реализуемые тепловые потоки (и значения  $\lambda_c$ ) для тепловых труб также весьма высоки; они в очень малой мере уступают характерным для термосифонов.

В заключение отметим, что величины тепловых потоков в термосифонах и тепловых трубах ограничены значениями относительных скоростей жидкости и пара, т.е. возможностью срыва капель конденсата с движущейся пленки встречным паровым потоком (“захлебывание” устройства).

## 7.14. ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ РЕГЕНЕРАТОРОВ

Регенераторы используются в химической технологии, энергетике, металлургии в достаточно широком температурном диапазоне — от высоких температур (обжиг, доменный процесс) до весьма низких (процессы глубокого холода). Сущность работы регенераторов (см. разд. 7.1) состоит в попеременной подаче горячего и холодного газа в аппарат с насадкой, в результате горячий поток отдает теплоту холодному, а насадка, то нагреваясь, то охлаждаясь, используется в качестве промежуточного теплоносителя.

Процесс в регенераторе — принципиально нестационарный, циклический. В зависимости от его условий и выбранной на-

Рис. 7.25. Температурные кривые при работе регенератора:

1 — изменение температуры насадки в периоды цикла, 2 — осредненные температуры насадки по периодам

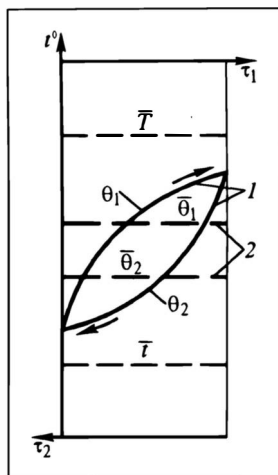
сადки продолжительность цикла может варьироваться в широких пределах. В случае высокотемпературных процессов, когда в качестве элементов насадки используются массивные тела (шамотный кирпич, огнеупорная керамика и т.д.), время цикла составляет десятки минут (иногда — часы); при низкотемпературных процессах, когда используются тонкие высокотеплопроводные элементы насадки (гофрированная лента, фольга), время цикла на 1—2 порядка меньше.

Время цикла  $\tau_{ц}$  складывается из продолжительности горячего и холодного периодов:

$$\tau_{ц} = \tau_1 + \tau_2. \quad (a)$$

В период  $\tau_1$  в регенератор подается горячий газ с постоянной начальной температурой  $T' = \text{const}$ ; нагревая насадку, он сам охлаждается до  $T''$ , причем за период  $\tau_1$  выходная температура газа  $T''$  постепенно нарастает соответственно увеличению температуры насадки  $\theta$ , так что  $T'' = \text{var}$ . Аналогично, в период  $\tau_2$  подачи холодного газа его входная температура  $t' = \text{const}$ , а выходная  $t'' = \text{var}$ , поскольку  $\theta$  за этот период постоянно понижается. Характер изменения средней (по объему регенератора) температуры насадки во времени демонстрирует рис. 7.25; при этом жирным пунктиром показаны усредненные (за соответствующий период) температуры насадки, тонким — усредненные температуры горячего  $\bar{T}$  и холодного  $\bar{t}$  газа.

Математическое описание теплообмена в регенераторе является весьма сложным: процесс нестационарен, он протекает (в общем случае) в условиях сопоставимости пропускных способностей внешнего и внутреннего (в элементах насадки) теплопереноса (т.е. в граничных условиях III рода), да еще при переменных температурах как во времени, так и по объему насадки. Трудности точного расчета привели к разработке различных приближенных инженерных методов\*, один из них изложен ниже.



\* Строгий анализ, результаты которого могут быть положены в основу точного расчета регенератора, см. [10, 17]; некоторые приближенные подходы к расчету регенераторов см. [2, 6, 11, 16, 17].

Произведем осознанно *подмену задачи*: будем описывать теплообмен в терминах конвективного теплопереноса (см. разд. 7.5.1), используя понятие о среднем за *весь цикл* работы регенератора коэффициенте теплопередачи  $k_{ц}$ . Тогда уравнение типа (7.14) запишется как

$$Q = k_{ц} \tau_{ц} F (\bar{T} - \bar{t}), \quad (7.43)$$

где  $\bar{T}$  и  $\bar{t}$  — усредненные (за периоды  $\tau_1$  и  $\tau_2$  соответственно) температуры горячего и холодного газовых потоков в регенераторе.

Это же количество теплоты может быть записано отдельно для периодов  $\tau_1$  и  $\tau_2$  с использованием усредненных (за каждый период) коэффициентов теплоотдачи  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ :

$$Q = \alpha_1 \tau_1 F (\bar{T} - \bar{\theta}_1) = \alpha_2 \tau_2 F (\bar{\theta}_2 - \bar{t}), \quad (7.43a)$$

где  $\bar{\theta}_1$  и  $\bar{\theta}_2$  — усредненные (за соответствующий период) температуры *поверхности* насадки (не станем пока акцентировать внимание на возможном существенном отличии температур поверхности насадки от средних по ее объему). В общем случае, как это следует из рис. 7.25, значения  $\bar{\theta}_1$  и  $\bar{\theta}_2$  не совпадают.

Выразим  $k_{ц}$  в зависимости от  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Выпишем для этого характерные температурные напоры и сложим их:

$$+ \left. \begin{aligned} \bar{T} - \bar{\theta}_1 &= \frac{Q}{\alpha_1 \tau_1 F} \\ \bar{\theta}_2 - \bar{t} &= \frac{Q}{\alpha_2 \tau_2 F} \end{aligned} \right\} \rightarrow (\bar{T} - \bar{t}) - (\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2) = Q \left( \frac{1}{\alpha_1 \tau_1 F} + \frac{1}{\alpha_2 \tau_2 F} \right)$$

Подставив в последнее выражение значение  $Q$  по (7.43) и разрешив полученное равенство относительно  $k_{ц} \tau_{ц}$ , получим после сокращения на  $F$

$$k_{ц} \tau_{ц} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 \tau_1} + \frac{1}{\alpha_2 \tau_2}} \left[ 1 - \frac{\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2}{\bar{T} - \bar{t}} \right], \quad (7.44)$$

причем  $k_{ц}$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  отнесены, как обычно, к *единице времени*.

В случае  $\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2$  регенератор называют **идеальным**; для него выражение (7.44) упрощается:

$$(k_{ц})_{ид} \tau_{ц} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 \tau_1} + \frac{1}{\alpha_2 \tau_2}}. \quad (7.44a)$$

Это соотношение формально напоминает выражение (7.3) для стационарного теплопереноса, но при этом включает еще распределение времени цикла по периодам работы регенератора.

Отличие реальной ситуации от идеальной выражают с помощью коэффициента полезного действия регенератора  $\eta_p$ :

$$k_u = (k_u)_{ид} \eta_p; \quad (6)$$

множитель  $\eta_p \leq 1$  формально представляет собой численное значение квадратной скобки в выражении (7.44).

Физически множитель  $\eta_p$  призван учесть два основных эффекта. Во-первых, в процессе работы регенератора не полностью используется аккумулирующая способность насадки: температура ее внутренних зон (средняя по объему элемента насадки  $\theta_{cp}$  — тоже) в своем изменении может заметно отставать от температуры поверхности  $\theta$ . Этот эффект выражается с помощью коэффициента использования насадки  $\kappa$ ; он определяется соотношением количеств теплоты, которая *может быть передана* кондукцией внутрь насадки и которая на самом деле *аккумулируется* ею. Поэтому  $\kappa$  зависит от критерия Фурье. И во-вторых, независимо от внутреннего теплопереноса должны быть учтены особенности конвективного теплообмена на поверхности насадки. Здесь определяющим будет критерий, прямо получаемый из уравнения нестационарного конвективного теплопереноса — типа (а) в разд. 7.10.2 — путем масштабных преобразований:  $\alpha \tau / (c_T \rho_T l) \equiv \psi$ , где  $l$  — определяющий линейный размер, выражающий соотношение объема тела и его поверхности. Нетрудно убедиться, что  $\psi$  представляет собой произведение критериев Фурье и Био:

$$Fo \cdot Bi = \frac{a_T \tau \alpha l}{l^2 \lambda_T}, \quad \text{где } a_T \equiv \lambda_T / (c_T \rho_T).$$

Элементы насадки чаще всего — плоские тела (ленты, пластины, кирпичи) толщиной  $\delta$ ; для таких тел в качестве определяющего линейного размера принимают полутолщину  $\delta/2$ . Тогда, например, для первого периода (подача горячего газа)

$$Fo_1 \equiv \frac{4a_T \tau_1}{\delta^2}, \quad \psi_1 \equiv Bi_1 Fo_1 \equiv \frac{2\alpha_1 \tau_1}{c_T \rho_T \delta},$$

для цикла в целом  $Fo_u \equiv \frac{4a_T \tau_u}{\delta^2}$ .

Чтобы рассчитать  $\eta_p$ , необходимо уметь определять коэффициент  $\kappa$ . Здесь предлагаются полуэмпирические его связи с  $Fo_u$ . Для идеального регенератора, по определению,  $\kappa = 1$ . При использовании металлической насадки (высокая теплопроводность) можно считать с погрешностью не более 2%, что регенератор работает как идеальный (поскольку  $Fo_u$  измеряет-



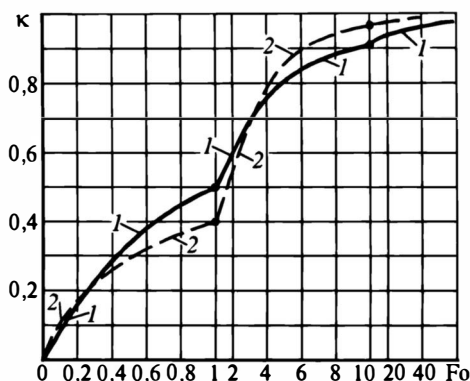


Рис. 7.26. Коэффициент использования насадки в регенераторе: по Руммелю (1) и по Грегори (2).

Изломы на кривых обусловлены только изменением масштабов шкалы на оси абсцисс при значениях  $Fo_{ц}$ , равных 1 и 10

ся десятками и сотнями). В случае малотеплопроводной насадки (в этом случае  $Fo_{ц}$  может оказаться и меньше 1) возможно заметное отклонение реального регенератора от идеального.

Полуэмпирические связи  $\kappa$  с  $Fo_{ц}$  в практически интересном диапазоне изменения  $Fo_{ц}$  показаны на рис.7.26. Кривая 1 построена по уравнению  $\kappa = (1 + 1 / Fo_{ц})^{-1}$ . Кривая 2 построена применительно к синусоидальному изменению температуры поверхности элемента насадки; высказано предположение, что эта кривая пригодна и для других форм периодического изменения поверхностной температуры (это предположение в определенной мере подкрепляется закономерностями регулярного режима при не слишком малых значениях критерия Фурье — см. разд. 7.12). Совпадение кривых 1 и 2 в аспекте точности инженерных расчетов можно считать удовлетворительным.

Для практического использования формулы (7.43) необходимо условиться о способе определения  $\bar{T}$  и  $\bar{t}$ . Экспериментально установлено, что температура газа в регенераторе изменяется *во времени* практически *линейно*. Это позволяет в задачах **проектирования** рассчитывать осредненные по времени температуры горячего и холодного потоков на выходе из регенератора как среднеарифметические из величин для начала и конца периодов (индексы “н” и “к”):

$$T'' = \frac{T''_н + T''_к}{2} \quad \text{и} \quad t'' = \frac{t''_н + t''_к}{2} . \quad (\text{в})$$

Сами осредненные значения  $\bar{T}$  и  $\bar{t}$  не нужны для расчетов; согласно (7.44), необходимо располагать только их разностью  $(\bar{T} - \bar{t})$ . Она вычисляется как среднелогарифмическая величина

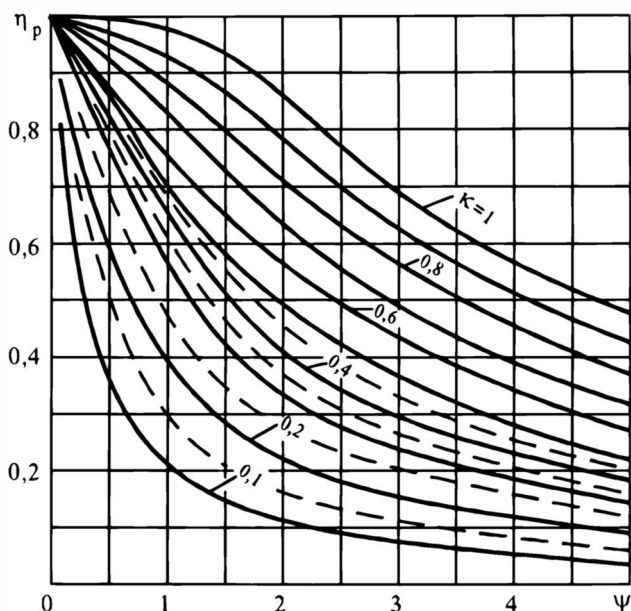


Рис. 7.27. Коэффициент полезного действия регенератора

на из постоянных входных ( $T'$  и  $t'$ ) и осредненных выходных ( $T''$  и  $t''$ ) температур.

Зависимость  $\eta_p$  от  $\kappa$  и  $\psi_1$  приведена на рис. 7.27 (математическое описание этой зависимости из-за его громоздкости не приводится). График учитывает и принятый подход к определению  $\bar{T}$  и  $\bar{t}$ .

В задачах **эксплуатации** известны только входные температуры потоков  $T'$  и  $t'$ ; определяемой величиной здесь является количество теплоты  $Q$ , переданной за один цикл. Анализ ведется по уже известной канве, продемонстрированной в разд.7.7.2. Из тепловых балансов:

$$Q = G_1 c_1 \tau_1 (T' - T'') = G_2 c_2 \tau_2 (t'' - t') = k_{\text{ц}} \tau_{\text{ц}} F \Delta_{\text{ср}}. \quad (\text{г})$$

Из первых двух выражений:

$$T'' = T' - \frac{Q}{G_1 c_1 \tau_1} \quad \text{и} \quad t'' = t' + \frac{Q}{G_2 c_2 \tau_2}.$$

Раскрыв  $\Delta_{\text{ср}}$  как среднелогарифмическую величину и подставив значения  $T''$  и  $t''$ , получим (применительно к **прямотоку**, т.е. вводу горячего и холодного газов в регенератор с одного

конца) после несложных преобразований:

$$Q = k_{\Pi} \tau_{\Pi} F \frac{(T' - t') - \left[ \left( T' - \frac{Q}{G_1 c_1 \tau_1} \right) - \left( t' + \frac{Q}{G_2 c_2 \tau_2} \right) \right]}{\ln \frac{T' - t'}{\left[ \left( T' - \frac{Q}{G_1 c_1 \tau_1} \right) - \left( t' + \frac{Q}{G_2 c_2 \tau_2} \right) \right]}} =$$

$$= k_{\Pi} \tau_{\Pi} F \frac{Q \left( \frac{1}{G_1 c_1 \tau_1} + \frac{1}{G_2 c_2 \tau_2} \right)}{\ln \frac{\Delta^*}{\Delta^* - Q \left( \frac{1}{G_1 c_1 \tau_1} + \frac{1}{G_2 c_2 \tau_2} \right)}}, \quad (\text{д})$$

где, как и ранее,  $\Delta^* \equiv T' - t'$ .

После сокращения  $Q$  в числителе имеем

$$\ln \frac{\Delta^*}{\Delta^* - Q \left( \frac{1}{G_1 c_1 \tau_1} + \frac{1}{G_2 c_2 \tau_2} \right)} = \frac{k_{\Pi} \tau_{\Pi} F}{G_1 c_1 \tau_1} + \frac{k_{\Pi} \tau_{\Pi} F}{G_2 c_2 \tau_2}. \quad (\text{е})$$

Обозначим по аналогии с (7.18) отношения пропускных способностей  $a_0 \equiv k_{\Pi} \tau_{\Pi} F / (G_1 c_1 \tau_1)$ ,  $b_0 \equiv k_{\Pi} \tau_{\Pi} F / (G_2 c_2 \tau_2)$  и представим из (е) теплоту  $Q$  в явном виде:

$$\frac{\Delta^* - Q \left( \frac{1}{G_1 c_1 \tau_1} + \frac{1}{G_2 c_2 \tau_2} \right)}{\Delta^*} = \exp[-(a_0 + b_0)].$$

Отсюда

$$Q = \frac{1 - \exp[-(a_0 + b_0)]}{\frac{1}{G_1 c_1 \tau_1} + \frac{1}{G_2 c_2 \tau_2}} \Delta^*. \quad (7.45)$$

Эта формула является расчетной. К более привычному виду она приводится умножением числителя и знаменателя на  $k_{\Pi} \tau_{\Pi} F$ :

$$Q = \frac{1 - \exp[-(a_0 + b_0)]}{\frac{k_{\Pi} \tau_{\Pi} F}{G_1 c_1 \tau_1} + \frac{k_{\Pi} \tau_{\Pi} F}{G_2 c_2 \tau_2}} k_{\Pi} \tau_{\Pi} F \Delta^* = \frac{1 - e^{-(a_0 + b_0)}}{a_0 + b_0} k_{\Pi} \tau_{\Pi} F \Delta^*. \quad (7.45a)$$

Сходство формул (7.45а) и (7.21а) очевидно. По существу здесь упорядоченный нестационарный (квазистационарный) режим работы регенератора сведен в расчетном смысле к стационарному режиму работы рекуперативного теплообменника. Тепловая нагрузка регенератора в единицу времени определяется как  $Q = Q/\tau_{\text{ц}}$ . Отсюда нетрудно получить и выражение для пропускной способности регенератора  $Q/\Delta^*$ .

Аналогичный анализ можно провести для ввода горячего и холодного газов в регенератор с различных его концов (*противоток*).

## 7.15. ОТДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛООБМЕНА

Ниже приведены некоторые характерные примеры использования рассмотренных представлений о теплообмене для решения отдельных химико-технологических задач. В отличие от рассмотренных в разд. 7.5, эти задачи включают перенос теплоты с потоками теплоносителей.

### 7.15.1. Нагрев конденсирующимся паром интенсивно перемешиваемой жидкости

Жидкость массой  $G$  необходимо нагреть от начальной температуры  $t_n$  до конечной  $t_k$ . Жидкость интенсивно перемешивается, так что в каждый момент времени ее температура по всему объему одинакова. Нагрев ведется через теплообменную поверхность  $F$  за счет конденсации насыщенного пара — температура его  $T$ , энтальпия  $H$ , энтальпия конденсата  $h$ . Требуется найти общий расход пара  $G_{\text{п}}$  и время нагрева жидкости  $\tau_{\text{нгр}}$ .

Для определения расхода греющего пара составим тепловой баланс (рис. 7.28): контур — весь аппарат, временной интервал — процесс нагрева в целом. В отсутствие потерь в окружающую среду

$$G_{\text{п}}H - G_{\text{п}}h = Gct_k - Gct_n, \quad (\text{а})$$

откуда, имея в виду, что разность энтальпий насыщенного пара и кипящей жидкости  $H - h = r$  (теплота конденсации), получаем

$$G_{\text{п}} = \frac{Gc(t_k - t_n)}{H - h} = \frac{Gc(t_k - t_n)}{r}. \quad (7.46)$$

С целью определения времени нагрева  $\tau_{\text{нгр}}$  в качестве контура выберем жидкостное пространство аппарата и запишем тепловой баланс для элементарного промежутка времени  $d\tau$ . Элементарное количество теплоты, переданной через поверхность за этот промежуток, составляет  $dQ = k(T - t)F d\tau$ , где  $k$  —

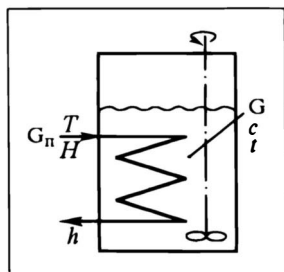


Рис. 7.28. К расчету теплообмена между конденсирующимся паром и хорошо перемешиваемой жидкостью

коэффициент теплопередачи. Оно расходуется на подогрев жидкости  $Gcdt$ . Итак,

$$dQ = k(T - t)Fdt = Gcdt, \quad (6)$$

причем вдоль всей поверхности  $F$  и во времени  $T = \text{const}$ , а  $t$  изменяется только во времени.

Разделим переменные и проинтегрируем (с учетом знака при  $t$ ) от  $t_n$  до  $t_k$  и от 0 до  $\tau_{\text{нгр}}$ :

$$\int_{t_n}^{t_k} \frac{dt}{T - t} = \frac{kF}{Gc} \int_0^{\tau_{\text{нгр}}} d\tau \quad \text{и} \quad \ln \frac{T - t_n}{T - t_k} = \frac{kF\tau_{\text{нгр}}}{Gc}, \quad (в)$$

откуда

$$\tau_{\text{нгр}} = \frac{Gc}{kF} \ln \frac{T - t_n}{T - t_k}. \quad (7.47)$$

И тогда поток пара  $G_{\text{п}}$  (рис. 7.28) составит  $G_{\text{п}} = G_{\text{п}}/\tau_{\text{нгр}}$ .

Разумеется, на основе (в) могут быть решены и другие задачи, например о связи текущих значений температуры жидкости  $t$  и времени  $\tau$ :

$$\frac{T - t}{T - t_n} = \exp\left(-\frac{kF\tau}{Gc}\right), \quad (7.47a)$$

причем под знаком экспоненты стоит отношение пропускных способностей поверхностной и потоковой стадий (для полунепрерывного процесса).

### 7.15.2. Нагрев псевдоожиженного слоя потоком горячего газа в условиях балансовой задачи

Псевдоожиженный слой мелкодисперсного материала (общая его масса  $G_{\text{т}}$ ) нагревается от начальной температуры  $\theta_n$  с помощью постоянного потока  $G$  ожижающего агента — газа (рис. 7.29). Температура газа на входе в слой  $t'$  в ходе процесса не изменяется. Слой имеет достаточную высоту  $H > h_a$ , так что теплообмен происходит в условиях балансовой задачи: в любой момент времени температура уходящего из слоя газа  $t''$  равна текущей температуре слоя  $\theta$ ; разумеется, температуры  $t'' = \theta$  изменяются во времени. Пусть требуется найти связь температуры  $\theta$  со временем нагрева  $\tau$ .

Выбрав в качестве пространственного контура весь аппарат с псевдоожиженным слоем, запишем тепловой баланс для эле-

Рис. 7.29. К расчету нестационарного межфазного теплообмена в псевдоожиженном слое в условиях балансовой задачи

ментарного промежутка времени  $d\tau$ . Учтем при этом, что процесс ведется без ввода и вывода твердого материала, и пренебрежем накоплением теплоты в газовой фазе (ее масса и пропускная способность в псевдоожиженном слое на 3 порядка ниже, чем для твердого материала). Тогда

$$Gc t' d\tau - Gc t'' d\tau = G_{\tau} c_{\tau} d\theta. \quad (г)$$

После разделения переменных (с учетом  $t'' = \theta$ ) следует брать интеграл с начальным условием ( $\theta = \theta_n$  при  $\tau = 0$ ) и переменным верхним пределом:

$$\int_{\theta_n}^{\theta} \frac{d\theta}{t' - \theta} = \frac{Gc}{G_{\tau} c_{\tau}} \int_0^{\tau} d\tau.$$

Отсюда для разных постановок задачи:

$$\ln \frac{t' - \theta_n}{t' - \theta} = \frac{Gc\tau}{G_{\tau} c_{\tau}}; \tau = \frac{G_{\tau} c_{\tau}}{Gc} \ln \frac{t' - \theta_n}{t' - \theta};$$

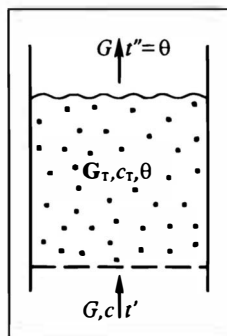
$$\theta = t' - (t' - \theta_n) \exp[-Gc\tau/(G_{\tau} c_{\tau})], \quad (7.48)$$

причем  $Gc\tau/(G_{\tau} c_{\tau})$  представляет собой отношение пропускных способностей потоковых стадий для полунепрерывного процесса, аналогичное отношению  $b/a = G_1 c_1/(G_2 c_2)$  для стационарного.

Легко видеть близость и вместе с тем неидентичность анализа этой задачи и рассмотренной в предыдущем разделе: в условиях смешанной задачи определяющим критерием было отношение  $kF\tau/(Gc)$ ; здесь, в условиях балансовой задачи, определяющим является отношение  $Gc\tau/(G_{\tau} c_{\tau})$ .

### 7.15.3. Нестационарный теплообмен между двумя интенсивно перемешиваемыми жидкостями

В аппарате по разные стороны от разделительной перегородки — поверхности теплообмена  $F$  — находятся (рис. 7.30) две жидкости массой  $G_1$  и  $G_2$  с разными начальными температурами  $T_n$  и  $t_n$ . Жидкости интенсивно перемешиваются, так что температура каждой из них  $T$  и  $t$  в любой момент времени одинакова по соответствующему объему. Коэффициент теплопередачи равен  $k$ . Требуется установить закон изменения температур  $T$  и  $t$  во времени  $\tau$ .



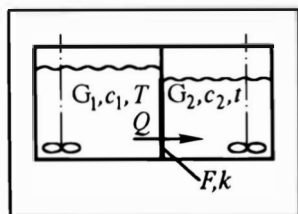


Рис. 7.30. К расчету нестационарного теплообмена между ограниченными количествами хорошо перемешиваемых жидкостей

Запишем для элементарного промежутка времени тепловые балансы для пространств горячего и холодного теплоносителя:

$$-dQ = G_1 c_1 dT \quad \text{и} \quad dQ = G_2 c_2 dt, \quad (\text{д})$$

причем  $dQ = kF(T - t)d\tau$ .

Подставив в (д) значения  $dQ$ , получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{d\tau} &= -\frac{kF}{G_1 c_1} (T - t) = a' (T - t), \\ \frac{dt}{d\tau} &= \frac{kF}{G_2 c_2} (T - t) = b' (T - t), \end{aligned} \quad (\text{е})$$

где  $a' \equiv kF/(G_1 c_1)$ ,  $b' \equiv kF/(G_2 c_2)$  — размерные комплексы (они превратятся в безразмерные отношения пропускных способностей, будучи умноженными на  $\tau$ ).

Эта система должна быть решена с начальным условием

$$T = T_H \quad \text{и} \quad t = t_H \quad \text{при} \quad \tau = 0. \quad (\text{ж})$$

Система (е) и начальное условие (ж) по форме *полностью совпадают* с записью для *прямотока* системы (б) и граничных условий (в) в разд. 7.8. Ясно, что и решения будут формально совпадать с (7.23) и (7.24), разумеется — с заменой координаты  $x$  на время  $\tau$ :

$$T = T_H - \Delta'_* \frac{a'}{a' + b'} \left( 1 - e^{-(a' + b')\tau} \right), \quad (7.49)$$

$$t = t_H + \Delta'_* \frac{b'}{a' + b'} \left( 1 - e^{-(a' + b')\tau} \right), \quad (7.50)$$

причем  $\Delta'_* \equiv T_H - t_H$ .

Совпадение записей этого решения и найденного ранее — не случайно, поскольку данный *периодический процесс можно вполне трактовать как прямоток во времени*: здесь временная координата  $\tau$  заменила геометрическую (поверхностную)  $f$  или  $x$ .

С помощью (7.49), (7.50) нетрудно решить ряд конкретных задач: определить *конечные значения температур*  $T_k$  и  $t_k$  в конечный момент времени  $\tau_k$ ; найти *время*, за которое одна из жидкостей (целевая) примет заданную температуру ( $T_k$  или  $t_k$ ); установить значение текущей разности температур:

$$T - t = \Delta'_* e^{-(a' + b')\tau} = (T_H - t_H) \exp[-(a' + b')\tau]. \quad (7.51)$$

Полученные выражения относятся к *смешанной* задаче теплопереноса. Продолжение анализа с сопоставлением пропускных способностей стадий, т.е. оценка безразмерных комплексов  $a'\tau$ ,  $b'\tau$  и  $b'/a'$  позволяет упростить эти выражения в случае вырождения смешанной задачи в поверхностную ( $a'\tau$ ,  $b'\tau \rightarrow 0$ ), потоковую или балансовую [ $a'\tau$  и (или)  $b'\tau \rightarrow \infty$ ].

#### 7.15.4. Безградиентное остывание тела за счет лучистого теплообмена

Пусть высокотеплопроводное выпуклое тело массой  $G_T$ , имеющее высокую начальную температуру  $\theta_H$ , помещено (рис.7.31) в большую оболочку, на поверхности которой, обращенной к телу, поддерживается постоянная температура  $t$ . Примем ряд упрощающих условий: степень черноты тела будем считать не зависящей от его температуры (поэтому и приведенная степень черноты  $\varepsilon_{пр}$  не меняется с  $\theta$ ); пространство между телом и оболочкой полностью вакуумировано, так что теплообмен за счет естественной конвекции можно исключить — остывание тела происходит только за счет его излучения. Требуется установить закон охлаждения тела.

Анализ ведем на основе формулы лучистого теплообмена (6.27); напомним, что температуры здесь выражаются в градусах абсолютной шкалы.

Запишем тепловой баланс для тела (оно и есть пространственный контур) и бесконечно малого отрезка времени. В отсутствие Источников, Стоков и Прихода теплоты в ходе процесса остывания получаем выражение

$$0 - \varepsilon_{пр} \sigma_0 F (\theta^4 - t^4) d\tau = G_T c_T d\theta. \quad (3)$$

Отсюда после разделения переменных и интегрирования (от начального момента  $\tau = 0$  до текущего  $\tau$  и от  $\theta_H$  до текущего значения  $\theta$ ):

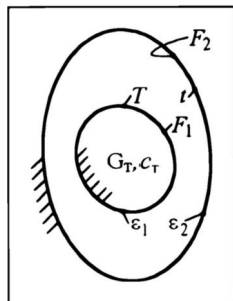
$$-\varepsilon_{пр} \sigma_0 F \tau = G_T c_T \int_{\theta_H}^{\theta} \frac{d\theta}{\theta^4 - t^4} \quad \text{и} \quad \tau = \frac{G_T c_T}{\varepsilon_{пр} \sigma_0 F} \int_{\theta_H}^{\theta} \frac{d\theta}{t^4 - \theta^4}. \quad (и)$$

Интеграл, входящий в (и), таблич-  
ный:  $\int \frac{dx}{1-x^4} = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$ , причем для решаемой задачи  $x$  имеет смысл  $\theta/t$ .

Возьмем интеграл:

$$\operatorname{Int} = \int \frac{d\theta}{t^4 - \theta^4} = \frac{1}{t^3} \int \frac{d(\theta/t)}{1 - (\theta/t)^4}.$$

Рис. 7.31. К расчету безградиентного остывания тела за счет излучения





Соответственно табличному выражению

$$\begin{aligned} \text{Int}_{\theta_n}^{\theta} &= \frac{1}{t^3} \left[ \frac{1}{4} \ln \frac{\left(1 + \frac{\theta}{t}\right) \left(1 - \frac{\theta_n}{t}\right)}{\left(1 - \frac{\theta}{t}\right) \left(1 + \frac{\theta_n}{t}\right)} + \frac{1}{2} \left( \arctg \frac{\theta}{t} - \arctg \frac{\theta_n}{t} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{t^3} \left[ \frac{1}{4} \ln \frac{(\theta + t)(\theta_n - t)}{(\theta_n + t)(\theta - t)} - \frac{1}{2} \arctg \frac{(\theta_n - \theta)t}{\theta_n \theta + t^2} \right]. \quad (\kappa) \end{aligned}$$

С учетом (κ) решение (и) принимает окончательный вид:

$$\tau = \frac{G_T c_T}{\varepsilon_{\text{пр}} \sigma_0 F} \frac{1}{t^3} \left[ \frac{1}{4} \ln \frac{(\theta + t)(\theta_n - t)}{(\theta_n + t)(\theta - t)} - \frac{1}{2} \arctg \frac{(\theta_n - \theta)t}{\theta_n \theta + t^2} \right]. \quad (7.52)$$

Закон изменения  $\theta$  во времени записан в явном виде относительно  $\tau$ . Выразить эту зависимость в явном виде относительно  $\theta$  не удастся, решение возможно численными методами.

#### ЛИТЕРАТУРА к главе 7

1. *Азров М.Э., Тодес О.М.* Гидравлические и тепловые основы работы аппаратов со стационарным и кипящим зернистым слоем. Л.: Химия, 1968. 512 с.
2. *Гельперин Н.И.* Основные процессы и аппараты химической технологии. М.: Химия, 1981. 812 с.
3. *Гельперин Н.И., Айнштейн В.Г.* Псевдоожижение, гл.Х "Теплообмен"/ Под ред. И.Ф. Дэвидсона, Д. Харрисона: Пер. с англ. / Под ред. Н.И. Гельперина. М.: Химия, 1974. 760 с.
4. *Дан П.Д., Рей Д.А.* Тепловые трубы: Пер. с англ. / Под ред. Ю.А. Зейгарника. М.: Энергия, 1979. 272 с.
5. *Дытнерский Ю.И.* Процессы и аппараты химической технологии. М.: Химия, 1995. 768 с.
6. *Исаченко В.П., Осипова В.А., Сухомел А.С.* Теплопередача. М.: Энергия, 1969. 440 с.
7. *Картасов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 1985. 480 с.
8. *Касаткин А.Г.* Основные процессы и аппараты химической технологии. М.: Химия, 1971. 784 с.
9. *Кутателадзе С.С.* Основы теории теплообмена. М.: Атомиздат, 1979. 416 с.
10. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
11. *Михеев М.А.* Основы теплопередачи. М.—Л.: Госэнергоиздат, 1956. 392 с.
12. *Михеев М.А., Михеева И.М.* Основы теплопередачи. М.: Энергия, 1977. 342 с.
13. *Павлов К.Ф., Романков П.Г., Носков А.А.* Примеры и задачи по курсу процессов и аппаратов химической технологии. Л.: Химия, 1987. 574 с.
14. *Перри Дж.* Справочник инженера-химика: Пер. с англ./ Под ред. Н.М. Жаворонкова. Л.: Химия, 1969. 1144 с.
15. *Справочник по теплообменникам:* Пер. с англ. / Под ред. О.Г. Мартыненко и др. М.: Энергоатомиздат, 1987. 913 с.
16. *Хоблер Т.* Теплопередача и теплообменники: Пер. с польск. / Под ред. П.Г. Романкова. Л.: Госхимиздат, 1961. 820 с.
17. *Шак А.* Промышленная теплопередача: Пер. с нем. / Под ред. В.А. Осиповой. М.: Металлургиздат, 1961. 524 с.

### СТРУКТУРА ПОТОКОВ

Важнейшей проблемой большинства химико-технологических процессов (ХТП) является *перенос субстанции* — количества движения (импульса), теплоты, вещества. В химико-технологических аппаратах (ХТА) теплота, например, может переноситься из одной точки рабочей зоны в другую или к стенкам аппарата; вещество, скажем, — от входа к выходу или между различными потоками. Различают **продольный** (в направлении движения потока) и **поперечный** переносы субстанции. К первой разновидности среди приведенных выше примеров относится, в частности, перенос теплоты или вещества от входа в ХТА к выходу; ко второй — перенос теплоты (вещества, импульса) между потоками фаз или, например, теплоты к стенкам аппарата. Продольный и поперечный переносы связаны между собой. Так, направленное перемещение количества движения (массы, энергии) с потоком вдоль аппарата (т.е. продольный перенос импульса) сопровождается трением (т.е. поперечным переносом импульса к стенкам аппарата).

Строго говоря, перемещение субстанции поперек основного направления потока следует подразделять на **нормальное** и **собственно поперечное** (рис. 8.1). Продольный поток теплоносителя вдоль теплообменной поверхности показан стрелкой *I*. Направление нормального (к поверхности) потока показано стрелками *II*; именно такой перенос обуславливает интенсивность теплообмена. Направление собственно поперечного перемещения изображено стрелками *III*; наличие этого переноса обуславливает выравнивание температурного поля в различных точках поперечного сечения. При изложении материала в настоящей главе под поперечным перемешиванием (переносом) будут, как правило, пониматься оба эффекта — нормальный и собственно поперечный. При необходимости их раздельного рассмотрения будут делаться оговорки.

Основной целью (содержанием) многих ХТП является интенсивный поперечный (нормальный) перенос. Примеры: перенос теплоты (к стенке аппарата или от нее) при теплообмене между потоками двух теплоносителей; перенос какого-либо вещества, компонента при непосредственном контакте фаз (скажем, жидкой и газовой). Здесь нужно интенсифицировать теплоперенос нормально к стенкам аппарата (чтобы нагреть один поток и охладить другой; чтобы изменить агрегатное со-

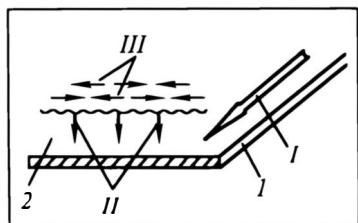


Рис.8.1. Поперечный перенос около теплообменной поверхности:

1 — теплообменная поверхность, 2 — пограничный слой;

I — основное направление продольного потока теплоносителя, II — нормальный перенос, III — собственно поперечный перенос

стояние одного или обоих потоков; чтобы отвести тепло экзотермической реакции, и т.п.).

Или: нужно интенсифицировать нормальный перенос, чтобы полное передать какой-либо компонент из одной фазы в другую. Такая интенсификация переноса позволяет с большей производительностью и полнотой осуществлять процесс в имеющейся аппаратуре либо при заданных производительности и степени завершенности ХТП обойтись более компактным аппаратом — с меньшей поверхностью теплообмена, с меньшими габаритами.

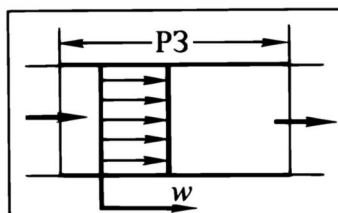
Для интенсификации нормального поперечного переноса используют различные приемы технологического (повышение скорости потока и др.) и конструктивного (увеличение поверхности контакта и т.п.) характера. Однако при этом происходит интенсификация и продольного переноса, что в большинстве случаев, как будет показано ниже, нежелательно. Это не означает, что нужно отказаться от интенсификации поперечного переноса; просто необходимо учитывать одновременные изменения в характере продольного переноса, воздействуя по мере возможности на последний в нужном направлении.

Таким образом, реализация важнейшей цели многих ХТП (интенсификация нормального поперечного переноса) с неизбежностью приводит к необходимости анализа сопутствующего явления (продольного переноса) — для выявления возникающих при этом эффектов, воздействия на них и учета их при создании эффективных ХТА. Иначе говоря, надо изучать **структуру потоков** в рабочей зоне аппарата, где происходят поперечный и продольный переносы теплоты, вещества, количества движения.

## 8.1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Под структурой потоков понимают совокупность различных характеристик, описывающих гидродинамическое состояние системы. Анализ структуры потоков призван дать представление об особенностях движения элементов системы. В *широком* смысле понятие **структуры потоков** охватывает следующие про-

Рис.8.2. Модель ИВ (эпюра скоростей)



блемы: ламинарное и турбулентное течения; равномерные или организованные неравномерные потоки (вспомним подачу жидкости поршневым насосом); поля осредненных (во времени) скоростей и мгновенные (пульсационные) скорости и т.д. Все это как-то влияет на процессы переноса в ХТА, но здесь мы будем рассматривать лишь отдельные стороны проблемы структуры потоков.

Измерение и математическое описание изменяющегося во времени пространственного поля скоростей при движении потока в каком-то технологическом аппарате (или его фрагменте) — сложная задача, а с учетом тепло- и массообмена, тем более — химических превращений, — зачастую пока неразрешимая. Определенную (косвенную) информацию о поведении потока получают из рассмотрения **временных** его характеристик, тем более что и сами эти характеристики существенны для описания и расчета ХТП.

Пусть цель ХТП — изменение какого-либо свойства системы  $U$  во времени  $\tau$ , т.е.  $U = U(\tau)$ . При этом в качестве  $U$  могут выступать: температура в случае теплообмена, концентрация — в случае массообмена или химической реакции, какое-либо свойство веществ (теплоемкость, механическая прочность и др.). Разные элементы потока могут находиться в рабочей зоне (РЗ) системы (в теплообменнике, в массообменном аппарате, в химическом реакторе) *разное* время; поэтому степень их обработки (конечное значение свойства —  $U_k$ ) будет различна. Естественно, **результатирующая степень обработки всего потока  $U_{рез}$  зависит от характера распределения элементов потока по времени пребывания** — именно в этом (более узком) плане рассматривается ниже структура потоков (другие стороны проблемы здесь практически не затрагиваются).

Выделяют два простейших идеализированных представления о структуре потока — это мысленные модели, схематично отражающие наиболее существенные свойства системы, потока. В некоторых случаях они в той или иной мере отвечают движению потока в реальных ХТА. В самом общем плане понятие об этих моделях было введено в разд. 1.2.2; в настоящей главе они будут рассмотрены подробно.

**Идеальное вытеснение** (сокращенно — ИВ), иначе — поршневой поток, стержневой поток. Это абсолютно равномерный (по поперечному сечению) поток (рис. 8.2), все элементы кото-

рого движутся с одинаковой скоростью  $w$ , а значит проходят РЗ системы за *одинаковое* время  $\tau_{\text{ив}}$ .

**Идеальное перемешивание** (сокращенно — ИП). Здесь все элементы потока в рабочей зоне перемешиваются настолько интенсивно, что параметры потока (температура, концентрация и др.) выравнены по объему РЗ. В результате параметры потока, покидающего рабочую зону, те же, что и в любой точке самой РЗ. Это означает, что некий элемент потока, вошедший в рабочую зону, в следующий момент времени может с *равной вероятностью* оказаться в любой точке РЗ, в том числе и у выхода из нее.

Здесь нельзя изобразить эпюру скоростей: строго говоря, в рамках модели ИП вообще не следует говорить о локальных или мгновенных скоростях. В *целях наглядности* можно принять, что скорости бесконечно велики во всех направлениях.

Очевидно, в такой системе одни элементы (из тех, что оказались у выхода) быстро проскочат РЗ (почти не изменив своих первоначальных характеристик, так как у них малое время пребывания  $\tau$  в РЗ), другие — надолго задержатся в ней (может быть, бесполезно долго, так как они уже давно получили необходимую степень обработки). А поскольку время пребывания элементов потока в РЗ *разное*, то об этом времени нужно говорить в смысле его **распределения**.

В системах с ИП (как и в системах с *ограниченной* интенсивностью перемешивания) нас более всего в рассматриваемом здесь аспекте интересует перемешивание элементов потока в направлении его движения, т. е. **продольное перемешивание** (Пр.П): в системах с ИП мы имеем дело с бесконечно интенсивным Пр.П, в системах ИВ интенсивность Пр.П равна нулю. Заметим, что в общем случае для нас не безразлична и интенсивность **поперечного перемешивания**: от него также может зависеть распределение времени пребывания элементов потока в ХТА.

Итак, в системах ИВ равномерно распределены (в поперечном сечении) скорости потока, и как следствие — одинаково время пребывания в РЗ всех его элементов; в системах ИП равномерно распределены по объему интенсивные и удельные свойства потока — концентрации, температуры, теплопроводности и т.п.

ИВ и ИП — модельные представления. К системам ИВ в ряде случаев близки течения внутри узких параллельных труб, собранных в пучок, через неподвижный зернистый слой; к системам ИП — кипящие смеси (например, при непрерывном выпаривании в аппаратах с интенсивной естественной циркуляцией температуры и концентрации практически одинаковы в объеме аппарата и на выходе из него) или барботажные системы с достаточно большими расходами газа, или же движе-

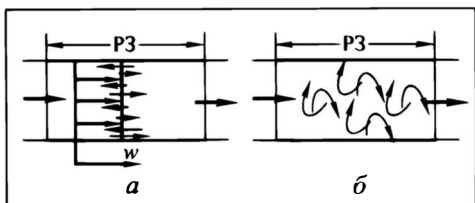
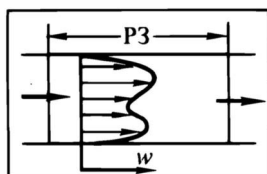


Рис. 8.3. Поперечная неравномерность потока (эпюра скоростей)

Рис. 8.4. Стержневой поток с обратным перемешиванием:

а — осредненный стержневой поток с обратным перемешиванием (мгновенная эпюра скоростей), б — турбулентные пульсации — возможный источник обратного перемешивания

ние твердых частиц в односекционном псевдооживленном слое. Но большинство реальных систем занимает промежуточное положение — в них наблюдается Пр.П, но интенсивность его ограничена.

Обычно выделяют следующие *основные причины Пр.П*, обуславливающие неравномерность времени пребывания элементов потока в РЗ.

**Поперечная неравномерность потока.** Здесь характерным является различие скоростей в различных точках поперечного сечения (рис. 8.3). В результате разные элементы потока пройдут РЗ за разное время. Примеры: ламинарный режим течения жидкости в круглой трубе — параболический профиль скоростей; движение части газа через псевдооживленный слой в виде пузырей — они проходят через слой быстрее, нежели остальной газ в просветах между псевдооживляемыми твердыми частицами.

**Обратное перемешивание.** В этом случае на стержневой поток (рис. 8.4, а, жирные стрелки) накладывается изменяющееся во времени поле мгновенных разнонаправленных скоростей (на рис. 8.4, а показаны их составляющие лишь вдоль движения потока). В результате в каждый данный момент времени в каждой точке поперечного сечения формируется своя абсолютная скорость движения элемента потока как итог сложения *разных* локальных мгновенных скоростей с *одинаковыми* осредненными. Значит, будут различны времена пребывания элементов в рабочей зоне.

Обратное перемешивание возникает, например, при турбулизации потока (рис. 8.4, б) или при работе перемешивающих устройств либо под воздействием каких-то иных (конструктивных, эксплуатационных) факторов.

Специально отметим, что увеличение турбулентности потока не обязательно сопровождается усилением эффекта Пр.П в

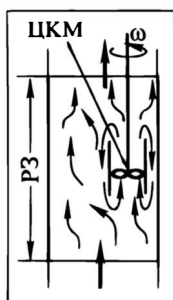


Рис. 8.5. Направленная циркуляция (ЦКМ — циркуляционный контур с мешалкой)

целом, поскольку одновременно происходит выравнивание профиля скоростей, т. е. снижается поперечная неравномерность потока.

**Направленные циркуляционные потоки.** Они возникают в какой-то части поперечного сечения аппарата (например, из-за низкого локального гидравлического сопротивления) или специально организуются потоки особой интенсивности (рис. 8.5). Здесь также нарушается равномерность времени пребывания элементов в РЗ.

Заметим, что приведенные выше причины Пр.П настолько взаимосвязаны, что между ними не всегда удастся провести четкую грань.

## 8.2. ВЛИЯНИЕ ПРОДОЛЬНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ ХТП

Результирующий эффект ХТП зависит от характера распределения элементов потока по времени пребывания в РЗ. При ИВ все элементы потока будут обработаны *одинаково*, так как  $\tau_{\text{ив}} = \text{idem}$ . При ИП (или в промежуточных случаях, в том числе и в большинстве реальных систем) степень обработки разных элементов потока будет *разной* из-за различий в их времени пребывания  $\tau$  в РЗ. Предстоит выяснить, что лучше для ХТП (тепло- или массообмена, химической реакции) — ИВ или ИП, в каком случае выше эффективность процесса.

Можно привести примеры *положительного* влияния Пр.П на эффективность ХТП.

1. Пусть некий ХТП протекает селективно только в узком интервале температур. Если в ходе химической реакции выделяется большое количество теплоты, то обеспечить узкий температурный интервал в зоне реакции можно лишь при интенсивном перемешивании. Здесь Пр.П будет полезным. (Разумеется, не менее важным здесь будет интенсивное поперечное перемешивание, обуславливающее высокие коэффициенты теплоотдачи и выравнивание температур в поперечном сечении реакционного аппарата.)

2. Пусть происходит автокаталитическая реакция, причем промежуточные продукты, резко ее ускоряющие, накапливаются постепенно. Тогда на начальных участках реактора (т.е. в зоне накопления промежуточных продуктов) основная реакция протекает медленно, эта зона на основную реакцию практически

ски не работает. Использование объема (длины) реактора будет эффективнее, если промежуточные продукты, катализирующие основную реакцию, перенести (забросить) в начальные участки реактора; это достигается интенсификацией Пр.П.

Но в большинстве случаев перемешивание потока в направлении его движения (т. е. Пр.П) *отрицательно* сказывается на эффективности процесса. Так, при протекании целевой химической реакции  $A \rightarrow B$  может идти и какая-либо побочная, например  $B \rightarrow C$ . И тогда для элементов потока, чрезмерно долго находящихся в реакционной зоне, весьма значительная доля целевого продукта В может превратиться в побочный С. В то же время для элементов потока с малыми  $\tau$  будет мала степень превращения исходного вещества А в целевой продукт В. Таким образом, разброс во времени пребывания (из-за Пр.П) может привести к **понижению степени превращения и селективности**, в итоге — доли выхода целевого продукта В.

Весьма существенно отрицательное воздействие Пр.П на движущую силу процесса. Продемонстрируем это на примере рекуперативного теплообмена.

В теплообмене изучают (см. гл. 7) различные схемы движения теплоносителей — противоточную (наибольшая движущая сила), прямоточную (наименьшая), сложные — перекрестный ток, смешанные токи и т. п. (промежуточные значения движущей силы). Все эти схемы подразумевают движение теплоносителей в режиме ИВ. Рассмотрим (рис. 8.6) формирование

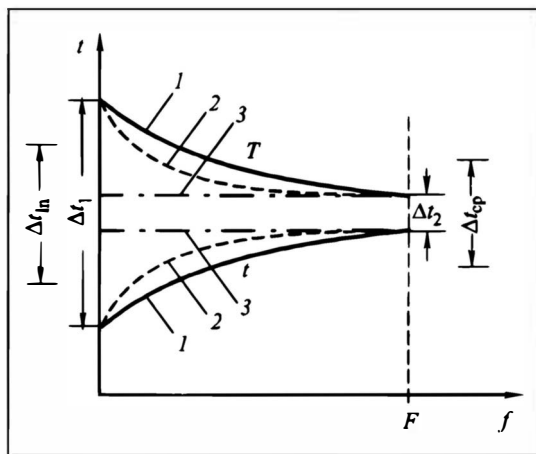


Рис. 8.6. Движущая сила (температурный напор) при теплообмене:  
1 — прямоток (ИВ), 2 — ограниченное продольное перемешивание, 3 — ИП



движущей силы теплообмена при движении теплоносителей в режиме ИП либо с ограниченным Пр.П; анализ проведем в сопоставлении с “наименее эффективной” схемой — прямотоком (в режиме ИВ).

Движущая сила в случае прямотока (температурные кривые — сплошные линии) рассчитывается (см. разд. 7.6.2) как среднелогарифмическая величина  $\Delta t_{\text{лп}}$  из начальной  $\Delta t_1$  и конечной  $\Delta t_2$  разностей температур теплоносителей:

$$\Delta t_{\text{лп}} = \frac{\Delta t_1 - \Delta t_2}{\ln(\Delta t_1 / \Delta t_2)} \quad (\text{а})$$

и поэтому является промежуточной между  $\Delta t_1$  и  $\Delta t_2$ :  $\Delta t_2 < \Delta t_{\text{лп}} < \Delta t_1$ . Если при сохранении неизменными величин  $\Delta t_1$  и  $\Delta t_2$  потоки теплоносителей движутся в режиме ИП, то вдоль всей поверхности теплообмена их температуры  $T$  и  $t$  не изменяются (штрих-пунктирные линии). Поэтому вдоль поверхности  $F$  остается постоянной и движущая сила  $\Delta t_{\text{ип}} = \Delta t_2$ , которая будет меньше, нежели  $\Delta t_{\text{лп}} = \Delta t_{\text{лп}}$ . Это означает, что для передачи того же количества теплоты  $Q$  при прочих равных условиях в случае ИП потребуются большая поверхность теплообмена, чем при прямотоке:

$$F = \frac{Q}{k \Delta t_{\text{ср}}} \quad (\text{б})$$

где  $k$  — коэффициент теплопередачи (он условно принят здесь одинаковым для разных схем движения теплоносителей).

В реальном теплообменнике теплоносители движутся с некоторой ограниченной интенсивностью Пр.П (штриховые линии), так что движущая сила  $\Delta t_{\text{ср}}$  будет иметь промежуточное значение:  $\Delta t_{\text{ип}} \leq \Delta t_{\text{ср}} \leq \Delta t_{\text{ив}}$ ; соответственно, по (б) необходимая поверхность  $F$  также будет промежуточной:  $F_{\text{ип}} \geq F \geq F_{\text{ив}}$ . Игнорирование при расчете эффекта продольного перемешивания при движении теплоносителей приведет к *завышению*  $\Delta t_{\text{ср}}$ , а значит — к *заниженным* расчетным значениям  $F$ .

В литературе в настоящее время приводятся многочисленные эмпирические уравнения для расчета тепло- и массообменных кинетических характеристик процессов (коэффициентов тепло- и массообмена и др.); точность этих уравнений обычно невелика (погрешность в 20—30% считается вполне приемлемой). Одна из причин разброса экспериментальных данных около расчетной зависимости — игнорирование продольного перемешивания, различного в разных изучаемых каналах, аппаратах, устройствах. Чаще всего исследователи постулировали (обычно даже не оговаривая этого) движение потоков в режиме ИВ, на этой основе определяли движущую силу [например, по (а) —  $\Delta t_{\text{лп}}$ ] и рассчитывали коэффициенты тепло- или массообмена при разных значениях варьируемых факторов; в результате они приходили к эмпирическому уравнению. А поскольку в разных аппаратах (каналах и т. п.) рассчитанная таким способом

Рис. 8.7. Химическая реакция при движении реагентов в режимах ИВ и ИП:

*a* — реакционная зона, *б* — профиль концентраций компонента *A*

движущая сила по-разному отличается от реальной, то существенный разброс опытных данных относительно расчетной кривой неизбежен. Разумеется, учет Пр.П при определении движущей силы дал бы лучшую сходимость и большую достоверность расчета кинетических характеристик.

Возвращаясь к влиянию Пр.П на эффективность технологических процессов, подчеркнем, что для любого ХТП, скорость которого падает по мере его протекания, наиболее выгоден режим ИВ. Это ясно и из предыдущего примера с теплообменом при прямотоке; еще более нагляден пример с химической реакцией.

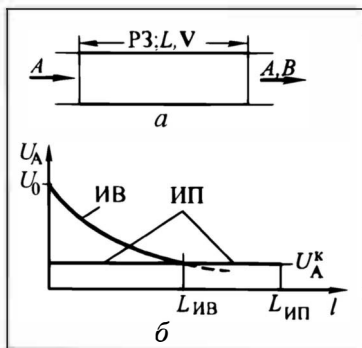
Рассмотрим химическую реакцию I порядка:  $A \rightarrow B$ . Проследим за судьбой произвольного элемента потока в РЗ, полагая, что скорость реакции  $v_p$  зависит только от времени  $\tau$ . Тогда

$$v_p \equiv - \frac{dU_A}{d\tau} = kU_A; \quad (в)$$

здесь концентрация  $U_A$  компонента *A* уменьшается во времени (в этом смысл процесса), поэтому пропорционально  $U_A$  падает во времени скорость  $v_p$ . Решение уравнения (в) приводит после разделения переменных и интегрирования (от 0 до  $\tau$  и от начального  $U_0$  до текущего значения  $U_A$  в момент  $\tau$ ) к кинетическому соотношению

$$U(\tau) \equiv U_A = U_0 e^{-k\tau}. \quad (г)$$

Изменение концентрации  $U_A$  вдоль реакционной зоны (рис. 8.7, *a*) показано на рис. 8.7, *б*: концентрация компонента *A* вдоль пути  $l = \omega\tau$  снижается от начальной (при  $l = 0$ ) до конечной (при  $l = L$ ). Если поток движется в режиме ИВ, то это снижение  $U_A$  происходит постепенно — по экспоненциальной кривой (ИВ), соответствующей приведенному выше кинетическому соотношению (г). При движении потока в режиме ИП падение  $U_A$  происходит скачком: вдоль всей длины реакционной трубки устанавливается одинаковая концентрация  $U_A$ , равная таковой на выходе  $U_A^k$ . Совершенно очевидно, что во всех точках РЗ (исключая конечную) концентрация активного компонента  $U_A$  в режиме ИВ будет выше, нежели в режиме ИП.



Значит, и скорость реакции в случае ИВ выше, чем при ИП:

$$v_p^{\text{ИВ}} \geq v_p^{\text{ИП}}; \quad (\text{д})$$

при этом знак равенства относится только к точке на выходе потока из РЗ, если считать, что конечные концентрации  $U_A^k$  в обоих случаях (ИВ и ИП) — одинаковы. Поэтому для завершения реакции до заданной степени превращения (заданной конечной концентрации  $U_A^k$ ) при ИВ потребуется меньшая длина реакционной трубки, чем при ИП:  $L_{\text{ИВ}} \leq L_{\text{ИП}}$ . Это же относится и к объемам РЗ:  $V_{\text{ИВ}} \leq V_{\text{ИП}}$ .

Отношение  $V_{\text{ИП}}/V_{\text{ИВ}}$  может служить мерой снижения эффективности ХТП при переходе от ИВ к ИП. Это отношение мало отличается от 1 при низких степенях превращения  $\eta$  компонента А, но весьма существенно при высоких, как это видно из сопоставления эффективности проточного химического реактора для реакции I порядка при движении реагентов в режиме ИП и ИВ:

$\eta$	0	0,5	0,7	0,9	0,95	0,99	0,999	0,9999
$V_{\text{ИП}}/V_{\text{ИВ}}$	1	1,44	1,94	3,91	6,34	21,5	145	-1090

Сказанное выше (ИВ — наиболее благоприятный режим) не означает, что ИП — наихудший из режимов. Во-первых, в системах, близких к ИП, выше интенсивность нормального поперечного перемешивания (т. е. интенсивнее тепло- и массо-перенос), что при не очень высоких степенях превращения или глубине массообмена может оказаться существеннее необходимого увеличения объема РЗ. А во-вторых, встречаются структуры потоков (короткий байпас, застойные зоны — см. раздел 8.7.2), приводящие иногда и к худшим результатам.

Подчеркнем, что проблема Пр.П в массообменных процессах (как и в химических реакциях) стоит обычно острее, нежели в теплообменных. Дело в том, что в случае теплообмена разности температур (движущая сила) на концах теплообменника не очень малы; для устойчивого теплообмена рекомендуется\* поддерживать их не ниже  $\approx 10$  градусов. Поэтому степень использования движущей силы [в прямоточном теплообменнике, отвечающем схеме на рис. 8.6, это  $(1 - \Delta t_2/\Delta t_1)$  — аналог степени превращения] здесь еще достаточно далека от 1. И,

\* Существуют исключения, когда разность температур теплоносителей поддерживается на уровне 2—3 градуса: холодообменники в циклах глубокого охлаждения (с целью повышения полноты рекуперации холода); конденсаторы в колоннах для разделения воздуха (чтобы избежать повышения давления в колонне) и др.

может быть, в этом случае для осуществления какого-либо конкретного процесса теплопереноса окажется целесообразным *интенсифицировать перемешивание* — поперечное (чтобы повысить коэффициент теплопередачи  $k$ ), а с ним и продольное, даже если это и приведет к необходимости некоторого увеличения теплообменной поверхности  $F$  из-за снижения движущей силы; кстати, увеличение  $F$  будет скомпенсировано (частично, а возможно — и с избытком) возрастанием  $k$ .

В то же время массообменные процессы нередко проводятся с очень высокими “степенями превращения” (степенями извлечения компонента, например), приближающимися к 1 (выходные концентрации здесь близки к равновесным) даже в большей мере, нежели это указано в приведенном выше примере. Поэтому потребуется весьма существенное (часто — за пределами приемлемого) увеличение габаритов аппарата (длины и объема ХТА). Совершенно очевидно, что повышением интенсивности поперечного (нормального) переноса не удастся сколько-нибудь заметно скомпенсировать это увеличение объема РЗ аппарата. Здесь необходимы меры, ограничивающие Пр.П.

При переходе от малых (лабораторных) аппаратов к крупным (промышленным), т.е. при *масштабировании* аппаратуры, интенсивность Пр.П обычно растет, так как возрастает поперечная неравномерность потока (из-за трудностей его равномерного распределения по большому сечению) и усиливаются обратное перемешивание и циркуляционные токи (из-за повышения масштабов и усложнения внутреннего устройства аппаратов). Это становится особо важным для аппаратов большой единичной мощности: в них нередко заметно падает эффективность процесса — мы говорим: при переходе к крупным аппаратам возникают *масштабные осложнения*. Здесь *необходимо*:

— стремиться уменьшить интенсивность Пр.П (улучшить газораспределение, ограничить турбулизацию потока вдоль его движения и т.п.). В течение многих лет при инженерной проработке аппаратуры проектировщики так и делали (зачастую, правда, не формулируя для себя задачу в свете Пр.П): устанавливали в крупных аппаратах перераспределители потока, перегородки, сетки, тарелки, секционируя аппараты конусами, размещая насадку и т.д.;

— постараться учесть интенсивность Пр.П и его влияние на эффективность ХТП при переходе к крупным аппаратам: *надо знать, чего следует ожидать*. В этих целях проводят “гидравлическое моделирование” ХТА (см. разд. 8.6).

### 8.3. СТРУКТУРА ПОТОКОВ В СЛУЧАЕ ПРОСТЕЙШИХ ИДЕАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ

Поскольку свойство  $U = U(\tau)$ , то степень завершенности (эффективность) процесса (например, выход целевого продукта химической реакции, степень приближения к равновесию в массообменном процессе) зависит от времени пребывания  $\tau$  — от его величины, характера распределения. Рассмотрим первоначально проблему распределения  $\tau$  применительно к идеализированным моделям ИВ и ИП.

#### 8.3.1. Идеальное вытеснение

##### *Время пребывания*

Обозначим:  $L$ ,  $V$ ,  $G$  — длина РЗ, ее объем, масса вещества в ней;  $w$ ,  $V$  и  $G$  — скорость, объемный и массовый расходы потока (рис. 8.8).

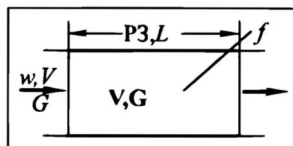
При движении потока в режиме ИВ время пребывания всех его элементов, перемещающихся с одинаковой скоростью  $w$ , одинаково:  $\tau = \tau_{\text{ИВ}}$ ; физический смысл  $\tau_{\text{ИВ}}$  очевиден: это время, за которое элемент потока проходит РЗ. Значение  $\tau_{\text{ИВ}}$  легко найти:  $\tau_{\text{ИВ}} = L/w$ . Это соотношение удобно представить в другой форме, домножив числитель и знаменатель на поперечное сечение потока  $f$ , тогда

$$\tau_{\text{ИВ}} = \frac{Lf}{wf} = \frac{V}{V}.$$

Умножение на плотность  $\rho$  приводит к выражению

$$\tau_{\text{ИВ}} = \frac{V\rho}{V\rho} = \frac{G}{G}.$$

Таким образом,



$$\tau_{\text{ИВ}} = \frac{L}{w} = \frac{V}{V} = \frac{G}{G}, \quad (8.1)$$

причем чаще всего используют соотношение, содержащее  $V/V$ .

Рис. 8.8. Рабочая зона и потоки

##### *Кривые отклика*

Движение потока в режиме ИВ можно наглядно представить и наблюдать с помощью индикатора (трассера, метки) — вещества, легко определяемого химическим анализом; краски; порции подогретого потока и т.п. При этом трассер по своим

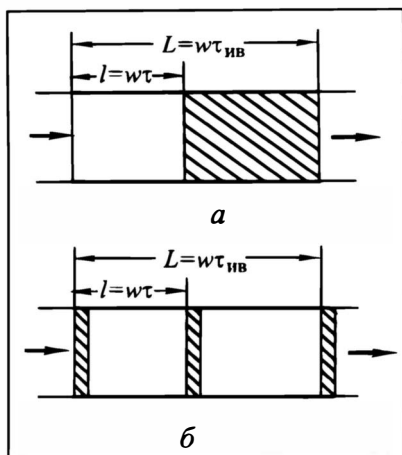
Рис. 8.9. Движение потока с трассером по рабочей зоне в режиме ИВ при его ступенчатом (а) и импульсном (б) вводе

гидродинамическим характеристикам (плотности, вязкости и т.п.) во избежание возмущения основного потока должен быть близок к нему, а ввод трассера не должен сколько-нибудь заметно влиять на движение самого потока. Ввод трассера в РЗ осуществляют преимущественно в двух вариантах.

1. Пометим трассером в начальный момент времени  $\tau = 0$  весь объем вещества  $V$  в рабочей зоне, а с момента  $\tau \geq 0$  станем подавать в нее постоянный ( $w, V = \text{const}$ ) поток без трассера. Тогда области меченого и немеченого потоков при их движении в режиме ИВ будут четко разделены, границы между ними (*фронт*) окажется плоской и резко очерченной (рис. 8.9, а). Эта граница в режиме ИВ будет перемещаться с постоянной скоростью  $w$  (на рис. 8.9, а — слева направо); в момент времени  $\tau$  она займет положение  $l = w\tau$ . К моменту времени  $\tau_{\text{ИВ}}$  все меченые элементы покинут РЗ ( $L = w\tau_{\text{ИВ}}$ ) — рабочая зона будет свободна от трассера. Описанный способ подачи трассера в РЗ называют **ступенчатым**.

2. Пусть по РЗ идет немеченый поток. В момент времени  $\tau = 0$  на вход в РЗ подадим небольшое (в форме *короткого импульса*) количество трассера. Эта узкая полоска (на рис. 8.9, б — заштрихована) будет в режиме ИВ, не размываясь, перемещаться слева направо со скоростью  $w$ , так что к моменту времени  $\tau$  она займет положение  $l = w\tau$ , а к моменту времени  $\tau_{\text{ИВ}}$  окажется на выходе из РЗ:  $L = w\tau_{\text{ИВ}}$ . Описанный способ подачи трассера в РЗ называют **импульсным**.

Можно применить и другие варианты ввода трассера. Среди них нередко выбирают какую-нибудь периодическую форму его подачи, например типа прямоугольной волны или синусоиды. В этих случаях (как и при ступенчатом и импульсном вводах) результаты опыта достаточно просто интерпретируются математически, причем в основе интерпретации — не столько величина сигнала (*амплитуда*), сколько *сдвиг по фазе*; это удобно, поскольку не требуется предварительной тарировки приборов.



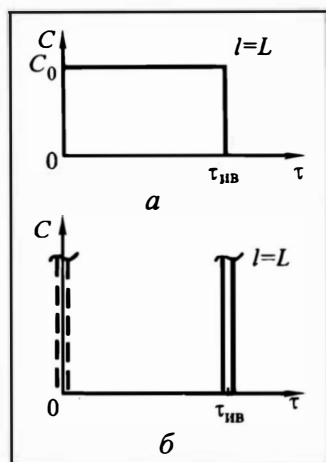


Рис. 8.10. Кривые отклика на ступенчатое (а) и импульсное (б) возмущение при движении потока с трассером в режиме ИВ.

Штриховыми линиями на виде б условно показан сигнал импульсной формы на входе в РЗ ( $l = 0, \tau = 0$ )

Существенно, что в режиме ИВ форма возмущения потока трассером (сигнал — ступенчатый или какой-либо иной) не изменяется по мере перемещения потока от точки подачи сигнала (например, входа в РЗ) до выхода из РЗ.

Следить за движением трассера по всей РЗ неудобно: трассер совсем не обязательно окрашен и виден в аппарате с прозрачными стенками, да и стенки аппарата

далеко не всегда прозрачны. Поэтому, как правило, концентрацию трассера  $C$  фиксируют только на выходе из РЗ, подавая на входе в нее сигнал известной формы. Выходной сигнал  $C(\tau)$  при  $l = L$  называют откликом, кривой отклика, выходной функцией или кривой. В случае ИВ кривая отклика повторяет (рис. 8.10) входной сигнал без изменения формы, но с запаздыванием на время  $\tau_{ИВ} = L/w$ .

Кривые отклика при ИВ описываются функциональной зависимостью, содержащей два параметра — время  $\tau_{ИВ}$  и базовую концентрацию  $C_0$ , причем  $C_0 = m_n/V$ , где  $m_n$  — количество трассера, поданного в РЗ при исследовании в ней структуры потоков. Чаще всего при таких исследованиях используют сигнал импульсной формы. В этом случае функция отклика может быть охарактеризована следующим образом:

$$\begin{aligned} \tau < \tau_{ИВ}, \quad C &= 0; \\ \tau = \tau_{ИВ}, \quad C &= C_0; \\ \tau > \tau_{ИВ}, \quad C &= 0. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Это означает, что до момента  $\tau_{ИВ}$  возмущение (сигнал) на входе в РЗ не проявляется на выходе из нее. Выходной сигнал появляется в момент  $\tau_{ИВ}$ . При этом время существования выходного сигнала  $\Delta\tau$  равно времени подачи его на вход в РЗ; при бесконечно малом промежутке ввода трассера (идеальный импульс) бесконечно малой будет и продолжительность выходного сигнала — именно в этом случае справедливы выражения (8.2). После момента  $\tau_{ИВ}$ , когда весь трассер покинул РЗ, на выходе снова нет возмущения.

Если налицо некая протяженность сигнала  $\Delta\tau \neq 0$ , то выражения (8.2) подлежат очевидной корректировке скажем,  $C = C_0$  для отрезка времени  $\tau = \tau_{\text{ИБ}} \pm \Delta\tau/2$ .

Часто в целях обобщения для описания выходного сигнала удобно пользоваться параметрическими критериями подобия (безразмерными симплексами)  $\tau/\tau_{\text{ИБ}}$  и  $C/C_0$ . Тогда характеристика (8.2) кривой отклика на идеальный импульсный входной сигнал будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}\tau/\tau_{\text{ИБ}} < 1, \quad C/C_0 &= 0; \\ \tau/\tau_{\text{ИБ}} = 1, \quad C/C_0 &= 1; \\ \tau/\tau_{\text{ИБ}} > 1, \quad C/C_0 &= 0.\end{aligned}\tag{8.2a}$$

В таком представлении модель не содержит параметров. Таким образом, ИВ — **беспараметрическая модель**.

### *Результирующий эффект процесса $U_{\text{рез}}$*

Каждый элемент потока в режиме ИВ проходит РЗ за время  $\tau_{\text{ИБ}}$ ; поэтому степень его обработки составит\*  $U_{\text{к}} = U(\tau)_{\tau=\tau_{\text{ИБ}}} \equiv U(\tau_{\text{ИБ}})$ . Но поскольку *все* элементы потока при движении в режиме ИВ будут находиться в РЗ одинаковое время  $\tau_{\text{ИБ}}$ , то все они будут обработаны одинаково, так что результирующий эффект для *всего* ХТП запишется как

$$U_{\text{рез}}^{\text{ИВ}} = U(\tau_{\text{ИБ}}).\tag{8.3}$$

Таким образом, располагая кинетическим законом изменения интересующего нас свойства  $U$  (концентрации, температуры и т.п.) во времени  $\tau$ , по (8.3) легко определить значение  $U$  на выходе из РЗ в случае ИВ. Для этого предварительно следует отдельно — теоретически и (или) экспериментально — установить кинетическую зависимость  $U = U(\tau)$  и затем подставить в  $U(\tau)$  значение  $\tau = \tau_{\text{ИБ}}$ .

## **8.3.2. Идеальное перемешивание**

### *Время пребывания*

Разные элементы потока при его движении в режиме ИП находятся в РЗ разное время; поэтому здесь можно говорить лишь о **среднем** времени пребывания  $\tau_{\text{ср}}$  и о **распределении** элементов потока по времени пребывания  $\tau$ .

---

\* Здесь и далее предполагается, что  $U$  зависит только от  $\tau$ .



Значение  $\tau_{\text{ср}}$  рассчитывают (см. рис. 8.8) из выражения, формально совпадающего с (8.1):

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{L}{w} = \frac{V}{G} = \frac{G}{G}. \quad (8.4)$$

Важно:  $\tau_{\text{ср}}$  не аналог  $\tau_{\text{ив}}$ , т.е. формулы (8.1) и (8.4) — не идентичны. Действительно,  $\tau_{\text{ив}}$  — это реальное время пребывания любого из элементов потока в РЗ, поэтому равенство  $\tau_{\text{ср}} = \tau_{\text{ив}}$  для потоков ИВ тривиально; для всех других потоков  $\tau_{\text{ср}}$  — удобная *расчетная характеристика*. При одном и том же  $\tau_{\text{ср}}$  возможны *различные*  $U_{\text{рез}}$  — в зависимости от характера распределения элементов потока по  $\tau$ .

Для установления **закона распределения** элементов по  $\tau$  при ИП, т.е. **функции распределения**  $\kappa(\tau)$ , будем базироваться на объеме вещества  $V$  в РЗ и объемном его потоке  $V$  (см. рис. 8.8). Пометим мысленно *все* элементы потока в РЗ в начальный момент времени  $\tau = 0$ , как бы введя в нее (в режиме ИП — в *любую* ее точку, практически — обычно на вход РЗ) определенное количество индикатора  $m_{\text{и}}$ . Тогда он мгновенно (ИП!) распределится в момент  $\tau = 0$  по всему объему рабочей зоны  $V$ , так что его исходная (начало опыта, процесса) концентрация составит  $C_0 = m_{\text{и}} / V$ . С момента  $\tau \geq 0$  станем подавать в рабочую зону постоянный поток  $V$ , не содержащий трассера. В отличие от ИВ, при ИП не будет четкого фронта — границы, разделяющей меченый поток от немеченого; фронт будет *размыт* по всей РЗ. По мере подачи немеченого потока во входное сечение концентрация трассера в объеме РЗ будет уменьшаться, поскольку трассер в РЗ *не подается*, но все время *покидает* ее в смеси с немечеными порциями потока. Концентрация трассера  $C$  фиксируется только на выходе из РЗ (кривая отклика), но в случае ИП (*только в этом случае!*) выходная концентрация совпадает с концентрацией в РЗ. Иначе: кривая отклика при ИП является концентрационной характеристикой *всей РЗ*, поскольку закон изменения  $C(\tau)$  в выходном сечении РЗ и в ее объеме один и тот же.

Пусть к моменту времени  $\tau > 0$  в РЗ осталась концентрация трассера  $C < C_0$ , так что доля первоначально помеченных частиц  $\kappa < 1$ ; при этом в случае ИП  $\kappa = C/C_0$ , а  $C = C(\tau)$  — падающая во времени *выходная концентрация*, в каждый момент времени равная концентрации трассера в объеме РЗ. Для определения  $C(\tau)$  и  $\kappa(\tau)$  составим материальный баланс по трассеру для РЗ (это — пространственный контур) за время  $dt$ :

Приход трассера в РЗ  $0Vdt.$

Уход трассера из РЗ  $CVdt.$

Накопление трассера в РЗ  $VdC.$

Таким образом,

$$+ 0 V d\tau - C V d\tau = V dC. \quad (a)$$

Разделяя переменные и интегрируя

$$\int_{C_0}^C \frac{dC}{C} = - \int_0^\tau \frac{V}{V} d\tau,$$

получаем, имея в виду  $V/V \equiv \tau_{\text{ср}}$ :

$$\ln \frac{C}{C_0} = - \frac{V}{V} \tau = - \frac{\tau}{\tau_{\text{ср}}}. \quad (б)$$

После потенцирования

$$C = C_0 e^{-\tau/\tau_{\text{ср}}} \quad \text{и} \quad \frac{C}{C_0} \equiv \kappa = e^{-\tau/\tau_{\text{ср}}}. \quad (8.5)$$

Подчеркнем: поскольку соотношение  $\kappa \equiv C/C_0$  справедливо только для движения потока в режиме ИП, то выражения (8.5) характерны именно для ИП.

Физический смысл  $\kappa = \kappa(\tau)$  применительно ко *всему потоку*: это доля меченых элементов (от находившихся в РЗ в момент времени  $\tau = 0$ ), *оставшихся* в РЗ к моменту времени  $\tau$ ; соответственно  $(1 - \kappa)$  — доля меченых элементов, покинувших РЗ к моменту  $\tau$ . С другой стороны, применительно к *отдельному элементу*:  $\kappa$  — *вероятность* того, что данный элемент останется в РЗ время  $\tau$  (и более), т.е. “возраст” элемента в системе; соответственно  $(1 - \kappa)$  — вероятность того, что данный элемент *покинет* РЗ системы к моменту времени  $\tau$ .

### Кривые отклика

Движение потока в режиме ИП также можно наглядно проиллюстрировать и проконтролировать с помощью трассера. Но поскольку здесь концентрация трассера в РЗ и на выходе из нее в каждый момент времени одна и та же, то речь пойдет лишь об одном способе подачи трассера. Очевидно, что после ввода трассера в систему при  $\tau = 0$  его текущая концентрация  $C$  в результате постоянной подачи

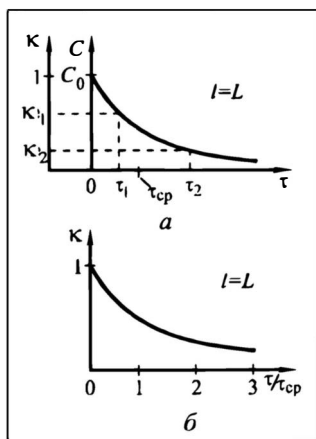


Рис. 8.11. Кривые распределения (отклика) при движении потока с трассером в режиме ИП:

а —  $C(\tau)$  и  $\kappa(\tau)$ , б —  $\kappa(\tau/\tau_{\text{ср}})$

немеченой жидкости будет в РЗ и на выходе из нее постепенно уменьшаться во времени — от первоначальной  $C_0$  до асимптотически приближающейся к нулю при  $\tau \rightarrow \infty$ . Закон изменения  $C(\tau)$ , заданный уравнением (8.5), показан на рис. 8.11; там же даны кривые  $\kappa(\tau)$  и  $\kappa(\tau/\tau_{cp})$ .

С помощью приведенных зависимостей, например типа  $\kappa(\tau)$ , нетрудно определить, какая доля элементов потока будет находиться в РЗ системы в течение времени от  $\tau_1$  до  $\tau_2$ : эта доля составит  $\kappa_1 - \kappa_2$  (см. рис. 8.11, а).

### *Результирующий эффект процесса $U_{рез}$*

Продemonстрируем сначала **общий подход** к определению  $U_{рез}$ . Этот подход и полученные на его основе соотношения справедливы для любых режимов течения, а не только для потоков, движущихся в режиме ИП и описываемых выражением (8.5).

Результирующий эффект процесса  $U_{рез}$  рассчитывается с учетом распределения элементов потока по  $\tau$ , т. е. с учетом  $\kappa$  и  $(1 - \kappa)$ ; в частности, для ИП — это выражения (8.5).

Если к моменту времени  $\tau$  рабочую зону покидает доля меченых элементов  $(1 - \kappa)$ , то за время  $d\tau$  эта доля составит  $d(1 - \kappa)$ . Введем новую функцию  $d(1 - \kappa)/d\tau \equiv \varphi(\tau)$ , так что

$$d(1 - \kappa) = \frac{d(1 - \kappa)}{d\tau} d\tau = \varphi(\tau)d\tau;$$

функция  $\varphi(\tau)$  называется **плотностью распределения** элементов потока по времени пребывания. Очевидно,  $\varphi(\tau)d\tau = d(1 - \kappa)$  также представляет собой долю элементов потока, находящихся в РЗ время  $d\tau$  (т.е. от  $\tau$  до  $\tau + d\tau$ ). По определению (рис. 8.12, а):

$$\int_0^{\tau} \varphi(\tau)d\tau = 1 - \kappa; \quad \int_{\tau_1}^{\tau_2} \varphi(\tau)d\tau = \kappa_1 - \kappa_2. \quad (8.6a)$$

Очевидно также, что при  $\tau \rightarrow \infty$  весь трассер покинет РЗ, так что

$$\int_0^{\infty} \varphi(\tau)d\tau = 1, \quad (8.6b)$$

т. е. площадь под кривой  $\varphi(\tau)$  равна 1, кривая  $\varphi(\tau)$  представляет собой **нормированную функцию распределения**.

Физически площадь под кривой  $\varphi(\tau)$  — это все меченые элементы потока, первоначально (в момент времени  $\tau = 0$ ) находившиеся в РЗ. Площадь под кривой  $\varphi(\tau)$  от начала координат до вертикали  $\tau$  (на рис. 8.12, а — до  $\tau = \tau_0$ ) есть доля меченых элементов, покинувших РЗ к моменту  $\tau = \tau_0$ . Соответственно, элементарная площадка  $\varphi(\tau)d\tau$  — это доля меченых

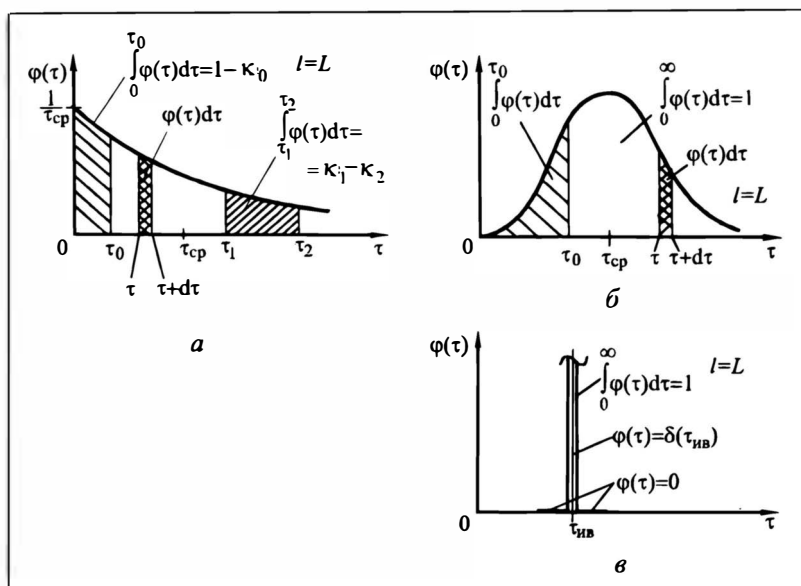


Рис. 8.12. К понятию о плотности распределения элементов потока по времени пребывания  $\varphi(\tau)$ :

а — режим ИП, б — общий случай, в — режим ИВ

элементов потока, покидающих РЗ за время  $d\tau$  (т. е. в промежутке от  $\tau$  до  $\tau + d\tau$ ).

Понятие о  $\varphi(\tau)$  и присущие этой функции свойства справедливы не только для движения потока в режиме ИП (рис. 8.12, а), но и для других режимов течения. Этот тезис иллюстрируется рис. 8.12, б для кривой отклика произвольной формы, полученной для некоего реального аппарата при импульсном входном сигнале. Смысл интеграла от 0 до текущего значения  $\tau = \tau_0$  соответствует левому выражению (8.6а), полная площадь под кривой равна 1 (как и должно быть для нормированной функции распределения). Понятие о  $\varphi(\tau)$  остается правомерным и для движения потока в режиме ИВ; отклик на импульсное возмущение имеет в этом случае специфический вид (рис. 8.12, в): величина  $\varphi(\tau)$  равна нулю при  $\tau < \tau_{ив}$  и при  $\tau > \tau_{ив}$  эта функция уходит в бесконечность. Такой вид зависимости  $\varphi(\tau)$  соответствует выражению (8.2). Примечательно, что интеграл от  $\varphi(\tau) d\tau$ , взятый в определенной точке  $\tau_{ив}$  (т. е. от  $\tau_{ив} - \Delta\tau$  до  $\tau_{ив} + \Delta\tau$  при сколь угодно малых  $\Delta\tau$ ), все равно равен 1, как это должно быть для нормированной функции распределения по (8.6б). Такая функциональная зависимость носит название **дельта-функции Дирака**, она для рассматриваемого случая записывается в форме  $\delta(\tau_{ив})$ . Эта запись означает: функция равна нулю при всех значениях аргументов (здесь — при всех значениях  $\tau$ ), кроме  $\tau_{ив}$ ; при  $\tau_{ив}$  функция стремится к бесконечности, так что интеграл (площадь под “кривой” бесконечно большой высоты  $\varphi(\tau)$  и бесконечно малой ширины  $d\tau$ ) остается равной 1. Таким образом, в случае ИВ  $\varphi(\tau)|_{\tau=\tau_{ив}} = \delta(\tau_{ив})$ .

Для рассматриваемого в данном разделе движения потока в режиме ИП значение  $\varphi(\tau)$  может быть найдено дифференциро-

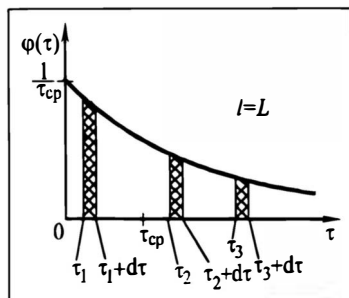


Рис. 8.13. К расчету  $U_{\text{рез}}$  при движении потока в режиме ИП

ванием выражения (8.5):

$$\begin{aligned} \varphi(\tau)_{\text{ип}} &= \\ &= \frac{d(1 - \kappa)_{\text{ип}}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left( 1 - e^{-\tau/\tau_{\text{ср}}} \right) = \frac{1}{\tau_{\text{ср}}} e^{-\tau/\tau_{\text{ср}}} \end{aligned} \quad (8.7)$$

При  $\tau = 0$  имеем  $\varphi(\tau)_{\text{ип}} = 1/\tau_{\text{ср}}$ ; при  $\tau \rightarrow \infty$  величина  $\varphi(\tau)_{\text{ип}}$  асимптотически стремится к нулю. В

промежутке  $\varphi(\tau)_{\text{ип}}$  изменяется экспоненциально.

Результирующий эффект в *общем* случае (не только для ИП) определяется по аддитивности: учитывается эффект  $U(\tau)$  к моменту времени  $\tau$  и доля элементов, находящихся в РЗ в течение времени от  $\tau$  до  $\tau + d\tau$ . Иными словами (рис. 8.13),

$$U_{\text{рез}} = U(\tau_1)\varphi(\tau_1)d\tau + U(\tau_2)\varphi(\tau_2)d\tau + U(\tau_3)\varphi(\tau_3)d\tau + \dots \quad (6)$$

Суммирование ведется по всему диапазону изменения времени пребывания элементов потока в РЗ — от 0 до  $\infty$ , так что если  $U$  зависит только от  $\tau$  (заметим: так бывает не всегда), то

$$U_{\text{рез}} = \int_0^{\infty} U(\tau)\varphi(\tau)d\tau. \quad (8.8)$$

При этом кинетическая характеристика конкретного процесса  $U(\tau)$  должна быть известна заранее, а плотность распределения  $\varphi(\tau)$  соответствует структуре потока в рассматриваемом аппарате.

При движении потока в режиме ИП выражение  $\varphi(\tau)$  берется по формуле (8.7). В этом случае выражение (8.8) принимает вид

$$U_{\text{рез}} = \int_0^{\infty} U(\tau) \frac{1}{\tau_{\text{ср}}} e^{-\tau/\tau_{\text{ср}}} d\tau = \frac{1}{\tau_{\text{ср}}} \int_0^{\infty} U(\tau) e^{-\tau/\tau_{\text{ср}}} d\tau. \quad (8.8a)$$

Если кинетическая характеристика  $U(\tau)$  найдена и описана математически, то нередко удастся разрешить интеграл (8.8a) и получить аналитическое выражение для  $U_{\text{рез}}$ .

Выражение (8.8) остается правомерным и в случае движения потока в режиме ИВ. Дело в том, что по смыслу  $\delta$ -функции для любой зависимости  $y = f(x)$  справедливо

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} y\delta(x_0)dx &= \int_0^{x_0} y\delta(x_0)dx + \int_{(x_0)} y\delta(x_0)dx + \int_{x_0}^{\infty} y\delta(x_0)dx = \\ &= 0 + y|_{x=x_0} + 0 = y(x_0). \end{aligned} \quad (в)$$

Поэтому общее выражение (8.8) для режима ИВ превращается в полученное ранее (8.3).

### 8.3.3. Параметры кривых отклика и простейших моделей продольного перемешивания

Кривые отклика простейших моделей продольного перемешивания представлены соотношениями (8.2) и (8.5). Из них следует, что эти кривые (выходные функции)  $C = C(\tau)$  для моделей ИВ и ИП зависят (по-разному, конечно) от *двух* параметров:  $C_0$  и  $\tau_{\text{ИВ}}$  либо  $\tau_{\text{ср}}$ . Это означает, что для *различных* характеристик процесса (количество трассера, объем РЗ, следовательно и  $C_0$ ; соотношение объема РЗ и потока  $V$ , а значит  $\tau_{\text{ИВ}}$  либо  $\tau_{\text{ср}}$ ) будут получаться *разные* кривые отклика в натуральных координатах  $C - \tau$  (рис. 8.14, а). Такой разнотой в кривых отклика в пределах каждого из рассматриваемых режимов течения неудобно в аспекте технологического расчета. Поэтому переходят к *безразмерным* представлениям в форме связи симплексов  $C \equiv C/C_0$  и  $\theta \equiv \tau/\tau_{\text{ИВ}}$  либо (что шире распространено, так как выходит за пределы моделей ИВ и ИП)  $\theta \equiv \tau/\tau_{\text{ср}}$ . В таком представлении каждая из простейших моделей описывается едиными зависимостями. В случае ИВ это несколько модифицированная зависимость (8.2а):

$$C = 0 \text{ при } \theta < 1;$$

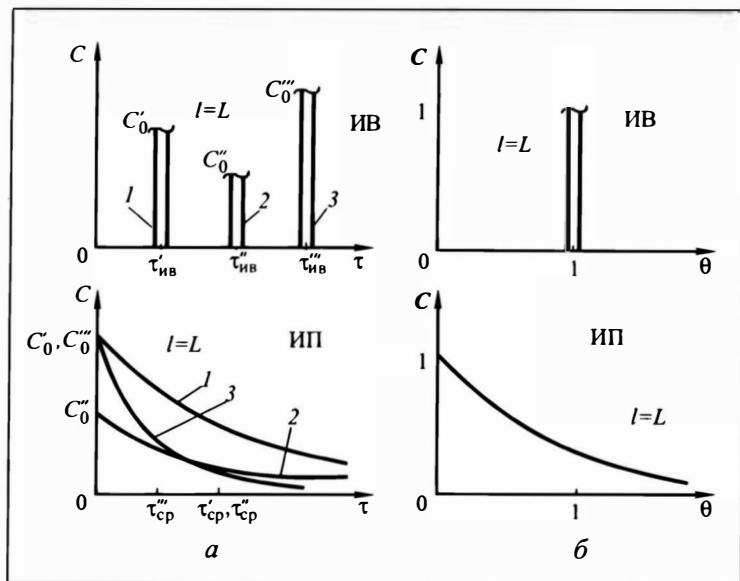


Рис. 8.14. Кривые отклика в случае простейших моделей — ИП, ИВ:

а — в натуральных координатах (1, 2, 3 — различные значения  $C_0$  и  $\tau_{\text{ИВ}}$ ,  $\tau_{\text{ср}}$ ), б — в безразмерных координатах

$$C = 1 \quad \text{при } \theta = 1 ; \quad (8.36)$$

$$C = 0 \quad \text{при } \theta > 1 .$$

В случае ИП такого рода зависимость является модификацией второй из формул (8.5):

$$C = e^{-\theta}. \quad (8.5a)$$

Таким образом, кривые отклика в *натуральных* координатах (эти кривые характеризуются конкретными значениями параметров) сводятся к *обобщенным* представлениям — их называют *C-кривыми*. Обобщенные зависимости (8.36) и (8.5a), показанные на рис. 8.14,б, *не содержат* параметров.

Итак: простейшие модели ИВ и ИП являются **беспараметрическими**. Будем именовать их **моделями нулевого уровня**. Отсутствие параметров, обусловленное простотой самих модельных представлений, приводит к наиболее простым расчетным соотношениям для определения  $U_{рез}$  (см. ниже). Однако простота этих моделей *сужает* область их возможного использования для описания структуры потоков в *реальных* ХТА.

## 8.4. СТРУКТУРА ПОТОКОВ В РЕАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

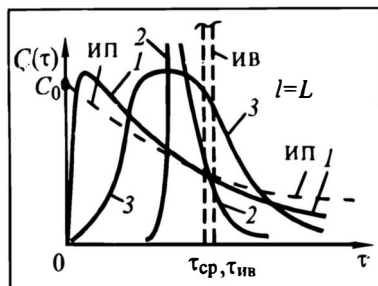
В относительно редких случаях поток в реальных аппаратах (в их РЗ) близок к ИВ или ИП. Тогда его поведение близко к рассмотренным ранее простейшим идеальным модельным системам, и расчет ведут по полученным выше соотношениям. Однако в большинстве реальных ХТС поток в РЗ аппарата *в той или иной мере перемешан*. Наглядное представление о структуре потока с **ограниченным** Пр.П можно, как и ранее, получить с помощью трассера.

Будем на входе потока в систему подавать импульсное (это удобнее) возмущение (сигнал), а на выходе экспериментально снимать кривую отклика (рис. 8.15). В зависимости от структуры потока в РЗ (т.е. от интенсивности в ней Пр.П) кривые отклика будут либо получаться ближе по форме к характерным для ИП (кривая 1) или для ИВ (кривая 2), либо существенно отличаться от той или другой (кривая 3). По форме кривых отклика можно качественно (далее увидим — и количественно) судить об интенсивности Пр.П потока в РЗ.

Возникает проблема качественного и количественного представления (описания) этих промежуточных случаев, когда Пр.П существует, но его интенсивность ограничена. Можно заранее предположить, что более сложным по форме кривым отклика отвечают и более сложные математические описания. Здесь не обойтись двумя параметрами кривых ( $C_0$  и  $\tau_{ИВ}$  либо  $\tau_{ср}$ ), потре-

Рис. 8.15. Кривые отклика:

ИВ и ИП — простейшие идеальные модели; 1—3 — для потоков с ограниченным Пр.П



буется большее их число. Соответственно и сами модели потребуют введения некоторых параметров.

Ниже рассмотрены два наиболее простых подхода к представлению таких “реальных” систем — это тоже мысленные модели, но уже **первого уровня**, они содержат по одному параметру. Эти модели призваны отразить ограниченное Пр.П в рабочих зонах ХТА.

Модели первого уровня из-за своей относительной сложности рассматриваются в учебнике качественно — с анализом подходов к их математическому описанию и наиболее важных результатов, а также путей использования для технологических расчетов. Более детально эти вопросы изложены в учебной и научной литературе\*.

#### 8.4.1. Ячеечная (каскадная, ступенчатая,...) модель потока с продольным перемешиванием

##### Сущность модели

Систему (аппарат, его РЗ) представляют (рис. 8.16) состоящей из ряда последовательных ячеек, ступеней (для простоты — одинакового объема), причем в каждой из них происходит полное перемешивание потока, но между ступенями поток движется только в заданном направлении.

Особо подчеркнем, что речь может идти об аппарате, *действительно содержащем* отдельные секции с интенсивным перемешиванием потока в каждой из них; однако аппарат, канал могут конструктивно и *не содержать* каких-либо ячеек, тогда речь идет о мысленном (модельном) секционировании, призванном отразить конечную интенсивность Пр.П в рабочей зоне.

В представленном на рис. 8.16 аппарате бесконечно интенсивное Пр.П характерно для отдельных ячеек (в каждой — ИП), но по всему аппарату (его РЗ) интенсивность Пр.П ограничена. В таком секционированном аппарате существует некоторое распределение элементов потока по времени пребывания, но здесь *большая* (нежели в системах с ИП) доля элемен-

\* См., например, [1—5].



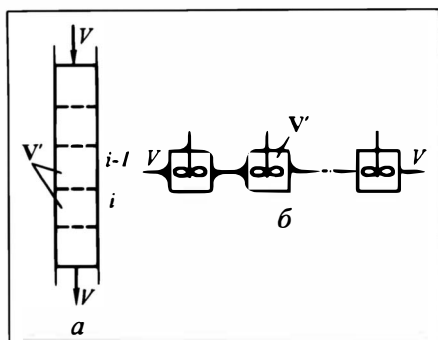


Рис.8.16. К ячейочной модели продольного перемешивания:

*a* — секционированный аппарат из ячеек ИП, *б* — каскад аппаратов — ячеек ИП

тов имеет время пребывания, приближающееся к характерному для потоков в режиме ИВ. Таким образом, секционирование РЗ на ячейки ИП приводит к определенному выравниванию времени пре-

бывания различных элементов потока в рабочей зоне аппарата в целом. Причину такого выравнивания можно уяснить из следующих соображений.

Пусть какой-то элемент потока *быстро проскочит* первую по ходу ячейку РЗ: при ИП в первой ячейке всегда имеется определенная доля таких элементов (пусть их 20%, т. е. доля 0,2). Разумеется, с той же вероятностью (0,2) этот элемент может быстро проскочить и вторую ячейку. Однако вероятность того, что и первую, и вторую ячейки быстро проскочит *один и тот же* элемент потока, уже значительно меньше — как вероятность *сложного* события, составленного из двух независимых простых (она равна произведению вероятностей простых событий; в рассматриваемом примере это  $0,2 \cdot 0,2 = 0,04$ , т. е. только 4%). А вероятность того, что именно этот элемент потока малое время задержится еще и в третьей, тем более в последующих ячейках, — крайне низка (для аппарата из трех ячеек — 0,008, т. е. 0,8%). Скорее, элемент, быстро прошедший через первую (тем более и через вторую) ячейку, дольше задержится в последующих; это означает, что время его пребывания в РЗ всего аппарата будет ближе к среднему ( $\tau_{\text{ср}}$ ), нежели в "безъячеечной" рабочей зоне, т. е. с ИП по всему аппарату. Аналогичные рассуждения применимы к элементу, *долго задержавшемуся* в первой (в первых) ячейке: вероятнее всего, он быстрее пройдет последующие ячейки, так что время его пребывания в РЗ также приблизится к  $\tau_{\text{ср}}$ . А выравнивание (неполное, конечно) времени пребывания элементов потока в РЗ отвечает постепенному переходу режима движения потока от ИП к ИВ.

Трактовка ограниченного продольного перемешивания в аспекте направленного движения потока через каскад ячеек ИП носит название *ячеечной модели* Пр.П (сокращенно ЯМ).

Согласно принятым представлениям, интенсивность Пр.П в реальном аппарате характеризуется числом *расчетных* ячеек *n*

(хотя в его РЗ четко выделенных ячеек может и не быть или же их число, если они есть, может не совпадать с  $n$ ). Если  $n = 1$ , то мы, очевидно, имеем дело с потоком в режиме ИП. При увеличении числа  $n$  режим движения потока начинает все более отличаться от ИП, в РЗ уменьшается интенсивность Пр.П. При  $n \rightarrow \infty$  (реально — можно считать, что при достаточно больших  $n$ , например  $n \geq 50$ ) поток движется в режиме ИВ. В общем (промежуточном) случае число расчетных ячеек  $n$ , отражающее интенсивность Пр.П, есть **параметр ячейечной модели**.

Число расчетных ячеек  $n$  определяют с помощью специально поставленных опытов (так называемое **гидравлическое моделирование аппарата**). Методы экспериментального определения  $n$  применительно к конкретному аппарату и потоку в нем рассматриваются в разд. 8.6.3 и 8.6.4.

При изучении структуры потоков на основе ячейечной модели возможно (если отвлечься от наглядности) оперировать и дробным числом ячеек: например,  $n = 2,7$  будет означать, что интенсивность Пр.П в РЗ выше, чем в аппарате из трех ячеек ИП, но ниже, чем в аппарате из двух таких ячеек.

Итак, согласно ячейечной модели:

при  $n \rightarrow \infty$  — поток движется в режиме ИВ;

при  $n = 1$  — поток движется в режиме ИП;

при  $1 < n < \infty$  — интенсивность Пр.П потока ограничена, причем с увеличением  $n$  режим потока отдалается от ИП и приближается к ИВ.

Проиллюстрируем особенности и эффекты ячейечной модели применительно к теплообмену (в свете примера и схемы, рассмотренных в разд. 8.2 и на рис. 8.6). При ИВ температурные кривые для прямотока теплоносителей изображались жирными линиями  $T$  и  $t$ , а при ИП (в условиях сохранения тех же температурных напоров — входного  $\Delta t_1$  и выходного  $\Delta t_2$ ) — штрихпунктирными. Пусть теплообменник теперь разделен на три равные секции (*I*, *II* и *III*) с поверхностями  $F/3$  каждая, причем соответственно ЯМ в каждой секции (ячейке) потоки теплоносителей движутся в режиме ИП. Тогда мы получим (рис. 8.17) выравненные температуры в пределах *отдельных секций* — со скачкообразным изменением  $T$  и  $t$  (разумеется, и  $\Delta t_i$ , где  $i$  — номер секции) *от секции к секции* — пунктирные линии. При этом лишь в *III* секции  $\Delta t_{III} = \Delta t_2$ , в двух других  $\Delta t_I, \Delta t_{II} > \Delta t_2$ .

Очевидно, что и средняя (для всего теплообменника) движущая сила  $\Delta t_{cp}$  будет выше  $\Delta t_2$  (напомним, что  $\Delta t_{cp} = \Delta t_2$  отвечает ИП по всему аппарату), но останется ниже, чем при ИВ. С возрастанием числа ячеек движущая сила  $\Delta t_{cp}$  будет приближаться к величине  $\Delta t_{ln}$ , характерной для ИВ.

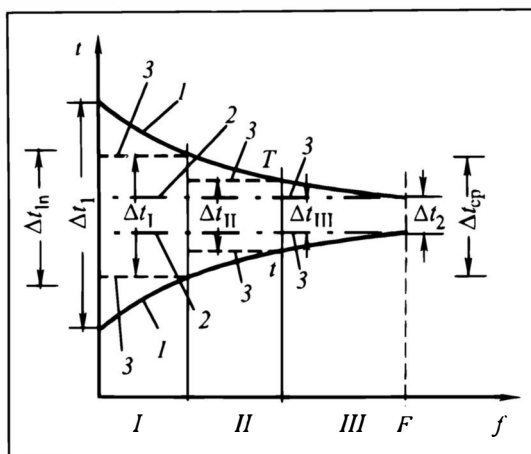


Рис. 8.17. Профили температур в трехсекционном теплообменнике при ИП в каждой секции:

1 — ИВ, 2 — ИП, 3 — ЯМ; I, II, III — секции (ячейки)

### Расчетные соотношения.

#### Определение $U_{рез}$

Для ячеечной модели, как и для модели ИП, вполне применимы понятия о функциях распределения элементов потока по времени пребывания  $\kappa$  и  $\varphi$ . Однако если для ИП  $\kappa = \kappa(\tau, \tau_{ср})$ , то для ячеечной модели

$$\kappa = \kappa(\tau, \tau_{ср}, n). \quad (8.9)$$

При этом  $\tau_{ср}$  определяется здесь (как и для любых систем) по формуле (8.4). Конкретные выражения для  $\kappa$  (они различны для разных значений параметров модели  $n$ ) приводятся в литературе\*. Получаются они (как и для одной ячейки с ИП потока) из материальных балансов по трассе для произвольной ячейки  $i$  (см. рис. 8.16, а), где мгновенная концентрация трассера равна  $C_i$ . Разница с выводом формулы (8.5) состоит в следующем:

— в ячейку  $i$  входит поток, содержащий некоторую концентрацию трассера  $C_{i-1}$ , тогда как в единичный аппарат (как и в первую ячейку секционированного аппарата) входит поток с  $C = 0$ ;

— объем вещества в одной ячейке теперь равен  $V'$  (в аппарате в целом, как и ранее в одиночном аппарате, —  $V$ ), причем в случае одинаковых ячеек  $V' = V/n$ .

\* См., например, [2, 4, 5] и др.

Рис. 8.18. Плотность распределения элементов потока по времени пребывания в РЗ (ячеечная модель); цифры у кривых – число ячеек  $n$

Тогда для произвольной  $i$ -й ячейки, через которую движется общий поток  $V$ , материальный баланс по трассе для интервала времени  $d\tau$  запишется так:

$$+ C_{i-1}Vd\tau - C_iVd\tau = VdC_i, \quad (a)$$

где при  $i = 1$  (т.е. только для первой ячейки) первое слагаемое равно нулю.

Решение системы таких уравнений для всех  $n$  ячеек приводит (при известном  $\tau_{cp}$ ) к зависимостям  $C = C(i, \tau)$ , позволяющим определить концентрацию в  $i$ -й ячейке в произвольный момент времени  $\tau$ . Рассматривая такую зависимость применительно к  $n$ -й (последней) ячейке, получим искомую выходную функцию  $C_n(\tau)$ . В дальнейшем от нее можно перейти к конкретному (для заданного  $n$ ) выражению типа (8.9).

Плотность распределения элементов потока по  $\tau$  получается, как обычно, дифференцированием:  $\varphi(\tau) = d(1 - \kappa)/d\tau$ ; однако в отличие от выражения (8.7), где для ИП  $\varphi = \varphi(\tau, \tau_{cp})$ , в случае ячейечной модели, естественно, получаются формулы вида

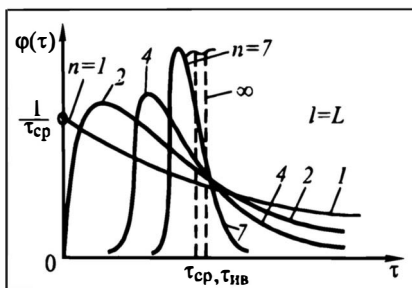
$$\varphi = \varphi(\tau, \tau_{cp}, n). \quad (8.10)$$

Заметим, что такие формулы возможно получить и непосредственно из функций отклика  $C_n(\tau)$ . Связь  $\kappa(\tau)$  и  $\varphi(\tau)$  с концентрационными зависимостями  $C(\tau)$  устанавливается в разд. 8.6.1 и 8.6.4.

Конкретный вид выражений для  $\varphi$  (они тоже приводятся в литературе по структуре потоков) определяется значением  $n$ .

Кривые  $\varphi(\tau)$  для различных значений  $n$  демонстрируются на рис. 8.18. Каждая из кривых  $\varphi$  является нормированной, ее свойства математически и физически полностью соответствуют выражениям (8.6).

Результирующий эффект процесса  $U_{рез}$ , в связи с изложенным, определяется уже известным выражением (8.8), причем кинетическая характеристика рассматриваемого конкретного процесса  $U(\tau)$ , как обычно, должна быть установлена заранее. Но в отличие от потока с ИП, рассмотренного в разделе 8.3.2, в случае ячейечной модели в качестве плотности распределения  $\varphi(\tau)$  в интеграл (8.8) следует, разумеется, подставить выражение  $\varphi$  не по формуле (8.7), а по формуле (8.10) — соответственно характерному для данного потока числу расчетных ячеек  $n$ .



К достоинствам ЯМ относится ее наглядность, а также учет секционирования, часто реально присутствующего в технологических аппаратах. Основной недостаток — отказ от рассмотрения реально существующего обратного перемешивания (возвратных потоков) между секциями.

#### 8.4.2. Диффузионная модель потока с продольным перемешиванием

##### *Сущность модели*

Ограниченное продольное перемешивание может быть представлено по аналогии с явлениями молекулярной теплопроводности или диффузии. Известно (см. разд. 1.3.2), что количество теплоты, перенесенной в единицу времени теплопроводностью нормально к площадке  $f$ , составляет  $-\lambda \frac{\partial t}{\partial n} f$ , а поток вещества за счет молекулярной диффузии равен  $-D_d \frac{\partial C}{\partial n} f$  (здесь  $\lambda$  и  $D_d$  — коэффициенты теплопроводности и диффузии,  $\partial t / \partial n$  и  $\partial C / \partial n$  — градиенты температур и концентраций). В потоке с Пр.П речь идет об эффективной теплопроводности или диффузии (их коэффициенты  $\lambda_z$  и  $E$  соответственно), интенсивность которых может значительно превышать молекулярную ( $\lambda_z \gg \lambda$ ,  $E \gg D_d$ ).

Представление ограниченного продольного перемешивания в терминах эффективной теплопроводности или диффузии (по аналогии с молекулярной теплопроводностью, диффузией) носит название диффузионной модели Пр.П (сокращенно ДМ).

Для уяснения сущности диффузионной модели удобно рассмотреть (рис.8.19) стационарное течение жидкости или газа (расход  $V$ ) в канале с равномерной по сечению РЗ эпюрой осредненных во времени скоростей  $w$  (жирные стрелки на эпюре). Это течение осложнено обратным перемешиванием (мгновенные локальные — пульсационные — скорости, показанные на эпюре тонкими стрелками), повышающим или понижающим в некий момент времени истинные (абсолютные) локальные скорости элементов потока; в следующий момент картина истинных локальных скоростей в общем случае будет иной. Интенсивность обратного перемешивания (в данном случае — продольного перемешивания в целом) будем характеризовать коэффициентом эффективной диффузии (продольного перемешивания)  $E$ , так что поток вещества, по анало-

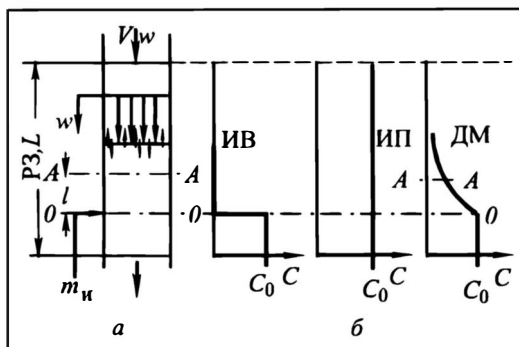


Рис. 8.19. К диффузионной модели продольного перемешивания:

*a* — расчетная схема (потоки, сечения, эпюра скоростей), *б* — профили концентраций трассера при его непрерывной подаче в сечение  $0-0$  в случае движения потока в режимах ИВ, ИП и при ограниченном продольном перемешивании (ДМ)

гии с молекулярной диффузией, составляет

$$-E \frac{\partial C}{\partial n} f.$$

Для установления параметра диффузионной модели представим себе, что в сечение  $0-0$  (рис. 8.19) непрерывно подается трассер в определенном количестве  $m_n$  в единицу времени. Полагаем, что в поперечном направлении (в сечении) поток идеально перемешан.

Если бы поток двигался в режиме ИВ, то ниже сечения подачи  $0-0$  установилась бы постоянная концентрация трассера  $C_0 = m_n/V$ , а выше этого сечения трассер бы отсутствовал:  $C = 0$ . Если бы поток двигался в режиме ИП, то во всем объеме рабочей зоны установилась бы непрерывно поддерживалась бы постоянная концентрация  $C_0 = m_n/V$ . Однако в рассматриваемом случае интенсивность Пр.П ограничена, так что ситуация является промежуточной между рассмотренными ранее случаями: ниже сечения  $0-0$  при непрерывной подаче потока  $V$  и трассера  $m_n$  поддерживается постоянная концентрация  $C_0$ , а выше сечения  $0-0$  по мере удаления от этого сечения *против* потока  $V$  — концентрация  $C$  не равна нулю (вследствие Пр.П), она постепенно понижается. В РЗ устанавливается стационарный продольный профиль концентраций трассера, причем локальные значения  $C$  выше сечения  $0-0$ , помимо  $C_0$  (т. е.  $m_n$  и  $V$ ), зависят от значения  $E$ .

В произвольном сечении  $A-A$  на некотором расстоянии  $l$  от сечения  $0-0$  устанавливается определенная концентрация трассера  $C$ . Она поддерживается постоянной, поскольку нисходящий конвективный (продольный!) поток трассера  $CV$  пол-

ностью уравнивается восходящим его потоком за счет обратного перемешивания  $-E(\partial C/\partial l)f$ . Равенство этих потоков в отсутствие Накопления трассера в сечении  $A - A$  (с учетом уравнения расхода  $V = wf$  — после сокращения на  $f$ )

$$wC = -E \frac{\partial C}{\partial l} \quad (8.11)$$

позволяет определить параметр модели методом масштабных преобразований. Реализуем метод в упрощенном варианте, сопоставляя левую и правую части равенства (8.11) в интегральной форме (и без учета знака “минус”):

$$wC \sim E \frac{C}{l} \quad (6)$$

Сократив на  $C$  и собрав вместе все оставшиеся входящие в (6) величины, приходим к безразмерному комплексу — **параметру диффузионной модели**, называемому **критерием Пекле для продольного перемешивания**, или **эффективным критерием Пекле**  $Pe_3$ . Для всех подобных систем (течений, потоков) в сходственных точках (сечениях, в аппаратах в целом)

$$Pe_3 \equiv \frac{wl}{E} = \text{idem.} \quad (8.12)$$

Этот критерий аналогичен тепловому критерию Пекле  $Pe_T \equiv wl/a$  (здесь  $a$  — коэффициент температуропроводности) и диффузионному  $Pe_d \equiv wl/D_d$ . Физический смысл критерия  $Pe_3$  для продольного перемешивания определяется исходным уравнением (8.11): это соотношение потоков вещества [или пропускных способностей соответствующих стадий  $wf$  и  $(E/l)f$ ] за счет конвективного переноса, характеризуемого скоростью  $w = V/f$ , и за счет обратного (продольного) перемешивания.

При высоких  $Pe_3$  (значит, при малой интенсивности Пр.П, т. е. низкой пропускной способности обратного переноса; в пределе — при  $E = 0$ ), теоретически при  $Pe \rightarrow \infty$ , продольным перемешиванием можно пренебречь: оно подавлено продольным конвективным переносом вещества, движущегося со скоростью  $w$ .

При малых  $Pe_3$  (значит, при высокой интенсивности Пр.П, т. е. существенно малой пропускной способности конвективного переноса; в пределе — при  $E \rightarrow \infty$ ), теоретически при  $Pe_3 = 0$ , поток движется в режиме ИП; вынужденная конвекция подавлена продольным перемешиванием.

При промежуточных значениях  $0 < Pe_3 < \infty$  интенсивность Пр.П ограничена, причем с уменьшением  $Pe_3$  она возрастает.

Число  $Pe_3$  определяют опытным путем (гидравлическое моделирование аппарата). Методы экспериментального определе-

ния  $Re_3$  применительно к конкретному аппарату и потоку в нем рассматриваются в разд. 8.6.3 и 8.6.4.

Иллюстрацией диффузионной модели применительно к теплотеносу в случае прямотока теплоносителей могут служить температурные кривые на рис. 8.6 (пунктирные линии). Чем ниже интенсивность Пр.П (т.е. выше значения  $Re_3$ ), тем ближе пунктирные кривые к сплошным жирным линиям, отвечающим движению теплоносителей в режиме ИВ. Соответственно: средняя движущая сила  $\Delta t_{cp}$  при некотором конечном значении  $Re_3$  (ограниченное Пр.П) превышает величину  $\Delta t_2$  (температурный напор при ИП), но остается менее  $\Delta t_{ln}$  (средний температурный напор при ИВ). С возрастанием числа  $Re_3$  наблюдается постепенное приближение  $\Delta t_{cp}$  к величине  $\Delta t_{ln}$ .

### *Расчетные соотношения.*

#### *Определение $U_{pe3}$*

Значения функций распределения  $\kappa$  и  $\phi$  для диффузионной модели могут быть получены решением дифференциальных уравнений переноса вещества с конвективным членом (эти уравнения аналогичны изучаемым в курсе теплопередачи и массопередачи уравнениям теплопроводности и диффузии). В случае однонаправленного переноса вещества, как это следует из (1.22) в отсутствие Источников и Стоков,

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + w \frac{\partial C}{\partial l} = E \frac{\partial^2 C}{\partial l^2} \quad (8.13)$$

Путем сопоставления (масштабные преобразования) конвективного (второе слагаемое в левой части) и диффузионного (правая часть, выражает Пр.П) членов этого равенства также получается параметр ДМ — критерий  $Re_3$ .

Формулируя граничные условия, соответствующие реальному движению потока в ХТА (см., например, разд. 8.7), получают различные конкретные решения  $C = C(\tau, l)_{Pe_3}$ . Положив в этих решениях  $l = L$ , приходят к искомым выходным функциям  $C_{Pe_3}(\tau)$ . В дальнейшем от них можно перейти к выражениям вида

$$\kappa = \kappa(\tau, \tau_{cp}, Re_3), \quad (8.14)$$

а после дифференцирования по  $\tau$  — к зависимостям

$$\phi = \phi(\tau, \tau_{cp}, Re_3). \quad (8.15)$$

Заметим, что зависимости (8.15) возможно получить и непосредственно из функций отклика  $C_{Pe_3}(\tau)$ . Связь  $\kappa(\tau)$  и  $\phi(\tau)$  с концентрационными зависимостями  $C(\tau)$  устанавливается в разд. 8.6.1 и 8.6.4.



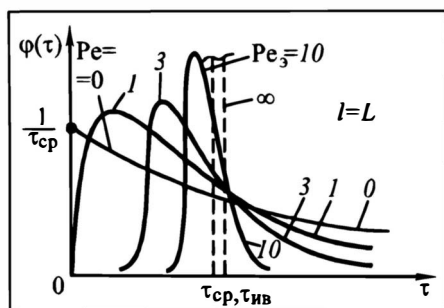


Рис. 8.20. Плотность распределения элементов потока по времени пребывания в РЗ (диффузионная модель; цифры у кривых – значения  $Re_3$ )

Для каждого значения  $Re_3$  получается своя зависимость  $\varphi(\tau)$ . Разумеется, при  $Re_3 = 0$  кривая  $\varphi(\tau)$  совпадает с характерной для ИП, а при  $Re_3 \rightarrow \infty$  — с характерной для ИВ.

Типичные кривые  $\varphi(\tau)$  для *закрытых* (см. разд. 8.5.1) систем с Пр.П, приведенные на рис. 8.20, как и ранее, — нормированные функции распределения со свойствами, математически и физически отвечающими выражениям (8.6).

Результирующий эффект процесса  $U_{pe3}$  определяется все тем же выражением (8.8), но в качестве плотности распределения элементов потока  $\varphi(\tau)$  под интегралом должно фигурировать выражение  $\varphi$  по (8.15) — соответственно характерному для данного потока значению  $Re_3$ .

*Достоинство* диффузионной модели — в ее наглядности (феноменологически здесь общая база с молекулярным переносом), а также в учете обратных потоков, как правило, реально существующих в РЗ технологических аппаратов. Основной *недостаток* применительно к некоторым типам аппаратов — игнорирование секционирования, т.е. нарушения (затруднения) обратного перемешивания в отдельных точках (сечениях) РЗ, обусловленного конструкционными особенностями аппаратуры.

## 8.5. ОБЩАЯ ОЦЕНКА МОДЕЛЕЙ СТРУКТУРЫ ПОТОКОВ

### 8.5.1. Сопоставление моделей продольного перемешивания

*С конструктивной* точки зрения при выборе моделей Пр.П для описания структуры потоков целесообразно руководствоваться следующими общими правилами.

К модели ИВ близки потоки в аппаратах с большим отношением длины  $L$  к определяющему поперечному линейному размеру  $D$  ( $L/D \gg 1$ ), например: аппараты с большим количеством параллельных длинных и узких труб, некоторые аппараты с насадкой, в особенности с мелкой (неподвижный слой).

К модели ИП близки односекционные аппараты с небольшим отношением  $L/D$  и интенсивным перемешиванием потока, например: теплообменники с кипящей жидкостью (в част-

ности, выпарные аппараты); сосуды с мешалкой; односекционные аппараты с псевдооживленным слоем (если речь идет о перемешивании твердого материала); как правило, и барботажные аппараты (по жидкости).

**Ячеечной модели** неплохо следует движение потока в аппаратах с достаточно выраженным секционированием при интенсивном перемешивании в каждой секции; к таким относятся (применительно к жидкой фазе) каскад смесительных аппаратов (см. рис. 8.16, б), тарельчатые (ректификационные, абсорбционные и др.) колонны (рис. 8.16, а) и т. п.

**Диффузионной модели** могут близко следовать потоки в аппаратах, не имеющих четкого секционирования и характеризующихся ограниченным соотношением  $L/D$ ; к таковым относятся насадочные аппараты (с достаточно крупными элементами насадки), барботажные (по газовой фазе; по жидкой — лишь при весьма низких расходах газа), распылительные и некоторые другие аппараты; сюда же нередко можно отнести структуру потока в одной ступени ХТА при не очень интенсивном перемешивании (жидкость на тарелке и т. п.).

Для описания структуры потоков в некоторых аппаратах в равной мере подходят ячейная и диффузионная модели (скажем, ХТА с нечетким секционированием). Вместе с тем встречаются аппараты, для которых все представленные выше модели Пр.П применимы весьма приблизительно (см. разд. 8.5.2).

Кривые, описывающие ячейную или диффузионную модель, наряду с  $\tau_{ср}$  и  $C_0$  содержат еще один параметр —  $n$  или  $Re_3$ . Модельные описания в обобщенной форме характеризуются одним параметром ( $n$  или  $Re_3$ ). Таким образом, ЯМ и ДМ — **однопараметрические модели**, иначе — модели **первого уровня**.

Поскольку обе модели — ячейная и диффузионная — призваны охарактеризовать ограниченную интенсивность Пр.П, то в *расчетном аспекте* представляет интерес переход от одной модели к другой, т.е. связь параметров моделей  $n$  и  $Re_3$ . При этом следует учесть, что указанные модели подходят к описанию Пр.П потока с *разных* физических позиций (здесь можно говорить об известной формальности подходов и математических описаний); поэтому полной идентичности при пересчете ( $n \rightarrow Re_3$  или  $Re_3 \rightarrow n$ ) ожидать нельзя. Необходимо также иметь в виду, что согласно ячейной модели (см. рис. 8.16) на границах ХТА (на входе в него, на выходе из него) полностью отсутствует Пр.П — поток четко направлен (на рис. 8.16, б — слева направо). Поэтому ячейную модель правомерно приблизительно сравнивать лишь с **закрытой** диффузионной моделью, когда на обеих границах РЗ (см. рис. 8.19) отсутствует Пр.П (оно есть лишь внутри РЗ). **Открытые** или **полуоткрытые**

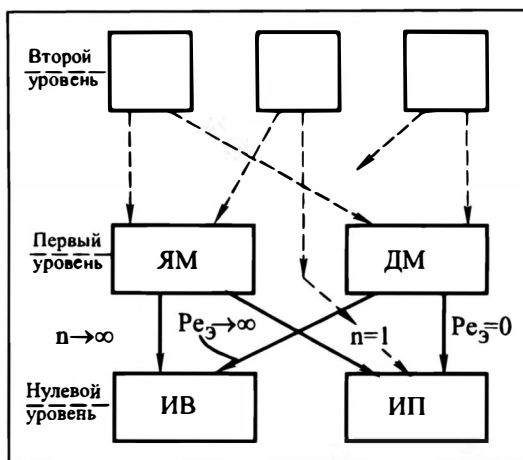


Рис. 8.21. Связи моделей различного уровня.  
Стрелки — пути (надписи — условия) предельных переходов

(с наличием Пр.П на одной из границ) ХТА сопоставлять с ячеечной моделью — неправомерно.

Совершенно очевидно, что в предельных состояниях (простейшие модели) должно соблюдаться *однозначное соответствие* параметров ячеечной и диффузионной моделей:

поток в режиме ИВ:  $n \rightarrow \infty$ ,  $Pe_3 \rightarrow \infty$ ;

поток в режиме ИП:  $n = 1$ ,  $Pe_3 = 0$ . (8.16)

Для режимов с ограниченной интенсивностью Пр.П рекомендуется следующая приближенная связь параметров  $n$  и  $Pe_3$ , неплохо отражающая переход от одной модели к другой и не противоречащая предельным их соотношениям по (8.16):

$$Pe_3 \approx 2(n - 1); \quad n \approx \frac{Pe_3}{2} + 1. \quad (8.17)$$

Из (8.17) следует, что модели первого уровня в предельных ситуациях переходят в модели нулевого уровня. Наглядно такие переходы иллюстрируются рис. 8.21: стрелки и сплошные линии, снабженные надписями, указывают условия и пути предельных переходов. Связи рассмотренных моделей с моделями более высоких уровней (штриховые линии) будут затронуты в разд. 8.5.2.

### 8.5.2. Общая оценка моделей продольного перемешивания

Потоки в реальных ХТА весьма редко следуют основным идеальным моделям ИВ и ИП. В ряде случаев поведение этих потоков удастся неплохо описать с помощью ячеечной и диф-

Рис. 8.22. Некоторые модели продольного перемешивания:

*a* — с застойной зоной, *б* — с коротким байпасом, *в* — с рециркуляцией между ячейками ИП

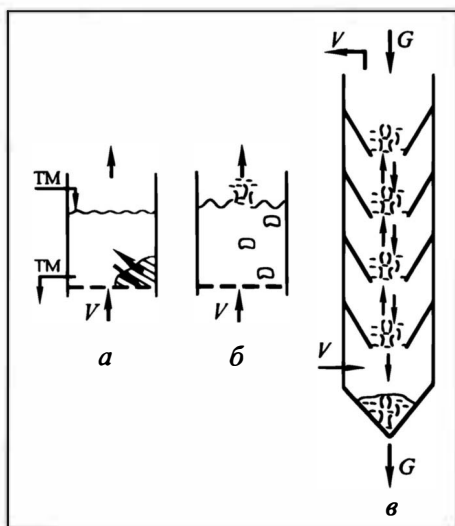
фузионной моделей. Однако на практике встречаются случаи, когда Пр.П потока не укладывается и в эти модельные представления. Тогда приходится прибегать к более сложным модельным описаниям, содержащим большее число параметров (это их *недостаток*), но зато лучше отражающим реальную структуру потоков в ХТА (это их *достоинство*).

Рассмотрим качественно (рис. 8.22) некоторые из таких моделей *более высокого уровня* на примере аппаратов с псевдоожиженным слоем (ПС).

1. Поток с застойной зоной зернистого материала может возникнуть в ПС при скоростях ожижающего агента, близких к скорости начала псевдоожижения  $w_0$ . Из-за неравномерного газораспределения в слое возникает зона (на рис. 8.22, *a* — заштрихована), плохо доступная газовому потоку. Скорость газа в ней ниже  $w_0$ , так что частицы здесь неподвижны (или малоподвижны); обмен частицами между застойной зоной и остальным слоем затруднен. В аспекте структуры потока твердого материала (ТМ), непрерывно вводимого в аппарат и выводимого из него, в рассматриваемой ситуации на ИП псевдоожиженного ТМ в основной области слоя наложено существование застойной зоны со слабым перемешиванием твердых частиц. Такая модель будет характеризоваться *двумя* параметрами: долей объема слоя, занятого застойной зоной, и скоростью обмена твердыми частицами между этой зоной и основным потоком ТМ.

Для потоков с застойными зонами обычно характерны длинные хвостовые участки выходной кривой. Их появление вызвано затрудненным обменом частицами с застойной зоной: при использовании меченых частиц (трассера) они очень медленно вымываются потоком немеченых частиц из этой зоны.

При устремлении объема застойной зоны к нулю или интенсивности обмена ее частицами с ядром слоя — к бесконеч-



ности двухпараметрическая модель с застойной зоной переходит в модель ИП.

2. Поток с коротким байпасом может возникнуть в неоднородном ПС при высоких скоростях оживающего агента, когда значительная доля газа проходит (рис. 8.22, б) через ПС с высокой скоростью в виде пузырей, причем в простейшем случае газ в пузырях совсем не контактирует с твердыми псевдооживленными частицами в слое. Параметром модели здесь будет доля газа, проходящего через РЗ (т. е. через ПС) без контакта с твердой фазой (например, с катализатором). В более сложных случаях (они ближе к реальной ситуации) приходится вводить еще один параметр, учитывая также интенсивность обмена газом между пузырями и основным потоком оживающего агента в ПС.

Для потока с коротким байпасом характерно быстрое появление заметной концентрации трассера на выходной кривой; в дальнейшем выходная кривая может иметь различную форму — в зависимости от характера основного потока в РЗ.

При устремлении доли байпасирующего потока к нулю или интенсивности его обмена веществом с основным газовым потоком — к бесконечности рассматриваемая двухпараметрическая модель переходит в модель более низкого уровня. Она в случае псевдооживленного слоя может перейти в модель ИП, если газ идеально перемешан (так бывает, когда ТМ обладает сильными адсорбционными свойствами); возможен переход и к модели ИВ (когда ТМ такими свойствами не обладает). В промежуточных ситуациях возможен переход и к ДМ.

3. Поток с рециркуляцией твердого дисперсного материала характерен для многоконусного аппарата с ПС (рис. 8.22, в). В каждой конической секции здесь твердый материал идеально перемешивается, но между секциями он в целом движется лишь в одном направлении (сверху вниз); кроме того, реально существует обмен между секциями. Таким образом, в аппарат сверху подается и снизу из него отводится поток  $G$ , между секциями вверх идет поток твердого материала  $\Delta G$ , а вниз  $G + \Delta G$ . Здесь дополнительным (к числу секций  $n$ ) является параметр  $\Delta G/G$ . Очевидно, что при  $\Delta G/G \rightarrow 0$  рециркуляционная модель переходит в ячеичную.

Из приведенных примеров видно, что модели более высокого уровня в предельных условиях не всегда переходят в модели следующего (более низкого) уровня. В ряде случаев при предельных переходах происходит перескакивание через уровень (например, от модели второго уровня к модели нулевого).

Разумеется, рассмотренные модели могут отражать структуру потоков не только в аппаратах с псевдооживленными системами. Потоки с застойными зонами (и не обязательно дискрет-

ной фазы, но также и сплошной среды) нередко встречаются в аппаратах с неподвижным слоем и в некоторых других, когда в какой-то зоне аппарата затруднено движение потока, например из-за повышенного гидравлического сопротивления. Потоки с коротким байпасом нередко в барботажных аппаратах при несовершенном газораспределении, при существовании зон или участков с пониженным гидравлическим сопротивлением. Потоки с различного рода рециркуляцией (нередко — с весьма сложной конфигурацией циркуляционных зон) встречаются достаточно часто (пример — роторно-дисковые экстракционные колонны, сушильные аппараты с организованной циркуляцией по зонам и т. п.).

Следует особо упомянуть о двухпараметрической диффузионной модели. В отличие от однопараметрической (она использует только один параметр —  $Pe_z$ , базирующийся на  $E$ ), двухпараметрическая ДМ учитывает перенос вещества не только в продольном, но и в поперечном направлении. Поэтому здесь наряду с коэффициентом продольного перемешивания  $E_l$  фигурирует еще и коэффициент  $E_R$ , характеризующий интенсивность поперечного (радиального) перемешивания. Появление двухпараметрической ДМ обусловлено тем, что в некоторых аппаратах распределение элементов потока по времени пребывания существенно зависит от интенсивности радиального переноса. И поэтому эффективность процесса в таких ХТА в значительной мере определяется поперечным переносом (теплоты, вещества и т.п.). Он может быть затруднен, и тогда диффузионные (при переносе теплоты — термические) сопротивления радиальному переносу игнорировать нельзя; он может быть достаточно интенсивен, и тогда надо учитывать выравнивание интенсивных свойств потока (температур, концентраций и др.) в поперечном сечении. Эти эффекты и учитываются коэффициентом  $E_R$  (в случае теплопереноса — коэффициентом эффективной радиальной теплопроводности  $\lambda_R$ ). Примерами здесь могут служить химические процессы с высокими тепловыми эффектами в трубках с неподвижным слоем катализатора (отвод теплоты через слой и стенки трубок) или химические превращения в ламинарно движущихся тонких жидкостных пленках (заметное выравнивание концентраций реагентов по толщине пленки).

Для описания реальных потоков в ХТА приходится применять и более сложные — комбинированные — модели.

При выборе, создании и использовании модели необходимо иметь в виду, что путем увеличения числа ее параметров почти всегда возможно математически описать имеющиеся экспериментальные данные — даже вне зависимости от физической обоснованности модели (именно так нередко действуют экспериментаторы, скажем, при составлении регрессионных моделей). Увлечение многопараметрическими моделями не только усложняет математическое описание и

расчеты, но и может сопровождаться потерей физического смысла явления. Разумеется, такие модели — не прогнозы, их использование за пределами условий проведенного эксперимента далеко не всегда правомерно, здесь вполне вероятны ошибочные выводы и суждения. Принято считать, что в общем случае (специфические ситуации здесь не рассматриваются) число параметров модели не должно превышать четырех.

## 8.6. ОБ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМ ИЗУЧЕНИИ ПРОДОЛЬНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ

### 8.6.1. Общие положения

Экспериментальное изучение структуры потоков (прежде всего построение кривых отклика) позволяет:

— *качественно* судить о структуре потока, т.е. о близости его в рабочей зоне к ИВ, к ИП или к какому-либо иному режиму движения;

— *выбрать модель*, наилучшим образом отвечающую реальной структуре потока в РЗ аппарата;

— *количественно* оценить (иногда — найти достаточно точно) значения параметров моделей (например,  $n$  или  $Re_3$ ), необходимые для последующих расчетов ХТП, в частности — для определения  $\kappa(\tau)$ ,  $\phi(\tau)$ , а затем и  $U_{pe3}$ ;

— *количественно* оценить некоторые другие характеристики потока в РЗ (см. разд. 8.6.2).

Эксперимент для установления структуры потока обычно проводят в “холодном” модельном аппарате, т.е. в *отсутствие* тепло- или массообменного процесса либо химической реакции, являющихся действительной целью промышленного ХТП. При этом варьируют масштабы аппаратуры — вплоть до габаритов промышленных образцов. Такое структурно-гидравлическое моделирование позволяет выбрать подходящую модель Пр.П, найти значения ее параметров (или их зависимость от габаритов аппарата) и определить функцию  $\phi(\tau)$ , с тем чтобы в дальнейшем можно было рассчитать реальный ХТП с использованием соотношений типа (8.8). Разумеется, такой подход к моделированию на “холодных аппаратах” правомерен, если есть уверенность, что сам “горячий” процесс (тепломассообмен, реакция) не внесет существенных изменений в структуру потока.

Основной метод изучения структуры потоков — подача трассера (индикатора) на вход РЗ и фиксация во времени выходных кривых. Наиболее часто используют импульсный (практически мгновенный) ввод трассера; далее анализируют форму кривой отклика. Напомним: при вводе трассера в количестве  $m_n$  и объеме рабочей зоны  $V$  базовую концентрацию  $C_0$  обычно рассчитывают по формуле

$$C_0 = m_n / V. \quad (a)$$

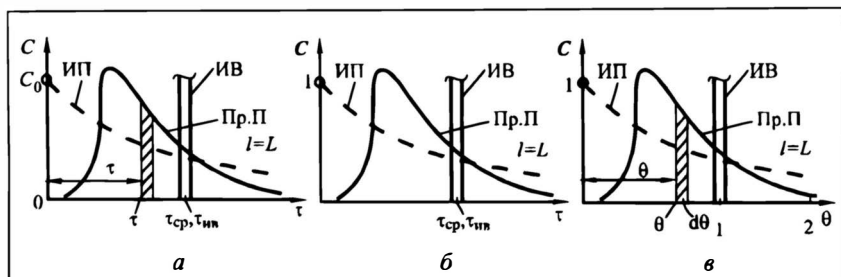


Рис. 8.23. Кривые отклика в натуральных (а), полубезразмерных (б) и безразмерных (в) координатах

Кривые отклика (рис. 8.23) представляют:

- в **натуральных** (размерных) координатах “концентрация  $C$  — время  $\tau$ ” (достоинство — наглядность);
- в **полубезразмерных** координатах “приведенная концентрация  $C \equiv C/C_0$  — время  $\tau$ ” (здесь начальной точке  $\tau = 0$  отвечает  $C = 1$ ; в ряде случаев такое представление удобнее для анализа и расчетов);
- в **безразмерных** координатах “приведенная концентрация  $C$  — приведенное время  $\theta \equiv \tau/\tau_{ср}$ ” (здесь абсциссе  $\tau_{ср}$  отвечает  $\theta = 1$ ; расчетные выражения в этом случае обычно получаются проще — сравним, например, формулы 8.5 и 8.5а).

Очевидно, при импульсном вводе трассера кривые отклика при ИВ будут иметь вид короткого импульса в момент времени  $\tau = \tau_{ср} = \tau_{ив}$  (либо  $\theta = 1$ ), а при ИП — форму затухающей экспоненты, соответственно выражению (8.5). В потоках с ограниченной интенсивностью Пр.П кривая отклика будет промежуточной (см. сплошную линию на рис. 8.23) между выходными кривыми ИВ и ИП.

Для установления *связи кривых отклика с функциями распределения*  $\kappa$  и  $\phi$  представим эти кривые в полубезразмерных координатах  $C \equiv C/C_0 - \tau$ .

Напомним, что приведенное в разд. 8.3.2 соотношение  $\kappa = C/C_0$  справедливо *только* для модели ИП, когда параметры системы в РЗ совпадают с таковыми на выходе из РЗ. В общем же случае характеристика  $\kappa$  относится к РЗ *в целом*, а концентрация  $C$  (или  $C$ ) — к *выходному сечению* РЗ.

Связь  $\kappa$  и  $\phi$  с выходными характеристиками  $C$ ,  $C$  получим из следующих соображений. Общее количество введенного в РЗ трассера равно  $C_0 V$ . К моменту времени  $\tau$  в рабочей зоне ХТА остались его доля  $\kappa$  и количество  $C_0 V \kappa$ . С другой стороны, в момент времени  $\tau$  из РЗ уходит мгновенный поток трассера  $C V$ , а за время  $d\tau$  — его количество  $C V d\tau$ . Тогда к моменту



времени  $\tau$  рабочую зону покинет количество трассера, равное  $\int_0^{\tau} C V d\tau$ .

Материальный баланс для РЗ (это и есть пространственный контур) по трассере за временной интервал от  $\tau = 0$  до текущего  $\tau$  запишется в общей манере (1.8); в отсутствие Источников и Стоков:  $+Pr - Y\kappa = \text{Нак}$ , так что

$$+ 0 - \int_0^{\tau} C V d\tau = C_0 V_{\kappa} - C_0 V \cdot 1. \quad (6)$$

Следующее из (6) равенство

$$C_0 V (1 - \kappa) = \int_0^{\tau} C V d\tau \quad (8.18)$$

устанавливает связь  $\kappa$  и  $C$  для момента времени  $\tau$ .

Преобразование равенства (8.18) приводит к ряду полезных соотношений. Вынося постоянный поток  $V$  из-под интеграла и учитывая, что  $V/V = \tau_{\text{ср}}$ , находим

$$C_0 (1 - \kappa) \tau_{\text{ср}} = \int_0^{\tau} C d\tau. \quad (в)$$

Отсюда для  $\tau \rightarrow \infty$  (при этом  $\kappa \rightarrow 0$ ) получаем неочевидное равенство (одна из форм полного — за время от 0 до  $\infty$  — материального баланса по трассере для РЗ):

$$C_0 \tau_{\text{ср}} = \int_0^{\infty} C d\tau. \quad (8.19)$$

Запишем теперь (8.18), внося под интеграл постоянный объем рабочей зоны  $V$  и базовую концентрацию  $C_0$ :

$$1 - \kappa = \int_0^{\tau} \frac{C V}{C_0 V} d\tau. \quad (г)$$

Поскольку  $V/V = \tau_{\text{ср}}$ ,  $\tau/\tau_{\text{ср}} \equiv \theta$ , а  $C/C_0 \equiv C$ , из (г) находим связь  $\kappa$  и  $C(\theta)$ :

$$1 - \kappa = \int_0^{\theta} C(\theta) d\theta, \quad (8.20)$$

а также соотношение

$$1 - \kappa = \int_0^{\tau} \frac{C(\tau)}{\tau_{\text{ср}}} d\tau. \quad (8.21)$$

Сравнивая это соотношение с первым из выражений (8.6а), получаем связь  $\varphi(\tau)$  и  $C(\tau)$ :

$$\varphi(\tau) = C(\tau)/\tau_{\text{ср}}. \quad (8.22)$$

Из (8.22) следует также, что  $C(\theta)d\theta = \varphi(\tau)d\tau$ ; соответственно  $\int_0^\theta C(\theta)d\theta = \int_0^\tau \varphi(\tau)d\tau$ . Эти равенства, разумеется, справедливы и при  $\tau, \theta \rightarrow \infty$ .

Заметим, что последняя из установленных связей позволяет представить общее выражение (8.8) в форме

$$U_{\text{рз}} = \int_0^\infty U(\theta) C(\theta)d\theta. \quad (8.86)$$

Итак, по выходным кривым можно судить о функциях распределения элементов потока по времени пребывания  $\kappa(\tau)$  и  $\varphi(\tau)$ .

### 8.6.2. О среднем времени пребывания

Среднее время  $\tau_{\text{ср}}$  пребывания элементов потока в РЗ может быть рассчитано по приведенной выше формуле (8.4). Вместе с тем  $\tau_{\text{ср}}$  можно определить по экспериментально полученной кривой отклика. Представим ее в натуральных координатах  $C - \tau$  и выделим (рис. 8.23, а) элементарную площадку  $Cd\tau$  (заштрихована). Момент этой площадки относительно оси ординат ( $\tau = 0$ ) составит  $\tau C d\tau$ . Среднее время пребывания  $\tau_{\text{ср}}$  найдем, используя теорему о среднем, записанную для всего диапазона времени от 0 до  $\infty$ :

$$\int_0^\infty \tau C d\tau = \tau_{\text{ср}} \int_0^\infty C d\tau.$$

Отсюда

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{\int_0^\infty \tau C d\tau}{\int_0^\infty C d\tau}, \quad (8.23)$$

причем интегралы вычисляются по экспериментальной кривой (каким-либо известным методом — трапеций и т. д.).

Разумеется, можно воспользоваться также идентичной записью:

$$\tau_{\text{ср}} = \int_0^\infty \tau \varphi(\tau) d\tau; \quad (8.23a)$$

к этому последнему выражению можно прийти аддитивным сложением произведений элементов потока  $\varphi(\tau)d\tau$  на соответствующие  $\tau_i$  в полном временном диапазоне от 0 до  $\infty$  — подобно тому, как это было сделано при определении  $U_{\text{рз}}$  в разд. 8.3.2. Еще проще оно получается, если знаменатель (8.23) заменить по (8.19) и внести постоянные  $C_0$  и  $\tau_{\text{ср}}$  под знак интеграла. С учетом (8.22) приходим к (8.23a):

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{\int_0^\infty \tau C d\tau}{C_0 \tau_{\text{ср}}} = \int_0^\infty \tau \frac{C}{C_0} \frac{d\tau}{\tau_{\text{ср}}} = \int_0^\infty \tau \frac{C}{\tau_{\text{ср}}} d\tau = \int_0^\infty \tau \varphi(\tau) d\tau.$$

Выражение (8.23) может оказаться полезным для *проверки* материального баланса, т.е. сходимости значения  $\tau_{ср}$  с вычисленным по формуле (8.4), иначе — надежности экспериментальной установки и измерительной техники. Кроме того, выражение (8.23) может оказаться эффективным способом установления “задержки” (удерживающей способности) в двух- и многофазных потоках. Дело в том, что объем РЗ, занятый *определенной* ( $i$ -й) *фазой*  $V_i$ , заранее не задан (известен лишь *общий* объем рабочей зоны  $V$ ). Поэтому для определения среднего времени пребывания для  $i$ -го фазового потока формула типа (8.4) непригодна: в выражении  $\tau_{ср i} = V_i / V_i$  известен лишь контролируемый поток  $V_i$ . Кривая отклика, *снятая для потока  $i$ -й фазы*, позволяет по (8.23) найти  $\tau_{ср i}$ . А воспользовавшись затем формулой (8.4), нетрудно рассчитать задержку для этой фазы:  $V_i = V_i \tau_{ср i}$ , а если нужно, то и относительную задержку  $V_i / V$ .

### 8.6.3. К выбору модели и определению ее параметров

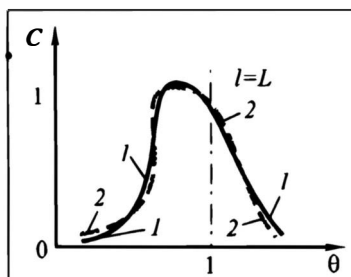
Прежде чем рассчитывать результирующий эффект процесса по формуле (8.8), следует установить, какая из моделей продольного перемешивания пригодна для описания реального потока в данном аппарате, а если речь идет о параметрической модели, то определить еще и численные значения этих параметров (например,  $n$  для ЯМ,  $Pe_3$  для ДМ). Это позволит использовать *конкретное* — по (8.7), (8.10), (8.15) и т. п. — выражение для  $\phi(\tau)$  либо  $C(\theta)$ , необходимое для расчета  $U_{рез}$ . При этом кинетическое уравнение  $U = U(\tau)$  для рассматриваемого технологического процесса устанавливается отдельно.

Выбор модели и определение ее параметров ведут путем сопоставления экспериментальной кривой отклика с расчетной по соответствующей модели — такое сопоставление удобно вести в безразмерных координатах  $C - \theta$  (рис. 8.24).

Будем далее для определенности оперировать однопараметрическими моделями. По форме полученной *из опыта* (сплошная линия) выходной кривой судят о типе модели. А далее стремятся подобрать такие значения параметров модели ( $n$  или  $Pe_3$ ), чтобы *расчетная* кривая (штриховая линия) наилучшим образом совпала с экспериментальной. Если это удалось, значит модель выбрана удачно (говорят: модель *адекватна* реальному процессу), а численное значение параметра ( $n$ ,  $Pe_3$ ), отвечающее рассматриваемому объекту, можно считать установленным.

Основная проблема здесь в том, как выбрать модель, подобрать ее параметры, *наилучшим образом* отвечающие реальному потоку, т.е. экспериментальной выходной кривой. Здесь существуют разные подходы.

Рис. 8.24. Сопоставление кривых отклика:  
1 — экспериментальная кривая, 2 — расчетная (модельная) кривая



1. Экспериментальная и расчетная (теоретическая — по выбранной модели) кривые отклика пересекаются в нескольких точках. Можно взять за основу выбора  $n$  или  $Re_3$  пересечение кривых в какой-либо обусловленной отдельной точке (например, при  $\tau = \tau_{ср}$  либо в точке максимума  $C$ , и т.п.). *Достоинство* метода — простота; *недостатки*:

— разные точки пересечения экспериментальной и модельной кривых отвечают разным значениям параметров  $n$  и  $Re_3$ ; это означает, что величины  $n$ ,  $Re_3$  получатся различными в зависимости от того, какая точка будет выбрана для сопоставления; неопределенность (субъективность) такого подхода — очевидна;

— ошибка опыта для данной точки существенно сказывается на значениях  $n$  (или  $Re_3$ ), поскольку эти параметры моделей весьма чувствительны к экспериментальным погрешностям.

2. Экспериментальная и модельная выходные кривые сравниваются по многим точкам — это сводит к минимуму погрешности опыта для отдельных точек. Тогда нужно подобрать такие значения  $n$  (или  $Re_3$ ), чтобы вся расчетная (модельная) кривая совпала с опытной “наилучшим образом”. В этих целях предварительно строят сетку теоретических кривых — например, по ячеечной модели для разных значений  $n$  (или по диффузионной модели — открытой либо закрытой — для разных  $Re_3$ , либо по какой-нибудь иной модели, физически подходящей к рассматриваемому случаю, со своим набором параметров). На эту сетку накладывают экспериментальную кривую отклика, вычерченную в том же масштабе. Если эта экспериментальная кривая “хорошо” совпадает с какой-либо из модельных, характеризующей определенными значениями параметра, то выбранная модель — адекватна, а ее параметры — определены. Если хорошего совпадения нет, то сравнение повторяют для другой модели.

*Недостаток* метода — не столько в трудоемкости заготовки сеток для различных моделей Пр.П, сколько в неопределенности суждения о “хорошем совпадении” кривых отклика — экспериментальной и расчетной (модельной).

Совпадения кривых можно было бы добиваться, базируясь на методе наименьших квадратов, т. е. минимизируя расхожде-

ние экспериментальной и модельной (расчетной) кривых путем подбора оптимального значения параметра принятой модели. Однако этот метод не только трудоемок, он еще предполагает одинаковую значимость всех точек; но ведь в действительности экспериментальные “хвостовые” точки (при высоких  $\tau$ , когда концентрации трассера уже малы и погрешность их определения велика) — менее точны. А разную значимость (“вес”) различных точек учесть весьма непросто.

Из изложенного следует, что нужно стремиться учитывать всю кривую отклика (много ее точек), но делать это надо как-то иначе.

#### 8.6.4. Определение параметров моделей методом моментов

**Сущность метода.** Наиболее часто при выборе модели и определении ее параметров прибегают к методу моментов. Этот метод уже применялся в курсе, например при определении координат центра давления — разд. 2.1.4; при выводе основного уравнения центробежного насоса — разд. 3.3.1; в настоящей главе при определении  $\tau_{ср}$  — разд. 8.6.2. Здесь он используется более широко, причем в основном на базе безразмерных величин  $C(\theta)$ . В самом общем плане смысл метода моментов применительно к задачам структуры потоков состоит в сравнении моментов — экспериментально найденного и рассчитанного по соответствующей модели продольного перемешивания.

Напомним необходимую для последующего анализа терминологию метода моментов. **Начальным** моментом кривой (здесь — кривой *отклика*) называется полная сумма моментов элементарных площадок  $C(\theta)d\theta$  относительно *начала координат* во всем диапазоне изменения  $\theta$  (в общем случае — от 0 до  $\infty$ ). Так,  $k$ -й начальный момент безразмерной кривой отклика записывается в виде

$$M_k^\theta \equiv \int_0^\infty \theta^k C(\theta) d\theta. \quad (8.24)$$

При  $k = 0$  получаем момент нулевого порядка  $M_0^\theta \equiv \int_0^\infty C(\theta) d\theta$ ; при  $k = 1$  — момент первого порядка  $M_1^\theta \equiv \int_0^\infty \theta C(\theta) d\theta$ , и т. д.

Наряду с безразмерным может быть записан начальный момент размерной кривой отклика; в общем случае  $k$ -го порядка

$$M_k^\tau \equiv \int_0^\infty \tau^k C(\tau) d\tau. \quad (8.24a)$$

Нередко используют также **центральные** моменты — размерные и безразмерные, отсчитанные от  $\tau = \tau_{cp}$  и  $\theta = 1$ :

$$\left(M_k^{\tau}\right)_{ц} \equiv \int_0^{\infty} (\tau - \tau_{cp})^k C(\tau) d\tau \text{ и } \left(M_k^{\theta}\right)_{ц} \equiv \int_0^{\infty} (\theta - 1)^k C(\theta) d\theta. \quad (8.246)$$

В настоящем разделе использованы *начальные* моменты.

**Нормировка моментов.** При переходе от размерных кривых отклика  $C(\tau)$  к безразмерным  $C(\theta)$  удобно оперировать нормированной (к единице) функцией, как это сделано в разд. 8.3.2 для функции распределения  $\varphi(\tau)$ . В соответствии с физическими предпосылками (разд. 8.3.2, 8.6.1 и 8.6.2), в последующих преобразованиях нулевой и первый безразмерные моменты должны быть равны единице:

$$M_0^{\theta} \equiv \int_0^{\infty} C(\theta) d\theta = 1 \text{ и } M_1^{\theta} \equiv \int_0^{\infty} \theta C(\theta) d\theta = 1. \quad (д)$$

Найдем условия нормировки. В этих целях выразим безразмерные переменные через натуральные.

Для момента нулевого порядка

$$M_0^{\theta} = \int_0^{\infty} \frac{C}{C_0} d\frac{\tau}{\tau_{cp}} = \frac{1}{C_0 \tau_{cp}} \int_0^{\infty} C(\tau) d\tau = \frac{1}{C_0 \tau_{cp}} M_0^{\tau} = 1; \text{ тогда } M_0^{\tau} = C_0 \tau_{cp}. \quad (е)$$

Для момента первого порядка

$$M_1^{\theta} = \int_0^{\infty} \frac{\tau}{\tau_{cp}} \frac{C}{C_0} d\frac{\tau}{\tau_{cp}} = \frac{1}{C_0 \tau_{cp}^2} \int_0^{\infty} \tau C(\tau) d\tau = \frac{1}{C_0 \tau_{cp}^2} M_1^{\tau} = 1; \text{ тогда } M_1^{\tau} = C_0 \tau_{cp}^2. \quad (ж)$$

Согласно (е) и (ж) приходим к условиям нормировки по *известным* (найденным) кривым отклика и их натуральным моментам  $M_0^{\tau}$  и  $M_1^{\tau}$ :

$$\tau_{cp} = M_1^{\tau} / M_0^{\tau}; \quad C_0 = (M_0^{\tau})^2 / M_1^{\tau}. \quad (з)$$

Заметим, что полученное математическими преобразованиями первое из выражений (з) совпадает с (8.23), полученным выше из физических соображений.

Как уже указывалось, найденное по кривым отклика значение  $\tau_{cp}$  следует сопоставить с рассчитанным по (8.4). Аналогично, найденное по этим кривым значение  $C_0$  надо сопоставить с рассчитанным по формуле (а). При обнаружении неприемлемых расхождений нужно искать причину выявленного несоответствия (в работе аппаратуры и измерительной техники).

С помощью найденных по (з) значений  $\tau_{cp}$  и  $C_0$  осуществляют переход от натуральных величин  $C$  и  $\tau$  к безразмерным  $C$  и  $\theta$ . Функция распределения  $C(\theta)$  станет при этом нормированной, так что ее нулевой и первый моменты (д) будут равны единице.

Найдем некоторые последующие безразмерные начальные моменты для простейших идеальных моделей продольного перемешивания.

**Безразмерные начальные моменты.** Для модели ИВ определим сразу момент произвольного ( $k$ -го) порядка, имея в виду, что в

данном случае  $\theta = 1 = \text{const}$  (см. рис. 8.23, в):

$$M_k^\theta = \int_0^\infty 1^k C(\theta) d\theta = 1^k \int_0^\infty C(\theta) d\theta = 1. \quad (\text{и})$$

Значит, для ИВ начальный момент любого порядка равен единице.

Для модели ИП можно *проверить* равенство единице моментов нулевого и первого порядков, используя (8.5а):

$$\left. \begin{aligned} M_0^\theta &= \int_0^\infty e^{-\theta} d\theta = -e^{-\theta} \Big|_0^\infty = e^{-\theta} \Big|_\infty^0 = 1; \\ M_1^\theta &= \int_0^\infty \theta e^{-\theta} d\theta = \theta(-e^{-\theta}) \Big|_0^\infty - \left( -\int_0^\infty e^{-\theta} d\theta \right) = 0 + 1 = 1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{й})$$

Интеграл момента  $M_1^\theta$  взят “по частям”:  $u = \theta$ ,  $dv = e^{-\theta} d\theta$ ;  $du = d\theta$ ,  $v = -e^{-\theta}$ .

Разумеется, проведенная проверка была необязательной, поскольку ранее были введены и выполнены условия нормировки.

Для модели ИП определим начальный момент второго порядка, также используя интегрирование по частям, обозначив  $u = \theta^2$ ,  $dv = e^{-\theta} d\theta$ ;  $du = 2\theta d\theta$ ,  $v = -e^{-\theta}$ :

$$M_2^\theta = \int_0^\infty \theta^2 e^{-\theta} d\theta = -\theta^2 e^{-\theta} \Big|_0^\infty - 2 \left( -\int_0^\infty \theta e^{-\theta} d\theta \right) = 0 + 2 = 2, \quad (\text{к})$$

поскольку последний интеграл, найденный выше [см. (й)], равен 1.

Аналогично найдем для ИП момент третьего порядка, обозначив  $u = \theta^3$ , тогда  $du = 3\theta^2 d\theta$ . Действуя в прежнем ключе (при тех же  $dv$  и  $v$ ), имеем

$$M_3^\theta = \int_0^\infty \theta^3 e^{-\theta} d\theta = -\theta^3 e^{-\theta} \Big|_0^\infty - 3 \left( -\int_0^\infty \theta^2 e^{-\theta} d\theta \right) = 0 + 3 \cdot 2 = 6, \quad (\text{л})$$

поскольку последний интеграл, найденный выше [см. (к)], равен 2.

Аналогичным образом, но путем более громоздких преобразований отыскиваются моменты различных порядков для моделей с одним, двумя или бóльшим числом параметров. Значения (выражения) первых четырех моментов для моделей ИВ, ИП, ЯМ и ДМ (*закрытой*) приведены в табл. 8.1.

В литературе приводятся моменты и для других моделей. Так, для *открытой* ДМ

$$M_2^\theta = 1 + \frac{2}{\text{Pe}_3} + \frac{8}{\text{Pe}_3^2}, \quad (\text{м})$$

**Таблица 8.1. Начальные безразмерные моменты  
для беспараметрических и однопараметрических моделей**

Модель	Моменты			
	$M_0$	$M_1$	$M_2$	$M_3$
ИВ	1	1	1	1
ИП	1	1	2	6
ЯМ	1	1	$1 + \frac{1}{n}$	$1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}$
ДМ (закрывага)	1	1	$1 + \frac{2}{Pe_3} (Pe_3 - 1 + e^{-Pe_3})$	$1 + \frac{6}{Pe_3^3} (Pe_3^2 + Pe_3 - 4 + 3Pe_3 e^{-Pe_3} + 4e^{-Pe_3})$

для *полуоткрытой* ДМ

$$M_2^0 = 1 + \frac{2}{Pe_3} + \frac{3}{Pe_3^2} . \quad (н)$$

**Пути идентификации модели.** Для выбора модели Пр.П и определения ее параметров используем табл. 8.1. Прежде всего следует проверить, не подходят ли для описания структуры потоков простейшие беспараметрические модели — ИВ и ИП. Достаточно точное мнение об их пригодности можно высказать на основании формы экспериментальной кривой отклика. При необходимости можно представить эти кривые в безразмерных координатах и определить значение момента второго порядка: если  $M_2^0$  мало отличается от 1, то поток движется в режиме,

близком к ИВ; если  $M_2^0$  приближается к 2, это указывает на высокую интенсивность Пр.П, т.е. на близость к ИП. В тех случаях, когда форма кривой отклика явно не следует кривым для ИВ и ИП либо расчет приводит к значениям моментов, не характерным для простейших моделей, приходится прибегать к однопараметрическим моделям — ЯМ или ДМ. В этом случае определяется какой-то момент экспериментальной кривой отклика и по нему рассчитывается параметр модели — на основании приведенных в таблице теоретических формул, соответствующих этому моменту.

Следует иметь в виду, что значения параметров моделей, вычисленные по моментам различных порядков, не совпадают между собой. С одной стороны, это указывает на *несовершенство* метода моментов. Но с другой стороны, это обстоятельство позволяет внести некоторую *определенность* в выбор порядка момента для расчета, а также в установление надежности (адекватности) принятой модели.



Наименее точно в опытах определяются концентрации на хвостовых участках кривых отклика. Следовательно, *погрешность* в определении экспериментального момента *возрастает с увеличением его порядка*: неточные значения концентраций умножаются на большие расстояния до оси ординат (“плечи”) в *высоких* степенях. Поэтому, чтобы не вносить в расчет параметров модели большую погрешность, следует использовать моменты наиболее низких порядков. Но нулевой и первый моменты уже использованы для нормировки кривой отклика при ее приведении к безразмерному виду. Значит, в однопараметрических моделях ЯМ и ДМ параметры целесообразно определять по моментам *второго* порядка; при этом будут получаться число расчетных ячеек  $n$  и число Пекле  $Pe_3$ , наилучшим образом отвечающие описанию экспериментальной кривой отклика в рамках ЯМ и ДМ соответственно. Предпочтение одной из этих моделей отдается путем сравнения моментов *следующего* (в рассматриваемом примере — третьего) порядка: для какой из моделей (ЯМ или ДМ) расчетный момент при найденных значениях  $n$  и  $Pe_3$  ближе к экспериментальному, та модель лучше (адекватнее) описывает структуру потока в аппарате.

Если однопараметрическая модель оказывается неприемлемой для описания Пр.П в аппарате, обращаются к двухпараметрической модели. Здесь для определения параметров придется пользоваться моментами второго и третьего порядков, решая их как систему двух уравнений для определения двух неизвестных параметров. Если при этом возможно несколько конкурирующих модельных описаний Пр.П, то адекватность будет устанавливаться по моментам следующего (четвертого) порядка.

Итак, конкретный анализ структуры потока на основании имеющейся кривой отклика ведется в такой последовательности:

- по экспериментальным кривым отклика вычисляют натуральные моменты  $M_0^*$  и  $M_1^*$  и определяют значения нормирующих параметров  $\tau_{ср}$  и  $C_0$ ; сопоставляют их (проверка надежности работы аппаратуры и измерительного комплекса) с найденными по  $V$ ,  $\bar{V}$  и  $m_n$ ,  $\bar{V}$ ;

- с помощью найденных  $\tau_{ср}$  и  $C_0$  переводят кривые отклика в безразмерную форму; рассчитывают безразмерные моменты  $M_0^{\theta}$  и  $M_1^{\theta}$ , убеждаются (проверка правильности вычислений), что они равны единице;

- по виду кривых отклика или на основе расчета моментов второго порядка делают заключение о пригодности простейших моделей — ИВ и ИП;

- если упомянутые модели не подходят (наиболее частый случай), то рассматривают однопараметрические модели, определяя по моментам второго порядка значения  $n$  и  $Re_3$ ;
- по моментам третьего порядка проверяют адекватность однопараметрических моделей и выбирают лучшую из них;
- если ни одна из однопараметрических моделей не подходит, то рассматривают двухпараметрические модели, следуя тем же принципам, и т.д.

---

На основании изложенного в настоящей главе *общий путь расчета ХТП с учетом Пр.П* представляется следующим. На *холодной* модельной установке (т.е. в отсутствие технологического процесса) с помощью трассера снимают кривую отклика, по которой определяют параметры модели (например,  $n$  или  $Re_3$ ). При известных значениях параметра модели записывают конкретный вид выражения для  $\varphi(\tau)$  по (8.10) или (8.15). А далее, располагая заранее известной (найденной с помощью независимого эксперимента) кинетической характеристикой  $U(\tau)$ , рассчитывают по уравнению (8.8) результирующий эффект технологического процесса  $U_{рез}$ .

Еще раз подчеркнем, что расчет  $U_{рез}$  по (8.8) правиомерен, если  $U$  зависит только от  $\tau$ . В противном случае необходимо учитывать зависимость  $U$  от ряда параметров процесса (например, от температуры  $t$ , если  $U$  зависит от нее и  $t$  изменяется — во времени, по длине проточного аппарата).

## 8.7. СТРУКТУРА ПОТОКОВ В ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ

В разд. 8.2 указано, что игнорирование Пр.П приводит к ошибочной трактовке закономерностей ХТП. И в этом одна из причин часто отмечаемого ухудшения показателей многих ХТП, полученных на лабораторных и пилотных установках, при переходе к крупным промышленным аппаратам.

Часто практикуемый расчет ХТП без учета Пр.П обусловлен двумя основными причинами.

1. Непонимание (незнание) технологами самой проблемы структуры потоков. Это связано с пробелами в их обучении (понятия и закономерности Пр.П стали вводить в учебные курсы лишь в последние годы) и с традициями (стереотипами) в подходах к технологическим расчетам: практически проще рассчитывать ХТП вне связи с Пр.П и затем вводить найденные из опыта эксплуатации “поправочные коэффициенты” типа КПД или других *коэффициентов незнания*.

2. Объективная сложность анализа ХТП с учетом структуры потока (такой анализ зачастую приводит к весьма громоздким расчетным соотношениям) и одновременно недостаточная изученность явления Пр.П для широкого многообразия технологической аппаратуры (отсутствие сведений об адекватных моделях Пр.П применительно к конкретным ХТА и о значении параметров моделей в зависимости от конструктивных и режимных характеристик реального аппарата).

Надо также понимать, что психологически очень непросто отбросить многое из того (традиционные подходы, нормативные методы, эмпирические формулы), что было накоплено и привычно использовалось на протяжении многих десятилетий. К тому же надо иметь, *чем* все это заменить. А наука о ПАХТ здесь лишь в начале пути...

Цель настоящего раздела — иллюстрация подходов к расчету некоторых несложных технологических ситуаций с учетом Пр.П. Отдельные примеры таких подходов содержатся также в ряде последующих глав.

### 8.7.1. Химическая реакция в потоке

Будем рассматривать поток, движущийся со скоростью  $w$  внутри реакционной трубки длиной  $L$ ; в потоке происходит известная объемная химическая реакция. Требуется сопоставить результаты процесса при движении потока в отсутствие и при наличии Пр.П.

Обратимся сначала к движению потока в простейших режимах ИВ и ИП. Будем считать движение и химическое превращение *одномерными* (в любом сечении потока — полное поперечное перемешивание).

Пусть в потоке протекает изотермически и без изменения объема химическая реакция первого порядка; ее математическое описание представлено в разд. 8.2 выражениями (б) и (в). Воспроизведем здесь эти выражения, обозначив концентрацию реагента символом  $C$ . Уравнение реакции с константой скорости  $k_1$

$$-\frac{dC}{dt} = k_1 C, \quad (a)$$

откуда при концентрации во входном сечении  $C_0$  получаем после разделения переменных и интегрирования до текущего момента времени  $\tau$

$$C = C_0 e^{-k_1 \tau}. \quad (б)$$

Поскольку речь идет об одномерном непрерывном процессе, в котором поток движется по реакционной трубке с постоянной скоростью  $w$ , то связь текущих координаты  $l$  и времени  $\tau$  выразится в виде  $l = w\tau$  или  $\tau = l/w$ .

Если движение происходит в режиме ИВ, то время пребывания элементов потока (любого и всех вместе) в реакционной трубке  $\tau_{\text{ИВ}} = L/w$ , так что конечная концентрация реагента на выходе из трубки составит

$$C_{\text{рез}} = C_0 e^{-k_1 \tau_{\text{ИВ}}} = C_0 e^{-k_1 (L/w)}. \quad (8.25)$$

Если движение потока происходит в режиме ИП, то соответственно (8.8) и (8.7) либо сразу по (8.8а), с учетом  $\tau_{\text{ср}} = L/w$ ,

$$\begin{aligned} C_{\text{рез}} &= \int_0^{\infty} C\varphi(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} C_0 e^{-k_1 \tau} \frac{1}{\tau_{\text{ср}}} e^{-\tau/\tau_{\text{ср}}} d\tau = \frac{C_0}{\tau_{\text{ср}}} \int_0^{\infty} e^{-(k_1 + 1/\tau_{\text{ср}})\tau} d\tau = \\ &= \frac{C_0}{\tau_{\text{ср}}} \frac{1}{k_1 + 1/\tau_{\text{ср}}} e^{-(k_1 + 1/\tau_{\text{ср}})\tau} \Big|_0^{\infty} = \frac{C_0}{k_1 \tau_{\text{ср}} + 1} = \frac{C_0}{k_1 (L/w) + 1}. \end{aligned} \quad (8.26)$$

Сопоставление значений  $C_{\text{рез}}$  в случае ИВ (по 8.25) и ИП (по 8.26) показывает, что при одинаковой длине реакционной трубки  $L$  справедливо равенство-неравенство  $(C_{\text{рез}})_{\text{ИВ}} \leq (C_{\text{рез}})_{\text{ИП}}$ , причем знак равенства отвечает ситуации  $L \rightarrow 0$ . Таким образом, при ИВ реакция проходит глубже, нежели при ИП. Еще нагляднее сопоставление *длин* реакторов при ИП  $L_{\text{ИП}}$  и ИВ  $L_{\text{ИВ}}$  (или, что то же самое, — *объемов* реакторов  $V_{\text{ИП}}$  и  $V_{\text{ИВ}}$ ), необходимых для обеспечения одинаковых степеней превращения  $\eta \equiv 1 - C_{\text{рез}}/C_0$ . Отношение  $L_{\text{ИП}}/L_{\text{ИВ}} = V_{\text{ИП}}/V_{\text{ИВ}}$  при заданном значении  $\eta$  нетрудно получить из (8.25) и (8.26):

$$\eta = 1 - e^{-k_1 (L_{\text{ИВ}}/w)}; \quad L_{\text{ИВ}} = \frac{w}{k_1} \ln \frac{1}{1 - \eta} \quad (\text{В}')$$

и

$$\eta = 1 - \frac{1}{k_1 (L_{\text{ИП}}/w) + 1}; \quad L_{\text{ИП}} = \frac{w}{k_1} \frac{\eta}{1 - \eta}. \quad (\text{В}')$$

Отсюда

$$\frac{L_{\text{ИП}}}{L_{\text{ИВ}}} = \frac{V_{\text{ИП}}}{V_{\text{ИВ}}} = \frac{\eta}{1 - \eta} \frac{1}{\ln \frac{1}{1 - \eta}}. \quad (8.27)$$

Именно по этой формуле рассчитаны отношения  $V_{\text{ИП}}/V_{\text{ИВ}}$  для различных значений  $\eta$  в разд. 8.2.

Пусть теперь установлено (опытами с трассером и расчетом, например с помощью метода моментов), что поток в реакционной трубке движется с ограниченным Пр.П, причем его структура отвечает ЯМ с числом ячеек  $n = 2$ . Для этого случая в литературе приводится следующее выражение типа (8.10):

$$\varphi(\tau) = \frac{4\tau}{\tau_{\text{ср}}} e^{-2\tau/\tau_{\text{ср}}}. \quad (\text{Г})$$

Определение  $C_{рез}$  будем вести по формуле (8.8а):

$$C_{рез} = \int_0^{\infty} C_0 e^{-k_1 \tau} \frac{4\tau}{\tau_{cp}} e^{-2\tau/\tau_{cp}} d\tau = \frac{4C_0}{\tau_{cp}^2} \int_0^{\infty} \tau e^{-(k_1 + 2/\tau_{cp})\tau} d\tau. \quad (д)$$

Этот интеграл проще всего взять по частям, обозначив

$$u = \tau, \quad dv = e^{-(k_1 + 2/\tau_{cp})\tau}, \quad \text{так что } du = d\tau, \quad v = \\ = \frac{-1}{k_1 + 2/\tau_{cp}} e^{-(k_1 + 2/\tau_{cp})\tau}.$$

Тогда, избавляясь от знака “минус” и меняя местами пределы интегрирования, имеем

$$C_{рез} = \frac{4C_0}{\tau_{cp}^2} \left[ \tau \frac{1}{k_1 + 2/\tau_{cp}} e^{-(k_1 + 2/\tau_{cp})\tau} \right]_{\infty}^0 + \frac{1}{k_1 + 2/\tau_{cp}} \int_0^{\infty} e^{-(k_1 + 2/\tau_{cp})\tau} d\tau = \\ = \frac{4C_0}{\tau_{cp}^2} \frac{1}{(k_1 + 2/\tau_{cp})^2} e^{-(k_1 + 2/\tau_{cp})\tau} \Big|_{\infty}^0 = C_0 \frac{1}{\left( \frac{k_1 \tau_{cp}}{2} + 1 \right)^2}. \quad (8.28)$$

Степень превращения будет определена как  $\eta = 1 - C_{рез}/C_0$ .

Расчеты показывают, что для одинаковых  $L$  в этом случае значение  $\eta$  получается промежуточным между найденными по формулам (8.25) и (8.26):

$$\eta_{ип} \leq \eta_{ям} \leq \eta_{ив}. \quad (е)$$

В случае реакции  $m$ -го порядка плотность распределения  $\varphi(\tau)$  должна быть наложена на кинетическую характеристику соответствующей химической реакции, получаемую интегрированием уравнения скорости этой реакции:

$$-\frac{dC}{d\tau} = k_m C^m. \quad (ж)$$

Последующий путь анализа аналогичен показанному выше.

### 8.7.2. Распределение элементов потока по времени пребывания при гравитационном течении тонких пленок

Будем рассматривать проблему применительно к движению ламинарных пленок толщиной  $\delta$ , плотностью  $\rho$ , вязкостью  $\mu$ , стекающих вдоль вертикальной плоскости под действием силы тяжести (рис. 8.25, а). В ламинарно движущейся пленке обратное перемешивание, естественно, отсутствует. Однако различные слои жидкости (элементы потока) движутся в пленке с

Рис. 8.25. К установлению функции распределения  $\varphi(\tau)$  при гравитационном течении тонких пленок:

$a$  — расчетная схема,  $b$  — плотность распределения элементов потока по времени пребывания

разными линейными скоростями — здесь налицо выраженная поперечная неравномерность. Поэтому элементам пленочного

потока присуще некое распределение по времени пребывания, отвечающее характерному профилю скоростей. Его и необходимо учитывать при анализе и расчете технологических процессов в пленке, устанавливая функцию распределения  $\varphi(\tau)$ .

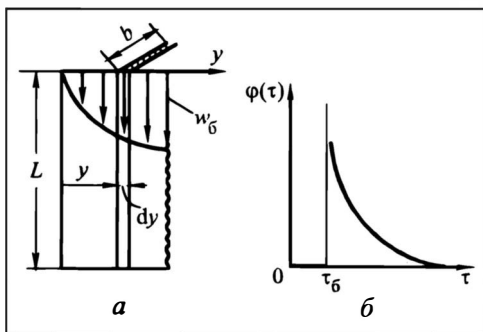
Напомним, что в наиболее простом случае (в отсутствие воздействия газового потока) профиль скоростей описывается уравнением (2.42):

$$w = \frac{\rho g}{2\mu} (2y\delta - y^2) = w_\delta \left( \frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} \right), \quad (3)$$

где  $w_\delta = \rho g \delta^2 / 2\mu$  — скорость на границе пленки с газом, она в полтора раза превышает среднюю скорость  $w_{\text{ср}}$ .

Плотность распределения  $\varphi(\tau)$  найдем, исходя из физического смысла элемента вероятностей  $\varphi(\tau)d\tau$ : это доля от общего жидкостного потока  $V_0$ , время пребывания которой сосредоточено в промежутке от  $\tau$  до  $\tau + d\tau$ . Если в начальный момент ( $\tau = 0$ ) мысленно пометить элементы в верхнем (входном) сечении пленки (это отвечает импульсному вводу трассера), то через отрезок времени  $\tau_\delta = L/w_\delta$  рабочую зону покинут элементы, движущиеся на границе пленки с газом. При увеличении времени сверх  $\tau_\delta$  из РЗ будут уходить элементы, движущиеся ближе к стенке. К некоторому моменту  $\tau$  РЗ покинут все элементы правее сечения  $y$ ; при этом на расстоянии  $y$  от стенки скорость  $w$  рассчитывается по формуле (3), так что речь идет о моменте времени  $\tau = L/w$ . Если времени дать приращение  $d\tau$ , то за это время элементарный расход жидкости, покидающей поперечное сечение РЗ толщиной  $dy$ , составит  $dV$ .

Запишем материальный баланс по меченой жидкости (трассеру) для пространственного контура шириной  $b$  и толщиной  $dy$  (см. рис. 8.25,  $a$ ) за время  $d\tau$ : Прихода трассера в этот контур нет, Уход из контура составляет  $dV$ , Накопление



выразим как долю от общего потока —  $V_0 \varphi(\tau) d\tau$ . Тогда в отсутствие Источников и Стоков соответственно общим принципам составления балансов

$$+ 0 - dV = V_0 \varphi(\tau) d\tau,$$

откуда получается *общее выражение* для плотности распределения в потоках с поперечной неравномерностью:

$$\varphi(\tau) = -\frac{1}{V_0} \frac{dV}{d\tau}. \quad (8.29)$$

Найдем теперь конкретное выражение  $\varphi(\tau)$  для течения тонких пленок. Время пребывания в РЗ элементов потока, находящихся от стенки на расстоянии  $y$ , составляет по (3)

$$\tau = \frac{L}{w} = \frac{L}{w_\delta \left( \frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} \right)} = \frac{\tau_\delta}{\left( \frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} \right)}. \quad (и)$$

Отсюда возможно выразить  $y$  через  $\tau$ :

$$y^2 - 2\delta y + \frac{\delta^2 \tau_\delta}{\tau} = 0 \text{ и } y = \delta - \delta \sqrt{1 - \frac{\tau_\delta}{\tau}}, \quad (к)$$

причем знак “плюс” перед радикалом при решении квадратного уравнения отброшен, поскольку  $y \leq \delta$ .

Для дальнейшего анализа при подстановке в (8.29) величины  $dV$  потребуются знать  $dy$ ; дифференцируем правое из выражений (к):

$$dy = -\frac{\delta \tau_\delta}{2\tau^2 \sqrt{1 - \tau_\delta/\tau}} d\tau. \quad (л)$$

Далее можно найти все фрагменты формулы (8.29). Полный расход жидкости на участке шириной  $b$  составляет

$$V_0 = w_{cp} b \delta = \frac{2}{3} w_\delta b \delta. \quad (м)$$

Элементарный расход через бесконечно малое сечение  $b dy$  равен

$$dV = w b dy = w_\delta \left( \frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} \right) b dy. \quad (н)$$

Если здесь заменить выражение в скобках по (и) и подставить  $dy$  по (л), то

$$dV = w_\delta \frac{\tau_\delta}{\tau} b \left( -\frac{\delta \tau_\delta}{2\tau^2 \sqrt{1 - \tau_\delta/\tau}} \right) d\tau = \frac{-w_\delta \delta \tau_\delta^2 b}{2\tau^3 \sqrt{1 - \tau_\delta/\tau}} d\tau. \quad (о)$$

С найденными выше значениями  $V_0$  и  $dV$  получим окончательно в соответствии с (8.29)

$$\varphi(\tau) = \frac{3\tau_\delta^2}{4\tau^3 \sqrt{1 - \frac{\tau_\delta}{\tau}}} . \quad (8.30)$$

Нетрудно убедиться, что  $\varphi(\tau)$  по (8.30) представляет собой *нормированную функцию распределения*:

$$\int_0^\infty \varphi(\tau) d\tau = \int_{\tau_\delta}^\infty \varphi(\tau) d\tau = 1 . \quad (\text{п})$$

Вид этой функции представлен на рис. 8.25, б. Обращаем внимание, что на участке от 0 до  $\tau_\delta$  значение функции  $\varphi(\tau) = 0$ ; это полностью соответствует физике явления: при  $\tau < \tau_\delta$  никакие меченые элементы, введенные во входное сечение в момент  $\tau = 0$ , рабочую зону еще не покинут.

Выражение  $\varphi(\tau)$  по (8.30) должно быть наложено на кинетическую характеристику  $U(\tau)$  рассчитываемого процесса (химическое превращение, тепло- или массообмен) для определения его результирующего эффекта в соответствии с формулой (8.8):

$$U_{\text{рез}} = \int_{\tau_\delta}^\infty U(\tau) \varphi(\tau) d\tau; \quad (\text{р})$$

при этом на временном отрезке от 0 до  $\tau_\delta$ , как показано выше,  $\varphi(\tau) = 0$ , и потому

$$\int_0^{\tau_\delta} U(\tau) \varphi(\tau) d\tau = 0 .$$

### 8.7.3. Конвективный теплообмен при ограниченном продольном перемешивании одного из теплоносителей

В разд. 7.6 и 7.7 рассматривался теплообмен при движении теплоносителей в двух простейших (предельных) режимах — ИВ и ИП. Теплообмен при ограниченном Пр.П теплоносителей не затрагивался из-за достаточной сложности преобразований и конечных выражений. В завершение настоящей главы проанализируем этот вопрос применительно к одной из сравнительно простых технологических ситуаций: теплообмен между *конденсирующимся паром* (его температура  $T$  — постоянна) и *холодным потоком* (пропускная способность  $Gc$ ), движущимся с *ограниченным продольным перемешиванием* (оно характеризуется



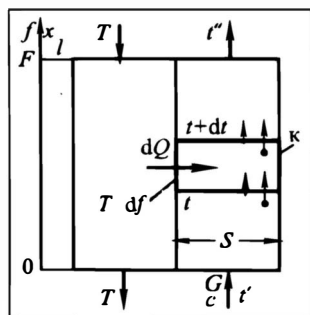


Рис. 8.26. К расчету теплообмена между конденсирующимся паром и нагреваемым потоком, движущимся с ограниченным продольным перемешиванием

эффективным коэффициентом продольной теплопроводности  $\lambda_3$ ). Пусть коэффициент теплопередачи  $k$  известен (примем его не зависящим от интенсивности Пр.П).

Поставим одну из задач проектирования: необходимо найти величину теплообменной поверхности  $F$  при заданных температурах холодного теплоносителя на входе в аппарат ( $t'$ ) и на выходе из него ( $t''$ ). Конкретнее: требуется установить, как интенсивность Пр.П влияет на величину этой поверхности.

Расчетная схема представлена на рис. 8.26; она близка к рассмотренной в разд. 7.6 на рис. 7.21, б, но здесь налицо продольный ("кондуктивный") перенос теплоты за счет Пр.П.

Тепловой баланс для элементарного контура "к" с поверхностью теплообмена  $df$  при движении холодного теплоносителя в режиме ИВ (продольный конвективный теплоперенос с пропускной способностью  $Gc$  в отсутствие Пр.П показан на рисунке простыми стрелками) запишется так:

$$+ Gct + dQ - Gc(t + dt) = 0 \text{ и } dQ = Gcdt. \quad (c)$$

Величина  $dQ$  для элементарной поверхности  $df$  выражается формулой

$$dQ = k(T - t)df. \quad (т)$$

Подставим  $dQ$  по (т) в (с), разделим переменные:

$$k(T - t)df = Gcdt, \quad \frac{dt}{T - t} = \frac{k}{Gc} df$$

и проинтегрируем (при  $T = \text{const}$ ) от  $t'$  до  $t''$  и от 0 до полной поверхности  $F_0$  (индекс при  $F$  указывает на принадлежность анализа к рассматриваемому режиму течения, т. е.  $\lambda_3 = 0$ ):

$$\frac{kF_0}{Gc} = \ln \frac{T - t'}{T - t''} \text{ и } F_0 = \frac{Gc}{k} \ln \frac{T - t'}{T - t''}. \quad (8.31)$$

Пусть теперь холодный теплоноситель движется с ограниченным Пр.П. Тогда при составлении теплового баланса для контура "к" необходимо учесть и продольный эффективный ("кондуктивный") перенос теплоты (стрелки с кружками на концах) с пропускной способностью, основанной на тепловом

потоке  $\lambda_3 \frac{dt}{dx} S$ , где  $x$  — координата вдоль потока,  $S$  — его поперечное сечение (см. рис. 8.26). В рассматриваемом случае тепловой баланс имеет вид

$$+ Gct + (-\lambda_3 \frac{dt}{dx} S) + dQ - Gc(t + dt) - [-\lambda_3 \frac{d}{dx} (t + dt)S] = 0. \quad (y)$$

Для удобства последующих преобразований введем понятие об удельной поверхности теплообмена  $f_0$ , приходящейся на единицу длины теплообменника:  $F = f_0 l$ ,  $f = f_0 x$ . Тогда  $dQ = k(T - t)df = k(T - t)f_0 dx$ . С этим значением  $dQ$  выражение (y) после раскрытия скобок и очевидных упрощений дает дифференциальное уравнение второго порядка:

$$k(T - t)f_0 dx - Gcdt + \lambda_3 \frac{d^2 t}{dx^2} S dx = 0$$

$$\text{и } \frac{d^2 t}{dx^2} - \frac{Gc}{\lambda_3 S} \frac{dt}{dx} + \frac{kf_0}{\lambda_3 S} (T - t) = 0. \quad (\Phi)$$

Произведем замену переменной:  $T - t \equiv \theta$ ; тогда (Ф) переписывается так:

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - \frac{Gc}{\lambda_3 S} \frac{d\theta}{dx} - \frac{kf_0}{\lambda_3 S} \theta = 0. \quad (x)$$

Решение уравнения (x) имеет вид

$$\theta \equiv T - t = C_1 e^{z_1 x} + C_2 e^{z_2 x}, \quad (ц)$$

где  $z_{1,2}$  — корни характеристического уравнения  $z^2 - \frac{Gc}{\lambda_3 S} z - \frac{kf_0}{\lambda_3 S} = 0$ :

$$z_1 = \frac{Gc}{2\lambda_3 S} + \sqrt{\left(\frac{Gc}{2\lambda_3 S}\right)^2 + \frac{kf_0}{\lambda_3 S}}; \quad z_2 = \frac{Gc}{2\lambda_3 S} - \sqrt{\left(\frac{Gc}{2\lambda_3 S}\right)^2 + \frac{kf_0}{\lambda_3 S}}. \quad (ч)$$

Постоянные интегрирования определяются с помощью граничных условий.

Формулировка граничных условий (ГУ) оказывает *определяющее* влияние на соответствие получающегося решения физической сущности процесса. Математики даже утверждают, что “ГУ сильнее уравнения”; иллюстрацией этого утверждения может служить регулярный режим теплообмена (разд. 7.12). При изучении Пр.П *крайне сложно* математически корректно описать явления на входной и выходной границах РЗ для конкретного аппарата. Поэтому предлагаются различные модельные описания, в той или иной мере отражающие физическую сущность ситуации на границах. В результате и получаемые решения верны *в той мере*, в которой адекватны сформулированные ГУ.

Наиболее часто используются ГУ Данквертса, предполагающие скачок потенциала (температуры — в теплообмене, концентрации — в массообмене или

химической реакции) на входе в РЗ и равенство нулю продольного градиента потенциала на выходе из нее\*. Другие подходы приводят к иным ГУ и решениям. В учебнике приняты упрощенные граничные условия, позволяющие тем не менее качественно, а в известной мере и количественно, выявить влияние интенсивности Пр.П и некоторых других факторов на конечный результат процесса в РЗ, здесь — применительно к рассматриваемой задаче теплопереноса.

По физическому смыслу рассматриваемого явления с ростом  $x$  (или  $f$ ) разность  $T - t$  уменьшается; при сравнительно больших  $x$  она стремится к нулю, и задача теплопереноса из поверхностной вырождается в потоковую. Примем (хотя это и не вполне строго) указанное обстоятельство достаточным основанием, чтобы отбросить первый корень характеристического уравнения  $z_1 > 0$ , дающий *рост*  $T - t$  с увеличением  $x$ ; иначе говоря, будем считать  $C_1 \equiv 0$ . В таком предположении решению отвечает лишь второй корень  $z_2 < 0$ , и выражение (ц) упрощается:

$$\theta \equiv T - t = C_2 e^{z_2 x}. \quad (\text{ш})$$

Для определения  $C_2$  используем ГУ на входе в РЗ:  $\theta' = T - t'$  при  $x = 0$ . Отсюда по (ш)  $C_2 = T - t'$ . Тогда

$$T - t = (T - t') e^{z_2 x}; \quad \frac{T - t}{T - t'} = e^{z_2 x}; \quad \ln \frac{T - t}{T - t'} = z_2 x. \quad (8.32)$$

Для поверхности теплообмена в целом ( $f = F$ ,  $x = l$  и  $t = t''$ ) имеем, подставив значение  $z_2$  и  $f_0 l = F$ ,

$$\ln \frac{T - t'}{T - t''} = z_2 l = \sqrt{\left(\frac{Gc}{2\lambda_3 S/l}\right)^2 + \frac{kF}{\lambda_3 S/l}} - \frac{Gc}{2\lambda_3 S/l}. \quad (8.33)$$

Соотношение пропускных способностей продольного переноса — конвективного  $Gc$  и продольного эффективного  $(\lambda_3/l)S$  — представляет собой критерий Пекле для теплового продольного перемешивания:

$$Pe_3 = \frac{Gc}{\lambda_3 S/l} = \frac{w\rho Sc}{\lambda_3 S/l} = \frac{wl}{a_3},$$

причем  $a_3 \equiv \lambda_3/\rho c$  — эффективный коэффициент температуропроводности.

Теперь (8.33) можно преобразовать, введя  $Pe_3$ :

$$\ln \frac{T - t'}{T - t''} = \sqrt{\left(\frac{Pe_3}{2}\right)^2 + \frac{kF}{\lambda_3 S/l}} - \frac{Pe_3}{2}.$$

---

\* Обоснование и формулировку ГУ Данквертса см., например, [1, 5].

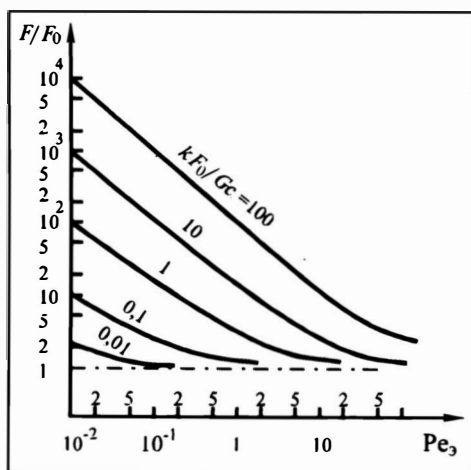


Рис. 8.27. Влияние интенсивности продольного перемешивания на величину поверхности теплообмена в задаче проектирования

Чтобы избавиться от иррациональности, перенесем  $Pe_3/2$  в левую часть и возведем полученное равенство в квадрат:

$$\frac{Pe_3^2}{4} + Pe_3 \ln \frac{T - t'}{T - t''} + \ln^2 \frac{T - t'}{T - t''} = \frac{Pe_3^2}{4} + \frac{kF}{\lambda_3 S/l};$$

после сокращений

$$Pe_3 \ln \frac{T - t'}{T - t''} + \ln^2 \frac{T - t'}{T - t''} = \frac{kF}{\lambda_3 S/l} = \frac{kF}{Gc} \frac{Gc}{\lambda_3 S/l} = \frac{kF}{Gc} Pe_3.$$

Решим полученное равенство относительно  $kF/Gc$ :

$$\frac{kF}{Gc} = \ln \frac{T - t'}{T - t''} + \frac{1}{Pe_3} \ln^2 \frac{T - t'}{T - t''} = \ln \frac{T - t'}{T - t''} \left( 1 + \frac{1}{Pe_3} \ln \frac{T - t'}{T - t''} \right). \quad (8.34)$$

Напомним, что в этом равенстве  $F$  — теплообменная поверхность, необходимая для подогрева холодного теплоносителя от  $t'$  до  $t''$  при его движении с ограниченным  $Пр.П.$  Разумеется, из (8.34) можно выразить  $F$ .

Практически важно сопоставить значения  $F_0$  и  $F$  при разных значениях числа  $Pe_3$  — от соответствующего ИП ( $Pe_3 \rightarrow 0$ ) до соответствующего ИВ ( $Pe_3 \rightarrow \infty$ ). Представим такое сопоставление в форме зависимости  $F/F_0$  от  $Pe_3$ ; для этого поделим выражение (8.34) на левое из выражений (8.31):

$$\frac{F}{F_0} = 1 + \frac{1}{Pe_3} \ln \frac{T - t'}{T - t''}.$$

Если в этом соотношении заменить логарифм по (8.31), то окончательно

$$\frac{F}{F_0} = 1 + \frac{1}{Pe_3} \frac{kF_0}{Gc} . \quad (8.35)$$

Зависимость (8.35) приведена на рис.8.27 для различных отношений пропускных способностей  $kF_0/Gc$ . Из формулы (8.35) и рис. 8.27 видно, что с увеличением интенсивности Пр.П (уменьшением  $Pe_3$ ) отношение  $F/F_0$  возрастает: при наличии Пр.П требуется *большая* теплообменная поверхность для передачи заданного потока теплоты  $Q$ , т. е. для нагрева теплоносителя от  $t'$  до  $t''$ . В случае ИВ ( $Pe_3 \rightarrow \infty$ ) формула (8.35) закономерно приводит к  $F = F_0$ .

Важно, что эффект Пр.П сильнее проявляется при больших значениях  $kF_0/Gc$ . Дело в том, что более высокие значения этого отношения отвечают более глубокому теплообмену, т.е. существенному приближению  $t''$  к  $T$ . Это полностью согласуется с данными, приведенными в разд. 8.2: более высокой степени превращения (здесь — степени отработки температурного напора  $T - t''$  в сравнении с первоначальным  $T - t'$ ) отвечает больший необходимый объем реакционной зоны (здесь — необходимая поверхность теплообмена).

Формула (8.35) одновременно демонстрирует *падение средней движущей силы* при наличии Пр.П. В самом деле, количество переданной в единицу времени теплоты может быть записано через средние температурные напоры ( $\Delta t_{ln}$  в случае ИВ и  $\Delta t_{cp}$  в общем случае):  $Q = kF_0 \Delta t_{ln} = kF \Delta t_{cp}$ . Отсюда ясно, что отношение  $\Delta t_{ln}/\Delta t_{cp} = F/F_0$  также выражается формулой (8.35): с понижением  $Pe_3$  величина  $\Delta t_{cp}$  уменьшается.

Таким образом, наличие и усиление Пр.П при прочих равных условиях понижают интенсивность теплообменного процесса. Аналогичные эффекты (в более сложном математическом представлении) характерны для теплообменных процессов с переменной температурой обоих теплоносителей, а также для других процессов (в частности — массообменных) при наличии продольного перемешивания потоков.

#### ЛИТЕРАТУРА к главе 8

1. *Выгон В.Г.* Математическое моделирование процессов экстракции/ В кн. Основы жидкостной экстракции. Гл.б. М.: Химия, 1981. 399 с.
2. *Гельперин Н.И., Айнштейн В.Г., Кваша В.Б.* Основы техники псевдоожижения. М.: Химия, 1967. 664 с.
3. *Гельперин Н.И., Пебалк В.Л., Костанян А.Е.* Структура потоков и эффективность колонных аппаратов химической промышленности. М.: Химия, 1977. 264 с.
4. *Закгейм А.Ю.* Введение в моделирование химико-технологических процессов. М.: Химия, 1982. 288 с.
5. *Левеншпиль О.* Инженерное оформление химических процессов: Пер. с англ. / Под ред. М.Г. Слинько. М.: Химия, 1969. 622 с.

# ВЫПАРИВАНИЕ

По существу выпаривание представляет собой *массообменный* процесс — с переносом компонента из жидкой фазы в паровую. Однако на практике в ходе выпаривания в паровую фазу переходит только растворитель; растворенное вещество (за крайне редким исключением) полностью остается в растворе. При этом количество испаренного растворителя всецело определяется количеством подведенной теплоты. Поэтому процесс выпаривания трактуется и рассчитывается как *тепловой*.

## 9.1. СУЩНОСТЬ ПРОЦЕССА. ЦЕЛИ И ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ

**Выпариванием** называют процесс частичного удаления растворителя из растворов путем кипения последних. В подавляющем большинстве случаев выпариванию подвергают *водные* растворы твердых веществ, однако растворителями могут быть и другие жидкости. При этом методы инженерного расчета и аппаратурного оформления являются общими (не зависят от вида растворителя).

Раствор какой-либо соли, подлежащий выпариванию, будем называть **исходным**, или **свежим раствором**. Получаемый в процессе выпаривания раствор называют **упаренным раствором**, а отводимый пар *растворителя* — **вторичным паром**. Вторичный пар, как правило, практически не содержит растворенного вещества (унос капель с вторичным паром пока не рассматривается), поскольку летучесть растворенного вещества по сравнению с летучестью растворителя за весьма редкими исключениями невелика. В результате при удалении растворителя концентрация растворенного вещества в растворе повышается.

Обычно удаляют лишь часть растворителя с таким расчетом, чтобы раствор оставался в *текучем* состоянии и его можно было в соответствии с технологической схемой передавать в другой аппарат или потребителю. Иногда при выпаривании растворов твердых веществ происходит насыщение раствора и выпадение твердого вещества. В этом случае выпариванию сопутствует процесс **кристаллизации**.

Таким образом, выпаривание применяют как для повышения концентрации разбавленных растворов, так и для выделения из них твердого вещества путем кристаллизации. В данной главе рассматриваются вопросы концентрирования растворов; кристаллизации (в том числе с использованием выпаривания растворителя) посвящена гл. 16.

Выпаривание до конечной концентрации может производиться как *периодически*, так и *непрерывно*. В последнем случае после выхода на режим (т.е. достижения в аппарате заданной конечной концентрации) в выпарной аппарат непрерывно вводят поток свежего раствора и выводят из него поток упаренного раствора, причем параметры ведения процесса остаются неизменными во времени.

Концентрирование растворов методом выпаривания — один из наиболее распространенных технологических процессов в химической, пищевой и других отраслях промышленности. Число действующих выпарных установок исчисляется многими сотнями, а суммарное количество выпариваемой воды в наиболее крупных из них достигает миллиона тонн в год и более. При этом на испарение 1 кг растворителя требуется подвести теплоту, равную (оценочно) теплоте парообразования (для наиболее часто используемого растворителя — воды — это величина порядка 2000 кДж/кг). В результате на процессы выпаривания растворов расходуется огромное количество теплоты, выпаривание — крайне *энергоемкий* процесс.

Выпаривание до заданной концентрации может производиться как в одном аппарате, так и в нескольких (в так называемой **многокорпусной выпарной установке**) с увеличением концентрации раствора от корпуса к корпусу.

Необходимость передачи больших количеств (потоков) тепла упариваемому раствору предопределяет другую отличительную особенность процессов выпаривания — их *металлоемкость*: на изготовление выпарных аппаратов расходуются десятки тысяч тонн сталей (часто легированных), хрома, никеля и других металлов. Поэтому для каждого конкретного случая выпаривания важно научиться выбирать оптимальную схему проведения процесса и наиболее подходящую конструкцию аппарата с тем, чтобы обеспечить *максимальную* производительность установки при *фиксированных* затратах энергии и металла или *минимальные* затраты — при *определенной* производительности.

Целью технологического расчета выпарной установки является:

— определение расхода греющего пара на проведение процесса;

— определение поверхности теплообмена и основных размеров выпарного аппарата;

— выявление режимных характеристик процесса (температуры, давления, концентрации и т.д.).

Методика расчета выпарной установки зависит от выбранной технологической схемы, конструкции аппарата и способа ведения процесса (непрерывно или периодически).

Перед изложением методов расчета выпарных аппаратов рассмотрим сначала их основные конструкции.

## 9.2. ОСНОВНЫЕ ТИПЫ ВЫПАРНЫХ АППАРАТОВ

### 9.2.1. Классификация выпарных аппаратов

Множество конструкций выпарных аппаратов обусловлено индивидуальными особенностями выпариваемых растворов, имеющимся набором теплоносителей и желанием получить максимальный эффект при сочетании этих факторов. Единой классификации, охватывающей все многообразие выпарных аппаратов, не существует; их обычно классифицируют по отдельным признакам. Приведем наиболее существенные срезы классификации с кратким комментарием.

*По рабочему давлению в корпусе* (в последнем корпусе, если выпаривание производится в многокорпусной установке) выпарные аппараты разделяются на работающие *под атмосферным давлением* (или близким к нему), *под повышенным давлением* и *под разрежением*. В последнем случае достигается больший перепад температур между греющим теплоносителем и кипящим раствором. Однако использование теплоты отводимых вторичных паров затруднительно. При работе под повышенным давлением энергия вторичного пара может быть использована в других теплоиспользующих установках.

*По степени насыщения раствора* различают выпарные аппараты для повышения концентрации вещества в области *ниже состояния насыщения* (без кристаллизации) и с получением *насыщенных* (и *пересыщенных*) растворов. В последнем случае конструкция выпарного аппарата отличается наличием *камеры солеотделения* для образующихся кристаллов.

Различают выпарные аппараты и *по способу подачи теплоты*: через *теплопередающую поверхность* или *путем непосредственного контакта* греющего агента с выпариваемым раствором. Последний вариант применяют при выпаривании агрессивных жидкостей, разрушающих теплопередающую поверхность.

В табл.9.1 приведена классификация выпарных аппаратов *по характеру организации движения кипящего выпариваемого рас-*



**Таблица 9.1. Классификация выпарных аппаратов по характеру организации движения раствора в них**

Вид	Разновидности	Достоинства	Недостатки	Область применения	Примечание
Аппараты с циркуляцией раствора	С естественной циркуляцией	Высокая интенсивность теплопередачи	Возможность инкрустации поверхности	Широкая	Возможно применение труб вскипания и камер для солеотделения. По структуре потоков аппараты близки к аппарату идеального перемешивания
	С принудительной циркуляцией	Отсутствует инкрустация поверхности	Дополнительный расход энергии на работу насоса	При выпаривании вязких и кристаллизующихся растворов	
Аппараты с выпариванием жидкости за один проход по аппарату	С нисходящей пленкой	Фиксированное время пребывания в аппарате	Повышенные длина труб и высота аппарата в целом	При малой доле отгонки растворителя из вязких растворов	По структуре потоков аппараты близки к режиму идеального вытеснения. Возможность выпаривания термолабильных веществ
	С восходящей пленкой	Отсутствует распределитель жидкости по трубам		При большой доле отгонки растворителя	
	Роторный пленочный испаритель	Возможность выпаривания растворов до получения сухого остатка	Дополнительный расход энергии. Сложность конструкции	При выпаривании очень вязких растворов или до твердого состояния	
Аппараты емкостного типа (с перемешиванием жидкости и без него)	Аппараты с поверхностью теплообмена в виде рубашки, змеевика и т.п.	Простота устройства	Низкий коэффициент теплопередачи. Ограниченная поверхность теплообмена	В маломасштабных производствах	Возможно образование застойных зон  —
	Аппараты контактного типа (без разделяющей поверхности теплообмена): с погружной горелкой, обогрев горячим газом	Большая межфазная поверхность между газом и жидкостью	Необходимость внутренней футеровки антикоррозионными материалами: керамической, резиновой и др.	При выпаривании агрессивных жидкостей: серная и соляная кислоты, растворы минеральных солей	

творя; в таблице указаны достоинства и недостатки рассматриваемых аппаратов, а также области их применения и некоторые особенности. В ней нашли отражение также разновидности аппаратов по перечисленным выше признакам.

### 9.2.2. Конструкции выпарных аппаратов

Наиболее типичные выпарные аппараты показаны на рис. 9.1 и 9.2.

Выпарные аппараты с циркуляцией раствора (рис. 9.1) включают в себя греющую камеру 1, циркуляционную трубу 2, сепаратор 3 и брызгоуловитель 4 в верхней части последнего. Циркуляционная труба может быть размещена в осевой (центральной) части греющей камеры (отсюда название — "выпарной аппарат с центральной циркуляционной трубой", см. рис. 9.1,а) или отдельно от греющей камеры. В этом случае последняя может быть расположена либо соосно с сепаратором (рис. 9.1,б), либо на некотором расстоянии от оси сепаратора — вынесенная греющая камера (рис. 9.1,в).

Подвод теплоты к раствору, кипящему в трубах греющей камеры, осуществляется за счет подачи в межтрубное пространство конденсирующегося водяного пара. Сепаратор и в ряде случаев расположенный в нижней части отбойник (поз.5 на рис. 9.1,б) служат для разделения парожидкостной смеси, выходящей из нагревательных труб, на раствор и пар. Для более полной очистки вторичного пара от уносимых им капель раствора в верхней части сепаратора устанавливается брызгоуловитель. На рис. 9.1,а показан простейший тип брызгоуловителя, работа которого основана на многократном изменении величины и

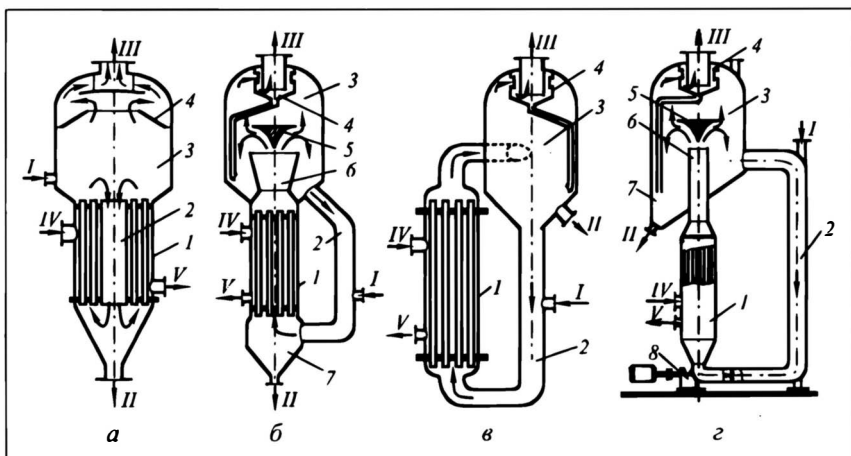


Рис. 9.1. Выпарные аппараты с естественной (а — в) и принудительной (г) циркуляцией:

а — с центральной циркуляционной трубой, б — с вынесенной циркуляционной трубой, в — с вынесенной греющей камерой;

1 — греющая камера, 2 — циркуляционная труба, 3 — сепаратор, 4 — брызгоуловитель, 5 — отбойник, 6 — труба вскипания, 7 — солеотделитель, 8 — насос с электродвигателем;

I — исходный раствор, II — упаренный раствор, III — вторичный пар, IV — греющий пар, V — конденсат

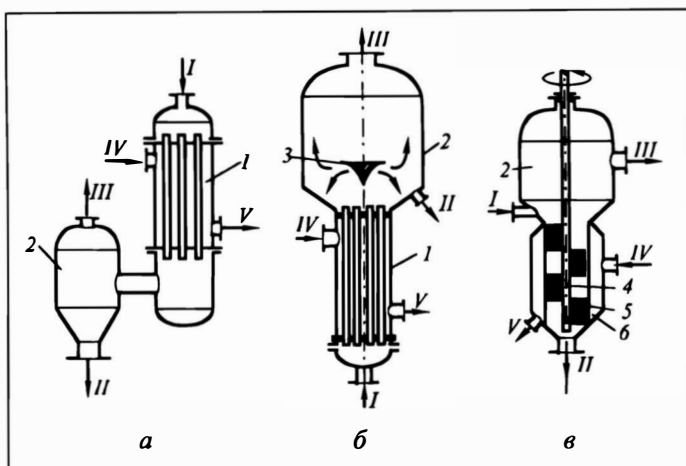


Рис. 9.2. Пленочные выпарные аппараты:

*а* — с нисходящей пленкой, *б* — с восходящей пленкой, *в* — роторный пленочный испаритель;

1 — греющая камера, 2 — сепаратор, 3 — отбойник, 4 — ротор, 5 — лопасти, 6 — паровая рубашка.

Обозначения потоков I—V такие же, как на рис. 9.1

направления скорости парового потока. Под действием инерционной силы капли жидкости достигают поверхности сепаратора и стекают вниз либо по стенкам, либо по специальной отводящей трубе. На рис.9.1, *б*, *в* представлен брызгоуловитель циклонного типа. За счет тангенциального ввода пара в кольцевое пространство брызгоуловителя капли жидкости под действием центробежной силы отбрасываются к периферии, а затем стекают по трубе в основную массу кипящего раствора.

Наличие циркуляционной трубы обеспечивает направленную **естественную циркуляцию** раствора: вниз по циркуляционной трубе и вверх — по кипятильным трубам. Циркуляция обусловлена разностью плотностей парожидкостной смеси (в кипятильных трубах) и раствора (в циркуляционной трубе). Даже при центральном расположении циркуляционной трубы (внутри греющей камеры) устанавливается достаточно интенсивная естественная циркуляция за счет разности плотностей. Дело в том, что удельная (приходящаяся на единицу объема раствора) поверхность теплопередачи  $f_{уд}$  обратно пропорциональна диаметру трубы  $d$ :

$$f_{уд} = \frac{\text{поверхность теплопередачи одной трубы}}{\text{объем жидкости в одной трубе}} = \frac{\pi d l}{\frac{\pi d^2}{4} l} = \frac{4}{d} \quad [м^2/м^3].$$

Поэтому для труб с **большим** диаметром удельная поверхность теплопередачи **меньше**, а значит, меньше и доля паров, образующихся при кипении раствора. Следовательно, плотность парожидкостной смеси в широкой центральной циркуляционной трубе заметно больше, нежели в узких нагревательных трубах.

В случае необогреваемых (расположенных вне греющей камеры) циркуляционных труб (рис. 9.1,*б,в*) скорость циркуляции еще выше. Увеличение последней способствует интенсификации теплообмена, в первую очередь, за счет возраста-

ния коэффициента теплоотдачи со стороны кипящей жидкости. Кроме того, циркуляция раствора препятствует быстрому отложению твердой фазы (кристаллов, накипи) на стенках кипятильных труб, т.е. инкрустации поверхности теплообмена, повышающей термическое сопротивление, а значит, снижающей коэффициент теплопередачи от конденсирующегося пара к кипящему раствору.

Скорость циркуляции (скорость движения парожидкостной смеси в кипятильных трубах) зависит от свойств упариваемого раствора и расположения циркуляционной трубы: обычно это 0,3—0,6 м/с — для аппарата с центральной циркуляционной трубой и 0,5—1,0 м/с — для аппаратов с циркуляционной трубой, расположенной отдельно от греющей камеры. При таких скоростях циркуляции поверхность теплообмена все-таки инкрустируется (хотя и с меньшей скоростью, чем в отсутствие циркуляционной трубы). Поэтому выпарные аппараты подвергают периодической чистке (*пассивный* метод борьбы с инкрустацией). При этом чистку производят либо путем простого растворения солей, отложившихся на стенках, либо каким-либо механическим способом.

Пассивный метод борьбы с инкрустацией предполагает остановку работы аппарата на время его чистки, а это в случае непрерывного режима работы установки требует наличия резервного выпарного аппарата (точнее — греющей камеры).

Существенное снижение отложения солей в трубах достигается при использовании аппаратов с **вынесенной зоной кипения** (рис. 9.1,б). В таких аппаратах за счет увеличенного гидростатического давления столба жидкости несколько повышается температура кипения раствора; поэтому кипения *в трубах* греющей камеры *не происходит*, упариваемый раствор *лишь нагревается*. При выходе перегретого раствора из этих труб он попадает в зону пониженного гидростатического давления (**труба вскипания** б), где и происходит интенсивное его закипание (высвобождается теплота перегрева). Таким образом, уменьшается отложение накипи на теплообменной поверхности труб и, следовательно, увеличивается коэффициент теплопередачи и время эксплуатации аппарата между чистками поверхности. Для обеспечения нормальной работы таких аппаратов очень важно отделить выкристаллизовавшиеся твердые частицы из циркулирующего потока раствора перед его входом в нагревательную камеру. Такое отделение твердых частиц происходит в **солеотделителях**, располагаемых либо в нижней части выпарного аппарата (поз. 7 на рис. 9.1,б), либо в верхней (рис. 9.1,в) — после выхода парожидкостной смеси из трубы вскипания.

Метод борьбы с инкрустацией теплообменной поверхности с помощью трубы вскипания более эффективен, но не исключает ее полностью (инкрустируются верхние концы нагревательных труб и труба вскипания). Желательно не допустить инкрустации поверхности на всем пути движения раствора.

Этого можно добиться применением **принудительной циркуляции** раствора (*активный* метод борьбы с инкрустацией) с помощью пропеллерного (осевого) или центробежного насоса *в* (рис. 9.1,г). Опыт показывает, что при достаточно высоких скоростях циркуляции раствора в кипятильных трубах (2,5—3,0 м/с) инкрустация поверхности практически полностью отсутствует даже при концентрировании кристаллизующихся растворов. Причиной этого являются два эффекта. Во-первых, быстро циркулирующий раствор просто не успевает закристаллизоваться в трубах, он лишь перегревается в них, вскипая за пределами труб (даже при отсутствии трубы вскипания, тем более — при ее наличии). Во-вторых, *свежевыпавшие* кристаллы (если таковые все же появляются на стенках на выходе кипящего раствора из теплопередающих труб) *смываются* потоком циркулирующего раствора, движущегося с большой скоростью (2—3 м/с). Выпарные аппараты с принудительной циркуляцией могут быть выполнены с соос-

ной (как показано на рис. 9.1,з) или вынесенной греющей камерой; они могут иметь также трубу вскипания и солеотделитель (см. рис. 9.1,з). В аппаратах с принудительной циркуляцией наиболее высокий коэффициент теплопередачи (он достаточно высок даже при выпаривании вязких концентрированных растворов). К недостаткам выпарных аппаратов с принудительной циркуляцией следует отнести расход энергии, связанный с необходимостью работы циркуляционного насоса. Отметим также жесткие условия работы насоса: высокие температуры, нередко агрессивные среды, повышенная опасность возникновения *кавитации* при перекачке *кипящей* жидкости.

Аппараты с принудительной циркуляцией применяют в тех случаях, когда нет другого выхода, а также при выпаривании дорогих растворов, когда затраты энергии на циркуляцию не могут ощутимо увеличить себестоимость продукта (упаренного раствора).

Рассмотренные выше конструкции выпарных аппаратов с циркуляцией раствора по структуре движения в них жидкости близки к моделям идеального перемешивания, поэтому время пребывания отдельных частиц жидкости в аппарате различно (некоторых — бесконечно большое). Это не позволяет выпаривать в них термолabileльные растворы.

Для выпаривания термолabileльных, а также вспенивающихся растворов используют **плочные аппараты** (рис. 9.2), в которых выпаривание до требуемой конечной концентрации осуществляется за *один проход кипящего раствора по кипящим трубам*. Для обеспечения заданных пределов изменения концентраций упариваемых растворов кипящие трубы делают длинными (6—10 м). Жидкостная пленка раствора в плочных аппаратах движется, как правило, *прямоточно* с образующимся вторичным паром. При этом различают *нисходящий* прямоток (рис. 9.2,а) и *восходящий* (рис. 9.2,б). В последнем случае перемещение жидкостной пленки вверх происходит за счет поверхностного трения вторичного пара, движущегося с большой скоростью.

Аппарат (рис. 9.2,б) работает следующим образом. Кипящие трубы заполняются поступающим снизу раствором примерно на  $1/4 - 1/5$  их высоты. Подаваемый в межтрубное пространство греющий пар вызывает интенсивное кипение раствора в трубах. Подчеркнем необходимость применения здесь нагревательных труб *малого* диаметра, обеспечивающих высокую степень парообразования и большую скорость пара в них.

Скорость вторичного пара внутри труб настолько велика, что за счет сил трения на границе пар—жидкость он увлекает тонкую пленку раствора, перемещая ее вверх до сепаратора, где происходит отделение пара от упаренного раствора.

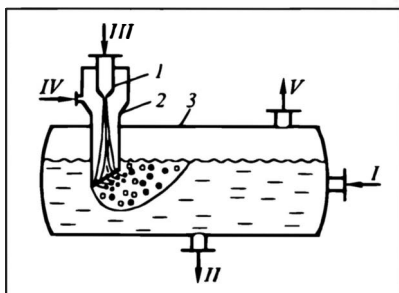
Таким образом, в плочных выпарных аппаратах упаренный (до требуемой концентрации) раствор получается при *однократном* его проходе через греющую камеру. В этих аппаратах циркуляция отсутствует, а поэтому время пребывания отдельных элементов жидкости в аппарате фиксировано (особенно в аппаратах с нисходящей пленкой, когда можно избежать большого объема свежего раствора в распределителе). Кратковременный контакт раствора с поверхностью нагрева и высокие значения коэффициентов теплопередачи (вследствие интенсивной теплоотдачи от стенки трубок к кипящим пленкам жидкости) — основные преимущества плочных выпарных аппаратов. К их недостаткам относят: большую высоту, высокую чувствительность к изменениям нагрузок по жидкости и к содержанию твердых частиц в ней. При слишком малых нагрузках по жидкости не удастся достичь полной смачиваемости всей поверхности теплопередачи. Это может приводить к местным перегревам, выделению твердых осадков.

Для выпаривания термолabileльных и вязких растворов, а также при необходимости ведения процесса до получения *сухого остатка* все более широкое применение находят **роторные плочные испарители** (рис. 9.2,в). Основным рабочим органом в них является ротор — вертикальный вал с насаженными на

Рис. 9.3. Барботажный выпарной аппарат с погружной горелкой:

1 — форсунка, 2 — погружная горелка, 3 — корпус аппарата;

I — исходный раствор, II — упаренный раствор, III — топливо, IV — воздух, V — дымовые газы



него лопастями. Ротор вращается с числом оборотов, обеспечивающим окружную скорость на конце лопасти около 3 м/с. Вращающиеся лопасти частично срезают пленку жидкости, образуя утолщение ("валик") перед ними. Утолщенная пленка стекает вниз с большей скоростью, нежели естественная пленка. Таким образом, вращающийся ротор способствует перемещению раствора вниз. Обогрев аппарата производится с помощью нагревательной рубашки б для теплоносителя, а образующийся при кипении раствора вторичный пар движется вверх (как показано на рис. 9.2, в) — противотоком к стекающей жидкости — и отводится через сепаратор.

Время контакта раствора с поверхностью нагрева в роторных испарителях зависит от многих факторов (производительность, вязкость раствора, скорость вращения ротора и др.) и составляет обычно 5—25 с. Важнейшими достоинствами этих аппаратов являются: кратковременный контакт раствора с поверхностью нагрева (что очень важно при выпаривании термолабильных веществ); возможность выпаривания не только высоковязких (до 0,3 мПа·с), но и кристаллизующихся растворов вплоть до получения сухого остатка. К недостаткам относят сложность конструкции (привода) и дополнительный расход энергии.

Кроме вышеупомянутых *трубчатых* выпарных аппаратов иногда применяют **выпарные аппараты емкостного типа**. Среди них выпарные аппараты с поверхностью теплообмена в виде рубашки или *змеевика* используются довольно редко из-за низкого коэффициента теплопередачи в них. Возможности образования застойных зон и ограниченной теплообменной поверхности на единицу рабочего объема. Для агрессивных растворов (серная, фосфорная, соляная кислоты, сульфаты и хлориды некоторых металлов) весьма эффективными оказались **аппараты контактного типа**: например, аппарат с погружной горелкой (рис. 9.3), в котором образующиеся при сгорании газообразного топлива горячие газы барботируют непосредственно через жидкость. При этом создаются хорошие условия (большая межфазная поверхность) для интенсивного теплообмена между дымовыми газами и жидкостью. Достоинством таких барботажных выпарных аппаратов является возможность их изготовления из обычной углеродистой стали. Однако необходима, естественно, внутренняя футеровка такого аппарата антикоррозионными материалами — керамикой, графитом, резиной, пластмассами и т.п.

Более детально конструкции выпарных аппаратов (упомянутых выше и других) и описание их работы приведены в учебной и справочной литературе\*.

### 9.3. ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРОЦЕССА ВЫПАРИВАНИЯ

При расчете процесса выпаривания будем использовать **массовую абсолютную концентрацию** вещества в растворе  $a$  ( $\text{кг}$  твердого вещества)/( $\text{кг}$  раствора); в технических заданиях при

\* См., например, [3, 4, 10], а также отраслевые каталоги, нормали.

описании процессов выпаривания концентрацию нередко выражают в процентах (100*a*, %). Очевидно, что концентрация вещества в растворе может изменяться от 0 до 1 (реально — до концентрации насыщения  $a_{\text{нас}}$ ) или, в процентах, от 0 до 100 (или 100*a*<sub>нас</sub>, %).

Произведение *количества* раствора *S* (кг) на его концентрацию *a* (кг твердого вещества)/(кг раствора) дает *количество* растворенного твердого вещества *Sa*:

$$S \text{ (кг раствора)} a \frac{\text{кг твердого вещества}}{\text{кг раствора}} = Sa \text{ (кг твердого вещества)}.$$

Соответственно, произведение *потока* раствора *S* (кг/с) на его концентрацию *a* дает *поток* *Sa* (кг/с) твердого вещества.

**Теплоемкость раствора** (смеси)  $c_{\text{см}}$  при отсутствии экспериментальных (справочных) данных рассчитывают по правилу аддитивности:

$$S c_{\text{см}} = S_{\text{ТВ}} c_{\text{ТВ}} + S_{\text{Р}} c_{\text{Р}}, \quad (\text{a})$$

где *S* — количество раствора, полученного при растворении  $S_{\text{ТВ}}$  кг твердого вещества в  $S_{\text{Р}}$  кг растворителя;  $c_{\text{см}}$ ,  $c_{\text{ТВ}}$  и  $c_{\text{Р}}$  — теплоемкости раствора, твердого вещества и растворителя соответственно.

Поделив все члены равенства (a) на *S*, получим

$$c_{\text{см}} = \frac{S_{\text{ТВ}}}{S} c_{\text{ТВ}} + \frac{S_{\text{Р}}}{S} c_{\text{Р}} = \frac{S_{\text{ТВ}}}{S} c_{\text{ТВ}} + \frac{S - S_{\text{ТВ}}}{S} c_{\text{Р}},$$

или

$$c_{\text{см}} = a c_{\text{ТВ}} + (1 - a) c_{\text{Р}}, \quad (9.1)$$

где  $a = S_{\text{ТВ}}/S$  — концентрация твердого вещества в растворе.

Следует иметь в виду, что расчет по аддитивности является приближенным, поскольку игнорирует теплоту смешения (последняя не всегда пренебрежимо мала).

Правило аддитивности в равной мере применимо и при смешении  $S_1$  кг раствора концентрации  $a_1$  (с теплоемкостью  $c_1$ ) с  $W$  кг растворителя теплоемкостью  $c_{\text{Р}}$ :

$$S_0 c_0 = S_1 c_1 + W c_{\text{Р}}, \quad (9.2)$$

где  $S_0 = S_1 + W$  — количество полученного при смешении раствора концентрации  $a_0$  (меньшей, чем  $a_1$ );  $c_0$  — его теплоемкость.

Заметим, что теплоемкости  $c_0$  и  $c_1$  могут быть рассчитаны по формуле (9.1).

Важнейшим параметром процесса выпаривания является температура кипения растворов  $t_{\text{к}}$ . Она зависит от химической природы растворенного твердого вещества и растворителя, причем  $t_{\text{к}}$  растет с повышением давления над раствором и с

увеличением концентрации растворенного вещества. От температуры кипения раствора в значительной степени зависят выбор теплоносителя (и его параметров), расход теплоты и теплоносителя, движущая сила процесса теплопередачи  $\Delta t$  и величина необходимой поверхности теплопередачи  $F$ .

Разность между температурами кипения раствора  $t_k$  и чистого растворителя  $t_p$  при одинаковом давлении получила название **температурной депрессии**  $\delta = t_k - t_p$  для раствора данной концентрации  $a$ .

В справочной литературе обычно приводятся экспериментально найденные температуры кипения или депрессии растворов различных солей при *атмосферном* давлении — в виде таблиц или графиков  $t = t(a)$ , а также  $\delta = \delta(a)$ ; такие температуры кипения и температурные депрессии называют **стандартными** и обозначают  $t_{ст}$  и  $\delta_{ст}$ .

Совершенно очевидно, что экспериментально определить  $t_k$  или  $\delta$  для широкого набора растворов веществ при разных их концентрациях, да еще при множестве различных давлений — крайне затруднительно. Поэтому следует искать методы аналитического пересчета  $t_{ст}$ ,  $\delta_{ст}$  на  $t$ ,  $\delta$  при переходе к давлению, существенно отличающимся от атмосферного. Заметим, что по разным причинам (о них скажем позднее) процесс выпаривания зачастую выгоднее вести не при атмосферном давлении, а под вакуумом или при избыточном давлении.

В случае рабочего давления, отличного от атмосферного, температуры кипения раствора  $t_k$  и чистого растворителя  $t_p$  отличаются от стандартных в *большую* (при  $p > 1 \text{ атм}$ ) и в *меньшую* (при  $p < 1 \text{ атм}$ ) стороны. При этом значения  $t_p$  находят по таблицам насыщенных паров для чистого растворителя (если растворитель — вода, то по таблицам для насыщенного водяного пара) или имеющимся расчетным соотношениям: получают для воды  $t_p > 100^\circ\text{C}$  при  $p > 1 \text{ атм}$  и  $t_p < 100^\circ\text{C}$  при  $p < 1 \text{ атм}$ . Если рабочее давление мало отличается от атмосферного (например, на 0,01—0,03 МПа; величина такого отклонения определяется допускаемой погрешностью расчета), то можно приближенно принять, что рабочая депрессия близка к стандартной:  $\delta \approx \delta_{ст}$ ; тогда рабочая температура кипения

$$t_k = t_p + \delta \approx t_p + \delta_{ст}. \quad (6)$$

Но в химической технологии процесс выпаривания нередко проводят при давлениях над кипящим раствором в несколько атмосфер (обычно до 5—6 ат, т.е. 0,5—0,6 МПа) либо при существенном разрежении (остаточное давление, т.е. рабочее давление, 0,02—0,01 МПа и даже несколько ниже). В этих случаях от стандартного значения заметно отличается не только



температура кипения чистого растворителя  $t_p$ , но и величина депрессии; поэтому выражение (б) с использованием  $\delta_{\text{ст}}$  становится неточным — здесь требуется более строгая методика расчета  $t_k$  и/или  $\delta$ .

При давлениях, заметно отличающихся от атмосферного, расчет  $t_k$  и  $\delta$  следует вести на основе уравнения Кирхгофа:

$$\frac{dQ}{dW} = RT^2 \frac{\partial \ln(p/p_s)}{\partial T} . \quad (9.3)$$

В этом уравнении  $dQ$  — количество теплоты, выделяющейся (поглощающейся) при добавлении  $dW$  кг растворителя к раствору, содержащему 1 кг растворенного вещества в  $W$  кг растворителя;  $T$  — температура кипения раствора (подчеркнем: здесь — в градусах абсолютной шкалы);  $R = R_y/M$  — газовая постоянная для растворителя ( $M$  — его молярная масса,  $R_y$  — универсальная газовая постоянная);  $p$  — рабочее давление;  $p_s$  — упругость насыщенного пара *растворителя* при температуре кипения *раствора* (естественно,  $p_s > p$ , так как  $t_k > t_p$ ). Заметим: величины  $p$  и  $t_p$ ,  $p_s$  и  $t$  связаны термодинамическими соотношениями (типа Клапейрона — Клаузиуса или Антуана); эти связи более точно заданы таблицами насыщенных паров (в случае воды — весьма подробными таблицами).

Обозначим:  $dQ/dW \equiv Q_d$  — дифференциальная теплота растворения. Она практически не зависит от температуры. Тогда (9.3) можно переписать, разделив переменные и заменив частные производные обыкновенными (так как осталась единственная независимая переменная  $T$ ):

$$\frac{Q_d}{R} \frac{dT}{T^2} = d \ln \frac{p}{p_s} . \quad (в)$$

Интегрируя (в) от нормальных (стандартных) условий ( $T_{\text{ст}}$  и  $p_{\text{ст}}$ ) до рабочих ( $T$  и  $p$ )

$$\int_{T_{\text{ст}}}^T \frac{Q_d}{R} \frac{dT}{T^2} = \int_{p_{\text{ст}}}^p d \ln \frac{p}{p_s} ,$$

получаем

$$\frac{Q_d}{R} \left( \frac{1}{T_{\text{ст}}} - \frac{1}{T} \right) = \ln \frac{p}{p_s} - \left( \ln \frac{p}{p_s} \right)_{\text{ст}} .$$

Отсюда

$$\ln \frac{p}{p_s} = \left( \ln \frac{p}{p_s} \right)_{\text{ст}} - \frac{Q_d}{R} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_{\text{ст}}} \right) . \quad (г)$$

При известном значении  $Q_d$  из выражения (г) может быть найдена температура кипения раствора  $T$  при любом давлении  $p$

над раствором — по известной температуре кипения раствора  $T_{\text{ст}}$  при стандартном (атмосферном) давлении.

Для разбавленных растворов, когда  $Q_d \rightarrow 0$ , а также для некоторых растворов, характеризующихся крайне низкими значениями  $Q_d$  (обычно это растворы с малой температурной депрессией  $\delta$ ), выражение (г) обращается в *правило Бабо*: для раствора данной концентрации при изменении рабочего давления  $p$

$$\frac{p}{p_s} = \left( \frac{p}{p_s} \right)_{\text{ст}} = \text{const (константа Бабо)}. \quad (9.4)$$

Таким образом, согласно правилу Бабо, *отношение давления паров растворителя над раствором  $p$  к давлению паров над чистым растворителем  $p_s$  при температуре кипения раствора не зависит от рабочего давления и температуры его кипения.*

Определение температуры кипения раствора  $t_k$  при любом рабочем давлении  $p$  не вызывает затруднений, для этого следует:

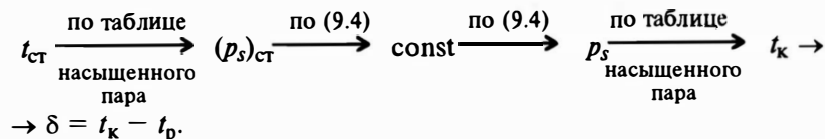
— по известной температуре кипения раствора в стандартных условиях  $t_{\text{ст}}$  найти величину  $(p_s)_{\text{ст}}$  и рассчитать константу Бабо;

— при заданном рабочем давлении  $p$  рассчитать величину  $p_s$ ;

— по  $p_s$  найти искомую температуру кипения раствора  $t_k$ ;

— если необходимо, определить депрессию в *рабочих* условиях:  $\delta = t_k - t_p$ .

Алгоритм такого расчета может быть представлен схемой:



При использовании правила Бабо для концентрированных растворов [точнее, в тех случаях, когда величина  $Q_d$  существенна и вторым слагаемым в правой части уравнения (г) пренебречь нельзя] в полученный результат — величину  $t_k$  по Бабо — должна быть внесена поправка  $\Delta\delta$ .

Отыскание  $Q_d$  связано со значительными техническими трудностями: значения  $Q_d$  известны лишь для некоторых растворов; нередко по имеющимся экспериментальным данным требуются громоздкие пересчеты для нахождения  $Q_d$ . Поэтому при определении рабочих температурных депрессий для концентрированных растворов широко используются эмпирические поправки. Наибольшее распространение для случая  $p < 1$  атм получила таблица Стабникова, приводимая в ряде учебников и справочников\*. Нужно, однако, иметь в виду следующее:

— величины этих поправок основаны на экспериментальных исследованиях ограниченного числа объектов;

\* Например, [3, 6, 8].

— таблица не охватывает всех практически интересных диапазонов изменения отношений  $p/p_s$ , рабочих давлений (в частности, давлений более 1 атм) и концентраций;

— в ряде случаев поправки неточны (например, для растворов с большой температурной депрессией при малых абсолютных давлениях).

Наконец, автор таблицы предложил ее совсем не для расчета поправок, а для оценки *максимальных погрешностей* при использовании правила Бабо.

Свободен от перечисленных недостатков метод определения поправки  $\Delta\delta$ , базирующийся непосредственно на уравнении (г). Согласно этому методу, температурная депрессия  $\delta$  при любом рабочем давлении может быть вычислена по формуле

$$\delta = \delta_B - (1 + \delta_{ст}/T_{ст})\varphi_* Q_d, \quad (д)$$

где  $\delta_B$  — температурная депрессия, определяемая по правилу Бабо;  $(1 + \delta_{ст}/T_{ст}) \varphi_* Q_d \equiv \Delta\delta$  — поправка к температурной депрессии;  $\varphi_*$  — корректирующий множитель, зависящий от рабочих температуры и давления:

$$\varphi_* \equiv \frac{T}{r} \frac{T - T_{ст}}{T_{ст}};$$

$T \equiv (t_p + 273,2)K$  и  $T_{ст} \equiv (t_{ст}^p + 273,2)K = 373,2K$  — температуры кипения растворителя при рабочем и стандартном давлениях;  $r$  — теплота парообразования растворителя при *рабочих* условиях.

Знак и величина поправки  $\Delta\delta$  зависят как от величины и знака  $Q_d$ , так и от величины и знака корректирующего множителя  $\varphi_*$ . Значения дифференциальных теплот дегидратации  $Q_d$  для некоторых солей приведены в Приложении 9.1, а значения  $\varphi_*$  (с целью облегчения расчетов) — в Приложении 9.2 как по рабочим температурам кипения растворителя  $t_p$  ( $^{\circ}C$ ), так и по рабочим давлениям  $p$  (кПа).

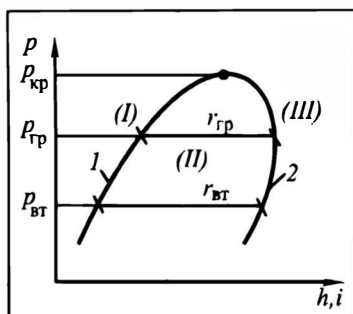
Температура кипения раствора по высоте нагревательных труб, строго говоря, не является постоянной даже в аппаратах с интенсивной циркуляцией — из-за дополнительного гидростатического давления вышерасположенных слоев кипящей жидкости и соответствующего увеличения температуры насыщения. Строгий расчет так называемой *гидростатической депрессии* затруднителен в связи с невозможностью точного расчета протяженности зоны (нижняя часть нагревательных труб), где раствор не кипит, а только нагревается. Кипение раствора в трубах начинается лишь при достижении раствором температуры насыщения на некотором расстоянии от низа труб. Величина же гидростатического давления в этом месте зависит от плотности образующейся при кипении парожидкостной смеси. Гидростатическая депрессия, как правило, не играет существенной роли при расчете выпарных аппаратов, поэтому ее обычно не учитывают.

Температура вторичного пара  $\theta$  и его энтальпия  $i$  должны быть известны при тепловом расчете выпарного аппарата. Реально она ниже температуры кипения раствора, но несколько выше температуры кипения чистого растворителя  $t_p$ , соответствующей давлению над кипящим раствором. Дело в том, что

Рис. 9.4. Диаграмма  $p - h, i$ :

1 и 2 — нижняя и верхняя пограничные кривые;

I — недогретая до температуры кипения жидкость, II — парожидкостная смесь, III — перегретый пар



пузырьки пара, образующиеся при температуре, близкой к  $t_p$ , проходят через кипящий при температуре  $t_k$  раствор и *перегреваются*, хотя и не успевают нагреться до температуры  $t_k$ . Кроме того, различные пузырьки

пара проходят в кипящем растворе разным путем и поэтому перегреваются сверх  $t_p$  по-разному. Это создает известную неопределенность при расчете температуры вторичного пара  $\theta$ . Однако в целом теплота перегрева  $c_{п}(\theta - t_p)$  мала в сравнении с энтальпией  $i$  и теплотой парообразования  $r$ , и ею, как правило, можно пренебречь. Поэтому в дальнейшем будем считать вторичный пар насыщенным — соответственно рабочему давлению в выпарном аппарате (в сепараторе), а его температуру  $\theta$  равной  $t_p$ . В аспекте последующей возможности использования потенциала вторичного пара небольшая расчетная ошибка при таком допущении идет в запас. Итак,

$$\theta = t_k - \delta. \quad (9.5)$$

Если для выпаривания *водных* растворов в качестве греющего используют водяной насыщенный пар, то в результате такого процесса получается тоже *водяной* пар, но более низкого потенциала (давления, температуры). Иначе говоря, выпарной аппарат является своеобразным трансформатором пара, или, как его иногда называют, **умформером**. Причем при расходе 1 кг греющего пара получается лишь 0,85—0,9 кг вторичного пара. Это объясняется прежде всего увеличением значений теплоты парообразования (конденсации) при уменьшении давления (см. диаграмму  $p - h, i$  на рис. 9.4). На этой диаграмме теплота конденсации (испарения, парообразования)  $r$  при определенном давлении изображается горизонтальным отрезком между линиями кипящей жидкости 1 и сухого насыщенного пара 2, поэтому выделяющейся при конденсации 1 кг греющего пара (давлением  $p_{гр}$ ) теплоты  $r_{гр}$  недостаточно для испарения 1 кг растворителя при давлении  $p_{вт}$ . Из диаграммы видно, что  $r_{гр} < r_{вт}$ , поскольку  $p_{гр} > p_{вт}$  (заметим, что при критическом давлении  $p_{кр}$  вообще  $r_{кр} = 0$ ). Естественно, если в процессе выпаривания теплота конденсации греющего пара расходуется еще на догрев раствора до температуры кипения, а

также частично теряется в окружающую среду, то реальное количество образующегося пара на 1 кг греющего пара может быть и меньше указанных выше цифр.

В процессах выпаривания иногда кипящий (или некипящий) раствор попадает в область (аппарат) с пониженным давлением, причем это давление может быть столь низким, что температура кипения раствора при этом давлении ( $t$ ) оказывается ниже температуры поступающего рабочего раствора ( $t_0$ ). Иными словами, поступающий раствор *перегрет* относительно температуры кипения при пониженном давлении. Поэтому происходит интенсивное (практически — мгновенное) испарение части жидкости за счет высвобождаемой теплоты перегрева. Такое явление получило название **самоиспарение**. Доля испарившейся жидкости  $e$  зависит, естественно, от величины перегрева, которая определяется начальной температурой раствора  $t_0$  и разностью давлений.

Оценим долю пара  $e$ , образующегося при самоиспарении. Сначала определим ее для случая **чистой жидкости** (без растворенного в ней вещества). Пусть 1 кг жидкости (теплоемкостью  $c_0$ ) при температуре  $t_0$  подан в аппарат с пониженным давлением, при котором эта жидкость кипит при температуре  $t < t_0$ . За счет теплоты перегрева часть жидкости ( $e$ ) превратится в пар, а оставшаяся часть  $(1 - e)$  будет иметь температуру  $t$ . Тепловой баланс явления при отсутствии потерь теплоты в окружающую среду запишется:

$$1 \cdot c_0 t_0 - (1 - e) c t - e i = 0, \quad (е)$$

где  $c$  — теплоемкость кипящей жидкости при температуре  $t$ ;  $i = r + c t$  — энтальпия пара;  $r$  — теплота парообразования жидкости при температуре  $t$ .

Подставляя в (е) выражение для  $h$ , после преобразований получаем долю испарившейся жидкости  $e$ :

$$e = \frac{c_0 t_0 - c t}{r}. \quad (ж)$$

Если теплоемкость жидкости мало изменяется с температурой (часто встречающийся случай), то долю испаряемой жидкости находят по упрощенной формуле:

$$e = \frac{c_0(t_0 - t)}{r}. \quad (з)$$

Для определения доли испаряющегося растворителя в случае **растворов** возьмем при температуре  $t_0$  1 кг раствора с концентрацией твердого вещества в нем  $a_0$  и теплоемкостью  $c_0$ , определяемой по формуле (9.1), и направим этот раствор в аппарат с пониженным давлением, при котором раствор данной концентрации кипит при температуре  $t$ , меньшей  $t_0$ . За счет теплоты перегрева испарится  $e$  кг растворителя, в результате концентрация раствора увеличится до значения  $a$ . При этом соответственно повысится и температура кипения раствора — до значения  $t$ . Тепловой баланс (е) в этом случае останется без изменений. Долю испарившейся жидкости здесь следует рассчитывать по формуле (ж), так как теплоемкости исходного  $c_0$  и конечного  $c$  растворов существенно изменяются при изменении концентраций — в ходе самоиспарения от  $a_0$  до  $a$ . Концентрация  $a$  зависит от доли самоиспарения  $e$ , а температура кипения  $t$  — от  $a$  (причем по-своему для раствора каждого вещества). Поэтому расчет по формуле (ж) может

быть выполнен только методом последовательных приближений: задаваясь, например, долей отгона  $e$ , рассчитывая затем концентрацию  $a$  по формуле (9.6) следующего раздела, теплоемкость  $c$  по формуле (9.1) и проверяя  $e$  по формуле (ж).

Отметим, что в случаях большого самоиспарения раствора (при большом перепаде давлений, а следовательно, и температур) возможно получение суммарно более 1 кг вторичного пара на каждый кг греющего.

## 9.4. СХЕМА РАБОТЫ ВЫПАРНЫХ АППАРАТОВ. КОЛИЧЕСТВО УДАЛЯЕМОГО РАСТВОРИТЕЛЯ

### 9.4.1. Типовая схема выпарного аппарата. Обозначение параметров процесса

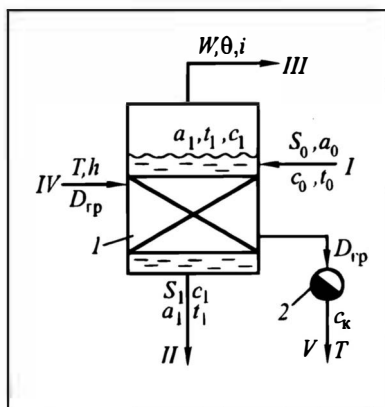
Независимо от конкретной конструкции и режима работы выпарного аппарата представим его условно схемой, показанной на рис. 9.5. Пометим крестом греющую камеру, в *межтрубное* пространство которой подводится насыщенный греющий пар в количестве  $D_{гр}$  при температуре  $T$  (здесь и далее в  $^{\circ}\text{C}$ ) и с энтальпией  $h$ . После конденсации пара образующийся конденсат (при использовании водяного пара — вода) отводится в том же количестве  $D_{гр}$  из нижней части этого пространства (теплоемкость конденсата  $c_k$  при той же температуре конденсации  $T$ ). Исходный раствор с концентрацией  $a_0$  при температуре  $t_0$  в количестве  $S_0$  поступает в *трубное* пространство выпарного аппарата. После удаления из раствора части растворителя  $W$  в виде вторичного пара (его температура  $\theta$ , энтальпия  $i$ ) получают упаренный раствор в количестве  $S_1 = S_0 - W$  при температуре кипения  $t_1$ , соответствующей концентрации  $a_1$  упаренного раствора. При выполнении тепловых расчетов выпарного аппарата необходимо также располагать теплоемкостями  $c_0$  и  $c_1$  исходного и упаренного растворов.

Специально подчеркнем, что характерной особенностью большинства конструкций выпарных аппаратов является интенсивное (практически — идеальное) перемешивание кипящего раствора и, следовательно, практически полное выравнива-

Рис. 9.5. Типовая схема выпарного аппарата и основные потоки:

1 — выпарной аппарат, 2 — конденсатотводчик

Обозначения потоков I — V такие же, как на рис. 9.1



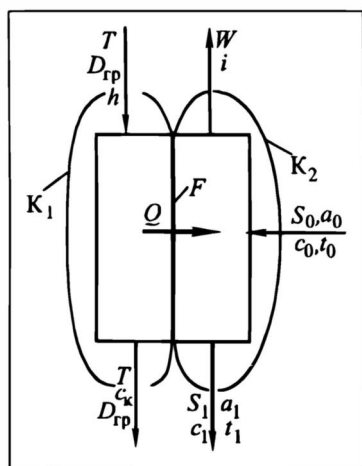


Рис. 9.6. Расчетная схема выпарного аппарата

ние его свойств (температуры кипения, концентрации, теплоемкости) по всему объему. Именно поэтому параметры ( $t$ ,  $a$ ,  $c$ ) уходящего упаренного раствора принимаются равными таковым в зоне кипения раствора в аппарате.

Возможна организация *непрерывной* работы аппарата, представленного на рис. 9.5. При этом *непрерывно* подается  $S_0$  кг/с исходного раствора и  $D$  кг/с греющего пара и *непрерывно* отводятся потоки  $W$  кг/с —

вторичного пара и  $S_1$  кг/с — упаренного раствора. При *периодической* работе выпарного аппарата после заливки  $S_0$  кг исходного раствора и удаления из него  $W$  кг вторичного пара упаренный раствор в количестве  $S_1$  кг остается в аппарате. Количество греющего пара и получающегося конденсата будет при этом определяться за весь процесс выпаривания:  $D_{гр}$  кг.

Весьма удобной для тепловых расчетов выпарного аппарата является схема, представленная на рис. 9.6, которая отражает изменение энтальпий в потоках, *разделенных* поверхностью теплообмена  $F$ . Эта расчетная схема в равной степени справедлива как для *непрерывного* процесса (здесь материальные потоки в кг/с), так и для *периодического* (тогда материальные потоки — в кг за весь процесс). Соответственно, через поверхность теплообмена  $F$  от греющего пара к кипящему раствору передается: либо поток теплоты  $Q$  (Вт) — для непрерывного процесса, либо ее количество  $Q$  (Дж) — для периодического за весь период выпаривания.

#### 9.4.2. Определение количества (потока) удаляемого растворителя

Независимо от способа проведения процесса (непрерывно или периодически) поток или количество удаляемого растворителя для повышения концентрации вещества от  $a_0$  до  $a_1$  можно найти из материальных балансов для контура  $K_2$  на рис. 9.6 (за единицу времени для непрерывного процесса или за весь процесс — для периодического). Конечные расчетные выражения (соответственно в кг/с и кг) при этом получаются одинаковы-

ми. Поэтому ниже балансы записаны только для *непрерывного* процесса:

— по общему потоку рабочего раствора

$$+ S_0 - S_1 - W = 0, \quad (a)$$

— по растворенному веществу

$$+ S_0 a_0 - S_1 a_1 - W a_n = 0, \quad (б)$$

где в самом общем случае  $a_n$  — концентрация вещества во вторичном паре. Так как при выпаривании твердое вещество в подавляющем большинстве случаев практически нелетуче, то вторичный пар, очищаемый в брызгоулавливающих устройствах от капель жидкости, представляет собой пары чистого растворителя, т.е.  $a_n = 0$ .

Совместное решение (а) и (б) дает на основе производительности по исходному раствору (исключается  $S_1$ )

$$W = S_0 \left( 1 - \frac{a_0}{a_1} \right), \quad (9.6)$$

а по упаренному раствору (исключается  $S_0$ )

$$W = S_1 \left( \frac{a_1}{a_0} - 1 \right). \quad (9.6a)$$

Таким образом, при принятом нами способе выражения концентрации вещества в растворе количество удаляемого растворителя зависит не от разности концентраций ( $a_1 - a_0$ ), а от их отношения.

## 9.5. ВЫПАРНЫЕ АППАРАТЫ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ДЕЙСТВИЯ

Периодическое выпаривание применяется в производствах сравнительно небольшой производительности. По количеству затраченной теплоты на единицу продукции периодический процесс практически не отличается от непрерывного, а вот по поверхности нагрева (при одинаковом времени проведения процесса) возможна некоторая выгода. Дело в том, что в периодическом процессе по мере удаления растворителя температура кипения раствора увеличивается постепенно. А вместе с этим движущая сила процесса теплопередачи постепенно уменьшается, достигая минимального значения лишь при конечной концентрации раствора. В аппаратах же непрерывного действия кипит раствор конечной концентрации, и движущая сила процесса теплопередачи *всегда* минимальна. К недостат-



кам аппаратов периодического действия относят их громоздкость (заливается весь объем исходного раствора или его значительная часть), невысокую производительность, а также сложность в управлении: изменение параметров процесса во времени, неравномерная подача греющего пара, необходимость контроля текущей концентрации, меньшая стабильность в качестве продукта (колебания конечной концентрации от порции к порции и др.).

В ряде технологических задач в случае периодического процесса необходимо определить полное время  $\tau$  его проведения. Естественно предположить, что это время зависит от мощности подводимого теплового потока. Последняя зависит от поверхности теплообмена  $F$ . Таким образом, в периодических процессах основным расчетным параметром становится произведение  $F\tau$ .

Как правило, на выпаривание подается раствор при температуре ниже точки его кипения. Поэтому весь процесс можно (иногда условно) считать состоящим из двух разделенных во времени стадий: стадии нагрева до температуры кипения продолжительностью  $\tau_{\text{нгр}}$  и стадии выпаривания продолжительностью  $\tau_{\text{вып}}$ .

### 9.5.1. Периодическое выпаривание с однократной загрузкой исходного раствора в аппарат

Рассмотрим процесс выпаривания  $S_0$  кг раствора с начальной температурой  $t_{\text{н}}$  от исходной концентрации  $a_0$  до конечной  $a_1$  с помощью теплоносителя — насыщенного греющего пара температурой  $T$  (рис. 9.7, а). Весь процесс периодического выпаривания состоит из двух стадий: стадии нагрева и стадии собственно выпаривания. Сначала обратимся к статике процесса, т.е. определим расход теплоты на каждую из этих стадий.

На стадии нагрева температура раствора повышается от начальной  $t_{\text{н}}$  до температуры кипения  $t_0$  раствора исходной концентрации  $a_0$ . Уровень жидкости в аппарате на этой стадии практически не изменяется. Общее количество теплоты  $Q_{\text{нгр}}$ , расходуемой на нагрев раствора теплоемкостью  $c_0$  от  $t_{\text{н}}$  до  $t_0$ , очевидно, составляет

$$Q_{\text{нгр}} = S_0 c_0 (t_0 - t_{\text{н}}). \quad (\text{а})$$

При этом требуемое количество греющего пара определяется по формуле (7.16в):

$$D_{\text{н}} = \frac{Q_{\text{нгр}}}{h - c_{\text{к}} T} = \frac{Q_{\text{нгр}}}{r_{\text{гр}}}, \quad (\text{б})$$

где  $r_{\text{гр}} = h - c_{\text{к}} T$  — теплота конденсации греющего пара.

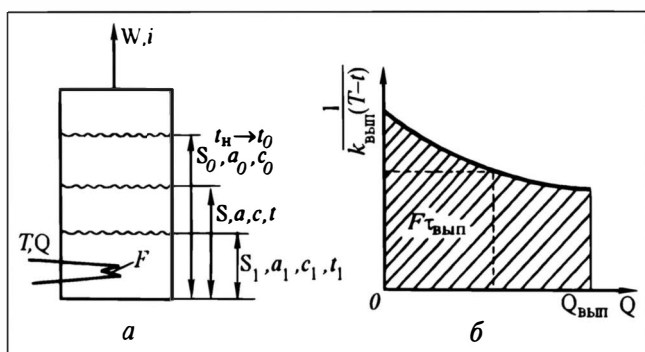


Рис. 9.7. К расчету периодического выпаривания при однократной загрузке исходного раствора:

$a$  — изменение уровня раствора в аппарате и параметров процесса на стадии выпаривания,  $b$  — графическое определение интеграла (9.10)

На стадии выпаривания от начальной концентрации  $a_0$  до конечной  $a_1$  необходимое количество теплоты найдем из теплового баланса для контура  $K_2$  (на рис. 9.6) за время  $\tau_{\text{вып}}$  всей этой стадии. В отсутствие Источников и Стоков теплоты

$$Q_{\text{вып}} - Wi = \underbrace{S_1 c_1 t_1 - S_0 c_0 t_0}_{\text{Накопление}}. \quad (\text{в})$$

Приход      Уход      Накопление

Используя правило аддитивности при определении теплоемкости раствора, имеем из (9.2):

$$S_1 c_1 = S_0 c_0 - W c_p. \quad (\text{г})$$

Подставляя выражение (г) в (в), после простых преобразований получаем

$$Q_{\text{вып}} = S_0 c_0 (t_1 - t_0) + W(i - c_p t_1). \quad (9.7)$$

Из (9.7) следует, что теплота на стадии выпаривания расходуется на нагрев исходного раствора (от начальной температуры кипения  $t_0$  до конечной  $t_1$ ) и на испарение  $W = S_0(1 - a_0/a_1)$  кг растворителя при температуре кипения  $t_1$  — при изменении его энтальпии от  $c_p t_1$  в растворе до  $i$  в виде вторичного пара. Заметим, что разность  $(i - c_p t_1)$  хоть и близка к теплоте испарения растворителя, но не равна ей (несколько меньше).

Количество греющего пара на стадии выпаривания определяется из теплового баланса для контура  $K_1$  (на рис.9.6) в отсутствие Источника и Стока теплоты:

$$\underbrace{D_{\text{вып}} h}_{\text{Приход}} - \underbrace{D_{\text{вып}} c_k T - Q_{\text{вып}}}_{\text{Уход}} = \underbrace{0}_{\text{Накопление}},$$

Приход

Уход

Накопление

откуда

$$D_{\text{вып}} = \frac{Q_{\text{вып}}}{h - c_{\text{к}} T} = \frac{Q_{\text{вып}}}{r_{\text{гп}}} \quad (9.8)$$

Найденные количества  $Q_{\text{нгр}}$  и  $Q_{\text{вып}}$  должны быть подведены последовательно через одну и ту же поверхность теплообмена  $F$ ; при этом продолжительность нагрева составляет  $\tau_{\text{нгр}}$ , а выпаривания —  $\tau_{\text{вып}}$ . Для определения длительности этих стадий рассмотрим **кинетику** процессов теплопереноса для каждой из стадий в отдельности.

Для **стадии нагрева** запишем уравнение теплопередачи за промежуток времени  $d\tau$  в произвольно выбранный момент ведения процесса, когда текущая температура раствора равна  $t$  ( $t_{\text{н}} \leq t \leq t_0$ ):

$$dQ = k_{\text{нгр}}(T - t)F d\tau,$$

где  $k_{\text{нгр}}$  — коэффициент теплопередачи от конденсирующегося пара к нагреваемому раствору (его приближенно можно считать неизменным во времени, т.е. не зависящим от температуры нагреваемого раствора);  $F$  — поверхность теплопередачи.

Так как здесь  $dQ = d(S_0 c_0 t) = S_0 c_0 dt$ , то

$$S_0 c_0 dt = k_{\text{нгр}}(T - t)F d\tau, \text{ или } F d\tau = \frac{S_0 c_0}{k_{\text{нгр}}} \frac{dt}{T - t}.$$

Если допустить, что в процессе нагрева раствора значения  $k_{\text{нгр}}$  и  $c_0$  изменяются несущественно (т.е. что теплофизические свойства нагреваемой жидкости слабо зависят от температуры), то последнее выражение легко интегрируется. Проинтегрируем его в пределах от  $\tau = 0$  и  $t_{\text{н}}$  до полного времени нагрева  $\tau_{\text{нгр}}$  и  $t_0$ :

$$F\tau_{\text{нгр}} = \frac{S_0 c_0}{k_{\text{нгр}}} \int_{t_{\text{н}}}^{t_0} \frac{dt}{T - t}.$$

Учитывая знак при  $t$  в знаменателе, после интегрирования получаем

$$F\tau_{\text{нгр}} = \frac{S_0 c_0}{k_{\text{нгр}}} \ln \frac{T - t_{\text{н}}}{T - t_0}. \quad (9.9)$$

Для **стадии выпаривания** уравнение теплопередачи за промежуток времени  $d\tau$  запишем аналогично тому, как это было сделано для стадии нагрева:

$$dQ = k_{\text{вып}}(T - t)F d\tau, \quad (д)$$

где  $t$  — текущая температура кипящего раствора ( $t_0 < t < t_1$ ).

Интегрирование этого уравнения осложнено тем, что в ходе процесса наряду с изменением температуры кипения раствора  $t$

(от  $t_0$  до  $t_1$ ) существенно изменяется и коэффициент теплопередачи  $k_{\text{вып}}$  (за счет изменения свойств упариваемого раствора при изменении его концентрации). В сочетании с уменьшением движущей силы процесса теплопередачи ( $T - t$ ) это приводит к сложной зависимости количества образующегося в единицу времени вторичного пара от продолжительности проведения процесса. В ходе этой стадии уровень жидкости в аппарате понижается. Неизменными в ходе этой стадии остаются лишь величины  $T$ ,  $h$  и  $i$ .

Будем отсчитывать время от начала стадии выпаривания и интегрировать уравнение (д) от  $\tau = 0$  и  $Q = 0$  до  $\tau = \tau_{\text{вып}}$  и  $Q = Q_{\text{вып}}$ :

$$F\tau_{\text{вып}} = \int_0^{Q_{\text{вып}}} \frac{dQ}{k_{\text{вып}}(T - t)} \quad (9.10)$$

Здесь  $Q_{\text{вып}}$  — полное количество теплоты на стадии выпаривания по (9.7), т.е. при изменении концентрации кипящего раствора от исходной  $a_0$  до конечной  $a_1$ .

Численное значение интеграла в правой части выражения (9.10) находят либо графически — как площадь под кривой  $1/[k_{\text{вып}}(T - t)] - Q$  в пределах от 0 до  $Q_{\text{вып}}$  (рис. 9.7, б), либо численно. Для установления зависимости  $1/[k_{\text{вып}}(T - t)]$  от  $Q$  необходимо рассчитывать коэффициенты теплопередачи  $k_{\text{вып}}$  (метод расчета коэффициента теплопередачи от конденсирующегося пара к кипящей жидкости подробно изложен в гл. 7) и температуру кипения  $t$  раствора при любой его текущей концентрации  $a$ , а также необходимое текущее значение теплоты  $Q_{\text{вып}}^{\text{тек}}$  на стадии выпаривания при доведении концентрации кипящего раствора от исходной  $a_0$  до текущей  $a$ . Очевидно, что для расчета  $Q_{\text{вып}}^{\text{тек}}$  можно воспользоваться формулой (9.7) с заменой  $t_1$  на текущее значение  $t$ , а также с учетом количества удаляемого растворителя  $W^{\text{тек}}$  при изменении концентрации раствора от  $a_0$  до текущей  $a$ :

$$W^{\text{тек}} = S_0 \left( 1 - \frac{a_0}{a} \right).$$

Построение одной точки кривой  $1/[k_{\text{вып}}(T - t)] - Q$  по найденным абсциссе и ординате показано на рис. 9.7, б штриховыми линиями.

Найденные по формулам (9.9) и (9.10) значения  $F\tau_{\text{нгр}}$  и  $F\tau_{\text{вып}}$  можно использовать для определения общей продолжитель-

ности процесса  $\tau_{\text{общ}} = \tau_{\text{нгр}} + \tau_{\text{вып}}$ . Естественно, что и

$$F\tau_{\text{общ}} = F\tau_{\text{нгр}} + F\tau_{\text{вып}}.$$

Располагая значением произведения  $F\tau_{\text{общ}}$ , можно при известной поверхности теплообмена  $F$  найти время  $\tau_{\text{общ}}$  проведения всего процесса, и наоборот: при заданной общей продолжительности процесса можно рассчитать (задача проектирования) необходимую поверхность теплопередачи  $F$ .

При сопоставлении  $Q_{\text{нгр}}$  и  $Q_{\text{вып}}$  видно, что, как правило, количество теплоты на стадии выпаривания значительно больше, чем на стадии нагрева. Это связано прежде всего с большими затратами теплоты на испарение растворителя, так как  $r_{\text{вт}} \gg c\Delta t$ . Поэтому стадия выпаривания существенно продолжительнее стадии нагрева.

Одним из существенных недостатков рассмотренного способа ведения периодического процесса является понижение уровня раствора в аппарате и возможное в связи с этим “оголение” части поверхности теплообмена в ходе выпаривания. Это приводит:

- к уменьшению работающей поверхности теплообмена;
- к инкрустации теплообменной поверхности (за счет выпаривания до сухого остатка капель раствора, попавших на оголенную поверхность) и понижению коэффициента теплопередачи инкрустированной поверхности в последующих циклах выпаривания.

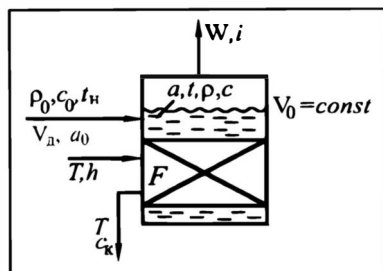
### 9.5.2. Периодическое выпаривание с постоянным уровнем раствора в аппарате

Для предотвращения “оголения” теплообменной поверхности периодическое выпаривание часто проводят с постоянным добавлением свежего раствора в количестве, достаточном для поддержания первоначального уровня (объема) раствора в аппарате. Такой процесс иногда еще называют **полунепрерывным**, или **дифференциальным**. Кстати, такой способ периодического выпаривания является одним из основных вариантов *вывода установки на непрерывный режим работы*.

Рассмотрим подробнее работу такого аппарата (рис. 9.8). В аппарат одновременно загружается  $V_0$  м<sup>3</sup> раствора начальной концентрации  $a_0$ , плотностью  $\rho_0$  и теплоемкостью  $c$  при температуре  $t_n$ . Сначала этот раствор нагревают до температуры кипения  $t_0$  (стадия нагрева), после чего начинается стадия выпаривания. При этом из аппарата постоянно *отводится растворитель* в виде вторичного пара, но чтобы *уровень раствора не понижался*, постоянно *добавляют свежий раствор* — разумеется, с первоначальной концентрацией  $a_0$  и температурой  $t_n$ .

Рис. 9.8. К расчету периодического выпаривания при постоянном уровне (объеме) раствора в аппарате:

на стадии нагрева  $t_n < t < t_0$ ;  
на стадии выпаривания  $t_0 < t < t_1$



**Стадия нагрева** исходного раствора (от  $t_n$  до  $t_0$ ) происходит здесь совершенно аналогично рассмотренной в разд. 9.5.1; расчетные зависимости (а), (б) и (9.9) в равной степени применимы и для рассматриваемой стадии процесса.

**Стадия выпаривания** при такой работе аппарата имеет свои особенности. В течение всей стадии будет удалено  $W$  кг растворителя (вторичного пара) и добавлено дополнительно  $V_d$  м<sup>3</sup> раствора. При этом концентрация в аппарате постепенно повысится от  $a_0$  до  $a_1$ . Соответственно будут изменяться параметры:  $t_0 \rightarrow t_1$ ,  $\rho_0 \rightarrow \rho_1$ ,  $c_0 \rightarrow c_1$ . Таким образом, конечный раствор при неизменном в течение всего процесса объеме  $V_0$  будет характеризоваться параметрами  $a_1$ ,  $\rho_1$ ,  $c_1$  и  $t_1$ .

Количество вторичного пара, полученного за весь процесс, найдем по формуле (9.6), учитывая, что  $S_0 = (V_0 + V_d)\rho_0$ , а масса растворенного вещества во всем свежем растворе ( $S_0 a_0$ ) равна его массе в упаренном ( $S_1 a_1 = V_0 \rho_1 a_1$ ), т.е.

$$(V_0 + V_d)\rho_0 a_0 = V_0 \rho_1 a_1.$$

Отсюда

$$(V_0 + V_d)\rho_0 = V_0 \rho_1 \frac{a_1}{a_0} \quad (\text{е}) \quad \text{и} \quad V_d = V_0 \left( \frac{\rho_1 a_1}{\rho_0 a_0} - 1 \right). \quad (\text{ж})$$

Из (9.6) с учетом выражения (е) получаем

$$W = (V_0 + V_d)\rho_0 \left( 1 - \frac{a_0}{a_1} \right) = V_0 \rho_1 \frac{a_1}{a_0} \left( 1 - \frac{a_0}{a_1} \right) = V_0 \rho_1 \left( \frac{a_1}{a_0} - 1 \right). \quad (\text{з})$$

Потребное количество теплоты  $Q_{\text{вып}}$  на всю стадию выпаривания (продолжительностью  $\tau_{\text{вып}}$ ) найдем из теплового баланса для контура  $K_2$  на рис. 9.6 (см. также рис. 9.8):

$$\underbrace{Q_{\text{вып}} + V_d \rho_0 c_0 t_n}_{\text{Приход}} - \underbrace{Wi}_{\text{Уход}} = \underbrace{V_0 \rho_1 c_1 t_1 - V_0 \rho_0 c_0 t_0}_{\text{Накопление}}. \quad (\text{и})$$

Отсюда

$$Q_{\text{вып}} = V_0 \rho_1 c_1 t_1 - V_0 \rho_0 c_0 t_0 - V_d \rho_0 c_0 t_n + Wi. \quad (\text{к})$$

С целью выявления физического смысла выражения (к) преобразуем его с учетом правила аддитивности теплоемкостей (9.2), записываемого для данного случая [см. также формулу (г) данного раздела] в виде

$$V_0 \rho_1 c_1 = (V_0 + V_d) \rho_0 c_0 - W c_p.$$

После подстановки этого выражения в первое слагаемое правой части выражения (к) получаем

$$Q_{\text{вып}} = (V_0 + V_d) \rho_0 c_0 t_1 - W c_p t_1 - V_0 \rho_0 c_0 t_0 - V_d \rho_0 c_0 t_H + W i,$$

или

$$Q_{\text{вып}} = V_0 \rho_0 c_0 (t_1 - t_0) + V_d \rho_0 c_0 (t_1 - t_H) + W (i - c_p t_1). \quad (\text{л})$$

Из (л) следует, что теплота на стадии выпаривания с добавлением свежего раствора для поддержания постоянного уровня расходуется:

— на *нагрев первоначально залитого раствора* ( $V_0 \rho_0$ , кг) от начальной температуры кипения  $t_0$  до конечной  $t_1$  (его нагрев от  $t_H$  до  $t_0$  учитывается на стадии нагревания);

— на *нагрев дополнительно подаваемого раствора* ( $V_d \rho_0$ , кг) от исходной температуры  $t_H$  до конечной температуры кипения  $t_1$ ;

— на *испарение*  $W$  кг *растворителя* при постоянной температуре кипения  $t_1$  — при изменении энтальпии растворителя от  $c_p t_1$  в растворе до  $i$  в виде вторичного пара.

Окончательное расчетное выражение для  $Q_{\text{вып}}$  получаем при подстановке выражений (ж) и (з) соответственно для  $V_d$  и  $W$ :

$$\begin{aligned} Q_{\text{вып}} = V_0 \rho_0 c_0 (t_1 - t_0) + V_0 \left( \frac{\rho_1 a_1}{\rho_0 a_0} - 1 \right) \rho_0 c_0 (t_1 - t_H) + \\ + V_0 \rho_1 \left( \frac{a_1}{a_0} - 1 \right) (i - c_p t_1). \end{aligned} \quad (9.11)$$

Подчеркнем, что определяемое по формуле (9.11) количество теплоты отвечает концентрированию раствора от начальной концентрации  $a_0$  до конечной  $a_1$ . Количество греющего пара при этом определяется по (9.8).

Вопрос о продолжительности ведения процесса в этом варианте периодического выпаривания в принципе решается так же, как и в предыдущем. Для стадии нагрева одновременно залитого исходного раствора ( $V_0 \rho_0$  кг) произведение  $F \tau_{\text{нгр}}$  рассчитывают по (9.9), а интеграл в (9.10) находят либо графически (рис. 9.7,б), либо численным методом. При этом текущее количество теплоты  $Q_{\text{вып}}^{\text{тек}}$  на стадии выпаривания при доведе-

нии концентрации кипящего раствора от исходной  $a_0$  до текущей  $a$  рассчитывают по формуле (9.11), подставляя, естественно, не конечные параметры процесса ( $t_1$ ,  $c_1$ ,  $\rho_1$ ), а текущие ( $t$ ,  $c$ ,  $\rho$ ) — соответствующие выбранной концентрации  $a$ .

Сопоставление величин  $Q_{\text{нгр}}$  и  $Q_{\text{вып}}$  при работе выпарного аппарата с постоянным уровнем свидетельствует о превалирующем значении второй. В самом деле, одновременно нагревается лишь залитая порция раствора ( $V_0$ ), а на стадии выпаривания испаряется растворитель из объема ( $V_0 + V_d$ ), причем нередко (это зависит от степени концентрирования раствора)  $V_d \gg V_0$ . Заметим также, что в  $Q_{\text{вып}}$  входит и теплота на нагрев подпитывающего раствора  $V_d$  до температуры кипения. Соотношение продолжительностей отдельных стадий ( $\tau_{\text{нгр}}$  и  $\tau_{\text{вып}}$ ) определяется преимущественно соотношением  $Q_{\text{нгр}}$  и  $Q_{\text{вып}}$ . Точный расчет  $\tau_{\text{нгр}}$  и  $\tau_{\text{вып}}$  здесь производят так же, как в периодическом выпаривании с переменным уровнем.

## 9.6. ВЫПАРНЫЕ АППАРАТЫ НЕПРЕРЫВНОГО ДЕЙСТВИЯ

### 9.6.1. Однокорпусный выпарной аппарат

При непрерывной работе выпарного аппарата (см. рис. 9.5) все параметры процесса остаются неизменными во времени. Раствор в аппарате кипит при конечной концентрации  $a_1$  (температура кипения  $t_1$ ) и отводится из него непрерывно с соблюдением баланса по расходам свежего раствора и вторичного пара. Такая работа аппарата возможна при подаче необходимого количества греющего пара (или другого теплоносителя) и наличии достаточной поверхности теплообмена, способной передавать тепловой поток от теплоносителя к раствору. Отсюда задача расчета процесса выпаривания сводится к определению необходимого теплового потока  $Q$  (индекс “вып” в выпарных установках непрерывного действия опущен, так как здесь нет другой стадии) и расхода теплоносителя  $D_{\text{гр}}$ , а также требуемой поверхности теплообмена  $F$ .

Отбор упаренного раствора (при выходе на непрерывный режим работы) начинается с момента достижения конечной концентрации  $a_1$  раствора в корпусе, т.е. по завершении *выхода на режим* (в ходе полунепрерывного процесса выпаривания). Одновременно с этим изменяется режим подачи исходного раствора с таким расчетом, чтобы все параметры процесса выпаривания (в том числе и объем раствора в аппарате) оставались неизменными.





и требуемую поверхность теплообмена

$$F = \frac{Q}{k\Delta t}, \quad (9.14)$$

где  $k$  — коэффициент теплопередачи от конденсирующегося пара к кипящему раствору;  $\Delta t = T - t_1$  — движущая сила процесса теплопередачи;  $k$  и  $\Delta t$  — постоянны по поверхности теплообмена.

Потери тепла в окружающую среду  $Q_0$  (от наружной поверхности аппарата) должны быть учтены при определении расхода греющего пара по (9.13) — их добавляют в числитель формулы:

$$D_{\text{гр}} = \frac{Q + Q_0}{h - c_k T} - \frac{Q + Q_0}{r_{\text{гр}}}. \quad (9.13a)$$

При расчете по (9.14) необходимой поверхности теплообмена  $F$  труб нагревательной камеры учитывается лишь тепловой поток на процесс выпаривания, определяемый по (9.12). Потери теплоты  $Q_0$  осуществляются через наружную поверхность корпуса выпарного аппарата и, естественно, в формуле (9.14) для поверхности теплообмена фигурировать не должны.

### 9.6.2. Выбор рабочего давления процесса

Выбор рабочего давления связывают с экономичностью проведения процесса. Затраты на проведение любого процесса складываются в основном из **капитальных затрат** (в форме амортизационных отчислений, конечно), т.е. из стоимости аппарата, определяемой поверхностью теплообмена  $F$ , и **энергетических затрат** (стоимости греющего пара) в ходе процесса.

Для уменьшения *поверхности теплообмена* при фиксированной температуре конденсации греющего пара предпочтительнее работа под вакуумом: при этом из-за уменьшения температуры кипения раствора  $t_1$  увеличивается движущая сила процесса теплопередачи  $\Delta t = T - t_1$ , и согласно (9.14) уменьшается необходимая поверхность теплообмена  $F$  (заметим: при изменении рабочего давления коэффициент теплопередачи  $k$  изменяется значительно меньше, нежели  $t_1$  и  $\Delta t$ ).

Максимальная величина движущей силы процесса теплопередачи не должна превышать  $-30$ — $-35$  °С. При большей разности температур частный температурный напор (со стороны кипящего раствора) может превысить критическое значение, при котором интенсивность теплоотдачи к кипящему раствору резко уменьшается.

Однако более обстоятельный экономический анализ показывает, что для такого энергоемкого процесса, как выпарива-

ние, *определяющими* являются *энергетические* затраты, так что минимум суммарных затрат находится вблизи минимальных энергозатрат. Поэтому на первый план выходят проблемы понижения затрат на греющий пар и его *рационального* использования. Получаемый при выпаривании под вакуумом вторичный пар низкого потенциала (температура, давление), как правило, не только не может быть использован в последующих технологических операциях, но нередко требует еще и дополнительных затрат для вывода его из технологического (в данном случае — выпарного) аппарата. В то же время при выпаривании под повышенным давлением (например,  $p = 0,2 \text{ МПа}$ ) вторичный пар с температурой насыщения  $\sim 120^\circ\text{C}$  может быть использован в последующих технологических операциях. Таким образом, *при прочих равных условиях целесообразно работать под давлением*, так как в этом случае наряду с упаренным раствором дополнительным товарным продуктом будет и вторичный пар высокого давления.

Тем не менее встречаются технологические ситуации, когда целесообразно работать под атмосферным давлением или под вакуумом. Назовем две такие ситуации, наиболее типичные.

С первой мы встречаемся при необходимости выпаривания **термолабильных** веществ, разлагающихся выше определенной температуры. Чтобы температура кипения  $t_k$  не превышала температуру разложения, приходится понижать рабочее давление в зоне кипения выпарного аппарата.

Вторая ситуация, когда следует идти на выпаривание под вакуумом или под атмосферным давлением, возникает в тех случаях, когда на заводе имеется дешевый (подчас бросовый, просто бесплатный) теплоноситель низкого потенциала (температура  $T$ ). Его использование возможно, если удастся создать положительную движущую силу  $\Delta t = T - t$ , т.е. удерживать температуру кипения раствора  $t$  ниже невысокого значения  $T$ . Это возможно осуществить, проводя процесс выпаривания под вакуумом (в некоторых случаях — под атмосферным давлением). В результате получается существенная экономическая выгода, даже с учетом усложнения процесса при создании вакуума.

Если при выпаривании приходится вести процесс *под вакуумом*, то стоит работать *при возможно малом* (технически разумном) *остаточном давлении* — чаще всего на уровне 5000—10000 Па. В этом случае получается еще и наименьшая поверхность теплообмена  $F$ .

### 9.6.3. Схема и расчет вакуумной выпарной установки

Для создания вакуума в выпарном аппарате вторичный пар из него направляется в конденсатор — поверхностный или смесительный.

**Поверхностные конденсаторы**, представляющие собой многоходовые кожухотрубные теплообменники, охлаждаемые холодной водой, применяются, как правило, если нежелательно смешение конденсата вторичного пара с охлаждающей водой.

Поверхностные конденсаторы имеют большие поверхности теплообмена, сопоставимые с таковыми для выпарного аппарата, требуют повышенных расходов воды и настолько дороги, что используются практически лишь тогда, когда применение других конденсаторов невозможно. Например, при выпаривании **неводных растворов солей** предпочтительны поверхностные конденсаторы, так как в смесительных потребовалась бы дополнительная стадия разделения сконденсировавшегося вторичного пара и охлаждающего агента.

В последние годы все чаще применяют поверхностные конденсаторы **воздушного охлаждения**, использующие в качестве охлаждающего агента атмосферный воздух. Последний нагнетается мощным вентилятором. Применение аппаратов воздушного охлаждения позволяет существенно снизить потребление воды и соответственно загрязнение водного бассейна. “Загрязнение” воздуха теплотой при работе аппаратов воздушного охлаждения *пока* не представляет серьезной угрозы экологии. Однако затраты энергии на вентилятор и достаточно дорогие поверхности теплообмена (оребренные трубы с целью повышения интенсивности теплоотдачи от стенки к воздуху) в известной мере ограничивают область применения этих аппаратов.

**Смесительные конденсаторы**, в которых происходит непосредственный контакт пара и охлаждающей воды, являются наиболее распространенными, а среди них чаще всего используется **противоточный барометрический конденсатор смешения**. В таком конденсаторе (рис. 9.9) поднимающиеся вверх пары конденсируются при прохождении через водяные завесы, создаваемые потоком охлаждающей воды, перетекающей с верхних полок на нижние. Для увеличения поверхности контакта пара с водой в полках имеются отверстия, через которые последняя протекает, образуя струи и капли (в виде дождя). Резкое уменьшение при конденсации пара занимаемого им объема приводит к *созданию вакуума* в конденсаторе, а значит, и в соединенном с ним выпарном аппарате.

Теоретически достижимый вакуум (точнее — остаточное давление) соответствует упругости водяного пара над смесью отработанной охлаждающей воды и образовавшегося конденсата. Реально создается несколько меньший вакуум (остаточное давление на уровне 5000—10000 Па), так как в конденсатор попадают **неконденсирующиеся газы** (прежде всего — воздух, при выпаривании карбонатов — диоксид углерода, образующийся в результате частичного разложения солей, и др.). Последние содержатся во вторичном паре (изначально — в выпар-

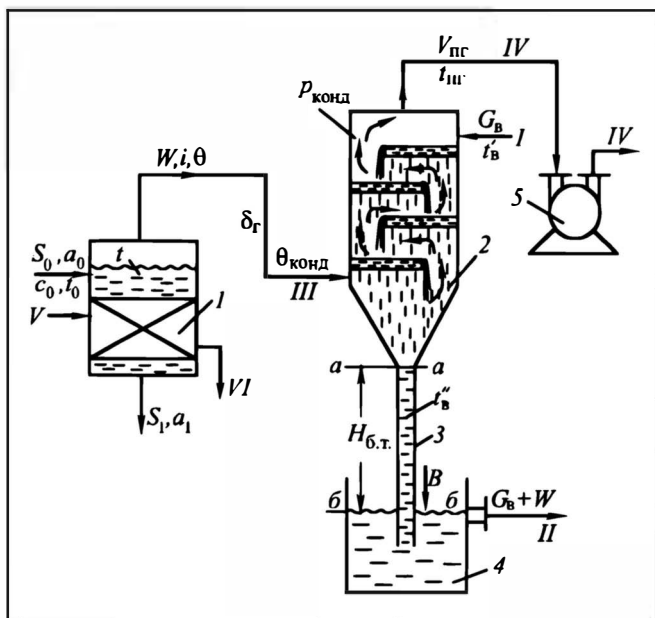


Рис. 9.9. Схема выпарной установки, работающей под вакуумом:

1 — выпарной аппарат, 2 — барометрический конденсатор смешения, 3 — барометрическая труба, 4 — барометрический ящик, 5 — вакуум-насос;

I — охлаждающая вода, II — нагретая вода, III — вторичный пар, IV — неконденсирующиеся газы, V — греющий пар, VI — конденсат

риваемом растворе), а также выделяются (десорбируются) из охлаждающей воды при попадании ее из сети в зону низкого давления (в конденсатор) и повышении ее температуры от  $t'_B$  до  $t''_B$  (см. рис. 9.9). Наиболее заметный источник неконденсирующихся газов в конденсаторе смешения — воздух, подсосываемый извне через неплотности разъемных соединений установки. Для поддержания заданного вакуума неконденсирующиеся газы (реально — парогазовая смесь) непрерывно отсасываются из верхней части конденсатора вакуум-насосом 5 (см. рис. 9.9), чаще всего водокольцевым.

Точного метода расчета основных размеров барометрического конденсатора смешения не существует. Его диаметр оценивают по расходу вторичного пара и его скорости в свободном сечении (10—15 м/с), а затем по каталогам подбирают ближайший больший (по диаметру) конденсатор. Число каскадов принимают равным 5—7 — этого достаточно для полной конденсации вторичного пара. Площадь сегментных вырезов для прохода парогазовой смеси с каскада на каскад составляет 40—50% от площади сечения конденсатора.

Для нормальной работы барометрического конденсатора смешения необходимо обеспечить требуемые расходные харак-

теристики: расход охлаждающей воды и объемный расход отсасываемой парогазовой смеси (последний необходим для подбора вакуум-насоса).

**Расход охлаждающей воды**  $G_B$  на конденсацию  $W$  кг/с вторичного пара с энтальпией  $i$  определяем из уравнения теплового баланса за единицу времени для контура, охватывающего конденсатор смешения:

$$\underbrace{Wi + G_B c_B t'_B}_{\text{Приход}} - \underbrace{(G_B + W) c_B t''_B - G_{\text{пг}} c_{\text{пг}} t_{\text{пг}}}_{\text{Уход}} = \underbrace{0}_{\text{Накопление}}.$$

Слагаемым  $G_{\text{пг}} c_{\text{пг}} t_{\text{пг}}$ , учитывающим вынос теплоты с парогазовым потоком, пренебрегаем ввиду его незначительности по сравнению с другими составляющими теплового баланса. Тогда

$$G_B = W \frac{i - c_B t''_B}{c_B (t''_B - t'_B)}. \quad (9.15)$$

Температуру воды  $t'_B$  принимают в зависимости от географического места расположения конденсатора смешения: при использовании подземной (артезианской) воды  $t'_B = 8 \div 10$  °С, а в случае оборотной воды — от 15 до 30 °С. Последняя цифра определяется возможностью охладить нагретую воду в **градир-ных** в летних условиях для данной местности.

Температура  $t''_B$  жидкости, покидающей конденсатор, вообще говоря, вследствие развитой поверхности контакта, может быть принята равной температуре конденсации паров в конденсаторе  $\theta_{\text{конд}}$  (поточная задача теплопереноса). Однако в практических расчетах (для большей гарантии) ее обычно принимают на 2—3 градуса ниже температуры конденсации паров в конденсаторе ( $\theta_{\text{конд}}$ ). Заметим, что температура  $\theta_{\text{конд}}$  ниже температуры насыщения вторичного пара  $\theta$ , покидающего выпарной аппарат, на величину **гидравлической депрессии**  $\delta_r \equiv \theta - \theta_{\text{конд}}$ . Причина появления  $\delta_r$  — **понижение давления** пара  $p$  при его транспортировании по трубопроводу от аппарата к конденсатору: с уменьшением давления понижается и температура насыщения (конденсации) пара — от  $\theta$  в выпарном аппарате до  $\theta_{\text{конд}}$  в конденсаторе. Из опыта работы выпарных аппаратов установлено, что  $\delta_r \approx 1 \div 2$  °С.

Максимальная температура воды  $t''_B$  ограничена. Основные причины ограничения — следующие:

— возможное отложение солей в конденсаторе и барометрической трубе (особенно интенсивное при температурах выше 50—55 °С);

— увеличение давления водяных паров с повышением температуры воды  $t''_B$ , что приводит к понижению парциального

давления газа в отсасываемой вакуум-насосом парогазовой смеси, а следовательно, к увеличению объемного потока последней и затрат энергии на ее сжатие (см. ниже);

— увеличение потерь оборотной воды. Нагретая в конденсаторе до  $t''_в$  вода охлаждается, как правило, в градирнях — с целью ее последующего использования в теплообменниках в качестве холодного теплоносителя. Охлаждение воды в градирнях происходит за счет ее частичного испарения. При высокой исходной температуре воды  $t''_в$  для ее охлаждения до приемлемой конечной температуры (до  $\sim 20\text{--}25^\circ\text{C}$ ) потребуется испарить (т.е. потерять) значительную долю воды. Исходя из допускаемой на практике доли потерь воды на испарение на уровне 5—7%, получают верхний предел  $t''_в$  порядка  $45\text{--}50^\circ\text{C}$ .

**Объемный расход парогазовой смеси**, отсасываемой вакуум-насосом,  $V_{\text{пг}}$  можно найти из уравнения состояния идеального газа, записанного для сухой газовой (воздушной) части, т.е. при парциальном давлении газа ( $p_r$ ):

$$V_{\text{пг}} = V_r = \frac{G_r R T_{\text{пг}}}{p_r M_r}, \quad (9.16)$$

где  $R$  — универсальная газовая постоянная;  $M_r$  — молярная масса сухого газа;  $T_{\text{пг}} = 273 + t_{\text{пг}}$  — температура отсасываемой смеси (в К), причем  $t_{\text{пг}}$  — температура (в  $^\circ\text{C}$ ) парогазовой смеси на выходе из конденсатора (последняя всегда выше температуры поступающей воды  $t'_в$  и ниже  $t''_в$ ).

Оценим величины, входящие в формулу (9.16).

Температура  $t_{\text{пг}}$  определяется по эмпирическим рекомендациям и формулам, например:

$$t_{\text{пг}} = t'_в + 4 + 0,1(t''_в - t'_в).$$

Масса неконденсирующегося газа (воздуха)  $G_r$  (кг/с) в отсасываемой парогазовой смеси определяется как сумма двух основных слагаемых. Первое отражает десорбцию газов (главным образом из охлаждающей воды). Обследование действующих конденсаторов смешения показало, что из каждой тонны смеси охлаждающей воды и конденсата десорбируется примерно 0,025 кг неконденсирующихся газов (воздуха). Второе слагаемое — подсос воздуха в конденсатор смешения через неплотности — оценивается сугубо приближенно: принимают, что в расчете на тонну получаемого вторичного пара подсасывается до 10 кг воздуха. Соответственно приведенным выше сведениям, массовый поток отсасываемых сухих неконденсирующихся газов составляет\*

$$G_r = [0,025(W + G_v) + 10 W] \cdot 10^{-3},$$

\* Более тонкие эффекты, связанные с работой конденсатора смешения (уточненный расчет подсоса, зависимость количества десорбирующихся газов от температуры, источники  $\text{CO}_2$  при частичном разложении солей и др.), приведены в специальной литературе (см., например, [7]).

причем все потоки выражаются в кг/с. Заметим, что второе слагаемое, выражающее подсос воздуха через неплотности, обычно примерно на порядок превышает первое.

Парциальное давление газа  $p_r$  находят как разность между абсолютным (остаточным) давлением в конденсаторе ( $p_{\text{конд}}$ ) и давлением насыщенного водяного пара ( $p_{\text{п}}$ ) при температуре  $t_{\text{п}}$ , т.е.  $p_r = p_{\text{конд}} - p_{\text{п}}$ . При этом величина  $p_{\text{конд}}$  отвечает температуре  $\theta_{\text{конд}}$ , т.е. учитывает небольшое понижение давления в конденсаторе смешения в сравнении с выпарным аппаратом.

По давлению в конденсаторе смешения  $p_{\text{конд}}$  и производительности (объемный расход парогазовой смеси) подбирают вакуум-насос, чаще всего один из типов водокольцевых. Поскольку в каталогах приводится производительность вакуум-насоса в  $\text{м}^3/\text{с}$  (иногда — в  $\text{м}^3/\text{мин}$ ), то найденную по (9.16) величину  $V_{\text{пг}}$  пересчитывают на нормальные условия (атмосферное давление —  $p_{\text{атм}}$ ):

$$V_{\text{пг}}^{\text{н.у.}} = V_{\text{пг}} \frac{p_{\text{конд}}}{p_{\text{атм}}}.$$

Потребляемая вакуум-насосом мощность складывается из двух основных составляющих:

- на сжатие парогазовой смеси от давления в конденсаторе  $p_{\text{конд}}$  до давления газа чуть больше атмосферного (это небольшое превышение связано с гидравлическими потерями при движении сжатой парогазовой смеси от вакуум-насоса к месту ее выброса в окружающую среду); рассчитывается по формулам, приведенным в разд. 4.3.2;

- на поднятие и поддержание жидкости в водокольцевом насосе при его работе (центр тяжести жидкостного кольца расположен выше центра тяжести жидкости в неработающем аппарате).

Для нормальной работы конденсатора смешения требуется непрерывно отводить смесь отработанной воды и образующегося конденсата. Проблема здесь возникает в связи с вакуумом в конденсаторе. Принципиально возможен расход энергии на ее откачку делает этот способ экономически нецелесообразным. Практически выгодно отводить жидкость из конденсатора с помощью *барометрической трубы* (см. рис. 9.9, поз. 3). Гидростатическое давление столба воды в барометрической трубе ( $\rho g H_{\text{б.т}}$ ) вместе с давлением в конденсаторе  $p_{\text{конд}}$  позволяет уравновесить атмосферное давление  $B$  (и создать при этом гидравлический затвор, препятствующий прохождению атмосферного воздуха в конденсатор).

Диаметр барометрической трубы  $d_{\text{бт}}$  определяем из уравнения расхода (1.17) жидкости в ней:

$$\frac{G_{\text{в}} + W}{\rho_{\text{в}}} = \frac{\pi d_{\text{бт}}^2}{4} w_{\text{бт}} ;$$



при этом скорость “естественного” течения  $w_{6т}$  принимается в пределах  $0,25 - 0,75 \cdot м/с$ .

При подборе по каталогам конденсатора смещения в комплекте с барометрической трубой технологи обычно выполняют *поверочный расчет*, проверяя реальную скорость течения воды в барометрической трубе при выбранном ее диаметре и требуемом расходе смеси охлаждающей воды и конденсата.

Высоту барометрической трубы  $H_{6т}$  находим из уравнения Бернулли, записанного для сечений  $a-a$  и  $б-б$  (см. рис. 9.9), приняв плоскость отсчета совпадающей с сечением  $б-б$ :

$$H_{6т} + \frac{p_{\text{конд}}}{\rho g} + \frac{w_{6т}^2}{2g} = 0 + \frac{B}{\rho g} + \frac{w_{6т}^2}{2g} + h_{п}, \quad (6)$$

где  $h_{п} = \left( \lambda_{г} \frac{H_{6т}}{d_{6т}} + \sum \xi \right) \frac{w_{6т}^2}{2g}$  — гидравлические потери при движении

жидкости по трубе;  $\lambda_{г}$  — коэффициент гидравлического сопротивления на прямом участке трубы;  $\sum \xi$  — сумма коэффициентов местных сопротивлений на барометрической трубе (это, как правило, вход в трубу и выход из нее).

Отсюда высота барометрической трубы

$$H_{6т} = \frac{B - p_{\text{конд}}}{\rho g} + h_{п}.$$

С учетом возможных колебаний барометрического давления (расчет ведется по *среднему* барометрическому давлению  $B$  в географической точке работы выпарной установки), высоту трубы принимают с запасом:

$$H_{6т} = \frac{B - p_{\text{конд}}}{\rho g} + h_{п} + 0,5. \quad (9.17)$$

Для определения высоты  $H_{6т}$  надо раскрыть  $h_{п}$  и разрешить полученное выражение относительно  $H_{6т}$ . Однако при практических расчетах по формуле (9.17) величиной  $h_{п}$  обычно пренебрегают ввиду ее малости (не более  $0,1 \text{ м}$ ) по сравнению с другими составляющими.

#### 9.6.4. Пути экономии греющего пара

Ввиду значительной энергоемкости процесса выпаривания вопросы выбора теплоносителя и его рационального использования являются очень важными. Кардинально решить проблему экономии теплоносителя можно лишь в том случае, если за счет  $1 \text{ кг}$  греющего пара удалять не  $0,8-0,9 \text{ кг}$  вторичного, а больше. Это возможно при использовании вторичного пара в

качестве греющего. Однако непосредственно использовать вторичный пар в качестве греющего в том же выпарном аппарате невозможно, так как необходимое условие теплопередачи  $T > t$ , а температура насыщения (конденсации вторичного пара)  $\theta$  ниже температуры кипения раствора  $t$  на величину температурной депрессии. Поэтому возможны два пути:

— *понижить температуру кипения раствора*, т.е. использовать вторичный пар для обогрева аппарата, работающего при пониженном давлении с температурой кипения раствора  $t < \theta$ . Этот путь используется в **многокорпусных выпарных установках**, где давление от корпуса к корпусу понижается и вторичный пар из предыдущего корпуса *может* служить греющим для последующего;

— *повысить потенциал вторичного пара* (его давление и соответственно *температуру конденсации*) *до значений греющего*; такое повышение происходит при *сжатии* вторичного пара в компрессоре (обычно в турбокомпрессоре) или в инжекторе. Заметим, что простое повышение температуры вторичного пара за счет *нагрева* не дает существенной экономии греющего пара, так как отдаваемая *перегретым* паром теплота, равная произведению теплоемкости пара  $c_p$  на величину перегрева  $\Delta t_{\text{пр}}$ , значительно меньше теплоты конденсации.

При использовании инжектора вторичный пар не весь, а только *некоторая его часть* (далее этот вопрос будет рассмотрен подробно), сжимается до давления греющего пара. Отсюда и название — **частичный тепловой насос** (в отличие от сжатия в компрессоре *всего* вторичного пара, получившего название **полного теплового насоса**).

Сам термин “тепловой насос” имеет следующее происхождение. В ряде технологических процессов (в частности, в рассматриваемом процессе) необходима передача теплоты от теплоносителя с низкой температурой (здесь — это вторичный пар) к теплоносителю с более высокой температурой (здесь — это кипящий раствор). Но такая передача теплоты по второму закону термодинамики самопроизвольно невозможна — так же, как и естественное течение жидкости с нижнего уровня на более высокий или из области низкого давления в область высокого. Задача преодоления разности напоров жидкости решается с помощью *насосов*; для переноса теплоты используется технологический прием (с затратой механической энергии), получивший по аналогии название “теплового насоса”, обеспечивающего “перекачку” теплоты с нижнего температурного уровня на верхний.

Применительно к процессу выпаривания сжатие вторичного пара сопровождается повышением его потенциала (давления, температуры) и, следовательно, температуры конденсации до такой величины, при которой разность температур (сжатого пара и кипящего раствора) становится положительной. При наличии такой разности (положительной движущей силы) высвобождаемая теплота конденсации сжатого греющего пара передается кипящему раствору.

Ниже рассмотрены оба пути экономии греющего пара и области их предпочтительного использования.

### 9.6.5. Многокорпусные выпарные установки

При выпаривании раствора в нескольких аппаратах его концентрация повышается от корпуса к корпусу, причем для обогрева последующих используется вторичный пар, получаемый в предыдущих.

#### *Схема и работа многокорпусных установок*

Наиболее распространенная **прямоточная** схема многокорпусной выпарной установки представлена на рис. 9.10 и 9.11.

В целях наглядности сначала рассмотрим упрощенную схему такой установки (рис. 9.10), зафиксировав характерные рабочие давления в корпусах и температуры технологических потоков (на примере трехкорпусной установки). Исходный раствор с начальной концентрацией после упаривания в первом корпусе последовательно проходит через последующие корпуса установки, постепенно увеличивая свою концентрацию до заданной. Примем, что первый корпус обогревается свежим (первичным) паром давлением  $620 \text{ кПа}$  при температуре конденсации  $160^\circ\text{C}$ . Пусть температура кипения раствора в первом корпусе равна  $135^\circ\text{C}$ , а температура вторичного пара —  $130^\circ\text{C}$  (т.е. ниже на величину депрессии в этом корпусе). Во втором корпусе концентрация кипящего раствора будет выше (и депрессия — тоже). Естественно, что вторичный пар из первого корпуса с температурой  $130^\circ\text{C}$  (эта температура отвечает рабочему давлению  $275 \text{ кПа}$ ) может быть использован во втором корпусе в качестве греющего только в том случае, если температура кипения раствора будет ниже  $130^\circ\text{C}$ . Этого можно добиться путем понижения рабочего давления во втором корпусе (в приведенном примере — до  $105^\circ\text{C}$ ). Соответственно, чтобы вторичный пар из второго корпуса использовать для обогрева третьего давления в последнем должно быть еще меньше (в нашем примере рабочее давление в третьем корпусе равно  $7,4 \text{ кПа}$ , а температура кипения —  $55^\circ\text{C}$ ). Таким образом, давление от корпуса к корпусу должно понижаться (в нашем примере 275; 84;  $7,4 \text{ кПа}$ ) так, чтобы несмотря на увеличивающиеся депрессии в корпусах ( $5^\circ\text{C}$  — в первом,  $10^\circ\text{C}$  — во втором,  $15^\circ\text{C}$  — в третьем), вторичный пар предыдущего корпуса мог обогревать последующий. При этом движущая сила процесса теплопередачи (разность температур греющего пара и кипящего раствора), как правило, растёт от корпуса к корпусу в связи с уменьшением коэффициента теплоотдачи к кипящему раствору при увеличении его концентрации (в рассматриваемом примере эта разность равна  $25^\circ\text{C}$  в первом корпусе и  $40^\circ\text{C}$  — в третьем).

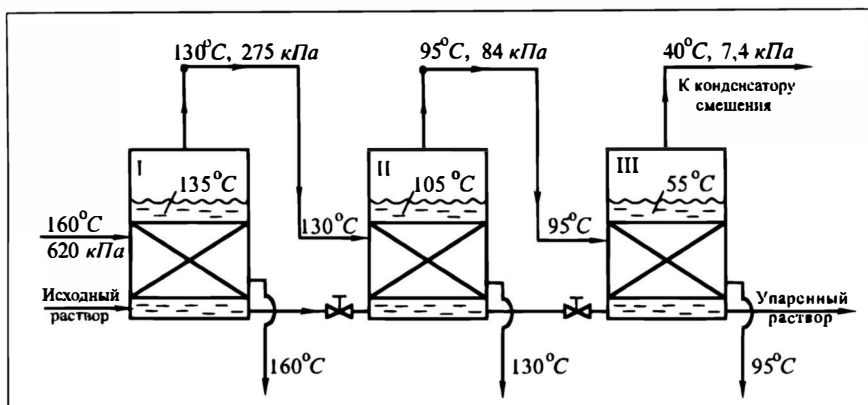


Рис. 9.10. Типичное распределение температур и давлений по аппаратам трех-корпусной выпарной установки (упрощенная схема)

При наличии существенной разницы давлений в корпусах переток раствора из одного в другой регулируется вентилями на жидкостных линиях, соединяющих эти корпуса. Такое *непринудительное* (без затраты внешней работы) движение раствора через всю систему является одним из преимуществ *прямоточной* схемы. Еще одним ее достоинством являются незначительные потери теплоты с уходящим упаренным раствором, так как температура кипения раствора в последнем корпусе минимальна. Недостатком данной схемы являются неблагоприятные условия теплопередачи: самый концентрированный раствор кипит при наиболее низких давлении и температуре, когда его вязкость максимальна, а теплопроводность чаще всего минимальна.

По условиям теплопередачи более выгодны многокорпусные установки с *противоточным* движением раствора и паров\*. Здесь выпариваемый раствор движется по направлению от последнего корпуса к первому, а вторичные пары — в обратном направлении. При этом раствор конечной концентрации (наиболее вязкий) обогревается первичным паром и кипит при самых высоких давлении и температуре. Существенным недостатком такой схемы является необходимость *принудительного* перемещения раствора из корпуса в корпус в сторону нарастающего давления, что требует применения побудителей движения (насосов, да еще работающих в жестких условиях), а значит и затрат энергии. Вывод из первого корпуса концентрированного раствора с высокой температурой приводит к *большим* потерям теплоты, нежели в предыдущем варианте схемы. По этим причинам чаще применяется прямоточная схема.

\* См., например, [2].

При выпаривании кристаллизующихся растворов во избежание закупорки соединительных трубопроводов могут быть использованы многокорпусные установки с **параллельным** питанием корпусов и выпариванием раствора в каждом корпусе до конечной концентрации. Пар, как и в предыдущих двух схемах, движется от первого корпуса к последнему. В том же направлении снижается рабочее давление в корпусах, а следовательно, и температура кипения растворов.

Как правило, в упомянутых выше случаях последние корпуса выпарных установок работают под вакуумом; поэтому последний корпус соединяется с конденсатором — так же, как это было сделано в случае однокорпусного выпарного аппарата (см. рис. 9.9). Только при использовании исходного греющего пара весьма высокого давления (порядка 1 МПа и выше) или высокотемпературного теплоносителя иногда возможна организация работы последнего корпуса многокорпусной установки под атмосферным (или даже повышенным) давлением. Преимуществом такого режима работы является отсутствие конденсатора смещения, а в ряде случаев — и возможность использования вторичного пара из последнего корпуса; основной недостаток — дороговизна греющего пара повышенного давления.

Поскольку наиболее часто на практике используется **прямоточная выпарная установка**, рассмотрим более детально ее работу (рис. 9.11) и особенности расчета на примере трехкорпусной выпарной установки (к вопросу об оптимальном числе корпусов вернемся позднее).

Начальный раствор с концентрацией  $a_0$  и температурой  $t_0$  непрерывно поступает (его расход  $S_0$  кг/с) в первый корпус, где он выпаривается за счет теплоты конденсации первичного (греющего) пара до концентрации  $a_1$  при температуре  $t_1$ . Образующийся в первом корпусе вторичный пар с температурой  $\theta_1$  направляется в греющую камеру второго корпуса, работающего при меньшем давлении в зоне выпаривания, нежели в первом корпусе. При движении вторичного пара по трубопроводу от первого корпуса ко второму за счет гидравлического сопротивления давление, а соответственно и температура насыщенных паров несколько уменьшаются. Понижение температуры характеризуется гидравлической депрессией паропровода  $\delta r_{1-2} = \theta_1 - T_2$ . Естественно, температура кипения раствора во втором корпусе должна быть ниже температуры конденсации греющего пара (т.е. вторичного пара из первого корпуса):  $t_2 < T_2 = \theta_1 - \delta r_{1-2}$ .

Во втором корпусе раствор выпаривается до концентрации  $a_2$  за счет *теплоты конденсации пара и самоиспарения раствора*

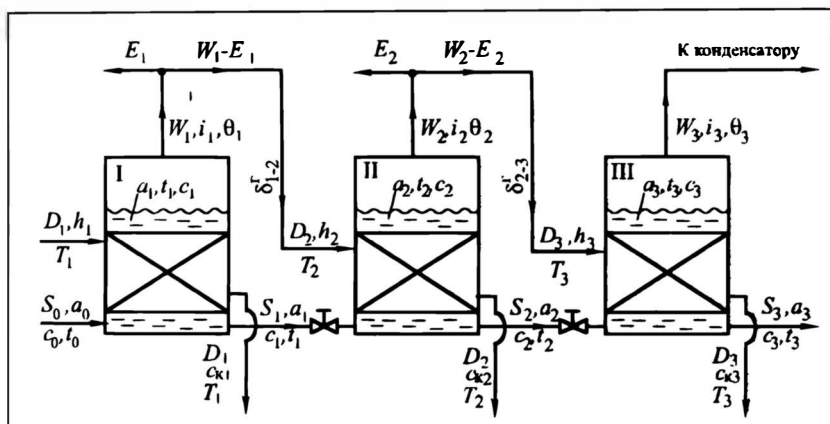


Рис. 9.11. К расчету прямоточной трехкорпусной установки

вследствие падения давления и понижения температуры кипения от  $t_1$  до  $t_2$ , причем доля “самоиспарившейся” жидкости определяется соотношением (ж) раздела 9.3.

В третьем корпусе, обогреваемом вторичным паром из второго корпуса ( $T_3 = \theta_2 - \delta r_{2-3}$ ), раствор выпаривается до требуемой конечной концентрации  $a_3$  при температуре кипения  $t_3$ . Вторичный пар из третьего корпуса направляется в конденсатор смешения с целью создания в нем вакуума.

При работе многокорпусной выпарной установки практически всегда выгодно отводить часть вторичного пара на сторону (если только есть потребитель этого пара). Отводимый пар (как правило, из первых корпусов) получил название **экстра-пара**. В схеме на рис. 9.11:  $E_1$  — экстра-пар из первого корпуса,  $E_2$  — из второго. Тогда при получении потоков  $W_1$  и  $W_2$  вторичного пара в первом и втором корпусах на обогрев последующих корпусов направляют потоки вторичного пара  $D_2 = W_1 - E_1$  и  $D_3 = W_2 - E_2$ .

Отвод экстра-пара, например из первого корпуса —  $E_1$ , приводит к уменьшению расхода пара  $D_2 = W_1 - E_1$ , поступающего на обогрев второго корпуса. Для поддержания  $D_2$  на первоначальном уровне (до начала отбора экстра-пара) необходимо увеличить  $W_1$ , а следовательно, и расход первичного греющего пара  $D_1$ . Таким образом, отвод экстра-пара приводит к увеличению расхода греющего пара, что невыгодно для работы выпарной установки.

Тем не менее экстра-пар отводят из выпарной установки, если только есть его потребитель на соседних технологических установках, — это выгодно для цеха, для завода в целом. Дело в том, что последние нередко нуждаются в паре относительно низкого давления. И если им не отдать экстра-пар, то они вынуждены будут использовать пар высокого давления из заводского трубопровода (скажем, пар давлением 6,3 ат вместо вполне приемлемого давления 2,6 — 2,7

ат из первого корпуса — см. приведенный выше пример с численными значениями температур). Поэтому-то и *выгодно* отдать такому потребителю в виде экстра-пара часть вторичного пара, а потерю его восполнить свежим паром высокого давления. Тем более что этого свежего пара потребуется меньше, чем отдано экстра-пара: ведь эффект дополнительного свежего греющего пара сказывается во всех корпусах установки. В результате при отдаче экстра-пара в целом для цеха (завода) получается большая экономия.

Разумеется, наиболее выгодно было бы отдавать экстра-пар из последних по ходу пара корпусов установки. Но на пар низких параметров из этих корпусов не часто находится потребитель. И поскольку на технологических установках довольно часто требуется пар давлением 0,2—0,4 МПа, то сравнительно легко найти потребителя на экстра-пар, отбираемый из первого корпуса (реже — из второго), нежели из последующих.

### *Расчет прямоточной многокорпусной установки*

**Материальные и тепловые потоки.** Расчет сводится к определению потоков переданной теплоты по корпусам и расхода первичного пара  $D_1$ , поверхностей теплообмена в корпусах ( $F_1, F_2, F_3$ , вообще —  $F_i$ ), а также к расчету конденсатора, если в последнем корпусе создается вакуум.

Суммарный поток удаляемого растворителя

$$W = W_1 + W_2 + W_3 \quad (9.18)$$

определяется по уравнению (9.6) при подстановке конечной заданной концентрации  $a_k$  вместо  $a_1$ .

Тепловые нагрузки  $Q_i$  корпусов определяются по выражениям, аналогичным (9.12) и (9.12а), с учетом принятых обозначений на рис. 9.11. Без учета потерь в окружающую среду

$$Q_1 = D_1(h_1 - c_{k1}T_1) = S_0c_0(t_1 - t_0) + W_1(i_1 - c_{p1}t_1); \quad (9.19)$$

$$Q_2 = (W_1 - E_1)(h_2 - c_{k2}T_2) = S_1c_1(t_2 - t_1) + W_2(i_2 - c_{p2}t_2); \quad (9.20)$$

$$Q_3 = (W_2 - E_2)(h_3 - c_{k3}T_3) = S_2c_2(t_3 - t_2) + W_3(i_3 - c_{p3}t_3). \quad (9.21)$$

Заметим, что первые слагаемые в правой части приведенных уравнений (кроме (9.19) — для *первого* корпуса) отрицательны из-за уменьшения температуры кипения растворов от корпуса к корпусу ( $t_2 < t_1, t_3 < t_2$  и т.д.). Это означает, что не только не требуется теплоты на нагрев раствора, но, напротив, раствор отдает теплоту перегрева, и за счет этого происходит самоиспарение части растворителя.

С целью уменьшения числа неизвестных в практических расчетах целесообразно исключить из уравнений  $S_1c_1, S_2c_2$  (а при большем числе корпусов —  $S_ic_i$ , здесь  $i > 0$ ), воспользовавшись правилом аддитивности теплоемкости растворов (равенствами типа (9.2)):

$$S_1c_1 = S_0c_0 - W_1c_p,$$

$$S_2c_2 = S_1c_1 - W_2c_p = S_0c_0 - W_1c_p - W_2c_p = S_0c_0 - (W_1 + W_2)c_p;$$

вообще для  $i$ -го корпуса (при любом числе корпусов)

$$S_i c_i = S_0 c_0 - \left( \sum_{i=0}^i W_i \right) c_p,$$

где  $i$  — номер корпуса ( $i = 0$  относится к исходному раствору).

Подставим полученные выражения для  $S_1 c_1$  и  $S_2 c_2$  в уравнения (9.20) и (9.21):

$$\begin{aligned} Q_1 &= D_1 (h_1 - c_{k1} T_1) = \\ &= S_0 c_0 (t_1 - t_0) + W_1 (i_1 - c_p t_1); \end{aligned} \quad (9.19a)$$

$$\begin{aligned} Q_2 &= (W_1 - E_1) (h_2 - c_{k2} T_2) = \\ &= S_0 c_0 (t_2 - t_1) - W_1 c_p (t_2 - t_1) + W_2 (i_2 - c_p t_2); \end{aligned} \quad (9.20a)$$

$$\begin{aligned} Q_3 &= (W_2 - E_2) (h_3 - c_{k3} T_3) = \\ &= S_0 c_0 (t_3 - t_2) - (W_1 + W_2) c_p (t_3 - t_2) + W_3 (i_3 - c_p t_3). \end{aligned} \quad (9.21a)$$

Расчет потоков греющего пара  $D_1$ , вторичного пара  $W_i$  и теплоты  $Q_i$  в корпусах по приведенным выше формулам (9.18) — (9.21) затруднен, поскольку неизвестны параметры работы корпусов — температуры кипения растворов в корпусах  $t_i$  и энтальпии  $h_i$  и  $i_i$  (кроме  $T_1$  и  $h_1$  в первом корпусе, где заданы параметры греющего пара, и  $t_3$ ,  $i_3$  в последнем корпусе, где техническим заданием определены давление и конечная концентрация раствора). Численные значения упомянутых параметров связаны с потоками вторичного пара  $W_i$  и с тепловыми нагрузками  $Q_i$ . Последние, в свою очередь, зависят от:

- кинетических характеристик теплопереноса — коэффициентов теплопередачи  $k_i$ ;
- величин движущих сил по корпусам  $\Delta_i = T_i - t_i$ ;
- поверхностей теплообмена  $F_i$ .

Таким образом, система уравнений (9.18) — (9.21) для определения  $W_i$  и  $Q_i$  должна решаться совместно с уравнениями кинетики теплопереноса

$$Q_i = k_i \Delta_i F_i. \quad (9.22)$$

**Поверхности теплообмена.** Приступая к расчету многокорпусной выпарной установки, технологи не располагают величинами  $\Delta_i$ ; обычно известны (или можно достаточно точно определить) лишь температуры  $T_1$  и  $\theta_3$  (в общем случае при числе корпусов  $N - \theta_N$ ) и  $\Delta_{\text{полн}} = T_1 - \theta_N$  (в рассматриваемом примере  $\Delta_{\text{полн}} = T_1 - \theta_3$ ). Эта полная разность температур  $\Delta_{\text{полн}}$  не может быть целиком использована в качестве движущей силы процессов теплопередачи в корпусах из-за темпера-



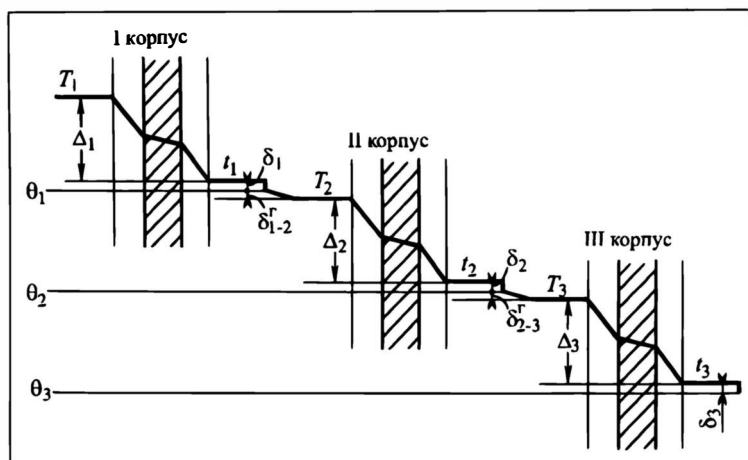


Рис. 9.12. Изменение температуры по выпарной установке в целом

турных  $\delta_i$  и гидравлических  $\delta_i^r$  депрессий (см. рис. 9.12). Суммарная полезная разность температур  $\Delta_\Sigma$  есть сумма движущих сил в каждом корпусе:

$$\Delta_\Sigma = \sum_{i=1}^N \Delta_i = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = (T_1 - t_1) + (T_2 - t_2) + (T_3 - t_3).$$

С учетом выражений для температурных ( $\delta_i = t_i - \theta_i$ ) и гидравлических ( $\delta_{i-(i+1)}^r = \theta_i - T_{i+1}$ ) депрессий получаем для трехкорпусной выпарной установки:

$$\begin{aligned} \Delta_\Sigma &= T_1 - \theta_1 - \delta_1 + \theta_1 - \delta_{1-2}^r - \theta_2 - \delta_2 + \theta_2 - \delta_{2-3}^r - \theta_3 - \delta_3 = \\ &= T_1 - \theta_3 - (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3) - (\delta_{1-2}^r + \delta_{2-3}^r), \end{aligned}$$

или

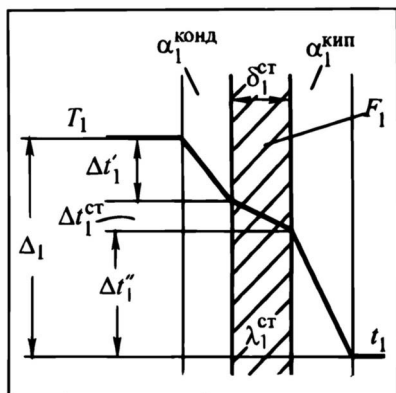
$$\Delta_\Sigma = T_1 - \theta_3 - \sum_{i=1}^3 \delta_i - \sum_{i=1}^2 \delta_{i-(i+1)}^r.$$

В общем случае при числе корпусов  $N$

$$\Delta_\Sigma = T_1 - \theta_N - \sum_{i=1}^N \delta_i - \sum_{i=1}^{N-1} \delta_{i-(i+1)}^r. \quad (9.23)$$

Из (9.23) видно, что суммарная полезная разность температур, обеспечивающая передачу теплоты в корпусах (от конденсирующихся паров к кипящим растворам), равна полному температурному напору ( $T_1 - \theta_N$ ) за вычетом температурных и гидравлических депрессий.

Рис. 9.13. Изменение температуры при передаче теплоты от конденсирующегося пара при температуре  $T_1$  к кипящему раствору ( $t_1$ ) в первом корпусе выпарной установки



Суммарная полезная разность температур  $\Delta_\Sigma$  в зависимости от свойств упариваемого раствора и величин поверхностей теплообмена корпусов  $F_i$  распределяется между корпусами, а в пределах одного корпуса — между отдельными стадиями теплопереноса.

Рассмотрим одновременно теплопередачу во всех корпусах и постараемся исключить из расчета все промежуточные — не известные в ходе расчета — температуры и температурные напоры. На примере *первого корпуса* выделим (рис. 9.13) отдельные стадии теплопередачи при общей движущей силе процесса в нем  $\Delta_1 = T_1 - t_1$ . При этом воспользуемся подходами, детально рассмотренными в гл. 6 и 7 применительно к рекуперативному теплообмену между конденсирующимся паром и кипящей жидкостью.

Тепловой поток  $Q_1$  в первом корпусе через поверхность теплопередачи  $F_1$  выражается следующим образом (обозначения см. на рис. 9.13):

для стадии *теплотдачи от конденсирующегося пара к стенке*

$$Q_1 = \alpha_1^{\text{конд}} F_1 \Delta t'_1 = \frac{A_1}{\sqrt[4]{\Delta t'_1}} F_1 \Delta t'_1 = A_1 F_1 (\Delta t'_1)^{3/4},$$

где  $A_1$  выражает теплофизические свойства конденсата и учитывает высоту теплообменных труб — см. формулу (6.25);

для стадии *кондуктивного теплопереноса через стенку* толщиной  $\delta_1^{\text{ст}}$  (условно — плоскую, полагая, что толщина стенки значительно меньше диаметра трубы, т.е. пренебрегая кривизной поверхности) при коэффициенте теплопроводности  $\lambda_1^{\text{ст}}$

$$Q_1 = \frac{\lambda_1^{\text{ст}}}{\delta_1^{\text{ст}}} \Delta t_1^{\text{ст}} F_1;$$

для стадии *теплотдачи от стенки к кипящему раствору*

$$Q_1 = \alpha_1^{\text{кип}} F_1 \Delta t''_1 = B_{01} (\Delta t''_1)^{2,33} F_1 \Delta t''_1 = B_{01} F_1 (\Delta t''_1)^{3,33},$$

где  $B_{01}$  отражает теплофизические свойства кипящего раствора — см. формулу (6.26).

Поскольку промежуточные температуры и частные движущие силы ( $\Delta t_1'$ ) неизвестны, их следует исключить из анализа. С этой целью выразим частные движущие силы отдельных стадий переноса теплоты в первом корпусе (аналогичные выкладки см. в разд. 7.3):

$$\Delta t_1' = \left( \frac{Q_1}{A_1 F_1} \right)^{4/3} ; \quad \Delta t_1^{\text{ст}} = \frac{Q_1}{F_1} \frac{\delta_1^{\text{ст}}}{\lambda_1^{\text{ст}}} ; \quad \Delta t_1'' = \left( \frac{Q_1}{B_{01} F_1} \right)^{0,3} .$$

Складывая эти частные движущие силы, получаем полный перепад температур (движущую силу) в первом корпусе  $\Delta_1 = T_1 - t_1 = \Delta t_1' + \Delta t_1^{\text{ст}} + \Delta t_1''$ :

$$\Delta_1 = \left( \frac{Q_1}{A_1 F_1} \right)^{4/3} + \frac{Q_1}{F_1} \frac{\delta_1^{\text{ст}}}{\lambda_1^{\text{ст}}} + \left( \frac{Q_1}{B_{01} F_1} \right)^{0,3} . \quad (9.24)$$

Для второго и третьего корпусов можно написать аналогичные равенства:

$$\Delta_2 = \left( \frac{Q_2}{A_2 F_2} \right)^{4/3} + \frac{Q_2}{F_2} \frac{\delta_2^{\text{ст}}}{\lambda_2^{\text{ст}}} + \left( \frac{Q_2}{B_{02} F_2} \right)^{0,3} ; \quad (9.25)$$

$$\Delta_3 = \left( \frac{Q_3}{A_3 F_3} \right)^{4/3} + \frac{Q_3}{F_3} \frac{\delta_3^{\text{ст}}}{\lambda_3^{\text{ст}}} + \left( \frac{Q_3}{B_{03} F_3} \right)^{0,3} . \quad (9.26)$$

При расчете теплообменного аппарата (или *однокорпусного* выпарного аппарата непрерывного действия) значение полной движущей силы  $\Delta_i$  обычно бывает известно. В случае *многокорпусной* выпарной установки известна только сумма  $\Delta_i$  по всем корпусам — см. формулу (9.23). Поэтому в соответствии с использованным ранее подходом необходимо исключить из анализа неизвестные значения  $\Delta_i$  для отдельных корпусов. С этой целью суммируем левые и правые части уравнений (9.24) — (9.26):

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = \Delta_\Sigma = \sum_{i=1}^{i=3} \left( \frac{Q_i}{A_i F_i} \right)^{4/3} + \sum_{i=1}^{i=3} \frac{Q_i}{F_i} \frac{\delta_i^{\text{ст}}}{\lambda_i^{\text{ст}}} + \sum_{i=1}^{i=3} \left( \frac{Q_i}{B_{0i} F_i} \right)^{0,3} ,$$

причем суммарная полезная разность температур рассчитывается по соотношению (9.23).

В общем виде для  $N$ -корпусной выпарной установки

$$\Delta_\Sigma = \sum_{i=1}^N \left( \frac{Q_i}{A_i F_i} \right)^{4/3} + \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{F_i} \frac{\delta_i^{\text{ст}}}{\lambda_i^{\text{ст}}} + \sum_{i=1}^N \left( \frac{Q_i}{B_{0i} F_i} \right)^{0,3} . \quad (9.27)$$

Для аппаратов с принудительной циркуляцией раствора, а также аппаратов с вынесенной зоной кипения коэффициент теплоотдачи  $\alpha_2$  от стенки труб к раствору (кипящему в условиях вынужденного движения или не кипящему в трубах

при наличии трубы вскипания) определяется по одной из формул типа (6.20). Тогда, очевидно, вместо последнего слагаемого в правой части равенства (9.27) будет стоять

$$\sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{F_i \alpha_2^i},$$

так как в этом случае

$$\Delta t_i'' = \frac{Q_i}{F_i \alpha_2^i}.$$

При *вынужденном движении* раствора в трубах с заданной скоростью расчет по (6.20) не вызывает затруднений. В случае *естественной циркуляции* скорость движения раствора в трубах зависит от многих факторов; ненадежны даже эмпирические уравнения. В оценочных расчетах  $\alpha_2$  при подсчете критерия Re обычно рекомендуют принимать скорость равной 0,3—0,6 м/с.

Специально подчеркнем, что изложенный метод *учитывает* зависимость интенсивности теплоотдачи при конденсации пара и кипении растворов (в итоге — коэффициента теплопередачи  $k_i$ ) от частных разностей  $\Delta t_i'$  и  $\Delta t_i''$  (в итоге — от  $\Delta t_i$ ). В ряде учебников\* неоправданно предлагается метод расчета многокорпусной выпарной установки, *игнорирующий* такие зависимости, хотя в разделе о теплопереносе эти зависимости фиксируются.

При любом числе корпусов,  $N > 1$ , уравнению (9.27) удовлетворяет бесконечное множество сочетаний  $F_i$ . Практический интерес представляют две проектно-технологические ситуации:

1) поверхности всех корпусов одинаковы:  $F_1 = F_2 = F_3 = \dots = F_N \equiv F = \text{idem}$ ;

2) суммарная поверхность всех корпусов  $F_\Sigma = \sum_{i=1}^N F_i$  минимальна.

Первый вариант в практическом плане является более целесообразным по следующим причинам:

— аппараты проектируются и изготавливаются не по отдельности, а серийно, что, естественно, дешевле;

— корпуса взаимозаменяемы; возможно их переключение (при работе с одним резервным корпусом, отключаемым для чистки), что удобно в эксплуатации, так как не приводит к какому-либо нарушению непрерывного технологического режима процесса выпаривания.

При расчете многокорпусной выпарной установки с минимальной суммарной поверхностью теплообмена получается некоторая экономия в поверхности, а следовательно, и в затратах металла. Однако затраты на индивидуальное проектирование корпусов и невозможность в критических ситуациях замены одного корпуса другим в значительной степени нивелируют эту экономию. Экономия капитальных затрат ( $F_\Sigma = \min$ ) становится существенной при изготовлении выпарных аппаратов из

---

\* Например, [2, 4—6].

дорогостоящих материалов (нержавеющая сталь, титан и др.) — так приходится поступать в случае агрессивных растворов. Но в целом в промышленной практике в подавляющем большинстве случаев многокорпусные выпарные установки проектируются и эксплуатируются с равными поверхностями нагрева корпусов. Поэтому ниже подробно рассматривается именно первая из упомянутых ситуаций.

В случае равенства поверхностей теплообмена  $F$  отдельных корпусов уравнение (9.27) упрощается:

$$\Delta_{\Sigma} = \left(\frac{1}{F}\right)^{4/3} \sum_{i=1}^N \left(\frac{Q_i}{A_i}\right)^{4/3} + \frac{1}{F} \sum_{i=1}^N \left(Q_i \frac{\delta_i^{\text{ст}}}{\lambda_i^{\text{ст}}}\right) + \left(\frac{1}{F}\right)^{0,3} \sum_{i=1}^N \left(\frac{Q_i}{B_{0i}}\right)^{0,3}. \quad (9.28)$$

Для удобства решения этого уравнения относительно  $F$  домножим его левую и правую части на  $F/\Delta_{\Sigma}$ :

$$F = \frac{1}{\Delta_{\Sigma}} \left\{ \left(\frac{1}{F}\right)^{1/3} \sum_{i=1}^N \left(\frac{Q_i}{A_i}\right)^{4/3} + \sum_{i=1}^N \left(Q_i \frac{\delta_i^{\text{ст}}}{\lambda_i^{\text{ст}}}\right) + F^{0,7} \sum_{i=1}^N \left(\frac{Q_i}{B_{0i}}\right)^{0,3} \right\}. \quad (9.28a)$$

В таком виде оно может быть решено относительно искомой поверхности теплообмена  $F$  — не аналитически (дробные показатели степени), но каким-либо численным методом. Главная трудность определения  $F$  по этой формуле состоит в невозможности расчета тепловых нагрузок аппаратов ( $Q_i$ ) по формулам (9.19) — (9.21), величин  $A_i$  и  $B_{0i}$ , а также температурных депрессий  $\delta_i$  без знания параметров ведения процесса в корпусах. А эти параметры могут быть установлены только после нахождения поверхности теплообмена  $F$  и соответствующего ей распределения температур, давлений и концентраций по корпусам. По указанным причинам задача нахождения  $F$  из уравнения (9.28), а далее —  $Q_i$  и  $D_i$  решается методом последовательных приближений.

**Последовательность расчета многокорпусных выпарных установок.** Приведем кратко алгоритм такого расчета.

1. Определяют общее количество удаляемого растворителя  $W$  по формуле типа (9.6):  $W = S_0(1 - a_0/a_N)$ . Оно распределяется по корпусам — либо поровну ( $W_1 = W_2 = W_3 = \dots = W/N$ ), либо с учетом отбора экстра-пара, тогда  $W_1 \geq W_2 \geq W_3 \geq \dots \geq W_N$ .
2. По предварительно найденным  $W_i$  рассчитывают концентрации  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N-1$ ) и по ним — температурные депрессии  $\delta_i$  в корпусах: поначалу стандартные (так как неизвестны давления в корпусах), а для последнего корпуса — точную, так как рабочее давление в нем известно.
3. Суммарную полезную разность температур, рассчитанную по формуле (9.23), предварительно распределяют по корпусам — либо поровну ( $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \dots = \Delta_{\Sigma}/N$ ), либо с учетом ухудшения условий теплопередачи, например  $\Delta_1 : \Delta_2 : \Delta_3 = 1 : 1,2 : 1,5$  или каким-либо иным образом, в частности  $\Delta_1 : \Delta_2 : \Delta_3 = (W_1/\varphi_1) : (W_2/\varphi_2) : (W_3/\varphi_3)$ .

4. Находят параметры ведения процесса в корпусах, используя формулы  $t_i = T_i - \Delta_i$ ,  $\theta_i = t_i - \delta_i$ ,  $T_{i+1} = \theta_i - \delta_{i-(i+1)}^F$ , а также энтальпии насыщенных водяных паров и их давления — в зависимости от установленных температур. Рассчитывают величины  $A_i$  (задавшись высотой труб  $H$ ) и  $B_{0i}$ .

5. Корректируют величины  $W_i$  путем совместного решения системы уравнений тепловых балансов всех корпусов, кроме первого (уравнения (9.20), (9.21) и т.п.), и баланса (9.18) по удаленному растворителю. Заметим, что в тепловом балансе первого корпуса содержится неизвестная  $D_1$  (дополнительное уравнение и дополнительная неизвестная); поэтому на данной стадии расчета он и не рассматривается.

6. Определяют тепловые нагрузки  $Q_i$  корпусов по формулам (9.19) — (9.21).

7. Находят  $F$  по (9.28а) численным методом. Далее по формулам (9.24) — (9.26) с учетом найденной поверхности теплообмена  $F$  рассчитывают соответствующее ей распределение  $\Delta_\Sigma$  по корпусам, т.е. значения  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$  и т.д.

8. Устанавливают параметры ведения процесса в корпусах, соответствующие найденной величине  $F$ , по формулам, приведенным в пункте 4 данного алгоритма.

9. Вновь находят тепловые нагрузки  $Q_i$ , предварительно опять уточнив величины  $W_i$  (см. пункты 5 и 6).

10. Если рассчитанные по пункту 9 значения  $Q_i$  для каждого корпуса отличаются от найденных ранее в пределах обусловленной погрешности расчета (например, до 5% при учебном расчете выпарной установки и до 2—3% — при проектном для целей производства), то расчет считают законченным. Найденные значения поверхности  $F$  по пункту 7, потоков по пункту 9 и параметров процесса по пункту 8 принимают как окончательные. Расход греющего пара в первом корпусе ( $D_1$ ) определяют по формуле (9.13).

При большем расхождении в значениях  $Q_i$  для какого-либо корпуса необходима корректировка параметров ведения процесса. В этом случае расчет проводят заново, ориентируясь на найденные в пункте 9 значения  $W_i$ , установленные в пункте 8 параметры процесса, уточненные температурные депрессии с учетом давлений в корпусах, а следовательно и  $\Delta_\Sigma$ . Вычисляют новые значения комплексов  $A_i$  и  $B_{0i}$  и вновь решают уравнение (9.28) — находят  $F$  (пункт 7). С учетом нового значения поверхности теплообмена отыскивают распределение  $\Delta_\Sigma$  по корпусам (см. пункт 7). После реализации пунктов 8 и 9 этого алгоритма вновь сравнивают новые  $Q_i$  с полученными в предыдущем расчете и делают вывод о целесообразности следующего приближения.

Не останавливаясь подробно на методе расчета многокорпусной выпарной установки с минимальной поверхностью  $F_\Sigma$ , заметим лишь, что он возможен с применением вариационных методов. При этом тоже *должна быть учтена* зависимость коэффициентов теплопередачи в корпусах от распределения полезного температурного напора  $\Delta_\Sigma$  по отдельным корпусам (см. специальное замечание и сноску на стр. 713).

Расход первичного пара  $D_1$  (в первом корпусе) в многокорпусной выпарной установке значительно меньше, нежели в однокорпусном аппарате при тех же производительностях и граничных концентрациях  $a_0$  и  $a_N$  — за счет использования теплоты конденсации вторичных паров. Если учесть приведенную ранее (см. стр. 681) оценку, что при расходе 1 кг первичного пара образуется около 0,9 кг вторичного, то напрашивается

вывод о целесообразности увеличения числа корпусов с целью большей экономии греющего пара.

Так, в случае трехкорпусной выпарной установки за счет 1 кг первичного (греющего) пара в первом корпусе получаем: 0,9 кг вторичного пара в первом корпусе,  $0,9 \cdot 0,9 = 0,81$  кг — во втором и  $0,81 \cdot 0,9 \approx 0,73$  кг — в третьем; всего — 2,44 кг. В четырехкорпусной установке в последнем корпусе выпаривается еще  $0,73 \cdot 0,9 \approx 0,66$  кг вторичного пара; всего  $2,44 + 0,66 = 3,1$  кг при расходе 1 кг греющего пара в первом корпусе.

Однако выше было показано (см. формулу (9.23)), что с ростом числа корпусов суммарная полезная разность температур ( $\Delta_{\Sigma}$ ) уменьшается за счет возрастания  $\sum \delta_i$  и  $\sum \delta_{i-(i+1)}^r$ . При этом существенно понижается и разность температур, приходящаяся на один корпус, а поверхность теплообмена возрастает. Это приводит к увеличению размеров и стоимости установки, а также затрат на ее обслуживание. Поэтому суммарный экономический эффект при росте числа корпусов становится менее ощутимым. Самое главное, однако, заключается в том, что при малых разностях  $\Delta_i$  (ниже  $\sim 10^\circ\text{C}$ ) работа аппарата становится неустойчивой. Именно из-за этого на основании опыта эксплуатации многокорпусных выпарных установок оптимальное число корпусов находят из условия минимальной разности температур в корпусе на уровне  $\sim 10^\circ\text{C}$ . Как правило, число корпусов при многокорпусном выпаривании составляет 2—4, реже 5—6.

Управление процессом на многокорпусной выпарной установке осложнено взаимным влиянием параметров работы одного аппарата на параметры соседних, поэтому даже поддержание стабильных режимов работы вызывает значительные технические трудности. Использование дорогостоящей регулирующей аппаратуры заметно снижает экономический эффект, связанный с экономией греющего пара при многокорпусном выпаривании.

### 9.6.6. Выпарной аппарат с полным тепловым насосом

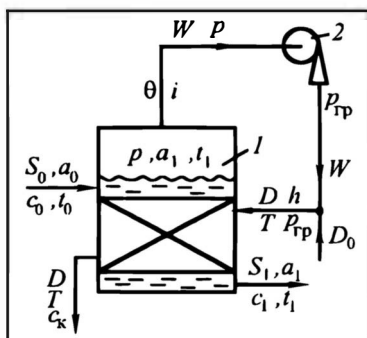
Альтернативным использованию многокорпусных выпарных установок способом экономии греющего пара является использование образующегося при выпаривании вторичного пара в качестве греющего в том же выпарном аппарате. Для повышения потенциала пара (давления и соответственно температуры конденсации) его сжимают в компрессоре до давления, при котором температура  $T$  насыщения (конденсации) становится на 10 — 15 градусов выше температуры кипения раствора  $t$ .

Схема такого выпарного аппарата с полным (сжимается весь вторичный пар) тепловым насосом представлена на рис. 9.14.

Рис. 9.14. Схема выпарного аппарата с полным тепловым насосом:

1 — выпарной аппарат, 2 — турбокомпрессор

Сжатие вторичного пара целесообразно проводить в турбокомпрессорах, так как поршневые компрессоры загрязняют пар смазкой. Такой загрязненный пар становится непригодным для дальнейшего использования ввиду значительного снижения коэффициента теплоотдачи при его конденсации, обусловленного образованием на трубах масляной пленки с дополнительным (большим) термическим сопротивлением.



При конденсации 1 кг греющего пара получается меньше 1 кг вторичного (см. разд. 9.3). С учетом потерь в окружающую среду и затрат на нагрев исходного раствора до температуры кипения на 1 кг греющего пара получается 0,8—0,85 кг вторичного. Поэтому для обеспечения стационарности непрерывного выпаривания к сжатому вторичному пару ( $W$ ) добавляют недостающий поток свежего греющего пара  $D_0$ , так что

$$D = W + D_0. \quad (9.29)$$

Необходимый расход греющего пара  $D$  на процесс выпаривания определяется как обычно — по формуле (9.13) с учетом (9.12). Тогда расход свежего (дополнительного) пара составит по (9.29):

$$D_0 = D - W = \frac{Q}{r_{гр}} - W = \frac{S_0 c_0 (t_1 - t_0) + W(i - c_p t_1)}{r_{гр}} - W, \quad (9.30)$$

или после преобразований

$$D_0 = \frac{S_0 \left[ c_0 (t_1 - t_0) + \left( 1 - \frac{a_0}{a_1} \right) (i - c_p t_1 - r_{гр}) \right]}{r_{гр}}. \quad (9.30a)$$

Из формулы (9.30) видно, что расход свежего греющего пара  $D_0$  при работе с тепловым насосом всегда меньше общего расхода греющего пара  $D$ . Однако при работе с тепловым насосом дополнительно затрачивается энергия на сжатие вторичного пара. Потребляемую энергию определяют по формулам, приведенным в гл. 4. Согласно принятой в настоящей главе символике (рис. 9.15),

$$N = \frac{W(h^* - i)}{\eta_{ад} \eta_{мех}}, \quad (9.31)$$

где  $(h^* - i)$  — работа адиабатического сжатия вторичного пара от давления  $p_{гр}$  до  $p_{гр}$  (линия 1-2 при  $s = \text{const}$ );  $h^*$  — энтальпия сжатого пара, находящегося после



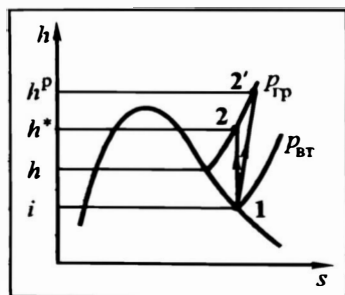


Рис. 9.15. Адиабатический (1 — 2) и реальный (1 — 2') процессы сжатия вторичного пара на диаграмме  $h - s$

компрессора в перегретом состоянии (поэтому  $h^*$  больше энтальпии насыщенного пара  $h$ );  $(h^* - i)/\eta_{ад}$  — работа политропического сжатия;  $\eta_{ад}$  — адиабатический КПД компрессора;  $\eta_{мех}$  — механический КПД компрессора.

Напомним, что реальный процесс сжатия в компрессоре протекает по линии 1—2' (с увеличением энтропии  $s$ ).

При этом  $h^p - i = (h^* - i)/\eta_{ад}$ .

Расчеты и опыт эксплуатации показывают, что при выпаривании с полным тепловым насосом на каждый кг свежего греющего пара выпаривается более 5 кг вторичного. Правда, эта экономия греющего пара в определенной степени нивелируется дополнительным расходом энергии на сжатие вторичного пара в компрессоре. Поэтому вопрос о целесообразности применения полного теплового насоса решается на основании экономического расчета — в сравнении с многокорпусной выпарной установкой.

Отметим, что *работа выпарной установки с полным тепловым насосом всегда экономически эффективнее, нежели без него*. Но область их применения ограничена специфическими характеристиками работы турбокомпрессоров: высокими производительностями при сравнительно небольших степенях сжатия.

В сравнении с многокорпусной выпарной установкой при использовании полного теплового насоса меньше расход металла, производственные площади, габариты установки, проще и дешевле управление процессом.

В результате обобщения опыта эксплуатации различных выпарных установок найдено, что выпаривание с полным тепловым насосом экономически оправданно, когда  $p_{гр}/p \leq 2,5 \div 3$  и производительность по вторичному пару превышает  $1,5 \text{ м}^3/\text{с}$ .

Поскольку указанной степени сжатия вторичного пара соответствует повышение температуры конденсации на  $25 - 35^\circ\text{C}$ , то такую схему целесообразно использовать для выпаривания растворов со сравнительно небольшими температурными депрессиями. Именно в этих случаях движущая сила процесса теплопередачи в выпарном аппарате ( $T - t$ ) близка к оптимальной величине, равной как раз  $25 - 30^\circ\text{C}$ . При больших температурных депрессиях движущая сила процесса ( $T - t$ ) уменьшается на величину этой депрессии.

Вопрос отвода вторичного пара на сторону (экстра-пара) решается здесь положительно при наличии потребителя. При

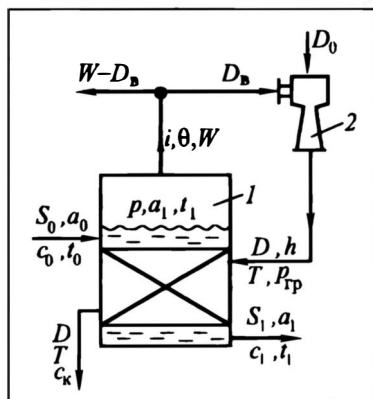
этом с целью повышения экономических показателей установки предпочтительнее отбирать экстра-пар *до сжатия* его в компрессоре. Отбор экстра-пара *после сжатия* в компрессоре оправдан лишь в том случае, если выгода от его использования вне выпарной установки превышает упомянутую многократную (в 5 раз и более) экономию греющего пара на самой выпарной установке.

### 9.6.7. Выпарной аппарат с частичным тепловым насосом

По этому варианту технологической схемы (рис. 9.16) сжимается и затем используется в качестве греющего не весь вторичный пар ( $W$ ), а лишь часть его в количестве (в единицу времени)  $D_B$ . Сжатие осуществляется в **инжекторе** за счет подачи потока  $D_0$  пара высокого давления  $p_1$  (большого, чем давление греющего пара, необходимое для обеспечения теплопередачи). Естественно, что такая организация работы выпарной установки возможна лишь при наличии пара повышенного потенциала  $p_1$ .

Рис. 9.16. Схема выпарного аппарата с инжектором:

1 — выпарной аппарат, 2 — инжектор



### Расход пара

При смешении в инжекторе паров разных давлений ( $p_1$  и  $p_{BT}$ ) на выходе получают требуемое давление греющего пара  $p_{тр}$ . Необходимый расход последнего ( $D$ ) определяют, как обычно, из теплового баланса выпарного аппарата по формуле (9.13) с учетом (9.12). Из материального баланса инжектора имеем

$$D = D_0 + D_B. \quad (9.32)$$

Обозначим:  $D_B/D_0 \equiv u$  — коэффициент инжекции, показывающий, сколько кг вторичного пара засасывается инжектором за счет подачи 1 кг острого пара (высокого давления). Тогда

$$D = D_0 \left( 1 + \frac{D_B}{D_0} \right) = D_0(1 + u),$$

откуда расход пара высокого давления

$$D_0 = \frac{D}{1 + u} = \frac{S_0 c_0 (t_1 - t_0) + W(i - c_p t_1)}{(h - c_k T_1)(1 + u)}. \quad (9.33)$$

Видно, что расход острого пара  $D_0$  в значительной мере зависит от коэффициента инжекции  $u$ : при его увеличении расход острого пара  $D_0$  уменьшается.

### *Расчет коэффициента инжекции*

Для этого сначала рассмотрим подробнее устройство инжектора (рис. 9.17,а) и процессы, протекающие в нем. Изменение основных параметров процесса (давления  $p$  и скорости  $w$ ) по длине инжектора представлено на рис. 9.17,б.

Заметим: на рисунке инжектор расположен горизонтально; при вертикальном его расположении продольные профили  $p$  и  $w$  практически не изменятся, так как разница в величинах нивелирных высот для различных сечений инжектора намного меньше пьезометрических высот и скоростных напоров.

Инжектор состоит из трех основных зон: сопла 2, через которое подается пар высокого давления (острый пар); камеры смешения 1, в которую через патрубок 3 засасывается вторичный пар и смешивается там с острым паром; диффузора 4 (камеры сжатия), где происходит повышение давления смеси острого и вторичного пара до  $p_{гр}$ .

При истечении пара высокого давления из сопла 2 в камеру смешения (где давление близко к давлению вторичного пара) его скорость резко возрастает, достигая на выходе из сопла в камеру смешения 800—1000 м/с. Столь высокая скорость (выше скорости звука) обеспечивается формой сопла и тщательностью обработки (полировки) его внутренней поверхности. Согласно закону Бернулли, увеличение скорости (и скоростного напора) сопровождается снижением давления в камере смешения до значений, несколько меньших  $p_{вт}$ , что и обуславливает засасывание вторичного пара. Резкое понижение давления и рост скорости при истечении из сопла показаны на рис. 9.17,б вертикальным участком 1—2.

В камере смешения (участок 2—3) наблюдается некоторое понижение скорости пара при его смешении с низкоскоростным потоком вторичного пара — соответственно балансу количества движения. Давление при этом также уменьшается — за счет гидравлических потерь в камере смешения, складывающихся прежде всего из потерь в результате гидравлического удара при смешении высокоскоростного и низкоскоростного потоков пара, а также потерь на трение.

В диффузоре по ходу движения пара, т.е. по мере увеличения площади поперечного сечения, происходит снижение скорости и скоростного напора, а значит, преобразование кинетической энергии в потенциальную — также согласно уравнению Бернулли.

С целью предотвращения отрыва струи пара от стенки (и образования вихрей) угол расширения диффузора принимают небольшим (не более 7—8°).

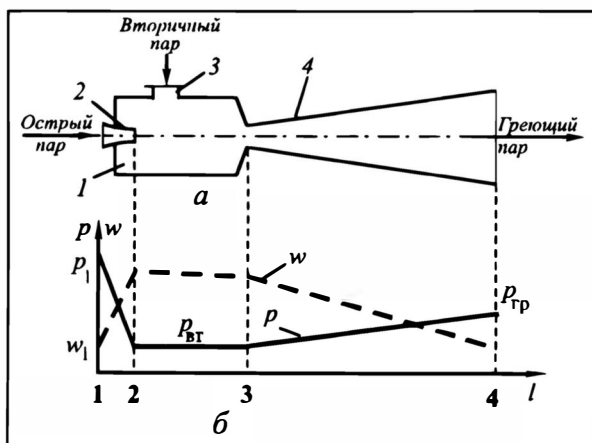


Рис. 9.17. Схема и работа инжектора:

*a* — схема инжектора: 1 — камера смешения, 2 — сопло, 3 — патрубок для подачи вторичного пара, 4 — диффузор;

*б* — изменение давления и скорости по длине инжектора

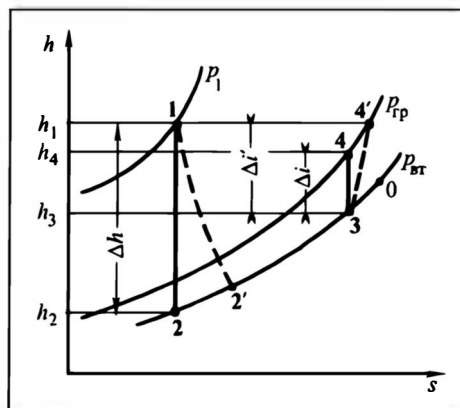


Рис. 9.18. К расчету коэффициента инжекции

Анализ изменения энергетических параметров пара на выделенных участках инжектора (границы участков помечены индексами) удобно проводить с помощью диаграммы  $h - s$  (энтальпия — энтропия), изображенной на рис. 9.18.

**Энергетический баланс для сопла.** Этот баланс для участка 1–2 (от входа в сопло до выхода из него) в расчете на 1 кг острого пара и в предположении об отсутствии теплообмена с окружающей средой (адиабатический процесс) имеет вид

$$h_1 + \frac{w_1^2}{2} - i_2 - \frac{w_2^2}{2} = 0,$$

где  $h_1$  и  $i_2$  — энтальпии пара на входе и на выходе из сопла соответственно;  $w_1$  и  $w_2$  — скорости пара до сопла и на выходе из него.

Энергетический баланс здесь составлен с учетом кинетической энергии потоков: при больших скоростях пара она соизмерима с величинами энтальпий пара (порядка  $10^3$  кДж/кг).

Скорость пара на входе в сопло  $w_1$  (20—30 м/с) значительно меньше, чем на выходе из него ( $w_2 = 800 \div 1000$  м/с); поэтому величиной  $w_1^2/2$  пренебрегаем ввиду ее малости по сравнению с другими членами. Тогда

$$w_2 = \sqrt{2\Delta h}, \quad (a)$$

где  $\Delta h \equiv h_1 - i_2$  — изменение энтальпии при адиабатическом разгоне пара.

Реальный процесс протекает не адиабатически: за счет трения происходит торможение пара, некоторый его подогрев и рост энтальпии — до точки 2'. В результате перепад энтальпий получается ниже теоретического  $\Delta h$  и реальная скорость пара  $w'_2$  — также несколько ниже теоретической  $w_2$ :

$$w'_2 = w_2 \varphi_1, \quad (б)$$

где  $\varphi_1 < 1$ .

Реальный запас кинетической энергии 1 кг острого пара составляет

$$\frac{(w'_2)^2}{2} = \frac{w_2^2}{2} \varphi_1^2 = \frac{2\Delta h}{2} \varphi_1^2 = \Delta h \eta_1, \quad (в)$$

где  $\eta_1 \equiv \varphi_1^2$  — КПД сопла.

На диаграмме  $h-s$  процесс расширения пара в сопле изображается линиями 1—2 (адиабатический процесс) и 1—2' (реальный процесс).

**Энергетический баланс для камеры смешения.** Здесь получаемая смесь характеризуется точкой 3, положение которой между точками 2' и 0 (состояние вторичного пара) зависит от количеств смешиваемых паров, а точнее — от их соотношения, т.е. от коэффициента инжекции  $u$ . При известной величине  $u$  положение точки смешения (3) находится из энергетического баланса камеры смешения:

$$1 \cdot \left[ i_2 + \frac{(w'_2)^2}{2} \right] + u \left[ i_{вт} + \frac{w_{вт}^2}{2} \right] - (1 + u) \left[ i_3 + \frac{w_3^2}{2} \right] = 0. \quad (г)$$

Теоретическую скорость  $w'_3$  на выходе из камеры смешения можно найти из баланса (закона сохранения) количества движения, записанного в расчете на 1 кг пара высокого давления:

$$1 \cdot w'_2 + u w_{вт} - (1 + u) w'_3 = 0. \quad (д)$$

Так как  $w_{вт} \ll w'_2$  и, кроме того,  $u < 1$ , то вторым слагаемым в левой части равенства (д) можно пренебречь.

Тогда

$$w_3' = \frac{w_2'}{1 + u}. \quad (\text{е})$$

Реальная конечная скорость  $w_3$  паровой смеси на выходе из камеры смешения (на входе в диффузор) из-за гидравлического удара при смешении (в меньшей мере — из-за гидравлического сопротивления трению потока о стенки камеры) ниже теоретической  $w_3'$ :

$$w_3 = w_3' \varphi_2, \quad (\text{ж})$$

где  $\varphi_2 < 1$  — коэффициент, учитывающий потери энергии в камере смешения.

*Кинетическая энергия 1 кг смеси равна*

$$\frac{(w_3)^2}{2} = \frac{(w_3')^2}{2} \varphi_2^2 = \frac{(w_2')^2}{2(1+u)^2} \varphi_2^2 = \frac{\Delta h}{(1+u)^2} \varphi_1^2 \varphi_2^2. \quad (\text{з})$$

**Энергетический баланс для диффузора.** В диффузоре (камере сжатия) происходит преобразование кинетической энергии в потенциальную (тепловую). В отсутствие потерь теплоты в окружающую среду энергетический баланс имеет вид

$$\frac{w_3^2}{2} + i_3 - h_4 - \frac{w_4^2}{2} = 0. \quad (\text{и})$$

Небольшой кинетической энергией пара на выходе из диффузора ( $w_4^2/2$ ) можно пренебречь (вследствие малости скорости  $w_4$  — на уровне 20–30 м/с). Тогда адиабатический прирост энтальпии будет

$$\Delta i \equiv h_4 - i_3 = \frac{w_3^2}{2}. \quad (\text{к})$$

Реальный прирост энтальпии  $\Delta i'$  больше адиабатического  $\Delta i$  за счет теплоты, выделяющейся при трении пара о стенки диффузора. Это ясно видно на диаграмме  $h-s$  для реального процесса сжатия 3–4', протекающего с увеличением энтропии, в сравнении с идеальным процессом 3–4. Итак,

$$\Delta i' = \frac{\Delta i}{\eta_3}, \quad (\text{л})$$

где  $\eta_3 < 1$  — КПД диффузора; для последующих преобразований по аналогии с  $\eta_1$  удобна запись  $\eta_3 \equiv \varphi_3^2$ .

Таким образом, *полный запас кинетической энергии 1 кг паровой смеси* на входе в диффузор, определяемый выражением (з),

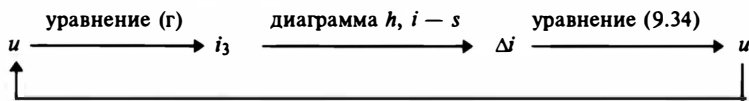
расходуется на повышение энтальпии пара в диффузоре по (л):

$$\frac{\Delta h}{(1+u)^2} \varphi_1^2 \varphi_2^2 = \frac{\Delta i}{\varphi_3^2}.$$

Отсюда

$$u = \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \sqrt{\Delta h / \Delta i} - 1 \left[ \frac{\kappa_{\text{г}} \text{ вторичного пара}}{\kappa_{\text{г}} \text{ острого пара}} \right]. \quad (9.34)$$

Расчет по формуле (9.34) затруднен тем, что прямо нельзя определить  $\Delta i$ , так как заранее не известно положение точки 3 даже при известных точках 2 (или 2') и 0. В самом деле, при определении положения точки 3 (на изобаре  $p_{\text{вт}}$  — по энтальпии  $i_3$ , вычисляемой из энергетического баланса (г) для камеры смешения) необходимо знать соотношение смешиваемых потоков, т.е. значение коэффициента инжекции  $u$ . Но он ведь и является предметом расчета. Поэтому  $u$  находят итерационным методом, предварительно задавшись его значением в пределах 0,2—0,4, по следующему алгоритму:



При этом  $i_3$  определяют из уравнения энергетического баланса (г), пренебрегая величиной скоростного напора вторичного пара по сравнению с его энтальпией ( $w_{\text{вт}}^2/2 \ll i_{\text{вт}}$ ) и используя выражения (е) и (в):

$$i_3 = \frac{i_2 + \Delta h \varphi_1^2 + u i_{\text{вт}}}{1+u} - \frac{\Delta h \varphi_1^2 \varphi_2^2}{(1+u)^2}.$$

Величины коэффициентов  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$  зависят от формы сопла, тщательности обработки рабочих поверхностей и соосности сборки узлов инжектора (сопла, камеры смешения, диффузора). Из опыта эксплуатации  $\varphi_1 \approx \varphi_3 = 0,95 \div 0,97$ ;  $\varphi_2 = 0,8 \div 0,85$ .

Из формулы (9.34) видно, что коэффициент инжекции  $u$  возрастает при увеличении  $\Delta h$  (при использовании острого пара с более высоким давлением) и уменьшении  $\Delta i$ , т.е. при уменьшении разности давлений греющего ( $p_{\text{гр}}$ ) и вторичного ( $p_{\text{вт}}$ ) паров. Эта разность может быть небольшой только при упаривании растворов с малой температурной депрессией. Опыт работы выпарных аппаратов с инжекцией вторичного пара показал, что такой способ экономии греющего пара способен конкурировать с рассмотренными ранее (многокорпусное выпаривание, использование турбокомпрессора) при степенях сжатия вторичного пара не более  $1,5 \div 2,0$ . При этом коэффициент инжекции может достигать значений  $0,6$  (чаще  $0,4 \div 0,5$ ).

### 9.6.8. Повышение эффективности выпарных установок за счет утилизации теплоты

Необходимость экономии энергетических затрат, греющего пара стимулирует поиск и разработку вариантов утилизации теплоты при функционировании выпарных установок. Эти варианты не исчерпываются приведенными ранее схемами многокорпусных выпарных установок (см. разд. 9.6.5) и аппаратов с тепловыми насосами (см. разд. 9.6.6 и 9.6.7) — есть и дополнительные возможности. Так, независимо от схемы работы выпарных установок, возможна непосредственная утилизация теплоты отводимых конденсата и упаренного раствора — для подогрева исходного. *Явление самоиспарения* (см. разд. 9.3) может быть использовано не только для *упариваемого раствора*, но и для *конденсата греющего пара*.

На рис. 9.19 показана одна из возможных рациональных схем утилизации теплоты применительно к выпарному аппарату с полным тепловым насосом. Оригинальность данной схемы — использование **самоиспарения конденсата греющего пара** при понижении давления для получения пара низкого потенциала, добавляемого к потоку вторичного пара перед сжатием в турбокомпрессоре.

Конденсат греющего пара (его расход  $D$ ), покидающий межтрубное пространство аппарата с температурой  $T$ , дросселируется в дроссельном вентиле 2 от давления  $p_{\text{гр}}$  до рабочего дав-

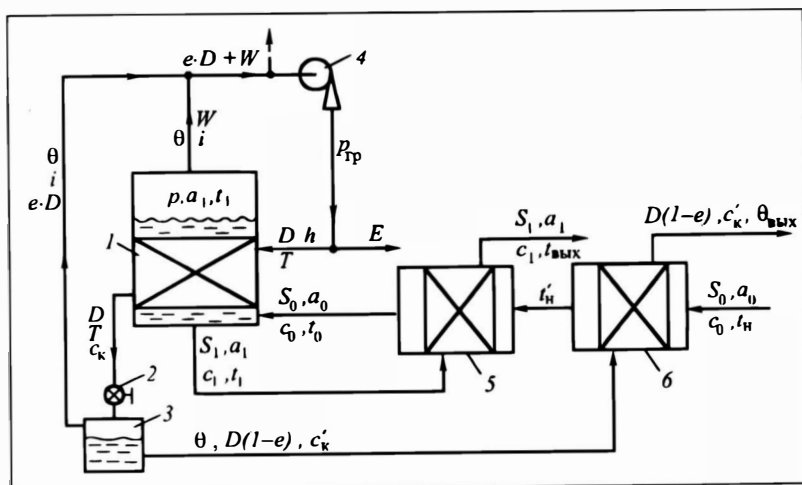


Рис. 9.19. Схема выпарной установки с "избыточным" ("сверхполным") тепловым насосом и утилизацией теплоты конденсата и упаренного раствора:

1 — выпарной аппарат, 2 — дроссельный вентиль, 3 — сепаратор, 4 — турбокомпрессор, 5, 6 — поверхностные теплообменники



ления  $p$  кипящего раствора в трубном пространстве. При этом конденсат, попадая после дросселирования в сепаратор 3, оказывается перегретым относительно температуры кипения воды  $\theta$  при давлении  $p$ , поскольку  $T > \theta$ . В результате за счет самоиспарения конденсата образуется смесь (при температуре  $\theta$ ) конденсата и пара низкого (рабочего) давления  $p$ . Пусть доля пара в этой смеси составляет  $e$ ; тогда его поток равен  $eD$ . После отделения от оставшегося конденсата образовавшийся пар смешивается с потоком вторичного пара  $W$  и сжимается в турбокомпрессоре. Суммарный поток сжимаемого в турбокомпрессоре пара ( $W + eD$ ) может даже превысить необходимый расход  $D$  греющего пара в нагревательной камере выпарного аппарата.

Получение избытка пара  $E$  ( $E \geq 0$ ) возможно при следующем общем условии:

$$W + eD \geq D, \text{ или } e \geq 1 - \frac{W}{D}; \quad (\text{м})$$

при этом знак равенства отвечает условию  $E = 0$ , т.е. замкнутой по теплотопоткам схеме работы выпарной установки.

В соответствии с формулой (3) раздела 9.3 доля  $e$  пара, образующегося при самоиспарении конденсата, зависит от разности температур конденсатов греющего пара ( $T$ ) и вторичного ( $\theta$ ), а также от теплоемкостей конденсатов ( $c_k$  и  $c'_k$  соответственно) и теплоты конденсации  $r$  при давлении  $p$ . Поскольку теплоемкость водного конденсата слабо зависит от температуры ( $c'_k \approx c_k$ ), то

$$e = \frac{c_k(T - \theta)}{r}.$$

Подставляя это выражение в общее условие (м), нетрудно получить необходимую разность температур, обеспечивающую избыток пара ( $E > 0$ ) сверх потребного для обогрева выпарного аппарата:

$$\frac{c_k(T - \theta)}{r} > 1 - \frac{W}{D}, \text{ или } T - \theta > \frac{r}{c_k} \left( 1 - \frac{W}{D} \right). \quad (\text{н})$$

Строго терминологически здесь следует говорить о выпарном аппарате уже не с полным, а со “сверхполным” (“избыточным”) тепловым насосом, поскольку на сжатие в турбокомпрессор подается избыточное количество пара в сравнении с покидающим аппарат вторичным паром.

Для случаев, когда суммарный расход сжимаемого в турбокомпрессоре пара ( $W + eD$ ) меньше требуемого расхода  $D$  греющего пара, необходимо компенсировать эту разницу дополнительным потоком  $D_0$  свежего греющего пара:

$$D_0 = D - (W + eD) = D(1 - e) - W. \quad (\text{о})$$

В отсутствие дросселирования конденсата греющего пара ( $e = 0$ ) формула (о) полностью соответствует формуле (9.29).

Избыток пара высокого давления  $E = W + De - D = W - D(1 - e)$  может быть отведен из установки в качестве экстра-

пара (сплошная линия на рис. 9.19) с большой экономической выгодой. Подчеркнем: отвод экстра-пара *до сжатия* в турбокомпрессоре (пунктирная линия *E*) чаще всего менее выгоден — из-за меньшей ценности (пригодности для использования) пара низкого потенциала:  $p < p_{\text{тр}}$ ,  $\theta < T$ .

Избыточный поток пара *E* может быть, разумеется, направлен на нагрев исходного раствора  $S_0$  с концентрацией  $a_0$  и температурой  $t_n$ . Экономически выгоднее, однако, отдавать экстра-пар *E* на сторону для более квалифицированного использования (см. раздел 9.6.5), а исходный раствор нагревать в теплообменниках-рекуператорах 6 и 5 — последовательно горячими потоками конденсата и упаренного раствора (как показано на рис. 9.19). Температура упаренного раствора ( $t_1$ ) больше, чем температура конденсации после дросселирования. Поэтому конденсат целесообразно использовать на первом этапе (в теплообменнике 6), а упаренный раствор — на последнем этапе (в теплообменнике 5) нагревания исходного раствора от температуры  $t_n$  до  $t_0$ .

В заключение раздела укажем, что перегрев растворов при понижении давления и связанный с этим эффект самоиспарения раствора (см. уравнение (ж) раздела 9.3) широко используется в современных многоступенчатых установках.

Так, этот эффект был рассмотрен (среди других) в разд. 9.6.5 при изучении многокорпусных выпарных установок. Заметим: здесь тоже возможно дросселирование конденсата, отводимого из какого-либо корпуса, до рабочего давления кипящего в том же корпусе раствора и присоединение пара, образующегося за счет самоиспарения, к вторичному, направляемому на обогрев последующего корпуса.

Еще более последовательно эффект самоиспарения раствора применяется в **многоступенчатых адиабатных испарителях\***, получивших также название установок **мгновенного вскипания**: образующиеся при самоиспарении раствора пары растворителя используются здесь для нагревания (перегрева) исходного раствора. Ввиду отсутствия поверхностей теплообмена в зоне кипения растворов и связанной с этим инкрустации поверхностей работа таких установок остается стабильной в течение длительного периода их эксплуатации.

## 9.7. ПЛЕНОЧНЫЕ ВЫПАРНЫЕ АППАРАТЫ

Отличительной особенностью пленочных аппаратов, как отмечалось ранее, является отсутствие циркуляции раствора, т.е. его упаривание до конечной концентрации за один проход. Это означает, что концентрация раствора и соответствующие ей

---

\* Подробнее об этом см. в учебной и специальной литературе [2, 3, 9].

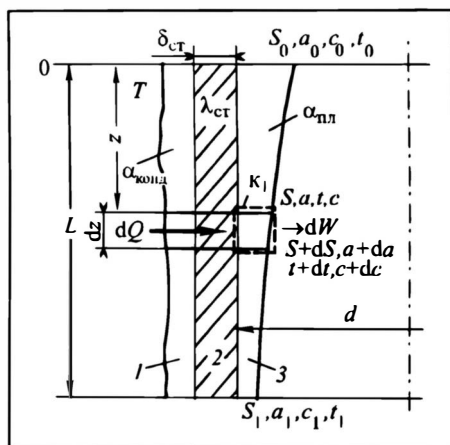


Рис. 9.20. Схема процесса выпаривания в пленочном аппарате со стекающей пленкой:

1 — пленка конденсата, 2 — стенка, 3 — пленка раствора

физико-химические свойства изменяются по поверхности теплообмена, оставаясь неизменными во времени в каждой ее точке. Напомним, что в выпарных аппаратах периодического действия параметры ведения процесса изменяются во времени, оставаясь при интенсивном перемешивании

раствора практически одинаковыми во всех точках поверхности теплообмена. Напротив, в пленочных аппаратах непрерывного действия ситуация обратная — наблюдается рассредоточение параметров по поверхности, но в каждой точке пространства они постоянны во времени. Отсюда — общность (переменность параметров) и отличия (во времени или в пространстве) в методиках расчета выпарных аппаратов периодического действия и пленочных непрерывного действия.

Рассмотрим подробнее процесс выпаривания в пленочном аппарате (рис. 9.2 и 9.20) с нисходящей пленкой внутри труб, обогреваемых конденсирующимся водяным паром постоянной температуры  $T$ . Обозначим (см. рис. 9.20):  $\alpha_{\text{конд}}$  — коэффициент теплоотдачи при конденсации пара;  $\delta_{\text{ст}}$  и  $\lambda_{\text{ст}}$  — толщина и коэффициент теплопроводности стенки;  $\alpha_{\text{пл}}$  — коэффициент теплоотдачи от стенки к упариваемому (кипящему) раствору (пленке);  $S_0$  — поток раствора в начальном ( $z = 0$ ) сечении;  $a_0$ ,  $c_0$  и  $t_0$  — его концентрация, теплоемкость и температура кипения;  $S$  — текущий (в сечении  $z$ ) поток раствора;  $a$ ,  $c$  и  $t$  — его концентрация, теплоемкость и температура кипения;  $W = S_0(1 - a_0/a)$  — количество растворителя, удаляемого в единицу времени на участке протяженностью  $z$ , так что  $dW = (S_0 a_0/a^2) da$  — количество растворителя, удаляемого в единицу времени на элементарном участке  $dz$ ;  $d$  — диаметр трубы;  $n$  — число труб в аппарате.

С учетом  $\alpha_{\text{конд}}$ ,  $\alpha_{\text{пл}}$  и термического сопротивления стенки  $\delta_{\text{ст}}/\lambda_{\text{ст}}$  коэффициент теплопередачи от конденсирующегося

пара к выпариваемому раствору

$$k_{\text{вып}} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{\text{конд}}} + \frac{\delta_{\text{ст}}}{\lambda_{\text{ст}}} + \frac{1}{\alpha_{\text{пл}}}} .$$

На элементарном участке поверхности высотой  $dz$  трубного выпарного аппарата тепловой поток

$$dQ = k_{\text{вып}}(T - t)\pi dn dz \quad (9.35)$$

через левую грань контура  $k_1$  на рис. 9.20 расходуется в соответствии с выражением (9.7) на увеличение теплосодержания раствора  $d(Scf)$  и испарение  $dW$  растворителя с повышением концентрации вещества в растворе от  $a$  до  $a + da$ , т.е.

$$dQ = d(Scf) + (i - c_p f)dW, \quad (9.36)$$

где  $c_p$  — теплоемкость растворителя;  $i$  — энтальпия его паров.

Полный тепловой поток (через всю поверхность теплопередачи  $F = \pi dnL$ ) определяется выражением (9.7), получаемым при интегрировании (9.36) от 0 до  $F$ , от  $S_0 c_0 f_0$  до  $S_1 c_1 t_1$  и от 0 до  $W$ .

Проинтегрировав уравнение (9.35), находим необходимое число труб  $n$  (длиной  $L$ ) пленочного аппарата:

$$n = \frac{1}{\pi d L} \int_0^{Q_{\text{вып}}} \frac{dQ}{k_{\text{вып}}(T - t)},$$

или

$$n = \frac{1}{\pi d L} \int_0^{Q_{\text{вып}}} \frac{\frac{1}{\alpha_{\text{конд}}} + \frac{\delta_{\text{ст}}}{\lambda_{\text{ст}}} + \frac{1}{\alpha_{\text{пл}}}}{T - t} dQ. \quad (9.37)$$

Значение интеграла в правой части выражения (9.37) находят так же, как и при периодическом процессе выпаривания (например, численными методами, предварительно установив зависимости всех величин, входящих в подынтегральное выражение (9.37), от текущей концентрации  $a$ ). Тепловые потоки  $Q_{\text{вып}}^{\text{тек}}$  через поверхность теплообмена, обеспечивающие выпаривание до текущей (локальной) концентрации  $a$ , находят по формуле (9.7), подставляя вместо  $t_1$  текущую температуру  $t$  и вместо  $W$  соответственно  $W^{\text{тек}} = S_0(1 - a_0/a)$ . Коэффициент теплоотдачи от стенки к кипящим жидкостным пленкам ( $\alpha_{\text{пл}}$ ) находят по формулам, приведенным в различных учебниках и монографиях\*.

\* См., например, [1, 3].

Выбор размеров труб ( $d$  и  $L$ ) должен быть произведен таким образом, чтобы при данном расходе исходного раствора и заданной степени концентрирования растворов не происходило их “оголение” из-за разрыва жидкостных пленок. Из опыта установлено, что минимальная толщина пленки, при которой обеспечивается полное смачивание всей поверхности, составляет 0,1 мм.

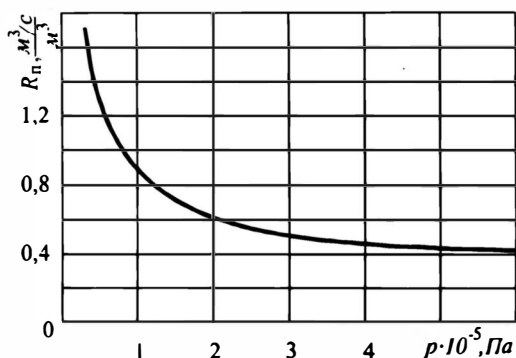
## 9.8. ВЫБОР РАЗМЕРОВ СЕПАРАЦИОННОГО ПРОСТРАНСТВА ВЫПАРНЫХ АППАРАТОВ

При нормальной работе выпарного аппарата отводимый вторичный пар не должен содержать капель упариваемого раствора по ряду причин. Прежде всего, унос капель вторичным паром приводит к безвозвратным потерям самого раствора. Капли агрессивных жидкостей вызывают коррозию аппаратуры, к которой ведут паропроводы. Кроме того, капли загрязняют вторичный пар, затрудняя использование его конденсата для питания паровых котлов. Наконец, капли в паре являются причиной инкрустации обогреваемых им поверхностей.

Отделение вторичного пара от капель жидкости в выпарном аппарате происходит в надрастворном (сепарационном) пространстве. Из-за неопределенности в интенсивности уноса и в распределении образующихся капель по размерам до сих пор не разработаны точные методы расчета необходимого объема сепарационного пространства. В настоящее время его объем принято определять по максимально допустимому объемному напряжению парового пространства  $R_{\text{п}}$ , зависящему прежде всего от давления в аппарате. Величина  $R_{\text{п}}$  представляет собой предельно допустимый удельный (приходящийся на 1 м<sup>3</sup> сепарационного пространства) расход вторичного пара (м<sup>3</sup>/с), при котором гарантировано достаточно полное отделение капель (их осаждение) в сепарационном пространстве. При большем расходе вторичного пара наблюдается повышенный унос капель из-за роста скорости пара в этом пространстве.

Рекомендуемая зависимость максимально допустимого объемного напряжения парового пространства от рабочего давления в аппарате при кипении многих водных растворов солей и кислот приведена на рис. 9.21. Для растворов солей, характеризующихся малым пенообразованием, допустимое напряжение парового пространства может быть увеличено вдвое. Величина  $R_{\text{п}}$  резко уменьшается при увеличении рабочего давления в аппарате до 100 кПа, затем падение замедляется, и при давлениях выше 300 кПа значение  $R_{\text{п}}$  стабилизируется на уровне 0,45 — 0,50 (м<sup>3</sup>/с) / м<sup>3</sup>.

Рис. 9.21. Зависимость максимально допустимого объемного напряжения парового пространства  $R_{\Pi}$  от рабочего давления  $p$



Если в аппарате образуется  $W$  кг/с вторичного пара плотностью  $\rho_{\Pi}$  кг/м<sup>3</sup>, то требуемый объем сепарационного пространства  $V$  (м<sup>3</sup>) равен

$$V = \frac{W}{\rho_{\Pi} R_{\Pi}}.$$

При этом диаметр сепарационного пространства  $d_c$  (м) (или сепаратора — если он расположен отдельно от греющей камеры) находят из формулы объема цилиндра:

$$d_c = \sqrt{\frac{4V}{\pi H_c}}.$$

Высоту сепарационного пространства  $H_c$  (м) принимают в зависимости от свойств кипящего раствора: для растворов с высокой вязкостью и низким поверхностным натяжением, склонных к образованию пены при кипении,  $H_c = 2,5 \div 3,0$  м, а для не вспенивающихся  $H_c$  не менее 1,6 м.

Отметим, что диаметр сепаратора  $d_c$  нередко превышает диаметр греющей камеры (см. рис. 9.1 и 9.2).

При больших скоростях выброса парожидкостной смеси из труб в сепарационное пространство с целью погашения ее кинетической энергии над трубной плитой устанавливают отбойник (см. рис. 9.1,б и 9.2,б) с криволинейными поверхностями, обеспечивающими возврат жидкости в основную массу раствора. При раздельном расположении греющей камеры и сепаратора подачу парожидкостной смеси в него часто осуществляют тангенциально (см. рис. 9.1,в). За счет возникающей при этом центробежной силы основная масса жидкости эффективно отделяется от пара: отбрасывается к стенкам сепаратора и стекает по ним. Применение отбойников и организация тангенциального ввода позволяют существенно понизить нагрузку на сепарационное пространство и брызгоулавливающие устройства, устанавливаемые на выходе вторичного пара из сепаратора.

Даже при наличии отбойников и сепарационного пространства необходимых размеров уходящий вторичный пар несет

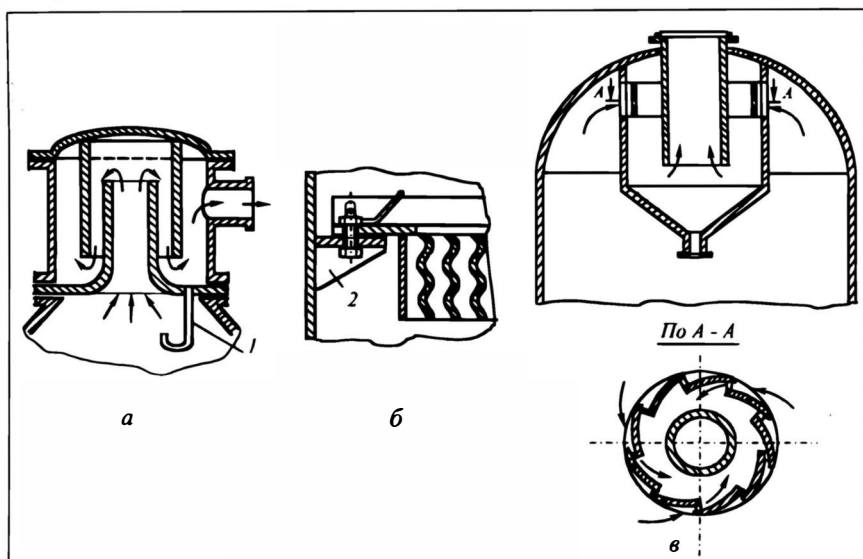


Рис. 9.22. Брызгоуловители выпарных аппаратов:

*а* — инерционный, *б* — волнистый, *в* — циклонный;

1 — труба для стока уловленных брызг, 2 — опора для брызгоуловителя

с собой очень мелкие капли раствора, которые также следует улавливать. Для этой цели и используются брызгоуловители, упомянутые выше и при описании конструкций на рис. 9.1. Работа брызгоуловителей основана на различии в инерционных силах, действующих на капли (плотность порядка  $10^3 \text{ кг/м}^3$ ) и пар (плотность порядка  $10^{-1}—10 \text{ кг/м}^3$  — в зависимости от давления). Наиболее широко используются брызгоулавливающие устройства в двух основных вариантах (рис. 9.22):

- многократное резкое изменение скорости и направления вторичного пара (рис. 9.22, *а* и *б*);
- использование центробежной силы (циклонный брызгоуловитель, рис. 9.22, *в*).

Сток уловленных брызг осуществляется либо по трубам 1 небольшого диаметра, опущенным в раствор (см. также рис. 9.1, *б* — *з*), или с помощью гидрозатвора (рис. 9.22, *а*), либо по тем же каналам, где движется пар (волнистый брызгоуловитель на рис. 9.22, *б*). В последнем случае скорость пара в волнистых каналах должна быть ниже скорости захлебывания, при которой пленки или струйки жидкости, образующиеся при коалесценции уловленных капель, перестают стекать. Величину этой скорости можно рассчитать по формулам, характеризующим течение жидкостных пленок (см. гл. 2) с учетом противоточного движения газа (пара). На практике эта скорость пара находится в пределах 2—5 м/с при давлении в аппарате свыше 100 кПа и 4—8 м/с при давлении до 90 кПа.

В циклонных брызгоуловителях за счет тангенциального входа пара через щели, образуемые отогнутыми внутрь пластинами, эффективность очистки пара от капель наибольшая. Поэтому этот тип брызгоуловителя широко применяется при выпаривании вспенивающихся и кристаллизующихся растворов. Существенным недостатком таких брызгоуловителей является большое гидравлическое сопротивление, приводящее к повышению давления в корпусе и ухудшению условий теплообмена. При скорости входа пара в щели брызгоулавливающего устройства 20—70 м/с перепад давления в циклонном брызгоуловителе составляет 2—9 кПа.

## ЛИТЕРАТУРА к главе 9

1. *Воронцов Е.Г., Тананайко Ю.М.* Теплообмен в жидкостных пленках. Киев: Техніка, 1972. 194 с.
2. *Гельперин Н.И.* Выпарные аппараты. М.—Л.: Госхимиздат, 1947. 380 с.
3. *Гельперин Н.И.* Основные процессы и аппараты химической технологии. М.: Химия, 1981. 812 с.
4. *Дытнерский Ю.И.* Процессы и аппараты химической технологии. М.: Химия, 1995. 768 с.
5. *Касаткин А.Г.* Основные процессы и аппараты химической технологии. М.: Химия, 1971. 784 с.
6. *Павлов К.Ф., Романков П.Г., Носков А.А.* Примеры и задачи по курсу процессов и аппаратов химической технологии. Л.: Химия, 1987. 574 с.
7. *Перри Дж.* Справочник инженера-химика: Пер. с англ. / Под ред. Н.М. Жаворонкова. Л.: Химия, 1969. 1144 с.
8. Справочник химика, т.V. М.—Л.: Химия, 1966. 974 с.
9. *Таубман Е.Н., Пастушенков Б.Л.* Процессы и установки мгновенного вскипания. М.: Энергоатомиздат, 1990. 185 с.
10. *Удима П.Г.* Аппараты с погружными горелками. М.: Машиностроение, 1973. 271 с.



## ПРИЛОЖЕНИЯ К ГЛАВЕ 9

### Приложение 9.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ТЕПЛОТЫ ДЕГИДРАТАЦИИ $Q_d$ (кДж/кг РАСТВОРИТЕЛЯ) ДЛЯ ВОДНЫХ РАСТВОРОВ НЕКОТОРЫХ РАСПРОСТРАНЕННЫХ НЕОРГАНИЧЕСКИХ ВЕЩЕСТВ РАЗЛИЧНЫХ КОНЦЕНТРАЦИЙ $a$ [% (МАС.)].

Растворенное вещество	Значения $Q_d$ при различных $a$							
	5	10	15	20	25	30	35	40
$\text{NH}_4\text{NO}_3$	1	4	7	12	18	26	37	51
$\text{CaCl}_2$	—	— 2						
$\text{NaCl}$	1	3	6	8				
$\text{CuSO}_4$	—	— 0,5						
$\text{NH}_4\text{Cl}$	—	—	—	1	4			
$\text{NaOH}$	—	—	4	26	80	174	308	
$\text{KOH}$	—	—	4	13	30	62	116	198

### Приложение 9.2. ЗНАЧЕНИЯ ПОПРАВочНОГО МНОЖИТЕЛЯ $\varphi$ . (К·кг РАСТВОРИТЕЛЯ/кДж) В ЗАВИСИМОСТИ ОТ РАБОЧИХ ТЕМПЕРАТУР КИПЕНИЯ РАСТВОРИТЕЛЯ $t_p$ (°C) И ДАВЛЕНИЙ $p$ (кПа)

$t_p$	$\varphi^*$	$t_p$	$\varphi^*$	$p$	$\varphi^*$	$p$	$\varphi^*$
30	— 0,0234	105	+ 0,0023	4	— 0,0236	150	+ 0,0053
35	— 0,0222	110	+ 0,0046	6	— 0,0219	200	+ 0,0097
40	— 0,0209	115	+ 0,0070	8	— 0,0205	250	+ 0,0135
45	— 0,0196	120	+ 0,0096	10	— 0,0194	300	+ 0,0169
50	— 0,0182	125	+ 0,0122	15	— 0,0170	350	+ 0,0200
55	— 0,0167	130	+ 0,0149	20	— 0,0151	400	+ 0,0228
60	— 0,0151	135	+ 0,0177	26	— 0,0135	450	+ 0,0255
65	— 0,0135	140	+ 0,0206	30	— 0,0121	500	+ 0,0280
70	— 0,0118	145	+ 0,0237	40	— 0,0097	550	+ 0,0304
75	— 0,0100	150	+ 0,0268	50	— 0,0077	600	+ 0,0327
80	— 0,0082	155	+ 0,0301	60	— 0,0059	650	+ 0,0348
85	— 0,0063	160	+ 0,0335	70	— 0,0043	700	+ 0,0369
90	— 0,0043	165	+ 0,0369	80	— 0,0028	750	+ 0,0384
95	— 0,0022	170	+ 0,0406	90	— 0,0014	800	+ 0,0409
100	0	175	+ 0,0443	100	— 0,0002	850	+ 0,0428

### ОСНОВЫ МАССОПЕРЕНОСА

К массообменным относят процессы преимущественного *переноса* какого-либо компонента (компонентов) *из одной фазы в другую*. Явление массообмена сопровождается изменением концентраций компонентов в фазах и потому лежит в основе процессов **разделения**. Вместе с тем термины “разделение” и “массообмен” не тождественны: рассмотренные в главе 5 процессы гидромеханического разделения не относят к массообменным, поскольку там разделение фаз происходит без обмена компонентами между фазами.

Химические производства включают три основных этапа: подготовка сырья (1), химические превращения (2), разделение продуктов (3). Массообмен в значительной степени обеспечивает *первую стадию*, когда требуется подготовить сырье определенного состава (с заданным содержанием компонентов). Он обычно играет определяющую роль на *третьей стадии*. Дело в том, что процессы происходят не со 100-процентными выходами и не с идеальной селективностью — остаются непрореагировавшие вещества, появляются побочные продукты. Поэтому из гаммы полученных компонентов необходимо выделить целевые, хорошо бы разделить и остальные с целью их разумного использования. Но и на *второй стадии* собственно химическое превращение сопровождается массопереносом. Например, гетерогенный катализ включает адсорбцию исходных компонентов на зерне катализатора, собственно химическое взаимодействие и десорбцию продуктов с поверхности зерна; в ряде случаев именно адсорбция или десорбция (а это — *массообменные эффекты*) являются наиболее медленной стадией процесса и потому определяют скорость технологического процесса в целом.

В качестве основных целей разделения смесей с помощью массообменных процессов обычно указывают:

- получение чистого (либо достаточно концентрированного) целевого компонента из смеси;
- удаление нежелательных примесей из смеси.

Разумеется, с целью утилизации всех продуктов производства (безотходные технологии; экологические проблемы, а в

долговременном плане — и экономические аспекты) целесообразно совмещение указанных целей.

В химической технологии и ряде смежных отраслей процессы массообмена используются весьма широко. На проектирование и изготовление массообменной аппаратуры, оснащение ее приборами и т.п. в химических производствах затрачивается до 50% капитальных вложений.

Ранее уже рассматривался один из массообменных процессов — *выпаривание*, обладающий характерными признаками массопереноса — переходом компонента (растворителя, часто — воды) из жидкой фазы в паровую. Однако этот *массообменный* процесс всецело определяется подводом *теплоты*, и поэтому его рассчитывают как *тепловой* процесс. Ниже будут использованы некоторые подходы и понятия, введенные при изучении теплопереноса; но в целом для рассматриваемых ниже массообменных процессов ситуация значительно сложнее.

В настоящей главе анализируются общие вопросы массопереноса, излагаются общие понятия и подходы к расчету групп различных массообменных процессов. Конкретизация этих понятий и подходов применительно к отдельным (наиболее распространенным) технологическим приемам составляет содержание последующих глав.

## 10.1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МАССОПЕРЕНОСА

### 10.1.1. Классификация массообменных процессов

Классификация массообменных процессов может проводиться по разным признакам.

Наибольшее распространение получила *традиционная* классификация — по *технологическим приемам (процессам)* — в широком понимании этого термина). Ее возникновение и распространение в значительной мере обусловлено тем, что различные группы исследователей занимались в основном отдельными технологическими приемами; связи этих групп зачастую были весьма слабыми, и потому методы и инструментарий анализа разных приемов (процессов) также были разрозненными, специфичными для каждой группы исследователей. В последнее время в учебной (отчасти и в научной) литературе все чаще выступает стремление выявить *общие моменты* в различных процессах. Реализация этого стремления в сочетании с сохранением специфических черт отдельных приемов и привела к созданию “традиционной классификации”.

Рассматривают фазы — жидкую (Ж), газовую (Г) либо паровую (П) и твердую (Т). Выделяют две группы процессов. **Пер-**

вая (I) — процессы с непосредственным соприкосновением фаз, обменивающихся веществом (компонентами); сюда относятся подавляющее большинство технологических приемов. Здесь две подгруппы:

IA — процессы с изменяющимися границами раздела фаз (поверхность их контакта не фиксирована);

IB — процессы с фиксированной границей раздела фаз.

К подгруппе IA относятся процессы в системах:

— *Жидкость — Пар*; массообмен здесь основан на переносе при кипении-конденсации из фазы в фазу нескольких компонентов с разной интенсивностью; это процессы дистилляции, ректификации, парциальной конденсации;

— *Жидкость — Газ*; массообмен основан на растворении одного из (или нескольких) компонентов газовой смеси жидким растворителем; это абсорбция (либо обратный процесс — десорбция);

— *Жидкость — Жидкость*; массообмен базируется на растворении отдельных компонентов жидкой смеси в другой жидкости, которая не должна смешиваться полностью с исходной жидкой смесью; это жидкостная экстракция.

В большинстве случаев элементы контактирующих фаз (часто это дискретная фаза — капли, пузыри, — распределенная в сплошной; иногда — пленки и струи) в ходе процесса *изменяют* свои размеры и форму. Например, мелкие капли в результате действия сил поверхностного натяжения близки к сферам, крупные — могут быть существенно деформированы. Кроме того, происходят постоянное разрушение капель и пузырей и их коалесценция. В расчете поверхности контакта фаз здесь чаще всего нет определенности, используются приближенные модельные представления или качественные оценки.

К подгруппе IB относят процессы с твердой фазой, обладающей *фиксированной*, часто неизменной и в принципе подающейся расчету межфазной поверхностью контакта. Это процессы в системах:

— *Газ — Твердое* и *Жидкость — Твердое*; здесь рассматривается выделение из газовой или жидкой смеси какого-либо компонента (компонентов) с помощью твердого поглотителя; это процессы адсорбции (либо десорбции) и основанные на ней практически важные хроматография, ионообменная сорбция. Один из десорбционных процессов Г—Т (сушка) выделяется особо — в силу его распространенности и специфической методики расчета;

— *Жидкость — Твердое*; это растворение твердых веществ (или компонентов твердых веществ) — собственно растворе-

		Фаза – источник		
		Г	Ж	Т
Фаза – приемник	Г	Мембранные процессы	Дистилляция Десорбция (Выпаривание) <sup>1</sup>	Десорбция Сушка Сублимация
	Ж	Абсорбция	Жидкостная экстракция Мембранные процессы	Десорбция (Выщелачивание) <sup>2</sup>
	Т	Адсорбция Десублимация	Адсорбция	Фазовые превращения II рода

Рис. 10.1. К традиционной классификации массообменных процессов.

<sup>1</sup> – Процесс выпаривания обычно рассматривается в теплообменных, а не в массообменных процессах (см. гл.9). <sup>2</sup> – Выщелачивание нередко лишь формально можно отнести к массообменным процессам

ние; выщелачивание, когда жидким растворителем поглощается компонент (компоненты) из его (из их) смеси с твердым веществом, *нерастворимым в растворителе*; к этим же системам относят и процессы кристаллизации из растворов и расплавов;

— *Газ — Твердое*; здесь происходит испарение твердого компонента в газовую фазу, минуя жидкое состояние (или конденсация из газовой фазы сразу в твердое состояние); это процессы сублимации (возгонки) или десублимации.

Ко второй (II) группе относят процессы массопереноса, протекающие без непосредственного соприкосновения фаз. В настоящее время это лишь один, но весьма перспективный технологический прием — *мембранные процессы*. Сущность его — в переносе компонента из фазы в фазу через полупроницаемую перегородку (мембрану), через которую компоненты проходят с разной скоростью (а некоторые совсем не проходят).

На рис.10.1 традиционная классификация представлена в виде диаграммы с указанием фазового состояния исходной смеси (фаза-источник) и продукта (фаза-приемник). Такое представление достаточно наглядно, но лишь для *однонаправленных* массообменных процессов; ректификация, экстракция при ограниченной взаимной растворимости разбавителя и экстрагента здесь не представлены, да и выщелачивание можно лишь условно поместить в ячейку Т → Ж. Массообмен Г → Г

возможен лишь при наличии полупроницаемой перегородки (мембраны). В ячейку  $T \rightarrow T$  могут быть помещены фазовые превращения II рода (изменения в кристаллической решетке и др.), в курсе ПАХТ не рассматриваемые.

К недостаткам традиционной классификации относится ее неоднозначность, что ясно видно из рис.10.1. Еще существеннее, что эта классификация не выявляет в должной мере *общности* в осуществлении и описании рассматриваемых технологических процессов. Вероятнее всего, использование громоздкой традиционной классификации обусловлено, в первую очередь, стремлением сохранить устоявшиеся специфические подходы к анализу отдельных технологических приемов.

Подчеркнем *условность* традиционной классификации (как и всякой другой — см. разд.1.2.3). В самом деле, *конечной целью* ряда процессов подгруппы IB является *изменение* размеров твердых частиц (растворение, кристаллизация), а значит и межфазной поверхности. Следовательно, здесь требуется уточнение: говоря о *фиксированной* или *изменяющейся* межфазной поверхности, следует подразумевать *скоротечные* (почти "мгновенные") явления разрушения и коалесценции пузырей или капель — в противовес протекающему относительно медленно целевому изменению размеров элементов твердой фазы. Кроме того, надо иметь в виду, что в ряде процессов типа Ж — Г (скажем, при массообмене газовой фазы с тонкими пленками, движущимися по внутренней стенке труб) поверхность межфазного контакта определяется достаточно точно.

Более обоснованной с позиций методов анализа и расчета (т.е. в аспекте курса ПАХТ) представляется классификация по *числу фаз и компонентов*, в том числе *перенесенных из фазы в фазу*, — будем называть такую классификацию *компонентно-фазной*, или **КФ-классификацией**. Введем численное обозначение:  $a(b-c)d$ , где  $a$  — общее число компонентов *в системе*;  $b$  и  $c$  — числа компонентов *в каждой фазе (отдающей и получающей компонент)*; число  $d$  — число компонентов, *переходящих из фазы в фазу*. Заметим: компонент здесь — не обязательно индивидуальное вещество; это может быть и группа веществ, выполняющих одинаковую роль (т.е. неразличимых в смысле массопереноса). В такой символике некоторые двухфазные процессы, выделенные выше в традиционной манере, будут отнесены к определенным классам; они представлены в табл.10.1 применительно к простейшим вариантам для минимально возможного числа компонентов.

Возможности этой классификации выходят за пределы собственно массообменных процессов. В нижних строках таблицы обозначены процесс выпаривания, а также фазовый переход I рода для однокомпонентной системы (например, испарение). В принятой символике может быть представлен и *трехфазный* процесс, например кипение бинарной смеси двух несмешивающихся жидкостей (две жидкие фазы и одна паровая): 2(1-1-

Таблица 10.1. Технологические приемы в КФ-классификации

Процесс в традиционном наименовании	КФ- класси- фикация	Компоненты и фазы
Дистилляция, ректификация	2(2-2)2	Всего 2 компонента и 2 фазы, в каждой — по 2 компонента; оба переходят из фазы в фазу
Абсорбция	3(2-2)1	Всего 3 компонента и 2 фазы, в каждой — по 2 компонента; 1 переходящий компонент
Экстракция	3(2-2)1	То же (обе жидкости полностью нерастворимы одна в другой)
Экстракция	3(3-3)3	Всего 3 компонента и 2 фазы, в каждой — по 3 компонента; все 3 переходят из фазы в фазу (жидкости ограниченно растворимы друг в друге)
Адсорбция	3(2-2)1	Рассмотрено выше
Сушка твердых материалов	3(2-2)1	То же
Выщелачивание	3(3-2)2	Всего 3 компонента и 2 фазы, в одной 3 компонента, в другой — 2; переходящих компонентов — 2
Мембранные процессы	2(2-2)2 или 2(2-1)1	Всего 2 компонента и 2 фазы (по разные стороны мембраны), в общем случае — по 2 компонента в фазе и оба переходят из фазы в фазу; в идеале — 1 компонент в одной из фаз, тогда 1 компонент — переходящий
Выпаривание	2(2-1)1	Всего 2 компонента и 2 фазы, в одной 2 компонента, в другой — 1; переходящий компонент — 1
Фазовый переход в одно-компонентной системе	1(1-1)1	Любой двухфазный переход I рода (испарение-конденсация, плавление-затвердевание и т.п.)

2)2; в скобках указано, что две фазы содержат по одному компоненту, а третья (паровая) — два, причем оба компонента переходят в паровую фазу.

Важно подчеркнуть, что многие технологические приемы, обособленные в традиционной классификации, здесь *объединены в общие группы*, для которых могут быть использованы одинаковые (по меньшей мере — сходные) подходы к анализу и расчету. Так, в КФ-классификации к общей группе отнесены Абсорбция и Десорбция, Экстракция (при взаимной нерастворимости жидких фаз), в некоторых технологических ситуациях — Адсорбция и т.п. В других случаях расчетные методы весьма близки: жидкостная экстракция при ограниченной взаимной растворимости жидких фаз и выщелачивание (совпадает число компонентов и их максимальное число в одной из фаз). Не-

трудно видеть, что степень обобщения в КФ-классификации заметно выше, нежели в традиционной.

Нередко различают процессы с **однонаправленным** (*одно-сторонним*) переносом вещества из одной фазы в другую и с **двунаправленным** (*двусторонним*) встречным переносом — из первой фазы во вторую и из второй в первую. Чаще всего эти ситуации легко различимы в рамках КФ-классификации: процессы с одним переходящим компонентом (цифра правее скобки) относятся к однонаправленному массопереносу. При большем числе переходящих компонентов процесс может быть как однонаправленным (например, дистилляция или многокомпонентная абсорбция), так и двунаправленным (например, ректификация, противоточная экстракция при ограниченной взаимной растворимости жидких фаз). Для различения этих ситуаций целесообразно заменить дефис в скобках двунаправленной стрелкой, скажем, для ректификации бинарной смеси:  $2(2 \leftrightarrow 2)2$ .

Иной срез классификации — *по типу структурно-конфигурационного комплекса (СКК)*:

- по направлению взаимного движения фаз: прямоточные, противоточные и другие схемы движения;

- течение фазы в режиме идеального вытеснения (ИВ), идеального перемешивания (ИП) или в другом режиме;

- комбинация различных схем взаимного перемещения фаз и режимов продольного перемешивания в каждой из них.

Различают процессы **непрерывные** (иногда их отождествляют со стационарными\*), когда входные, выходные и промежуточные потоки и параметры (температуры, концентрации, другие свойства) статистически *неизменны во времени*, и **периодические** (они принципиально нестационарны), когда параметры *изменяются во времени*. Нередко среди периодических процессов выделяют группу **полунепрерывных**, когда один или несколько потоков сохраняют во времени *неизменными* свои *входные* характеристики (расходы, температуры и пр.), а остальные (например, *выходные*) характеристики этих и других рабочих тел *претерпевают изменения во времени*.

Наконец, возможно рассмотрение функционирования **одноточных** аппаратов (массообменных устройств с определенными СКК) и их **сетей**, т.е. комбинаций устройств с одинаковыми или разными СКК в отдельных аппаратах.

---

\* Непрерывные процессы обычно не строго стационарны; возмущающие воздействия отклоняют их от регламентированного состояния, в которое они возвращаются в силу собственной устойчивости или с помощью управляющих воздействий. Стационарность процесса здесь соблюдается лишь статистически.



**Выбор варианта осуществления массообменного процесса** зависит от многих факторов:

- *свойства рабочих тел* (бывает, что эти свойства диктуют однозначное обращение к тому или иному приему);
- *производительность* (расходные показатели): при высоких производительностях предпочтительнее непрерывные процессы;
- *заданный уровень конечных концентраций*: наибольший эффект здесь обычно дает противоток фаз;
- *особенности оформления аппаратов и схем*: одиночный аппарат проще сети аппаратов, сеть зачастую эффективнее одиночного устройства; периодические процессы часто используют для малотоннажных производств (особенно если в одной и той же аппаратуре попеременно проводятся различные массообменные процессы);
- *экономическая эффективность* (технико-экономический анализ позволяет выбрать оптимальный вариант) и т.д.

Некоторые сравнительные характеристики вариантов и рекомендации по выбору наиболее эффективных из них содержатся в последующих главах при рассмотрении конкретных технологических приемов.

### 10.1.2. Составляющие описания массопереноса

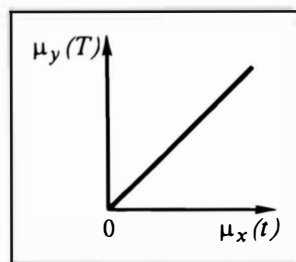
Перенос вещества из фазы в фазу сопровождается изменением его **концентрации** как в исходной, так и в принимающей фазе (эти концентрации далее обозначаются, например,  $x$ ,  $y$ , ...). Поэтому описание массопереноса связано с выражением состава фаз (концентраций переносимого и других компонентов).

Для представления и реализации любого процесса переноса (не только вещества) необходимо проанализировать его в трех основных направлениях: равновесие, кинетика, баланс.

Перенос субстанции в системе происходит под действием разности потенциалов в различных ее точках. В науке о ПАХТ в качестве потенциалов чаще всего рассматривают давление  $p$ , температуру  $T$  и химический потенциал  $\mu_i$  каждого из  $i$  компонентов системы. Изолированная система с течением времени приходит в **равновесие** — тогда в ней не происходит никаких качественных и количественных изменений во времени, т.е. переноса субстанции нет. Это наблюдается, если в системе (во всех ее точках, в разных фазах) выравнены потенциалы  $p$ ,  $T$ ,  $\mu_i$ ; иногда записывают  $dp = 0$ ,  $dT = 0$ ,  $d\mu_i = 0$ .

В **теплопереносе** (когда речь не идет об изменении давления и переносе вещества) равновесие означает **равенство температур** рабочих тел, составляющих систему (для двух рабочих тел —  $T$  и  $t$ ). В диаграмме  $T - t$  тепловое равновесие выражается

Рис.10.2. Фазовое равновесие: равенство химических потенциалов фаз (температур теплоносителей)



(при равных масштабах по осям  $T$  и  $t$ ) прямой линией, выходящей из начала координат и проходящей под углом  $45^\circ$  (рис.10.2, символы в скобках). В *массопереносе* при выравненных давлениях и температурах равновесие столь же просто выражается на основе химических потенциалов  $\mu_i$ . Для класса 3(2-2)1 на рис.10.2 в тех же декартовых координатах  $\mu_x = \mu_y$ , где индексы  $x$  и  $y$  относятся к концентрациям каждого переносимого компонента  $i$  в пределах любой из фаз и в разных фазах. Однако химические потенциалы невозможно померить и весьма сложно рассчитать\*. Поэтому используют более наглядные, доступные измерению и расчету *концентрации* компонента  $x_i, y_i$ , тем более что материальные балансы по компоненту (они — в основе технологических расчетов) базируются на его концентрациях в фазах. Но концентрации сложным образом (чаще всего — нелинейно) связаны с химическим потенциалом  $\mu_i$ . В результате равновесная диаграмма в концентрационном представлении трансформируется чаще всего в *кривую* линию, проходящую через начало координат; конфигурация этой кривой зависит от природы компонентов, составляющих фазы, и условий (температур, давлений).

В основе **кинетических соотношений** лежат закон Фика (разд.1.5.3) и уравнение массоотдачи (разд.1.3.2). Эти соотношения будут использованы в *интегральном* написании — для  $1\text{ с}$ , для всего процесса, для всей поверхности контакта фаз, или в *дифференциальном* — для бесконечно малых временного интервала  $dt$  и (или) поверхности контакта  $dF$ . Общий подход к получению кинетических соотношений аналогичен принятому в главах 6 и 7 для переноса теплоты. При независимости кинетических коэффициентов (диффузии  $D$ , массоотдачи  $\beta$ ) от уровня концентраций и движущей силы процесса кинетические уравнения *линейны*, что существенно упрощает их решение и применение.

**Балансовые соотношения** используются в данной главе на основе общих предпосылок (разд.1.3.1). Проблема здесь заключается в выборе подходящей формы записи, чтобы эти соот-

---

\* О подходах к расчету  $\mu_i$  см., например, [14], учебники и монографии по химической термодинамике.

ношения по возможности тоже оказались *линейными* — это упрощает последующую работу с ними.

Если все три составляющие удастся выразить линейными соотношениями, то и описание массообменного процесса в целом будет линейным. В этом случае в полной мере применима концепция *пропускных способностей*, и решение задач массообмена часто удается довести до конечных аналитических выражений, обычно разрешимых в явном виде относительно искомых величин. Из этих выражений ясен характер влияния основных параметров; здесь возможны количественные прогнозы и оптимизация процесса. Однако необходимо четко представлять себе границы линейных соотношений; за пределами этих границ использование линейных представлений может привести к ошибочным результатам в количественном плане (если эффект нелинейности невелик) и в качественном (если нелинейность существенна). Вместе с тем сведение нелинейных представлений к линейным создает иногда неплохие возможности для анализа на уровне качественных аспектов: больше — меньше, лучше — хуже.

### 10.1.3. Массообменные устройства

Устройства для осуществления массообменных процессов отличаются широким разнообразием. Оно обусловлено различием в агрегатных состояниях контактирующих фаз и в свойствах участвующих в процессе компонентов и их смесей. Отсюда сложности в *общих* рекомендациях по конструированию и выбору подходящих массообменных устройств — они во многом определяются спецификой конкретного процесса.

При организации переноса вещества из фазы в фазу технолог должен стремиться улучшить межфазный контакт — за счет увеличения межфазной поверхности, более полного использования движущей силы и повышения интенсивности переноса на единицу поверхности. Движущую силу повышают, реализуя благоприятную схему движения контактирующих фаз, предпочтительно — противоточную. Интенсивность переноса вещества через единицу межфазной поверхности повышают путем турбулизации потоков контактирующих фаз. Наиболее действенным и относительно просто реализуемым обычно является увеличение поверхности межфазного контакта  $F$ ; поэтому создание массообменных устройств направлено прежде всего на развитие поверхности массопереноса.

Множество конструкций массообменных устройств можно условно классифицировать следующим образом: *плёночные*, *насадочные*, *барботажные* (чаще всего — для систем Г, П — Ж), *диспергирующие* (для систем Г — Ж и Ж — Ж); отдельно следует рассматривать устройства для *контакта потоков Г и Ж с твердой*

**фазой.** Классификация названа *условной*, поскольку не всегда можно четко разграничить классы устройств из-за сложности отдельных конструкций и неоднозначности (пересечения) достигаемых эффектов. Одиночные массообменные устройства нередко комбинируют в сети аппаратов, развивая поверхность контакта, повышая движущую силу (за счет организации эффективных схем движения фаз).

Ниже дана самая общая характеристика упомянутых контактных устройств; более детально они рассмотрены в последующих главах при изложении конкретных технологических приемов.

**Пленочные** устройства (рис.10.3,а) предполагают контакт жидкой и газовой фаз (не исключаются и системы Ж — Ж), причем жидкость стекает пленкой по внутренней поверхности трубы или множества параллельных труб либо собранных в пакеты параллельных вертикальных пластин. В верхней части труб обычно размещают устройство, организующее пленочное движение жидкости (иногда — закрученное). Газ при этом преимущественно подается снизу — противотоком к жидкости. Скорость его ограничивают, стремясь обычно не допустить срыва капель с поверхности пленки и их уноса с газом (обратного перемешивания — в терминах *структуры потоков*), а также опрокинутого движения жидкости на границе с газом. Заметим: при высоких плотностях орошения (а также расхода газа) возможно заполнение жидкостью контактного объема — тогда массообмен происходит в *эмульгированном* режиме: газ становится дисперсной фазой (пузыри), движущейся в сплошной жидкой (см. распыливающие массообменные устройства).

К пленочным аппаратам примыкают **полочные**; они отличаются небольшим гидравлическим сопротивлением и одновременно невысокой эффективностью. Поэтому их целесообразно применять, когда не требуется высокая степень разделения.

**Насадочные** устройства шире применяются в массообменных процессах; при этом используются элементы насадки разного вида (рис.10.3,б). В простейшем случае это *куски* правильной или неправильной формы; часто используются *кольца* (иногда — фасонные: с перегородками, с отверстиями и т.п.), *седла* либо элементы более сложной конфигурации. В отдельных случаях применяют *хордовую* насадку — из поставленных на ребро рядов досок, собранных в решетки. Разумеется, материал насадки должен быть химически инертен к участвующим в массообмене веществам.

По элементам насадки стекает жидкая пленка, омываемая восходящим газовым потоком. Скорость газа в насадочном аппарате ограничена явлением **захлебывания**: при больших скоростях восходящего газового потока жидкость не может стекать вниз, она оказывается “запертой”. Поэтому подаваемая (например, насосом) жидкость накапливается над слоем насадки; когда ее вес станет достаточно большим, она “провалится” через слой насадки — без эффективного контакта с газом (далее жидкость снова будет накапливаться над насадкой). Такой режим работы неэффективен, поэтому скорость газа в насадочном аппарате должна быть ограничена неким пределом, называемым “скоростью захлебывания”.

Насадку обычно загружают в аппарат *навалом* (типичное исключение — хордовая насадка). Регулярная укладка используется реже по ряду причин: большие затраты времени (особенно для крупных промышленных аппаратов); провоцирование существенной неравномерности потоков (вплоть до байпасирования фаз вследствие пониженного гидравлического сопротивления). При загрузке навалом эти эффекты выражены слабее. Однако и в этом случае вблизи стенок аппарата упаковка насадки — более рыхлая (непосредственно у стенок доля свободного объема выше порозности слоя насадки). Поэтому жидкость (она выбирает путь наименьшего гидравлического сопротивления) имеет тенденцию

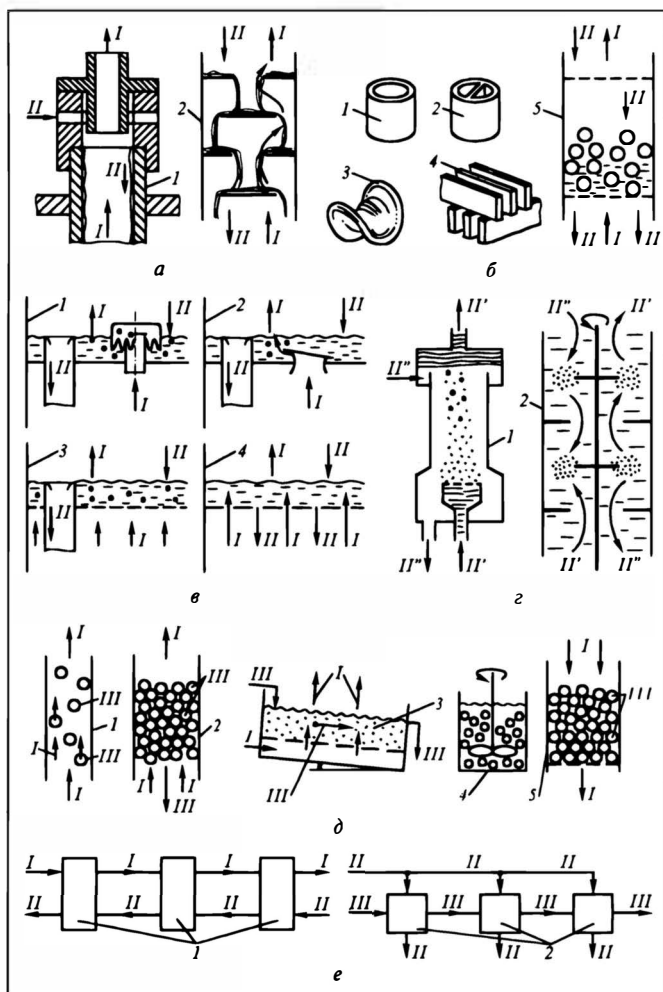


Рис. 10.3. Основные массообменные устройства:

*а* — пленочные и полочные устройства: 1 — трубчатое с распределителем, 2 — полочное (фрагмент);

*б* — насадки: 1 — кольца Рашига, 2 — кольца с перегородкой, 3 — седло, 4 — хордовая насадка, 5 — секция с псевдооживленной насадкой;

*в* — барботажные устройства (фрагменты тарелки): 1 — колпачковое, 2 — клапанное, 3 — ситчатое непрвальное, 4 — ситчатое провальное;

*г* — диспергирующие устройства: 1 — распылительное, 2 — роторно-дисковое;

*д* — аппараты для массообмена с твердой фазой (примеры): 1 — прямоточный, 2 — противоточный, 3 — с перекрестным движением фаз, 4 — периодического действия, 5 — полунепрерывного действия;

*е* — соединения аппаратов в сети: 1 — ступенчатый противоток; 2 — ступенчатый перекрестный ток;

*I* — газ, *II* — жидкость, *III* — твердая фаза

двигаться преимущественно в пристеночных зонах, оставляя газовому потоку — приосевые. Дабы понизить эту поперечную неравномерность потоков, приводящую к ухудшению контакта жидкой и газовой фаз, слой насадки разбивают на несколько (высота каждого из них близка к диаметру аппарата) с установкой между слоями перераспределительных устройств, направляющих жидкость несколько ближе к осевым зонам аппарата, что обеспечивает в среднем более равномерное распределение потоков по его поперечному сечению.

Кусковую, кольцевую, седлообразную насадки обычно загружают в аппарат, заполненный для этой цели водой — во избежание деформации элементов насадки (если они металлические) или разрушения (если керамические).

Поперечная неравномерность потоков существенно снижается при использовании *псевдооживленной насадки* — это полые шары; их объемная плотность ниже, чем у жидкости. Шары подаваемым снизу газом (паром) приводятся в псевдооживленное состояние. Интенсивно перемещающимися шарами жидкость разносится по всему поперечному сечению секции — практическое отсутствие поперечной неравномерности значительно повышает эффективность массопереноса. Одновременно может быть повышена и его интенсивность (производительность аппарата), поскольку скорость захлебывания смещается здесь в сторону *больших* величин, а унос капель заметно снижается из-за отбойного действия смоченных жидкостью псевдооживленных шаров.

**Барботажные** устройства (рис.10.3,в) используются в процессах массопереноса наиболее часто. Такое устройство представляет собой секцию, заполненную до определенной высоты жидкой фазой; в нижней части секции размещено газо-(паро-)распределительное устройство (“тарелка”) — *колпачковое, ситчатое, клапанное* или другое (на рисунке эти конструкции показаны схематически). Газовая фаза диспергируется в этом устройстве (это приводит к увеличению поверхности межфазного контакта) и барботирует через слой жидкости. Число колпачков и клапанов на тарелке достигает десятков (в крупных аппаратах — сотен). Ситчатые устройства обычно отличаются меньшим гидравлическим сопротивлением газовому потоку; они, однако, весьма чувствительны к загрязнениям. Над жидкостью расположена *сепарационная* зона, снижающая унос капель газовым (паровым) потоком, т.е. перемещение жидкости в направлении, противоположном движению ее основного потока (обратное перемешивание в терминах структуры потоков). Жидкость организовано, через сливные трубки или карманы, транспортируется на расположенную ниже секцию (*непровальные тарелки*) либо — в отсутствие сливных устройств — уходит с тарелки за счет провала через отверстия по законам истечения (ситчатые *провальные тарелки*). Скорость газа в барботажных устройствах ограничена возникновением заметного уноса капель газовым (паровым) потоком.

**Диспергирующие** контактные устройства (рис.10.3,г) отличаются широким разнообразием.

В некоторых из них диспергирование фазы производят на *одном из концов* устройства: сверху, если жидкость диспергируется в газовую фазу; снизу, если газ диспергируется в жидкость; сверху и (или) снизу, если одна жидкая фаза диспергируется в другую, не смешивающуюся с ней полностью. С целью увеличения поверхности контакта обычно (если это возможно) стараются диспергировать ту фазу, объем которой больше. Распыливающие устройства достаточно просты, но обладают рядом недостатков:

- сравнительно небольшие объемные концентрации дисперсной фазы (во избежание коалесценции капель и пузырей, что привело бы к уменьшению поверхности межфазного контакта);

- достаточно выраженные эффекты продольного перемешивания (за счет поперечной неравномерности потоков, направленной циркуляции и обратного перемешивания);

— слабое “обновление поверхности контакта”, особенно в системах Ж — Ж (из-за малых скоростей взаимного движения фаз), значит, падение градиентов концентраций у поверхности раздела и снижение скорости массопереноса.

В другой группе устройств диспергирование ведется *по всей высоте рабочей зоны* с помощью принудительного движения рабочего органа (вращающегося диска, перемещающейся ситчатой тарелки и т.д.). Такие устройства чаще всего применяются при малой разнице в плотностях фаз, преимущественно в системах Ж — Ж, когда без механических диспергирующих устройств по высоте аппарата контакт фаз не эффективен.

Производительность диспергирующих устройств ограничена скоростью захлебывания (в основе ее расчета — скорость стесненного витания элементов дисперсной фазы).

Конструкции устройств для массообмена газов и жидкостей с **твердыми телами** типизировать сложно, поскольку они в значительной мере зависят от размеров, формы, физико-химических свойств самих твердых тел, их концентрации в сплошной среде, а также принятого способа контакта (в неподвижном, движущемся или псевдооживленном слое, в потоке сплошной среды и т.д.). При этом твердая фаза нередко выполняет роль насадки, но не инертной (как в насадочном аппарате), а *активной*, участвующей в массообмене. На рис.10.3,д в качестве примера приведены контактные устройства для прямого тока фаз (например, пневмо- или гидротранспорта), противотока фаз (пример — движущийся слой), перекрестного тока (азрожелоб, в котором псевдооживленный твердый материал, пронизываемый газовым потоком, перемещается под уклон), аппараты периодического (4) и полунепрерывного (5) процессов (например, для экстрагирования ценного компонента из твердого материала).

Каждое из приведенных выше устройств может рассматриваться как самостоятельный массообменный аппарат. Комбинация таких устройств представляет собой **сеть** аппаратов (хотя конструктивно они могут быть объединены общим корпусом). Сети различаются способом соединения отдельных устройств (аппаратов) потоками фаз. Очень часто в целях повышения движущей силы процесса реализуют *противоточное* движение фаз между устройствами (рис.10.3,е-1), хотя в каждом отдельном устройстве возможен иной СКК (прямоток, идеальное перемешивание фаз и др.); в результате получается **ступенчатый противоток** фаз. Встречаются также сети аппаратов со **ступенчато-перекрестным** движением фаз (рис.10.3,е-2).

В ряде массообменных процессов массоперенос сопровождается положительным или отрицательным тепловым эффектом. В этих случаях массообменные аппараты снабжают теплообменными устройствами — встроенными или вынесенными.

Конструкции массообменных аппаратов (в виде отдельных устройств или сетей), а также основных узлов рассматриваются при изучении конкретных технологических приемов — там можно в большей мере учесть специфику приема и ее влияние на аппаратное оформление. Более подробно конструктивные особенности массообменных аппаратов приведены в ряде учебников и монографий\*, в специальной литературе.

#### 10.1.4. Порядок последующего изложения

Порядок последующего изложения ясен из оглавления. Особо укажем, что существенное внимание в настоящей главе уделено системам класса 3(2-2)1 по КФ-классификации, поскольку они служат удобной и поучительной моделью:

\* См., например, [8, 10, 12, 16, 17, 23] и др.

— они образуют широкую группу реальных процессов (см. табл.10.1);

— принципы их организации и расчета (аналитического, графического) наиболее просты;

— для их аналитического расчета наиболее подробно разработан математический аппарат.

Указанные системы изучаются не только безотносительно к конкретным производствам (это общий принцип построения современных курсов ПАХТ), но и безотносительно к технологическому приему. Например, процессы абсорбции и десорбции, экстракции при взаимной нерастворимости жидких фаз (разбавителя и экстрагента), при определенных условиях — и некоторые другие (адсорбция и т.п.) — могут рассматриваться совместно в пределах указанной классификации, поскольку *математическое описание для всех процессов данного класса — идентично.*

Технологическая ситуация анализируется применительно к простейшим СКК (идеальное вытеснение, идеальное перемешивание; прямоток и противоток фаз) — сначала в отдельном аппарате, а затем при их соединении в простые сети; кратко затронуты и другие СКК. Основное внимание уделено непрерывным (стационарным) процессам, менее детально анализируются периодические и полунепрерывные (некоторые из них подробнее рассмотрены в последующих главах). Итогом анализа должно быть установление необходимых связей концентраций компонентов, потоков переносимых веществ и т.п. с параметрами процесса и использование этих связей для инженерного расчета задач эксплуатации и проектирования.

Процессы, относящиеся к другим группам по КФ-классификации, кратко рассматриваются в конечных разделах главы. Подчеркнем, что при решении многих вопросов анализа и расчета массопереноса для систем, относящихся к этим группам процессов, удастся сохранить подходы, модели и расчетные приемы, справедливые для систем класса 3(2-2)1.

Завершается глава изучением особенностей массообмена с твердыми телами.

За пределами рассмотрения данной главы остаются весьма сложные проблемы одновременного протекания массопереноса и химической реакции. В определенном аспекте эти проблемы находят отражение в гл. 24, отдельные моменты затронуты в других главах при изучении конкретных технологических приемов. Детальная проработка проблемы содержится в специальной литературе, в отдельных курсах массопереноса\*.

---

\* См., например, [1, 5, 18, 23].



## 10.2. КОНЦЕНТРАЦИИ

**Концентрацией** называется величина, выражающая *содержание какого-либо компонента в смеси* (в фазе, в системе из нескольких фаз, в том или ином сечении технологического аппарата, в части аппарата или в аппарате в целом). Концентрация компонента задается отношением его количества к количеству какого-либо другого компонента смеси, нескольких или всех ее компонентов. Концентрации классифицируют по разным признакам:

- по размерностям: **однородные** ( $\text{кг}/\text{кг}$  и т.п.) и **смешанные** ( $\text{кмоль}/\text{м}^3$  и др.);

- по базе, к которой отнесена концентрация компонента: **абсолютные** (за базу принята сумма *всех* компонентов смеси) и **относительные** (база — какой-нибудь *один* компонент);

- по принятой единице экстенсивного свойства: **массовые** ( $\text{кг}/\text{кг}$ ), **мольные** ( $\text{кмоль}/\text{кмоль}$ ), **объемные** ( $\text{м}^3/\text{м}^3$ ) и т.д.

Размерность концентрации, записанная полностью, обнажает физический смысл принятого ее представления; пример: ( $\text{кг}$  низкокипящего компонента)/( $\text{кг}$  смеси); здесь не следует сокращать  $\text{кг}$  в числителе и знаменателе (это “разные”  $\text{кг}$ ), иначе физический смысл затусевывается.

Концентрации чаще всего обозначают первыми буквами латинского алфавита ( $a, b, c, d \dots$ ) или, наоборот, последними ( $x, y, \dots$ ) — строчными или заглавными. Нередко для различения компонентов, к которым относятся концентрации, вводят индексы:  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_A, x_B \dots$ . Принадлежность концентрации к тому или иному способу ее выражения каждый раз будем оговаривать специально.

Совокупность всех концентраций смеси дает ее **состав**. Если мы работаем с *бинарной* смесью, то достаточно зафиксировать концентрацию одного из компонентов — пусть она равна  $x$  в одной фазе и  $y$  — в другой. Если смесь содержит  $n$  компонентов, то фиксировать надо концентрации  $n - 1$  компонентов:  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  и  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ . Тогда состав фазы “ $x$ ” задается этим набором концентраций, т.е. состав  $X(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$  есть *вектор концентраций*; аналогично — по фазе “ $y$ ”. В последующих расчетах мы будем чаще всего оперировать бинарными смесями как наиболее простыми.

В технической литературе, заводских регламентах концентрации нередко задают в процентах — в силу привычки; других аргументов в пользу процентов нет. Вместе с тем это более громоздко и сопровождается потерей физического смысла (либо приходится дополнительно писать % абс.; % мас. и т.п.). В учебнике последующие анализ и расчет базируются на выражении концентраций “в долях”, т.е. в форме отношения соответствующих единичных количеств:  $\text{кг}/\text{кг}$ ,  $\text{моль}/\text{кг}$ ,  $\text{кг}/\text{м}^3$  и т.п.

### 10.2.1. Способы выражения и пересчета концентраций

**Абсолютные и относительные** концентрации различаются *базой* расчета: вся смесь (в первом случае) или какой-либо из компонентов (во втором).

Поскольку **абсолютные** концентрации выражаются в долях от *всей* смеси, то сумма всех однородных концентраций компонентов равна *единице*. Так, если концентрация компонента №1 есть  $x_1$  (кг комп.1)/(кг см.), где “см.” означает смесь, а №2 —  $x_2$  (кг комп.2)/(кг см.) и т.д., то

$$x_1 + x_2 + \dots = 1. \quad (\text{а})$$

Из (а) следует, что абсолютная концентрация любого из компонентов может изменяться от 0 (отсутствие компонента) до 1 (чистый компонент). Поэтому концентрационные шкалы для любого компонента *ограничены* здесь нулем и единицей, а расчетные диаграммы — замкнуты: квадрат для бинарных смесей, треугольник (например, равносторонний) — для тройных и т.д. Можно говорить, что 1 кг смеси *содержит*, например,  $x_A$  долей кг компонента  $A$ .

Для бинарной смеси ситуация проще: достаточно указать содержание одного компонента (надо условиться, какого) — и концентрация второго определяется однозначно:  $x_A + x_B = 1$ ,  $x_B = 1 - x_A$ .

При выражении **относительных** концентраций примем (например, для смеси  $A, B, C, D$ ) за базу, скажем, компонент  $D$  — его концентрация считается равной 1. Тогда концентрация первого компонента  $X_A$  будет выражена в (кг  $A$ )/(кг  $D$ ), второго — в (кг  $B$ )/(кг  $D$ ) и т.д. Сумма всех компонентов  $n$ -ком-

понентной смеси составит  $1 + \sum_{i=1}^{n-1} X_i$ . Нижняя граница кон-

центраций  $i$ -го компонента в этом случае также 0, но верхняя — не ограничена единицей, так как на 1 кг компонента  $D$  может приходиться и несколько кг компонента  $i$ . И расчетные диаграммы ограничены лишь с одной стороны — началом координат (например, для бинарной смеси это чаще всего открытые декартовы координаты на плоскости). Можно говорить, что здесь 1 кг компонента  $D$  *несет с собой*  $X_A$  кг компонента  $A$ . Для бинарных смесей ситуация упрощается: достаточно указать лишь  $X_A$ , так как  $X_B \equiv 1$ .

Разумеется, все сказанное справедливо и при выражении концентраций в каких-либо иных абсолютных или относительных единицах, например в *моль/моль*.

**Пересчет концентраций\*** ведется исходя из принятой базы

---

\* Этот подход правомерен и для пересчета различных удельных величин, определяемых на основе концентраций (см. ниже).

выражения заданной концентрации, т.е. смысла и размерности ее знаменателя. Метод пересчета состоит в сопоставлении заданного и требуемого способов выражения концентраций; на основе этого сопоставления формируется конкретный путь пересчета. Продемонстрируем метод на примерах.

Пусть задана массовая *относительная* концентрация компонента ("комп.")  $A$  в смеси:  $X_A$  (кг  $A$ )/(кг  $N$ ), причем в качестве базы принят компонент  $N$ . Требуется найти *абсолютную* массовую концентрацию  $x_A$  (кг  $A$ )/(кг см.). Значит, на 1 кг компонента  $N$  (это знаменатель размерности исходной концентрации)

приходится  $X_A$  кг комп.  $A$  и  $\sum_{i=1}^{n-1} X_i$  кг остальных компонентов,

так что общее количество кг смеси (на 1 кг комп.  $N$ ) составит  $1 + \sum_{i=1}^{n-1} X_i$ . Отсюда по определению  $x_A = \frac{X_A}{1 + \sum_{i=1}^{n-1} X_i}$ ; для бинарной

смеси проще:  $x_A = \frac{X_A}{1 + X_A}$ .

Пусть, наоборот, задана *абсолютная* концентрация  $x_A$  (кг  $A$ )/(кг см.); требуется найти *относительную* концентрацию  $X_A$  (кг  $A$ )/(кг  $N$ ). Здесь исходная база — 1 кг смеси; в нем масса комп.  $A$  равна  $x_A$  кг (долей кг, конечно), а комп.  $N$  (эта масса должна быть базой относительной концентрации) составляет  $1 -$

$\sum_{i=1}^{n-1} x_i$ . Отсюда по определению  $X_A = \frac{x_A}{1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i}$ ; для бинарной

смеси проще:  $X_A = \frac{x_A}{1 - x_A}$ .

В курсе ПАХТ нередко встречаются расчеты, оперирующие *молярными массами* компонентов и их смесей. При этом в СИ молярная масса некоего индивидуального компонента  $A$  измеряется в (кг  $A$ )/(моль  $A$ ), а смеси — в (кг см.)/(моль см.) (Подчеркнем: под модем здесь и далее соответственно СИ понимается *киломолекулярная*.) Число молей комп.  $A$  в 1 кг смеси при известной его абсолютной массовой концентрации  $a$  (кг  $A$ )/(кг см.) и молярной массе  $M_A$  рассчитать просто:

$$\frac{a}{M_A}$$

$\left( \frac{\text{кг } A}{\text{кг см.}} \cdot \frac{\text{моль } A}{\text{кг } A} \right)$  или  $\left( \frac{\text{моль } A}{\text{кг см.}} \right)$ . В расчетах приходится иметь дело и с числом кг, приходящихся на 1 моль смеси, — эту величину легко получить исходя из мольных абсолютных концентраций  $x_A$ :  $x_A M_A \left( \frac{\text{моль см.}}{\text{моль } A} \cdot \frac{\text{кг } A}{\text{моль } A} \right)$  или  $\left( \frac{\text{кг } A}{\text{моль см.}} \right)$ .

Переход от мольных концентраций к массовым и обратно ведется на сформулированной выше основе. Пусть смесь задана абсолютными массовыми концентрациями  $a$  (кг  $A$ /кг см.),  $b$ ,  $c$  ... ; требуется определить абсолютные мольные концентрации  $x_A$  (моль  $A$ /моль см.) и др. Здесь нужно от исходной базы “кг см.” перейти к базе “моль см.”. Этот переход реализуется с помощью молярных масс. Общее количество молей в 1 кг смеси равно  $\frac{a}{M_A} + \frac{b}{M_B} + \frac{c}{M_C} + \dots$ . Тогда мольная доля комп.  $A$  выразится:

$$x_A = \frac{a/M_A}{\frac{a}{M_A} + \frac{b}{M_B} + \frac{c}{M_C} + \dots} \quad (б)$$

Для бинарных смесей проще:  $b = 1 - a$ , так что

$$x_A \equiv x = \frac{a/M_A}{a/M_A + (1-a)/M_B}.$$

Если же смесь задана абсолютными мольными долями  $x_A$ ,  $x_B$ ,  $x_C$ , ... , то за базу пересчета берется 1 моль смеси: общее число кг в нем составляет  $x_A M_A + x_B M_B + x_C M_C + \dots$ . Тогда абсолютная массовая концентрация комп.  $A$  равна:

$$a = \frac{x_A M_A}{x_A M_A + x_B M_B + x_C M_C + \dots} \quad (в)$$

Для бинарных смесей, где  $x_A \equiv x$ , проще:  $a = \frac{x M_A}{x M_A + (1-x) M_B}$ .

В случае относительных концентраций формулы пересчета конструируются исходя из размерности знаменателя базового компонента. При заданной относительной массовой концентрации  $a$  компонента  $A$  количество его молей в расчете на 1 кг базового компонента  $N$  составляет  $a/M_A$ , а самого базового компонента —  $1/M_N$ . Тогда относительная мольная концент-

рация компонента  $A$  запишется:

$$X_A = \frac{a / M_A}{1 / M_N} = \frac{a M_N}{M_A}. \quad (г)$$

Обратный пересчет очевиден:  $a = X_A M_A / M_N$ .

Среди других однородных концентраций наиболее часто используются абсолютные *объемные*, например  $\alpha$  ( $\text{м}^3 A$ )/( $\text{м}^3 \text{см.}$ ). В случае газовых смесей эти концентрации совпадают с молярными (следствие закона Авогадро). В случае жидких или каких-либо других смесей использование объемных концентраций зачастую неудобно: в природе нет “закона сохранения объема”, и за редким исключением (идеальные растворы, например) аддитивное сложение объемов компонентов неправомерно, для расчета объемов смеси приходится привлекать данные эксперимента. Это обстоятельство надо учитывать: операции с объемными концентрациями (или смешанными, содержащими в единицах измерения  $\text{м}^3$ ), как и с удельными свойствами веществ на основе объемных концентраций, в общем случае являются приближенными. Они оправданы лишь отсутствием достоверных экспериментальных данных и точных методов расчета.

С указанными оговорками связь *объемной* концентрации  $\alpha$  ( $\text{м}^3 A / \text{м}^3 \text{см.}$ ) с *массовой*  $a$  ( $\text{кг} A$ )/( $\text{кг см.}$ ) устанавливается, как и ранее, на базе знаменателя размерности  $\alpha$  —  $1 \text{ м}^3 \text{см.}$  Произведение  $\alpha$  на плотность компонента  $A$   $\rho_A$  ( $\text{кг} A$ )/( $\text{м}^3 A$ ) имеет

размерность:  $\alpha \rho_A \left( \frac{\text{м}^3 A}{\text{м}^3 \text{см.}} \cdot \frac{\text{кг} A}{\text{м}^3 A} \right)$  или ( $\text{кг} A$ )/( $\text{м}^3 \text{см.}$ ), т.е. это мас-

са компонента  $A$  в  $1 \text{ м}^3$  смеси. Общая масса всех компонентов в  $1 \text{ м}^3$  смеси выразится суммой произведений:  $\alpha \rho_A + \beta \rho_B + \sigma \rho_C + \dots$  (где  $\beta, \sigma \dots$  — объемные концентрации других компонентов, а  $\rho_B, \rho_C \dots$  — их плотности). Тогда

$$a = \frac{\alpha \rho_A}{\alpha \rho_A + \beta \rho_B + \sigma \rho_C + \dots}. \quad (д)$$

Обратный пересчет — массовых концентраций в объемные — ведется на основе частных типа  $\frac{a}{\rho_A} \left( \frac{\text{кг} A}{\text{кг см.}} \cdot \frac{\text{м}^3 A}{\text{кг} A} \right)$  или

$\left( \frac{\text{м}^3 A}{\text{кг см.}} \right)$ , т.е. объемов, занимаемых отдельными компонента-

ми, входящими в  $1 \text{ кг}$  смеси. Полный объем  $1 \text{ кг}$  смеси равен

$$a/\rho_A + b/\rho_B + c/\rho_C + \dots, \quad \text{и тогда объемная концентрация } \alpha = \\ = \frac{a/\rho_A}{a/\rho_A + b/\rho_B + c/\rho_C + \dots}.$$

Аналогичный подход реализуется и в других случаях (смешанные концентрации; более сложные пересчеты и т.п.). Приведем без подробных пояснений *некоторые примеры* (в целях упрощения — для бинарных смесей и в предположении об аддитивности объемов компонентов).

1. Задана относительная объемная концентрация компонента  $\bar{\alpha} \text{ (м}^3 \text{ A) / (м}^3 \text{ B)}$ ; требуется найти массовую абсолютную концентрацию  $a \text{ (кг A) / (кг см.)}$ . Пересчет: одному  $\text{м}^3$  комп. B ставится в соответствие (символ  $\circ \rightarrow$ )  $\bar{\alpha} \text{ м}^3$  комп. A:

$$\bar{\alpha} \text{ м}^3 \text{ A} \circ \rightarrow 1 \text{ м}^3 \text{ B.}$$

$$\text{Переход к массам на } 1 \text{ м}^3 \text{ комп. B: } \bar{\alpha} \rho_A \text{ кг A} \circ \rightarrow 1 \cdot \rho_B \text{ кг B} \circ \rightarrow \bar{\alpha} \rho_A + \\ + 1 \cdot \rho_B \text{ кг см.}$$

$$\text{Расчет абсолютной массовой концентрации: } a = \frac{\bar{\alpha} \rho_A}{\bar{\alpha} \rho_A + 1 \cdot \rho_B} \left( \frac{\text{кг A}}{\text{кг см.}} \right).$$

2. Задана абсолютная объемная концентрация компонента  $\alpha \text{ (м}^3 \text{ A) / (м}^3 \text{ см.)}$ ; требуется найти мольную относительную концентрацию  $X_A$ . Пересчет требует ввода понятия о мольном объеме компонента  $v_i \text{ (м}^3 \text{ i) / (моль i)}$ ; база —  $1 \text{ м}^3$  смеси, ему ставятся в соответствие

$$1 \text{ м}^3 \text{ см.} \circ \rightarrow \alpha \text{ м}^3 \text{ A} \circ \rightarrow (1 - \alpha) \text{ м}^3 \text{ B.}$$

$$\text{Переход к молям на } 1 \text{ м}^3 \text{ см.: } \alpha / v_A \text{ моль A} \circ \rightarrow (1 - \alpha) / (v_B \text{ моль B}).$$

$$\text{Расчет относительной мольной концентрации: } X_A = \frac{\alpha / v_A}{(1 - \alpha) / v_B} \left( \frac{\text{моль A}}{\text{моль B}} \right).$$

На практике прямой пересчет может быть затруднен отсутствием сведений о значениях мольных объемов  $v_i$ . Тогда, если доступны сведения о плотностях компонентов  $\rho_i$ , возможен “обходной” путь:

$$1 \text{ м}^3 \text{ см.} \circ \rightarrow \text{м}^3 \text{ A} \circ \rightarrow (1 - \alpha) \text{ м}^3 \text{ B.}$$

$$\text{Переход к массам на } 1 \text{ м}^3 \text{ см.: } \alpha \rho_A \text{ кг A} \circ \rightarrow (1 - \alpha) \rho_B \text{ кг B.}$$

$$\text{Переход к молям на } 1 \text{ м}^3 \text{ см.: } \alpha \rho_A / (M_A \text{ моль A}) \circ \rightarrow (1 - \alpha) \rho_B / (M_B \text{ моль B}).$$

$$\text{Расчет относительной мольной концентрации: } X_A = \frac{\alpha \rho_A / M_A}{(1 - \alpha) \rho_B / M_B} \left( \frac{\text{моль A}}{\text{моль B}} \right).$$

### 10.2.2. Расчет некоторых свойств смесей с использованием концентраций

Аналитический расчет некоторых свойств смесей по аддитивности, строго говоря, возможен лишь в рамках предположения об отсутствии физико-химического взаимодействия компонентов. Это правомерно далеко не всегда, часто аддитивный расчет дает лишь приближенные оценки; более точные значения свойств получаются опытным путем. Ниже показаны пути расчета некоторых удельных свойств смесей при допущении об их аддитивности. В основе подхода — размерность знаменателя известной величины (см. разд. 10.2.1).

Пусть необходимо найти молярную массу смеси  $M$  по известным молярным массам компонентов и их абсолютным молярным концентрациям  $x_A, x_B, \dots$ . База расчета — 1 моль смеси (знаменатель в размерности концентраций). В разд. 10.2.1 показано, что произведения  $x_A M_A, x_B M_B$  и т.д. выражают количества кг отдельных компонентов  $A, B$  и др. в 1 моль смеси; вместе с тем  $M$  по определению есть общая масса всех компонентов в 1 моль смеси. Следовательно,  $M = x_A M_A + x_B M_B + \dots$ .

Пусть теперь молярную массу смеси надо определить по заданным абсолютным массовым долям компонентов:  $a, b, c, \dots$ . База расчета — 1 кг смеси (знаменатель в размерности концентраций). В разделе 10.2.1 показано, что дроби  $a/M_A, b/M_B$  выражают количества молей отдельных компонентов в 1 кг смеси; вместе с тем  $1/M$  по определению есть общее количество молей в 1 кг смеси. Следовательно,  $\frac{1}{M} = \frac{a}{M_A} + \frac{b}{M_B} + \dots$ .

Для бинарной смеси ( $x_B = 1 - x_A \equiv 1 - x, b = 1 - a$ ) полученные выражения упрощаются.

Аналогичным образом рассчитывается  $M$  для смеси по заданным относительным концентрациям. Только надо учитывать, что для  $n$ -компонентной смеси суммарное число молей или кг будет не 1, а соответственно  $1 + \sum_{i=1}^{n-1} X_i$  и

$1 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i$ . Тогда с учетом сказанного выше

$$\left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} X_i\right) M = \sum_{i=1}^{n-1} X_i M_i + 1 \cdot M_N \quad \text{и} \quad \frac{1 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i}{M} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{M_i} + \frac{1}{M_N}$$

откуда легко выразить значение  $M$ .

**Теплоемкость смеси**  $c_{см}$  в идеале (в отсутствие химических превращений и тепловых эффектов смешения) определяется по теплоемкостям компонентов  $c_A, c_B$  и т.д. и их абсолютным массовым долям  $a, b, \dots$  исходя из базы — знаменателя концентраций (1 кг смеси). Произведение  $c_A a \left( \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{А} \cdot \text{К}} \cdot \frac{\text{кг} \cdot \text{А}}{\text{кг} \cdot \text{см.}} \right)$  или

$\left( \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{см.} \cdot \text{К}} \right)$  представляет собой вклад компонента  $A$  в общую теплоемкость смеси; аналогично учитывается вклад остальных компонентов, так что

$$c_{см} = c_A a + c_B b + \dots \quad (\text{ж})$$

**Плотность смеси** по объемным концентрациям  $\alpha, \beta, \dots$  и плотностям компонентов  $\rho_A, \rho_B$  также рассчитывается по аддитивности; база расчета — 1 м<sup>3</sup> смеси, произведение типа  $\alpha \rho_A \left( \frac{\text{м}^3 \cdot \text{А}}{\text{м}^3 \cdot \text{см.}} \cdot \frac{\text{кг} \cdot \text{А}}{\text{м}^3 \cdot \text{А}} \right)$  дает вклад компонента  $A$  в общую плот-

ность смеси. В целом

$$\rho_{см} = \rho_A \alpha + \rho_B \beta + \dots \quad (3)$$

Плотность смеси чаще приходится определять по массовым долям  $a, b, \dots$ ; тогда расчетная база — 1 кг смеси. Из сопоставления размерностей ясно, что запись вида  $\rho_A a \left( \frac{\text{кг} \cdot \text{А}}{\text{м}^3 \cdot \text{А}} \cdot \frac{\text{кг} \cdot \text{А}}{\text{кг} \cdot \text{см.}} \right)$  лишена физического смысла. Здесь справедли-

ва (для идеальных смесей, конечно) аддитивность *обратных* величин; составляющие расчетной формулы тогда имеют вид  $\frac{a}{\rho_A} \left( \frac{\kappa_2 A}{\kappa_2 \text{ см.}} \frac{M^3 A}{M^3 A} \right)$  или  $\left( \frac{M^3 A}{\kappa_2 \text{ см.}} \right)$ , а результат получается в виде  $\frac{1}{\rho_{\text{см}}} \left( \frac{M^3 A}{\kappa_2 \text{ см.}} \right)$ .

Значит,

$$\frac{1}{\rho_{\text{см}}} = \frac{a}{\rho_A} + \frac{b}{\rho_B} + \dots \quad (\text{и})$$

—  $\rho_{\text{см}}$  рассчитывается по массовым концентрациям как *среднегармоническая* величина.

В качестве примера ниже схематично показан путь расчета средней молярной массы  $M$  и плотности  $\rho$  бинарной смеси с *объемной относительной* концентрацией компонента  $A$ , равной  $a \text{ м}^3 A / \text{м}^3 B$ . С этой целью одному  $\text{м}^3$  компонента  $B$  будем ставить в соответствие фрагменты, необходимые для выражения искомых величин:

$$\begin{aligned} 1 \text{ м}^3 B &\circ\text{---} a \text{ м}^3 A \circ\text{---} (1+a) \text{ м}^3 \text{ см.} \\ \text{Масса в расчете на } 1 \text{ м}^3 B: & 1 \cdot \rho_B \kappa_2 B \circ\text{---} a \rho_A \kappa_2 A \circ\text{---} (1+a) \rho \kappa_2 \text{ см.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Число молей в расчете на } 1 \text{ м}^3 B: & \frac{1 \cdot \rho_B}{M_B} \text{ моль } B \circ\text{---} \frac{a \rho_A}{M_A} \text{ моль } A \circ\text{---} \\ & \circ\text{---} \frac{(1+a)\rho}{M} \text{ моль см.} \end{aligned}$$

$$\text{Расчет плотности смеси:} \quad 1 \cdot \rho_B + a \rho_A = (1+a)\rho \text{ или } \rho = \frac{a \rho_A + 1 \cdot \rho_B}{1+a}.$$

Разумеется, можно не выписывать левое равенство, а сразу получить  $\rho$  как частное от деления суммарной массы ( $a \rho_A + 1 \cdot \rho_B$ ) на суммарный объем  $(1+a)$ .

Расчет средней молярной массы смеси:

$$\frac{1 \cdot \rho_B}{M_B} + \frac{a \rho_A}{M_A} = \frac{(1+a)\rho}{M} = \frac{1 \cdot \rho_B + a \rho_A}{M} \quad \text{или} \quad M = \frac{a \rho_A + 1 \cdot \rho_B}{\frac{a \rho_A}{M_A} + \frac{1 \cdot \rho_B}{M_B}}.$$

Здесь также можно сразу получить  $M$  путем деления общей массы смеси ( $a \rho_A + 1 \cdot \rho_B$ ) на общее число молей  $\left( \frac{a \rho_A}{M_A} + \frac{1 \cdot \rho_B}{M_B} \right)$ .

Подход к расчету других средних удельных величин (например, энтальпий, удельных объемов) — аналогичен. Он, разумеется, правомерен в пределах указанных ограничений. Надо иметь в виду, что некоторые характеристики смесей не поддаются аддитивному расчету. Иногда (коэффициент диффузии идеальных газов, вязкость идеальных жидкостей) удается использовать специфические формы аддитивных усреднений. В других случаях (например, теплопроводность жидкостей) приходится разрабатывать иные подходы (например, аддитивность с полуэмпирическими поправками). Нередко достаточно достоверные сведения о свойствах смеси в зависимости от концентраций компонентов дает только опыт.



### 10.2.3. О концентрациях в технологических расчетах

В случае **бинарных смесей** для отсчета концентрации, независимо от выбранной основы, достаточно *линейной шкалы* (рис. 10.4,а), — ограниченной, если используются *абсолютные* концентрации (на этом рисунке —  $x$ ), или *полуограниченной*, если речь идет об *относительных* концентрациях (здесь —  $X$ ). По шкале отсчитывается концентрация первого компонента (какого именно — надо условиться); концентрация второго берется как  $1 - x$  (абсолютные концентрации) или 1 (относительные).

В случае **многокомпонентных смесей** расчеты, как правило, ведут на основе *абсолютных* концентраций; поэтому концентрационные диаграммы должны ограничивать изменение содержания любого компонента диапазоном от 0 до 1, а сумма концентраций всех компонентов должна быть равна 1. При этом состав смеси задается концентрациями  $n - 1$  компонентов, для  $n$ -го компонента она получается по разности.

Для часто встречающихся **трехкомпонентных смесей** необходимо зафиксировать концентрации двух —  $x_1$  и  $x_2$ , третья выразится как  $x_3 = 1 - x_1 - x_2$ . Поэтому здесь нужны две шкалы — оси, т.е. *диаграмма на плоскости*. Обычно в этих целях выбирают косоугольную систему координат, замыкая ее в равносторонний треугольник (рис.10.4,б). При этом используют известное свойство последнего: сумма внутренних перпендикуляров на стороны из любой точки равностороннего треугольника есть величина постоянная, равная его высоте, — ее принимают за единицу. Это позволяет трактовать отрезок перпендикуляра от точки до стороны как концентрацию компонента, обозначенного в противоположной вершине. В таком представлении: *в вершинах — чистые компоненты* (обозначенные там символами  $A$ ,  $B$  или  $C$  либо цифрами 1, 2 или 3); на сторонах — *бинарные смеси компонентов, указанных на ее концах* (в вершинах); в поле *внутри треугольника — тройные смеси*. Линия, параллельная какому-либо основанию, отвечает постоянству концентрации компонента, проставленного в противоположной вершине. Точке за пределами треугольника не отвечает реально существующая смесь, так как внешний перпендикуляр на какую-либо сторону — отрицателен.

Определение концентрации по длине перпендикуляра на сторону неудобно. Поэтому линии постоянных концентраций сносят (рис.10.4,в) на соответствующие стороны, располагая там шкалы отсчета. Так, шкалу отсчета компонента  $A$  удобно расположить на левой стороне треугольника,  $B$  — на правой,  $C$  — на основании. Отсчет концентрации компонента  $A$  ведут с помощью линии, параллельной стороне  $BC$ ,  $B$  — с помощью горизонтали,  $C$  — с помощью линии, параллельной  $AB$ .

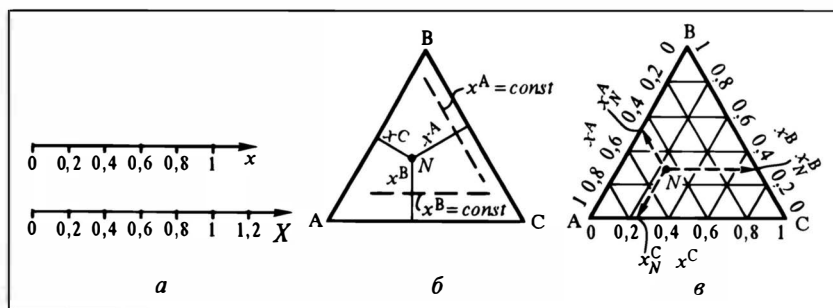


Рис.10.4. Концентрационные шкалы и диаграммы:

*a* — шкалы для абсолютных ( $x$ ) и относительных ( $X$ ) концентраций в случае бинарных смесей, *б* — треугольная диаграмма для тройных смесей: физический смысл, линии постоянных концентраций, *в* — треугольная диаграмма: отсчет концентраций компонентов

Нетрудно догадаться, что для **четырёхкомпонентной смеси** требуется *пространственная* диаграмма в форме правильного тетраэдра, а при большем числе компонентов — построения в многомерном пространстве. В этих случаях оперируют векторами составов  $X$  ( $x_1, x_2, x_3, \dots$ ) и аналитическими соотношениями, сопровождая их для наглядности фрагментами геометрических построений для бинарных и тройных смесей, составляющих  $n$ -компонентную систему.

#### 10.2.4. Правило рычага

Концентрационные шкалы и диаграммы помогают сформулировать и наглядно изобразить **правило смешения (разделения)** веществ — компонентов и их смесей, известное как “правило рычага”.

Пусть имеются **бинарные** системы 1 (концентрация рассматриваемого компонента  $x_1$ ) в количестве  $m_1$  и 2 (концентрация того же компонента  $x_2$ ) в количестве  $m_2$ . Требуется определить концентрацию вещества  $x_c$  при смешении этих систем. Запишем материальные балансы для систем в целом и для рассматриваемого компонента (в отсутствие его Источников и Стоков):

$$m_1 + m_2 - m_c = 0; m_1 x_1 + m_2 x_2 - m_c x_c = 0. \quad (\kappa)$$

Отсюда, исключив  $m_c = m_1 + m_2$ , имеем аналитически и геометрически:

$$m_1(x_c - x_1) = m_2(x_2 - x_c); m_1(\overline{1C}) = m_2(\overline{2C}) \quad (\lambda)$$

Геометрическая интерпретация соотношения (л) приведена на рис.10.5, *a—I*, где процесс смешения представлен на концентрационной шкале в виде находящегося в равновесии рычага I рода. Роль сил здесь играют массовые количества взятых

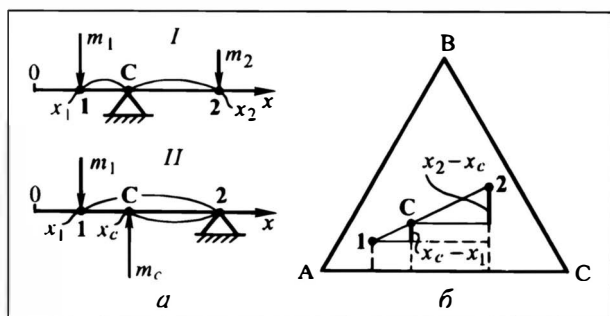


Рис. 10.5. Правило рычага: к выводу расчетных формул; интерпретация результатов анализа (обозначение позиций и точек — в тексте):  
а — для бинарных смесей, б — для тройных смесей

веществ  $m_1$  и  $m_2$ , а место приложения сил (точка опоры, величина плеч рычага) определено с учетом  $x_1$  и  $x_2$  соотношением (л).

Чаше удобно располагать точку опоры в точке 1 или 2 (рис. 10.5, а—II). Тогда надо во второй из формул (к) исключить массу, отвечающую точке опоры; по рисунку  $m_2 = m_c - m_1$ . В результате

$$m_1(x_2 - x_1) = m_c(x_2 - x_c) ; m_1(\overline{12}) = m_c(\overline{2C}) \quad (м)$$

Это соотношение можно представить в виде находящегося в равновесии рычага II рода с характерными “силами” — количествами веществ  $m_1$  и  $m_c$ , точкой опоры и плечами.

Выражения (л) и (м) можно объединить в обобщенное правило рычага — в аналитическом и геометрическом представлениях:

$$\frac{m_1}{x_2 - x_c} = \frac{m_2}{x_c - x_1} = \frac{m_c}{x_2 - x_1} \text{ и } \frac{m_1}{\overline{2C}} = \frac{m_2}{\overline{1C}} = \frac{m_c}{\overline{12}} \quad (н)$$

В случае **тройных** смесей правило рычага должно быть реализовано применительно к треугольной диаграмме (рис. 10.5, б). Здесь придется записать материальные балансы для порций (потоков) в целом и для двух компонентов (для третьего баланс получается по разности):

$$m_1 + m_2 - m_c = 0 ; m_1 x_1^B + m_2 x_2^B - m_c x_c^B = 0 ; \\ m_1 x_1^A + m_2 x_2^A - m_c x_c^A = 0 \quad (о)$$

Отсюда — координаты точки смеси:

$$x_c^B = \frac{m_1 x_1^B + m_2 x_2^B}{m_1 + m_2} ; x_c^A = \frac{m_1 x_1^A + m_2 x_2^A}{m_1 + m_2} \quad (п)$$

Из (п) видно, что положение точки смеси зависит от взятых количеств веществ  $m_1$  и  $m_2$  (точнее — от их соотношения).

Таким образом, в общем плане речь идет не о точке, а о *геометрическом месте точек смеси*, т.е. о зависимости  $x_c^B = f(x_c^A)$ . Если в правых выражениях (о) подставить  $m_c = m_1 + m_2$  и разрешить полученные формулы относительно  $m_2/m_1$ , то приходим к двум равенствам, в которых концентрации точек 1 и 2 известны (заданы):

$$\frac{x_c^B - x_1^B}{x_2^B - x_c^B} = \frac{x_c^A - x_1^A}{x_2^A - x_c^A} = \frac{m_2}{m_1} . \quad (\text{p})$$

Равенство первых двух отношений дает *уравнение линии смешения*  $x_c^B = f(x_c^A)$ . Легко видеть, что при  $m_2 = 0$  (в смеси содержится только вещество 1) получается  $x_c^B = x_1^B$ ,  $x_c^A = x_1^A$  — линия смешения проходит через точку 1. Аналогично: при  $m_1 = 0$  (в смеси только вещество 2) имеем  $x_c^B = x_2^B$ ,  $x_c^A = x_2^A$  — линия смешения проходит через точку 2. По форме соотношения (p) видно, что это уравнение *прямой*  $x_c^B = f(x_c^A)$ ; в этом можно убедиться, перемножив наперекрест разности концентраций: после сокращений остаются только слагаемые, содержащие  $x_c^B$  и  $x_c^A$  в первой степени. Таким образом, линия смешения в треугольной диаграмме есть прямая, проходящая через точки исходных веществ, взятых для смешения.

Для отыскания положения точки смеси С воспользуемся левым и правым фрагментами соотношения (p) и изображенными в концентрационном треугольнике соответствующими разностями концентраций (рис.10.5,б). Из полученных подобных треугольников следует

$$\frac{x_c^B - x_1^B}{x_2^B - x_c^B} = \frac{\overline{1C}}{\overline{2C}} = \frac{m_2}{m_1} . \quad (\text{с})$$

Можно видеть, что и здесь смешение трактуется в аспекте правила рычага I рода:  $m_1(\overline{1C}) = m_2(\overline{2C})$ , что полностью согласуется с (л) и рисунком 10.5,а—I. Добавление по 1 во все части равенства (с) дает после приведения к общему знаменателю

$$\frac{x_2^B - x_1^B}{x_2^B - x_c^B} = \frac{\overline{12}}{\overline{2C}} = \frac{m_c}{m_1} . \quad (\text{т})$$

Это отвечает правилу рычага II рода с опорой в точке 2:  $m_1(\overline{12}) = m_c(\overline{2C})$ , — что также согласуется с выражением (м) для бинарных смесей.

В обобщенной форме правило рычага для тройных смесей имеет вид соотношения (н).

Таким образом, смешение веществ (математически — их сложение) или обратная операция — разделение смеси на составляющие (математически — вычитание) — происходит в соответствии с правилом рычага. В зависимости от конкретной постановки задачи используют правило рычага I рода или (чаще) II рода. Заметим, что правило рычага используется не только применительно к концентрационным диаграммам, но и для диаграмм типа “состав — свойство”; такие ситуации будут рассмотрены в некоторых последующих главах.

## 10.3. РАВНОВЕСИЕ

### 10.3.1. Общие положения

В разд. 10.1.2 сформулирована сущность равновесного состояния для массообменных процессов: практически речь идет о *концентрационном* равновесии в фазах. В системе устанавливается **динамическое равновесие**: обмен субстанциями (в частности, веществом) через фазовые границы осуществляется в эквивалентных количествах (в частности, сколько молекул какого-либо вещества переходит из фазы 1 в фазу 2, столько же переходит и обратно). Для достижения фазового равновесия необходимо обеспечить тесный контакт фаз (увеличить поверхность контакта, например путем диспергирования фаз; повысить интенсивность переноса вещества из фазы в фазу, например за счет перемешивания) и (или) достаточно длительное время контакта. Равновесие считается практически достигнутым, если последовательные измерения состава фаз (разумеется, температур и давлений — тоже) не обнаруживают изменений — на уровне чувствительности имеющейся измерительной техники, соответственно задаче и приемлемой погрешности исследования.

В основе анализа равновесия лежит **правило фаз** — оно для  $k$ -компонентных и  $\phi$ -фазных систем позволяет установить число степеней свободы  $f$ , иначе — интенсивных свойств (фактически — управляющих воздействий), которые могут быть выбраны произвольно, т.е. навязаны системе извне. В случае систем, для которых II закон термодинамики включает в качестве потенциалов температуру ( $T$ ,  $\theta$ ), давление ( $p$ ) и химический потенциал ( $\mu$ ), правило фаз записывается в виде\*

$$f = k - \phi + 2. \quad (10.1)$$

---

\* В такой форме правило фаз приводится в многочисленных учебниках по ПАХТ [8, 10, 12, 22 и др.]; вывод правила фаз см. [14] и различные учебники по термодинамике.

Соответственно этому правилу, например для *индивидуально-го* компонента ( $\kappa = 1$ ) в системе жидкость — пар ( $\phi = 2$ ) получается  $\varphi = 1$ ; это означает, что произвольно может быть выбран один параметр, например температура, а давление паров будет уже определенным, отвечающим этой температуре. Правило фаз показывает, что для индивидуального вещества характерна одна *тройная точка*, в которой сосуществуют три фазы — жидкая, паровая и твердая:  $\varphi = 1 - 3 + 2 = 0$ , здесь система **инвариантна** (нонвариантна). Для кипящих *бинарных* смесей (процессы дистилляции, ректификации) класса  $2(2-2)2$  получается  $\varphi = 2$ ; значит, произвольно можно выбрать, например, давление и состав одной из фаз; температура кипения и состав другой фазы будут определенными. Аналогичный тест соответствия правилу фаз целесообразен и для других систем на начальных стадиях организации массообменных процессов.

В *стационарных* массообменных процессах концентрация (а также  $t$  и  $p$ ) в любой точке аппарата тоже не изменяются во времени. Однако при проведении таких процессов система обменивается субстанцией (в аспекте массообмена — прежде всего веществом) с внешней средой; в результате в системе возникает *поле* концентраций. Эти обстоятельства устанавливают неравновесность фазовых составов в системе, а отклонение от равновесия является предпосылкой массообмена.

Каждая фаза задается совокупностью — **вектором** — концентраций; пусть для фазы “ $x$ ” характерен состав  $X$  ( $x_1, x_2, x_3 \dots$ ), для фазы “ $y$ ” —  $Y$  ( $y_1, y_2, y_3 \dots$ ), причем одинаковые индексы при  $x$  и  $y$  указывают на принадлежность концентрации к одному компоненту. Тогда в *условиях равновесия*  $X$  и  $Y$  — равновесные составы: концентрации любого компонента  $x_i$  и  $y_i$  — равновесны. Линия (реально проведенная или мысленная), соединяющая эти составы (точки в фазах), называется **равновесной нодой** (иногда — **конодой**); это тоже вектор, его обычно считают направленным в сторону преимущественного перехода компонентов при неравновесных составах фаз.

Эти представления существенно упрощаются при переходе к таким двухфазным системам, когда каждая фаза содержит *не более двух компонентов*, т.е. к классам  $3(2-2)1$ ,  $2(2-2)2$  и некоторым другим. В этих случаях диаграмма фазового равновесия изображается на плоскости, чаще всего — в декартовых координатах (рис. 10.6,а). Работать с нодами неудобно: приходится то и дело строить дополнительные (необходимые для расчета) ноды по ограниченному числу экспериментально найденных. Поэтому по равновесным концентрациям  $y_1, x_1; y_2, x_2; \dots$  в поле диаграммы строят соответствующие равновесные точки 1, 2,

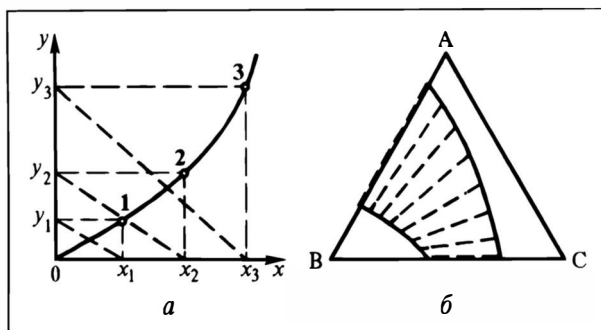


Рис. 10.6. Равновесные диаграммы:

*a* — для систем с двумя компонентами в каждой фазе, *б* — для трехкомпонентных систем (жирные штриховые линии — равновесные ноды)

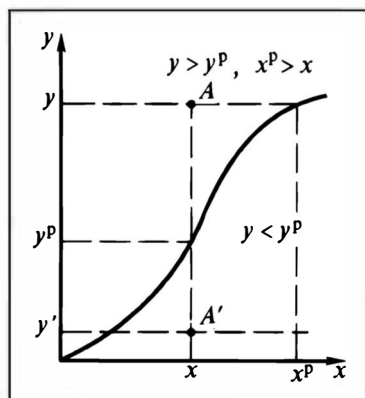
... и проводят из начала координат через них плавную кривую: на рисунке — сплошная линия равновесия 0-1-2-3. Теперь для любого значения концентрации в фазе “*x*” легко найти равновесную ей концентрацию в фазе “*y*” (и наоборот). Положение и конфигурация линии равновесия зависят от природы компонентов, составляющих фазы, а также от температуры и давления (если обе фазы жидкие или твердые, т.е. практически несжимаемые, то влияние давления, естественно, становится исчезающе малым). Поэтому равновесные линии привязывают к определенной температуре (тогда эта линия — *изотерма*) или давлению (тогда это *изобара*).

В случае двухфазных *трехкомпонентных* систем, вообще говоря, необходимо использовать две треугольные диаграммы, где определенным (не всегда — любым) точкам одной из них поставлены в соответствие равновесные точки другой. Работать с двумя диаграммами неудобно, и поэтому равновесие в фазах изображается в одной общей треугольной диаграмме (рис. 10.6,б). Равновесные точки при этом соединяются нодами, концы которых принадлежат разным фазам. В ряде случаев удастся найти для нод геометрические места их концов в разных фазах, в других случаях — только признаки (параметры, например температуры), позволяющие установить концы нод-отрезков. Детально такое представление равновесия рассматривается в некоторых последующих главах (12, 13, 17).

Для *многокомпонентных* систем, когда число компонентов в какой-либо фазе больше трех, геометрические представления теряют наглядность; в этом случае прибегают к векторным представлениям\*.

\* См. [11].

Рис.10.7. Рабочая область массообменного процесса



Поскольку при анализе процессов массопереноса осуществлен переход от химических потенциалов к концентрациям (именно последние используются в диаграммах типа  $y - x$ , вообще при представлении потенциальных полей), то прямое сравнение концентраций (их сложение, вычитание, использование их разности в качестве движущей силы) допустимо только в пределах одной фазы. В общем случае\* нельзя судить о направлении переноса компонента, сопоставляя уровни концентраций  $y$  и  $x$ , или выражать движущую силу в форме  $(y - x)$ . В массообмене численные значения концентраций (они играют роль потенциалов) в разных фазах впрямую несопоставимы, нередко у них и разные размерности (потому что разные базы выражения концентраций: кг А/кг Г и кг А/кг Ж, где Г и Ж — газовая и жидкая фазы). Здесь для сопоставления концентраций используются разные подходы.

Пусть фаза “х” с концентрацией переходящего компонента  $x$  вводится в контакт с фазой “у”, в которой концентрация этого компонента  $y$ . Концентрации контактирующих фаз (в точке, в сечении, в некоторых процессах — в объеме аппарата) называются сопряженными (рис.10.7, точка А). В этой точке при некотором значении  $x$  концентрация  $y$  превышает равновесную  $y^p$ . Согласно II закону термодинамики, субстанция самопроизвольно переносится от большего потенциала к меньшему; поскольку  $y > y^p$ , то рассматриваемый компонент под действием движущей силы  $y - y^p$  будет переходить от  $y$  к  $y^p$  (иначе — к  $x$ ), т.е. из фазы “у” в фазу “х”. К аналогичному выводу приходим при сопоставлении  $x^p$  и  $x$  для данного  $y$ : поскольку  $x^p > x$ , то компонент под действием движущей силы  $x^p - x$  будет переходить от  $x^p$  (иначе — от  $y$ ) к  $x$ , т.е. опять-таки из “у” в фазу “х”. Если смысл конкретного технологического процесса отвечает переносу компонента в этом направлении, значит поле диаграммы  $y - x$  выше линии равновесия представляет собой **рабочую область** процесса. Если же необходим перенос компонента

\* Имеются частичные исключения для систем, в которых все компоненты содержатся в обеих фазах, — классы типа 2(2-2)2, 3(3-3)3.



из фазы “х” в фазу “у”, то рабочая область располагается *ниже* равновесной кривой, где  $y^p > y$ ,  $x^p < x$ , движущими силами являются разности  $y^p - y$  и  $x - x^p$ . Для осуществления массообмена в этом случае в контакт с фазой состава  $x$  надо ввести другую фазу с более низкой концентрацией  $y'$  (на рисунке сопряженная точка  $A'$ ).

В рассматриваемом смысле процессы массообмена можно считать обратимыми, все определяется положением точки сопряженных концентраций относительно линии равновесия. Массообмен становится практически необратимым, если переносимый компонент переходит (в результате химической реакции) в другую фазу, выводимую из зоны межфазного контакта (простой пример для системы газ — жидкость: химическое связывание компонента и выпадение полученного химического соединения в осадок).

Описание равновесия имеет конкретные особенности в пределах каждой группы процессов по КФ-классификации, иногда оно специфично для отдельных технологических приемов. Это может быть связано с некоторыми особенностями, присущими группе технологических приемов или отдельному приему, либо с недостаточной проработанностью (теоретической, экспериментальной) самого технологического приема или равновесного состояния. В отдельных случаях описание равновесного состояния пока остается обособленным и не включено в общую систему представлений о равновесии, в основном — в силу традиций и психологического сопротивления (здесь просто нужно время ...).

Способы представления равновесия детализируются в главах, посвященных анализу конкретных технологических приемов.

### 10.3.2. Равновесие в системах класса 3(2-2)1

Системы, принадлежащие к этому классу, содержат по два компонента в каждой фазе, причем лишь один из этих компонентов переходит из одной фазы в другую. Этот компонент называют “веществом” В или “переходящим компонентом” ПК. Остальные компоненты из фазы в фазу не переходят, они являются *носителями* вещества и в смысле массообмена — инертными (“ин.”). Количества (в периодических процессах) и потоки (в непрерывных) инертов остаются неизменными в ходе массообменного процесса. Именно поэтому концентрации ПК здесь удобно выражать в *относительных* единицах, приходящихся, например, на 1 кг того или другого инерта. И на осях концентрационных диаграмм откладываются относительные концентрации; например, в случае абсорбции:  $y$  (кг ПК)/(кг инерта-газа),  $x$  (кг ПК)/(кг инерта-жидкости). Естественно, фазовая диаграмма здесь является полуоткрытой.

Согласно правилу фаз, при  $\kappa = 3$  и  $\phi = 2$  получается  $\varphi = 3$ . Это означает, что равновесие в системе определяется тремя независимыми параметрами, например давлением, температурой и составом одной из фаз (скажем, концентрацией  $x$ ); концентрация вещества во второй фазе ( $y$ ) примет определенное значение. В случае работы при постоянном давлении равновесная связь  $y$  и  $x$  определяется температурой. Такие ситуации для класса 3(2-2)1 встречаются наиболее часто; поэтому равновесие изображают в виде изобарической (в целом) диаграммы с семейством линий равновесия — изотерм (для различных температур). Разумеется, можно построить и изотермическую диаграмму с семейством изобарических линий равновесия.

В общем случае линии равновесия в диаграмме  $y - x$  — *кривые*, выходящие из начала координат. Для отдельных смесей кривизна равновесных линий невелика, и в рабочем диапазоне процесса их можно приближенно (без существенной погрешности) представить в виде *прямых*. Такое спрямление (линеаризация) упрощает последующий анализ и расчеты.

Отношение равновесных концентраций  $y$  и  $x$  называют **коэффициентом распределения**  $m \equiv (y/x)^P$ . Этот коэффициент представляет собой тангенс угла наклона *секущей*\* к линии равновесия — из начала координат в точку с равновесными концентрациями  $y$ ,  $x$ . Для кривой линии равновесия  $m$  изменяется с концентрациями, для прямой — остается постоянным. Постоянство  $m$  — одно из условий линейности массообменного процесса в целом и возможности его аналитического описания. В противном случае, как правило, приходится обращаться к графическим построениям или численным методам расчета. Заметим, что процессы массообмена нередко реализуются в области малых значений концентраций (например, в случае глубоких степеней разделения), т.е. весьма близко к началу координат концентрационной диаграммы. Но на начальных участках кривую равновесия можно без существенной погрешности трактовать как прямую (с постоянным углом наклона:  $m = \text{const}$ ) и использовать в пределах этих участков линейное представление равновесия  $y^P = mx$ .

Анализ массообменных процессов с линейным равновесием достаточно широко представлен ниже для систем рассматриваемого класса.

---

\* Подчеркиваем это специально, поскольку в ряде изданий (даже в учебниках) нередко  $m$  трактуется как тангенс угла *касательной* к линии равновесия в точках ( $y$ ,  $x$ ) — см., например, [12].

## 10.4. КИНЕТИКА МАССОПЕРЕНОСА В ФАЗЕ

### 10.4.1. Общие положения

В случае непосредственного контакта фаз (именно такие ситуации преобладают в массообменных процессах) перенос вещества осуществляется по схеме, изображенной на рис.10.8 для фрагмента массообменного аппарата. В пределах каждой фазы у границы их раздела формируются диффузионные пограничные пленки, в которых происходит плавное изменение концентраций переносимого вещества — от значений в ядре фазы (потока) до значений на границе раздела. В *модельном* представлении пограничные пленки полагают (как и в случае теплопереноса) резко очерченными, а весь концентрационный напор — сосредоточенным в пределах этих пленок.

Примем для определенности, что процесс ведется в непрерывном режиме и вещество переходит из фазы “у” в фазу “х”. Тогда оно с фазой “у” (его поток показан левой вертикальной стрелкой — см. рис.10.8) под действием внешнего побудителя (насос, компрессор) вносится в рассматриваемый фрагмент массообменного аппарата. Далее под действием частной разности концентраций в фазе “у” (в ядре потока и на границе раздела) вещество транспортируется (горизонтальная левая стрелка) к фазовой границе. Затем от нее вещество переносится (горизонтальная правая стрелка) в фазу “х” — также под действием своей частной разности концентраций (на границе и в ядре этой фазы). Наконец, оно выводится из аппарата с потоком фазы “х” (правая вертикальная стрелка). Разумеется, при переносе вещества из фазы “х” в фазу “у” стрелки примут противоположное направление. Естественно, некоторый поток вещества выносится с фазой “у” из аппарата и может также вноситься с фазой “х” в аппарат. Поэтому подчеркнем, что при рассмотрении потока вещества с фазами “у” и “х” речь идет только о *той его части М, которая передается из фазы в фазу*.

При осуществлении мембранного массопереноса фазы будут разграничены проницаемой перегородкой; тогда схема по существу совпадает с рассмотренной для теплопереноса (см. рис.6.1).

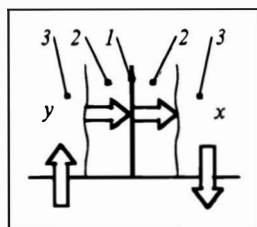
Наименование процессов и их стадий при переносе вещества согласуем с принятыми ранее при изучении переноса теплоты.

**Массопереносом** именуется *любое* явление (процесс), связанное с переносом вещества на отдельной стадии или в целом.

**Элементом** процесса массопереноса называется стадия (акт), относящаяся к какой-либо одной составляющей этого процесса. Соответственно схеме на рис.10.8: массоперенос нормально к поверхности раздела фаз через пограничную пленку

Рис. 10.8. Общая схема контактного массопереноса (фрагмент массообменного аппарата):

1 — граница раздела фаз, 2 — пограничные пленки в фазах  $x$  и  $y$ , 3 — фазы  $x$  и  $y$



— **массоотдача**; перемещение вещества с потоком фазы — **поточковый** массоперенос. В случае массопереноса в твердом теле (частный случай — через мембрану) говорят о **массопроводности** (диффузии в твердом теле). **Диффузионный** массоперенос, конечно, наблюдается также в жидкостях и газах. Каждой из этих элементарных стадий соответствует определенный аналог в теплопереносе; аналога лучистому переносу теплоты в массопереносе нет.

**Массопередачей** называется перенос вещества из одной фазы в другую нормально к межфазной границе. Для схемы на рис. 10.8 — это перенос вещества через пограничные слои (две стадии); в случае мембранного процесса массопередача насчитывала бы три стадии: добавляется перенос вещества через мембрану. Под **массообменом** будем понимать массоперенос в целом, включая подвод и отвод вещества с потоками фаз. Для схемы на рис. 10.8 массообмен насчитывает четыре стадии (для мембранного процесса их было бы пять).

**Кардинальная проблема массопереноса** — установление *распределения концентраций в системе* (рабочей зоне аппарата) в пространстве и во времени. С разрешением этой проблемы по существу связано (прямо или косвенно) решение многочисленных конкретных теоретических и прикладных задач переноса вещества.

Наиболее общими и сложными для анализа и расчета являются процессы, в которых концентрация вещества (обозначим ее *здесь*  $C$ ) изменяется как от точки к точке, так и во времени  $\tau$ . Среди *нестационарных* процессов, когда  $C = C(\tau)$ , наиболее просты *безградиентные*, в которых концентрация не изменяется в исследуемом пространстве:  $\partial C / \partial n = 0$  ( $n$  — нормаль к поверхности раздела фаз). Для *стационарных* процессов чаще всего характерно изменение концентраций от точки к точке, но в любой точке технологического пространства концентрация не изменяется во времени:  $\partial C / \partial \tau = 0$ . Особняком стоят процессы переноса в *твердой фазе* (зерно, пластина и т.п.). Если исключить из рассмотрения стационарный перенос вещества через проницаемые перегородки, то с *позиции твердого тела* (зерна, например) в отсутствие химических превращений массообменный процесс принципиально *нестационарен*, по-

сколько сопровождается изменением во времени концентрации вещества в различных точках тела. Тем не менее при регулярном (направленном или беспорядочном) перемещении тела (скажем, коллектива зерен) внутри аппарата концентрация в зерне в данной точке рабочего пространства может оставаться неизменной. Следовательно, *с позиции аппарата* массообмен будет протекать в *стационарном режиме*. В этом аспекте массообменный процесс с твердыми телами формально может считаться отвечающим схеме на рис. 10.8; при безградиентном массопереносе в зерне такая трактовка становится физически оправданной.

В технических расчетах оперируют полным количеством или потоком (в единицу времени) вещества  $M$ , чаще всего массовым или мольным, измеряемым в кг, моль — для периодических (нестационарных) процессов или их стадий, в кг/с, моль/с — для непрерывных (стационарных). Удельным называется поток вещества  $q_B$ , отнесенный к единице поверхности фазового контакта — в кг/(м<sup>2</sup>·с), моль/(м<sup>2</sup>·с). Очевидно,  $M = q_B F \tau$  — для периодических процессов и их стадий,  $M = q_B F$  — для непрерывных стадий и процессов.

#### 10.4.2. Виды массопереноса.

##### Об уравнении Фика

Под диффузией (массопроводностью) понимают перенос вещества без перемещения частиц рабочего тела (газа, жидкости, твердого), причем *частицы* здесь трактуются как образования сплошной среды, существенно превышающие размеры атомов или молекул. В разд. 1.3.2 было введено понятие о потенциальных полях, в том числе — о поле концентраций, градиенте концентраций  $\partial C / \partial n$ , коэффициенте диффузии  $D_d$  (применительно к твердым телам его называют коэффициентом массопроводности  $D_m$ ). Там же было обосновано *противоположное* направление диффузионного потока вещества и концентрационного градиента и представлена их связь в форме закона Фика:

$$q_B = -D_d \frac{\partial C}{\partial n}. \quad (1.11), (10.2)$$

Коэффициент диффузии, характеризующий интенсивность массопереноса, формально выражается в м<sup>2</sup>/с; физически это означает

$$\frac{m^3}{m^2 \cdot c (\Delta C = 1)/m},$$

где  $(\Delta C = 1)/m$  есть единичный градиент концентраций.

Диффузионный перенос вещества может выступать как отдельная стадия массопереноса.

Конвективный массоперенос в широком смысле понимается как перенос вещества с крупными образованиями сплошной среды (газом, жидкостью, в определенных ситуациях — и твердой фазой) в любом направлении. *Здесь (и далее)* под конвективным будем понимать перенос вещества *нормально* к поверхности раздела фаз как результат сложного взаимодействия механизмов переноса вещества: собственно конвективного (в ядре потока) и молекулярно-диффузионного (в пограничном слое). Такой вид массопереноса, именуемый **массоотдачей**, также может выступать в качестве отдельной стадии. Интенсивность его, аналогично переносу теплоты, выражают коэффициентом массоотдачи  $\beta$ , причем

$$q_B = \beta \Delta C; \quad M = \beta F \Delta C, \quad (10.3)$$

где  $\Delta C$  — **движущая сила массоотдачи**: разность концентраций переносимого вещества в ядре фазы и на границе раздела (со стороны этой фазы). Размерность  $\beta$  определяется размерностью величин, входящих в уравнение массоотдачи (10.3). Но в любом случае это поток вещества (он может измеряться в массовом, мольном или другом выражении) в единицу времени через единицу межфазной поверхности, отнесенный к единице движущей силы. Произведение  $\beta F$  представляет **пропускную способность** конвективной стадии массопереноса — массоотдачи.

Общее математическое описание переноса вещества представляется уравнением Фика:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + w_x \frac{\partial C}{\partial x} + w_y \frac{\partial C}{\partial y} + w_z \frac{\partial C}{\partial z} = D \nabla^2 C + \kappa \quad (1.22), (10.4)$$

Вывод этого уравнения, его модификации применительно к различным ситуациям, начальные и граничные условия, критерии диффузионного подобия, полученные масштабными преобразованиями уравнения (10.4) и граничных условий, рассмотрены в разд. 1.5 — 1.8. Решение уравнения (10.4) с граничными условиями, отвечающими определенным случаям массопереноса, призвано дать концентрацию  $C$  в любой точке рабочего пространства в заданный момент времени.

Рассмотренные понятия и соотношения ниже будут анализироваться применительно к достаточно простым технологическим ситуациям: отсутствие химических превращений (а значит, Источников и Стоков вещества  $\kappa$ ); стационарные и простейшие нестационарные (например, безградиентные) процессы; некоторые твердые тела правильной формы (т.е.  $w_x, y, z = 0$ ), потоки фаз в режимах идеального вытеснения (ИВ) и идеального перемешивания (ИП) и т.п.

### 10.4.3. Диффузионный массоперенос

В основе расчета диффузионного переноса вещества в пределах фазы лежит закон Фика (10.2). Для его практического использования необходимо располагать коэффициентами диффузии  $D_d$ ,  $D_m$ ; способы их определения и значения для различных рабочих тел приведены в литературе\* — в монографиях по термодинамике, справочниках, приложениях к техническим изданиям.

Коэффициенты диффузии для *газов* уменьшаются с ростом давления  $p$  (в диапазоне до 2,5 — 3,0 МПа изменяются практически обратно пропорционально  $p$ ) и достаточно быстро растут с температурой  $t$ ; для данного компонента они снижаются с ростом его концентрации в смеси (при малой концентрации компонента ее влияние на  $D_d$  несущественно). Для *жидкостей*  $D_d$  растет с  $t$ ; характер влияния концентрации зависит от природы компонентов (возможны минимумы и максимумы с изменением концентрации). Для *твердых тел*  $D_m$  также растет с  $t$ ; характер его изменения с концентрацией диффундирующего вещества  $C$  и здесь зависит от природы этого вещества и твердого тела. В области малых концентраций они весьма слабо влияют на  $D_m$ , так что можно принимать  $D_m = \text{const}$ ; при более высоких  $C$  часто наблюдается заметный рост  $D_m$  с  $C$ .

Путь решения задач стационарного массопереноса через тела различной формы (плоские стенки или прослойки, стенки другой формы — одно- и многослойные) полностью повторяет рассмотренный в разд. 6.3 для переноса теплоты: аналогичные предпосылки — закон Фика взамен закона Фурье; та же канва анализа — с заменой  $t$  на  $C$  и  $\lambda$  на  $D_m$ . Поэтому и результаты выглядят идентично.

Так, для *плоской* стенки или прослойки толщиной  $\delta$  [см. формулу (6.6)] количество переданной в единицу времени массы при  $D_m = \text{const}$  составляет

$$M = \frac{D_m}{\delta} F \Delta C, \quad (10.5)$$

причем **пропускная способность диффузионного переноса вещества** представлена фрагментом

$$\frac{D_m}{\delta} F. \quad (a)$$

Для *сферической* стенки [обозначение характерных диаметров  $d_1$  и  $d_2$  то же, что и в формуле (6.10)]

$$M = \frac{\Delta C}{\frac{1}{2\pi D_m} \left( \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right)}, \quad (10.6)$$

---

\* Сведения о коэффициентах диффузии, особенно для многокомпонентных систем и твердых тел, разбросаны в научной литературе и концентрированно не приводятся. Сведения для однокомпонентных (самодиффузия) и бинарных жидких и газовых смесей см. [5–7, 9, 19 и др.], для некоторых веществ в твердых телах см. [15, 21 и др].

причем пропускная способность составляет

$$\frac{M}{\Delta C} = \frac{2\pi D_M}{\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}}. \quad (6)$$

Написание результирующих соотношений для других случаев (по аналогии с кондуктивным теплопереносом) — очевидно.

Соотношения типа (10.5), (10.6) получены (или записаны) в предположении о постоянстве коэффициента диффузии, т.е. его независимости от уровня концентраций. Это часто справедливо для прослоек газов и жидкостей ( $D_d \approx \text{const}$ ), но далеко не всегда для капиллярно-пористых твердых тел. При заметной зависимости  $D_M$  от  $C$  надо для приближенных оценок пользоваться усредненными значениями коэффициентов диффузии, а для более точных расчетов (при известной зависимости  $D_M$  от  $C$ ) — численными методами расчета (см. заключительный абзац разд.6.3.1).

Закон Фика в форме (10.2) достаточно хорошо работает при умеренных значениях градиентов температур и давлений. При высоких  $\partial t/\partial n$  и  $\partial p/\partial n$  его приходится дополнять слагаемыми, отражающими перенос вещества за счет градиента температур — **термодиффузия** и давлений — **бародиффузия**. Обычно это делают в форме, аналогичной переносу вещества за счет градиента концентраций:

$$q_V = -\left(D_d \frac{\partial C}{\partial n} + D_T \frac{\partial t}{\partial n} + D_p \frac{\partial p}{\partial n}\right). \quad (10.2a)$$

Заметим, что вклад термо- и бародиффузии обычно невелик, он становится заметным только при высоких  $\partial t/\partial n$  и  $\partial p/\partial n$ . Устройства, использующие эти эффекты, существуют (например, бародиффузия — в суперцентрифугах).

Наряду с отмеченными эффектами дополнительные диффузионные потоки появляются при наложении на систему поля каких-нибудь внешних сил (например, электрического поля). В этом случае соотношение типа (10.2a) дополняют слагаемыми, учитывающими соответствующие коэффициенты диффузии и градиенты внешних сил.

Детальное рассмотрение термо- и бародиффузии и других подобных эффектов находится за пределами учебника. В нем анализ ведется на основе концентрационной диффузии; это означает, что в основе изложения — закон Фика в форме (10.2) и уравнение Фика в записи (10.4) при  $\kappa = 0$ .

#### 10.4.4. Конвективный массоперенос

Рассмотрим **массоотдачу** — перенос вещества через пограничную пленку *нормально* к поверхности раздела фаз. **Потоковый** перенос вещества с движущейся фазой вдоль межфазной



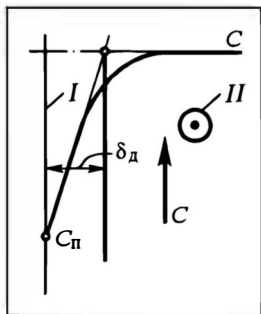


Рис.10.9. К модели диффузионной пограничной пленки:

$I$  — граница раздела фаз,  $II$  — поток жидкости или газа — по нормали к плоскости рисунка

границы (его тоже именуют конвективным) будем изучать отдельно или совместно с диффузией и конвекцией в разделах, посвященных **массообмену**. Подход к анализу массоотдачи ведем в соответствии с концепцией диффузионной пограничной пленки — аналогичные подходы к переносу теплоты изло-

жены в разд.6.4.1.

На рис. 10.9 изображено изменение концентрации вещества  $C$  в одной из фаз (явления в другой фазе пока не рассматриваются; взаимодействие фаз — предмет **массопередачи**). Прилегающая к границе ( $I$ ) фазового раздела область, в которой наблюдается изменение  $C$  нормально к границе, называется **диффузионным пограничным слоем**. Изменение концентрации от значения  $C_п$  на границе до  $C$  в ядре фазы происходит плавно. Для удобства анализа и расчета вводят понятие о *модельной* пограничной пленке с четкими границами и определенной толщиной  $\delta_d$ ; считают, что в этой пленке сосредоточено все изменение концентрации от  $C_п$  до  $C$ , а за пределами пленки (в ядре) концентрация постоянна. Диффузионная пограничная пленка аналогична тепловой (ее толщина  $\delta_T$ ) и ламинарному пристеночному слою ( $\delta_{лн}$ ): во всех этих пленках невелика роль турбулентного переноса (количества движения, теплоты, вещества), доминирует вклад молекулярного переноса — вязкость, кондукция, а в изучаемых здесь явлениях — диффузия. В общем случае толщина диффузионной пленки  $\delta_d$  не совпадает с  $\delta_{лн}$  и  $\delta_T$ ; количественная оценка связи между ними дана в разд. 6.4.2. Разумеется, значения  $\delta_d$  (как и  $\delta_T$ ) за редким исключением (течение тонких пленок, например) не известны, эти величины имеют модельный смысл и могут быть использованы для качественной оценки ситуации.

Малая толщина пограничной пленки часто позволяет отвлечься от ее возможной кривизны и считать пленку *плоской*, а концентрационный профиль в пленке — линейным. Это означает, что поток вещества через пленку можно рассматривать как диффузионный перенос (массопроводность) через плоскую прослойку (газовую, жидкостную) с характерным коэффициентом диффузии  $D_d$ . Такой перенос описывается выражением (10.5). Однако неопределенность в значении  $\delta_d$  не позволяет

прямо воспользоваться им для расчета  $M$ . Поэтому вводят (как и при переносе теплоты) понятие о коэффициенте массоотдачи и записывают формулу для  $M$  в форме (10.3). Сопоставление выражений для  $M$  (10.3) и (10.5)

$$(D_d/\delta_d)F\Delta C = \beta F\Delta C \quad (\text{в})$$

приводит к модельному соотношению (оно записано ранее — в разд. 1.3.2)

$$\beta = D_d/\delta_d. \quad (1.13), (10.7)$$

Как и для коэффициента теплоотдачи  $\alpha$ , это выражение не является расчетным, но оно позволяет качественно анализировать процесс массоотдачи. В частности, ясно, что для интенсификации конвективного массопереноса надо включить факторы, уменьшающие толщину пограничной пленки  $\delta_d$ , например за счет повышения скорости движения фазы относительно межфазной границы.

В разделе 1.8.4 путем масштабных преобразований соотношения типа (в) или выражения (1.13), (10.7) было получено безразмерное число Шервуда  $Sh \equiv \beta l/D_d$ , где  $l$  — определяющий линейный размер (в случае шара или цилиндра — диаметр  $d$ ). Физический смысл  $Sh$  вытекает из равенства (в): это соотношение потоков вещества *по одну сторону* границы раздела фаз; речь идет *об одном и том же потоке* вещества, но выраженном в терминах конвекции и диффузии.

Значения  $\beta$  определяются из опыта на основе формул типа (10.3) — путем измерения в разных условиях процесса геометрических характеристик, движущей силы и количества переданного вещества. Результаты эксперимента чаще всего представляют в виде критериальных уравнений, формируемых из следующих общих соображений:

- при движении рассматриваемой фазы около границы раздела возникает *ламинарная* пограничная пленка толщиной  $\delta_d$ ;

- толщина  $\delta_d$  определяется значением критерия Рейнольдса  $Re$  — значит, интенсивность массоотдачи будет зависеть от  $Re$ ;

- интенсивность массоотдачи определяется толщиной *диффузионной* пограничной пленки  $\delta_d$  — значит, надо от  $\delta_d$  перейти к  $\delta_d$ ;

- переход от  $\delta_d$  к  $\delta_d$  определяется (это продемонстрировано в разд. 6.4.2) критерием Шмидта  $Sc \equiv \nu/D_d$ , полученным в разд. 1.8.3.

Таким образом, критериальное уравнение, отражающее интенсивность переноса вещества  $Sh$  (а значит, и  $\beta$ ), должно быть представлено в форме

$$Sh = f(Re, Sc, \dots), \quad (10.8)$$

причем  $Re$  устанавливает толщину ламинарной пленки  $\delta_d$ , а  $Sc$  обеспечивает переход от нее к толщине  $\delta_d$ , определяющей ин-

тенсивность массоотдачи:

$$\text{Re} \rightarrow \delta_{\text{и}} \xrightarrow{\text{Sc}} \delta_{\text{д}} \rightarrow \text{Sh}, \beta.$$

Реже для характеристик конвективной массоотдачи используют диффузионный критерий Стантона  $\text{St}_{\text{д}} \equiv \text{Sh}/(\text{Re} \cdot \text{Sc}) \equiv \beta/w$  — см. разд.6.4.2. Эмпирическая формула в этом случае имеет вид

$$\text{St}_{\text{д}} = f(\text{Re}, \text{Sc}, \dots). \quad (10.9)$$

Значения  $\beta$ , входящие в  $\text{Sh}$ , однозначно должны иметь размерность  $[\text{Sh}(D_{\text{д}}/l)] = \text{м}/\text{с}$ , или в полном написании:  $\text{м}^3 \text{В}/[\text{м}^2 \times \text{с} \cdot (\text{м}^3 \text{В}/\text{м}^3)]$ . Вместе с тем в выражения типа (10.3) коэффициент массоотдачи (обозначим его  $\beta'$ ) может входить в другой размерности. Пусть, например,  $M$  выражается в  $\text{кг В}/\text{с}$ , а  $\Delta C$  — в  $(\text{кг В})/(\text{кг ин.})$  — именно в таких единицах часто выражаются концентрации и движущая сила для систем класса 3(2-2)1. Тогда из уравнения массоотдачи

$$M = \beta' F \Delta C \quad (10.3a)$$

$$\text{получаем размерность } [\beta'] = \frac{[M]}{[F][\Delta C]} = \frac{\text{кг В}}{\text{с} \cdot \text{м}^2 (\text{кг В}/\text{кг ин.})} =$$

$$= \frac{\text{кг ин.}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}. \text{ Сравнение размерностей } \beta' \text{ и } \beta \text{ показывает различия в}$$

числителях:  $\text{кг ин.}$  и  $\text{м}^3$  [причем для систем 3(2-2)1 — это  $\text{м}^3$  инерта]. Отсюда вполне очевидно: для рассматриваемой ситуации  $\beta' = \beta \rho$ , где  $\rho$  — плотность инерта. Теперь уравнение массоотдачи, записанное на основе  $\beta$ , находимого из критериальной формулы, примет вид

$$M = \beta \rho F \Delta C. \quad (10.3б)$$

Конкретные эмпирические соотношения для определения  $\text{Sh}$  и  $\beta$  приводятся в литературе\*. Теоретические соотношения удастся получить для весьма ограниченного числа случаев и, как правило, для предельных ситуаций. Так, для шара, используя канву анализа конвективного *теплопереноса* (разд.6.4.5), нетрудно установить минимальное значение числа Шервуда. Для этого следует рассмотреть пограничную пленку (ее диаметр  $d_{\text{пл}}$ ) около шара диаметром  $d$  и уравнять потоки вещества  $M$ , записанные в форме (10.6) как диффузионный ( $d_1 = d$ ,  $d_2 = d_{\text{пл}}$ , коэффициент диффузии  $D_{\text{д}}$ ) и в форме (10.3) — как конвективный (причем  $F = \pi d^2$ ):

$$\frac{2\pi D_{\text{д}} \Delta C}{\frac{1}{d} - \frac{1}{d_{\text{пл}}}} = \beta \pi d^2 \Delta C. \quad (г)$$

\* См. учебники по ПАХТ и массопередаче, например [8, 10, 12, 13, 22, 23], а также учебники и монографии по конкретным технологическим приемам.

Отсюда, аналогично (6.21),

$$\text{Sh} = \frac{\beta d}{D_d} = \frac{2}{1 - \frac{d}{d_{\text{пл}}}}; \quad (\text{д})$$

при неограниченном возрастании толщины (диаметра) пограничной пленки  $d_{\text{пл}} \rightarrow \infty$  (неподвижная среда или сугубо ламинарный режим) получаем  $\text{Sh}_{\min} = 2$ . Реально значение  $d_{\text{пл}}$  конечно, и поэтому  $\text{Sh} > 2$ . При этом толщина ламинарной пленки  $\delta_n$  зависит от  $\text{Re}$ , а переход от  $\delta_n$  к  $\delta_d$  осуществляется с помощью числа  $\text{Sc}$ . В результате, аналогично теплопереносу и в полном соответствии с (10.8),

$$\text{Sh} = \text{Sh}_{\min} + f(\text{Re}, \text{Sc}). \quad (10.8a)$$

Примечательно, что и конкретный вид зависимости полностью, вплоть до численных коэффициентов, совпадает с (6.22a) для теплообмена:

$$\text{Sh} = 2 + a_0 \text{Re}^{1/2} \text{Sc}^{1/3}, \quad (10.86)$$

где  $a_0$  варьируется (по данным разных исследований) в том же диапазоне — от 0,59 до 0,74.

При отсутствии эмпирических уравнений типа (10.8) величину  $\beta$  можно оценить, базирясь на *аналогии конвективного тепло- и массопереноса* (см. разд.6.4.2). Дело в том, что теплообмен изучен для значительно более широкого круга технологических ситуаций, нежели массообмен, так что значения  $\text{Nu}$  и  $\alpha$  доступны (есть эмпирические формулы) чаще, чем  $\text{Sh}$  и  $\beta$ . Воспользуемся равенством (6.156), подставив значения  $\text{St}$  и  $\text{St}_d$ :

$$\text{St} = \text{St}_d, \quad \frac{\alpha}{w_{\text{ср}}} = \frac{\beta}{w}. \quad (\text{д})$$

Отсюда получается формула Льюиса — связь  $\alpha$  и  $\beta$ , позволяющая по известному  $\alpha$  рассчитать  $\beta$ :

$$\beta = \alpha / c_p, \quad \beta_r = \alpha / c. \quad (10.10)$$

Достоверность найденного таким путем  $\beta$  определяется диапазоном условий, в котором рассматриваемая аналогия соблюдается. Установление границ аналогии — самостоятельная проблема.

На практике приходится встречаться с одновременным конвективным массопереносом *нескольких* (“многих”) компонентов к границе раздела фаз или от нее. Здесь в самом общем плане сохраняются подходы и модельные представления (например, о пограничной пленке), удастся сформировать безразмерные критерии для описания конвективного массопереноса. Но диффузия через пограничную пленку и другие явления осложнены здесь *взаимным влиянием компонентов*; учесть это влияние очень сложно. Поэтому при сохранении общих подходов для

определения  $\beta$  (применительно к отдельному компоненту или к их группе) здесь пока чаще всего ограничиваются эмпирическими корреляциями\*.

В литературе встречаются попытки использования “коэффициентов массоотдачи”, отнесенных не к единице поверхности контакта фаз, а к единице объема фазы или даже к единице поперечного сечения аппарата. Такие попытки “обосновывают” недостаточностью сведений о величине поверхности в массообменном устройстве. Излишне говорить, что это уход от физической сущности явлений, фактически — грубая подмена задачи. Эмпирические зависимости, построенные на таких предпосылках, работоспособны лишь в очень узкой области проведенного эксперимента; они не обладают прогнозностью; к практическим рекомендациям здесь следует относиться крайне осторожно. Эти подходы могут быть терпимы лишь на определенной стадии исследования и инженерной практики, пока не разработаны более правомерные подходы и методы расчета (в частности, пока не разработаны достоверные методы определения поверхности контакта). В учебнике использование таких коэффициентов массоотдачи практикуется лишь в единичных случаях.

## 10.5. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕРИАЛЬНОГО БАЛАНСА ДЛЯ ФАЗЫ

При составлении материальных балансов массообменных процессов оперируют количествами и потоками фаз — массовыми, мольными и др. Ниже анализ ведется на примере массовых единиц.

Количества и потоки фаз могут быть выражены:

— для всей смеси (фазы) в целом; это *абсолютные* количества или потоки; они выражаются в ( $\text{кг см.}$ ) и ( $\text{кг см.})/\text{с}$  и чаще всего изменяются в ходе технологического процесса;

— для компонента (или группы компонентов), предпочтительно для того (или тех), количества (потоки) которого не изменяются в ходе процесса (их называют “инертами”); эти *относительные* количества (потоки) выражаются в ( $\text{кг ин.}$ ) и ( $\text{кг ин.})/\text{с}$ .

Для обозначения количеств и потоков фаз обычно используют заглавные буквы латинского алфавита, чаще всего это  $D$ ,  $L$ ,  $G$ ,  $S$ . Иногда символы стремятся обусловить смысловым содержанием (названием потока по-латыни, по-немецки, по-английски). Это не всегда удобно из-за различий в названиях рабочих тел на разных языках и пересечения названий, например:  $L$  — liquid (жидкость, англ.) и  $L$  — Luft (воздух, нем.);  $S$  — solid (твердое, англ.) и  $S$  — solution (раствор, англ.). Кроме того, в процессе могут участвовать две одинаковые фазы, их пришлось бы различать индексами, а последние заняты в других целях. Попытка назначить символику в зависимости от того, отдает фаза переносимый компонент или получает, тоже не может быть одобрена: при описании единого технологического цикла (скажем, абсорбции и десорбции) пришлось бы изменять символику при переходе от одной стадии к другой. По этим причинам:

— в данной общей главе не безразлично обозначение количеств и потоков (будем условливаться о них);

---

\* Вопросы многокомпонентного межфазного переноса см. [5, 13, 23].

Рис. 10.10. К составлению материального баланса по фазе и переносимому компоненту (К и к — контуры)

— в конкретных технологических главах будем придерживаться определенных обозначений.

Количества и потоки некоего компонента записываются как *произведение* количества или потока фазы ( $L$ ,  $D$ ,  $G$  и т.п.) на концентрацию этого компонента ( $x$ ,  $y$ ,  $C$  и т.п.). Это справедливо как для абсолютных, так и для относительных величин, хотя смысл сомножителей — различен. Смысл произведения следует понимать следующим образом.

Применительно к *абсолютным* величинам: каждый кг (или кг/с) фазы *содержит*  $C$  долей кг данного компонента (вещества В);  $G$  кг (или кг/с) фазы переносят в  $G$  раз больше. По размерностям (например, для непрерывных процессов):

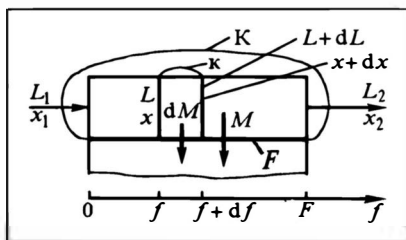
$$G \frac{\text{кг см.}}{с} \cdot C \frac{\text{кг В}}{\text{кг см.}} = GC \frac{\text{кг В}}{с}$$

Применительно к *относительным* величинам: на каждый кг инерта *приходится*  $C$  кг вещества, а этих кг (или кг/с) инерта идет  $G$ ; поэтому количество (поток) вещества будет в  $G$  раз больше. По размерностям (тоже в единицу времени):

$$G \frac{\text{кг ин.}}{с} \cdot C \frac{\text{кг В}}{\text{кг ин.}} = GC \frac{\text{кг В}}{с}$$

Разумеется, *недопустимо* умножать абсолютные потоки на относительные концентрации (как и молярные потоки на массовые концентрации). В ходе материальных балансов нам придется постоянно использовать количества и потоки фаз  $L$ ,  $D$ ,  $G$ , ... и компонентов  $Lx$ ,  $Dy$ ,  $GC$  и т.п.

В составлении материальных балансов реализуем общий подход, изложенный в разд. 1.3.1. На рис. 10.10 изображен фрагмент массообменного аппарата: рабочая зона фазы “х”, потоки  $L$ ; от другой фазы она мысленно отделена поверхностью контакта  $F$ . Станем отсчитывать поверхность слева направо (стрелка на шкале  $f$ ). Положим, что химических превращений (значит, Источников и Стоков вещества) нет и что массообменный процесс — непрерывен. Выберем пространственные контуры — для всей рабочей зоны фазы (К) и для бесконечно малой поверхности контакта (к). Наконец, примем для определенности, что фаза “х” отдает вещество. Материальные балансы (МБ) для абсолютных и относительных величин будут несколько различаться.



### Абсолютные потоки и концентрации.

Для потоков фазы:

$$\begin{aligned}\text{контур К: } L_1 - L_2 - M &= 0, \quad M = L_1 - L_2; \\ \text{контур к: } L - (L + dL) - dM &= 0, \quad dM = -dL.\end{aligned}\quad (10.11)$$

Для потоков компонентов:

$$\begin{aligned}\text{контур К: } L_1x_1 - L_2x_2 - M &= 0, \quad M = L_1x_1 - L_2x_2; \\ \text{контур к: } Lx - [Lx + d(Lx)] - dM &= 0, \quad dM = -d(Lx).\end{aligned}\quad (10.12)$$

### Относительные потоки и концентрации.

Материальный баланс для потоков фазы выражается:

$$\begin{aligned}\text{контур К: } L_1 - L_2 &= 0, \quad L_1 = L_2 \equiv L = \text{const}; \\ \text{контур к: } L - (L + dL) &= 0, \quad dL = 0, \quad L = \text{const}.\end{aligned}\quad (10.13)$$

Для потоков компонента ( $L = \text{const}$ ):

$$\begin{aligned}\text{контур К: } Lx_1 - Lx_2 - M &= 0, \quad M = L(x_1 - x_2); \\ \text{контур к: } Lx - L(x + dx) - dM &= 0, \quad dM = -Ldx.\end{aligned}\quad (10.14)$$

Сопоставление полученных выражений показывает, что при постоянных потоках фаз балансы записываются проще. Поэтому во всех случаях, когда только можно выделить поток, не изменяющийся в ходе процесса, следует пользоваться относительными потоками и концентрациями. Именно с такой ситуацией мы встречаемся в случае систем класса 3(2-2)1, детально рассматриваемых ниже. Исключение составляют некоторые процессы (типа выпаривания), где в силу традиций и удобства выражения некоторых количественных характеристик технологии продолжают использовать абсолютные потоки и концентрации. Заметим также, что в случае двунаправленной диффузии при эквивалентных встречных потоках компонентов (из фазы “х” в “у” и обратно) потоки фаз получаются постоянными при использовании абсолютных величин (с такой ситуацией мы встретимся при изучении процессов ректификации).

В тех случаях, когда фаза содержит  $n$  компонентов, материальный баланс (МБ) по компонентам составляется для каждого из них. Но при представлении состава фазы всегда вводится концентрационное ограничение: сумма концентраций компонентов равна 1 либо один из компонентов принят за 1; поэтому достаточно  $n - 1$  МБ, а для последнего компонента баланс получается по разности (с учетом МБ по фазам). В аспекте массопереноса технологов часто интересует МБ только по переходящему компоненту (компонентам).

## 10.6. МАССОПЕРЕДАЧА И БАЛАНС ДЛЯ ПРОЦЕССОВ КЛАССА 3(2-2)1

### 10.6.1. Массопередача

В соответствии с терминологией, введенной в разд. 10.4.1, под массопередачей понимается межфазный перенос вещества (переходящего компонента) нормально к поверхности контакта.

Иначе говоря, в задачах **массопередачи** вычленены **поверхностные стадии** переноса; при этом не рассматриваются эффекты, связанные с движением фаз *вдоль* поверхности контакта, — эти вопросы анализируются ниже в рамках изучения **массообмена**. Таким образом, предметом изучения здесь должна явиться совокупность двух стадий массоотдачи — последовательный перенос вещества через пограничные пленки, примыкающие к границе раздела фаз.

### *Составление уравнения массопередачи*

В основе анализа и расчета лежит **уравнение массопередачи**, аналогичное уравнению теплопередачи (7.1); для непрерывных процессов оно имеет вид

$$M = kF\Delta. \quad (10.15)$$

Охарактеризуем величины, входящие в (10.15). Пусть речь идет о переносе вещества из фазы “у” в фазу “х” (рабочая область процесса над линией равновесия). Тогда  $M$  — **поток** (в единицу времени) **компонента**, вещества (В), передаваемого из фазы “у” в фазу “х”; примем для определенности, что  $M$  выражается в кг В/с;  $F$  — поверхность контакта фаз ( $m^2$ ). Здесь налицо сходство в описании переноса вещества и теплоты; далее возникают различия. В теплопереносе движущей силой была разность температур теплоносителей, и не возникало вопроса о способе ее выражения:  $\Delta = T - t$ . В массопереносе движущая сила может быть выражена в концентрациях *любой из фаз* — “х” или “у”. Соответственно рис.10.7, в терминах фазы “х”:  $\Delta \equiv \Delta x = x^p - x$ , в терминах фазы “у”:  $\Delta \equiv \Delta y = y - y^p$ . Поэтому и коэффициент массопередачи должен быть выражен в расчете на  $\Delta x$  (это будет  $k_x$ ) или в расчете на  $\Delta y$  ( $k_y$ ). Уравнение массопередачи при этом запишется в терминах (“на языке”) какой-либо одной фазы:

$$M = k_x F \Delta x \quad (10.15x) \quad \text{или} \quad M = k_y F \Delta y. \quad (10.15y)$$

Подчеркнем, что  $x$  и  $y$  (соответственно  $\Delta x$  и  $\Delta y$ ) — величины *разных* размерностей (поскольку они отнесены к *разным инертностям*). Поэтому  $k_x$  и  $k_y$  также имеют разные размерности, причем соотношение размерностей  $k_x$  и  $k_y$  обратнo таковому для  $x$  и  $y$ ,  $\Delta x$  и  $\Delta y$ . Приступая к анализу и расчету, надо предварительно определиться, по какой из фаз их предполагается вести.

Как и при переносе теплоты, важнейшая проблема массопередачи состоит в определении  $k_x$  и/или  $k_y$  по частным коэффициентам массоотдачи  $\beta_x$  и  $\beta_y$ .

### *Двухчленная модель массопередачи*

Для определения  $k_x$ ,  $k_y$  используют **двухчленную модель** — она наглядна и позволяет подойти к определению коэффициентов массопередачи с тех же общих позиций, что были приняты



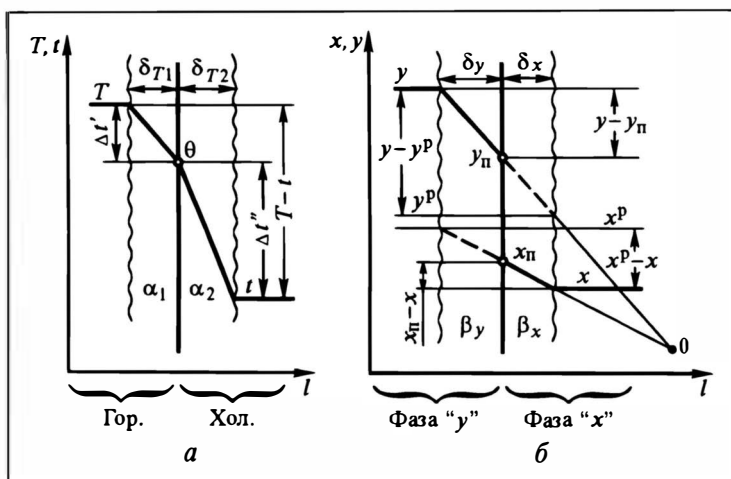


Рис. 10.11. Двухфазная модель контактного переноса теплоты (а) и вещества (б)

ты при рассмотрении теплопередачи (разд.7.3.1). Модельные схемы применительно к переносу теплоты в отсутствие теплопередающей стенки (контактная теплопередача) и вещества представлены на рис.10.11.

На виде (а) изображена модельная схема **контактной теплопередачи**: тепловые пограничные пленки  $\delta_{T1}$  и  $\delta_{T2}$ , коэффициенты теплопередачи  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , частные ( $\Delta t'$  и  $\Delta t''$ ) и полный ( $T - t$ ) температурные напоры. Здесь все соответствует схеме на рис.7.5, только для случая  $\delta_{ct} = 0$ . Важно: температуры  $T$  и  $t$  отсчитываются по *общей* температурной шкале; в ядре потоков температуры теплоносителей различны ( $T$  и  $t$ ); на поверхности контакта температуры *выравнены*:  $T = t = \theta$ . Очевидно, что анализ по канве, принятый в разделе 7.3.1, должен привести к выражению коэффициента теплопередачи (обозначим его здесь  $k_T$ ), аналогичному (7.3), но при  $\delta_{ct} = 0$ :

$$k_T = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}}, \quad \frac{1}{k_T} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}. \quad (7.3в)$$

На виде (б) изображена модельная схема **контактной массопередачи**: диффузионные пограничные пленки  $\delta_x$  и  $\delta_y$ , коэффициенты массоотдачи  $\beta_x$  и  $\beta_y$ , **частные** концентрационные напоры  $\Delta x' = x_p - x$  и  $\Delta y' = y - y_p$  и **полные** — *разные для разных фаз*:  $\Delta x = x^p - x$  и  $\Delta y = y - y^p$ . Важно: в отличие от теплопереноса, здесь концентрационные шкалы *не совпадают* (по масштабам и численным значениям концентраций); на границе

фазового контакта концентрации  $x_{\text{п}}$  и  $y_{\text{п}}$  не равны, а равновесны. Если воспользоваться понятием коэффициента распределения  $m \equiv (y/x)^p$ , то в условиях равновесия  $m = y_{\text{п}}/x_{\text{п}} = y/x^p = y^p/x$  (эти равенства иллюстрируются на рисунке подобными треугольниками). При этом смысл и взаимозависимость величин  $x$ ,  $y$ ,  $x^p$ ,  $y^p$  ясны из рис. 10.7 (в предположении о  $m = \text{const}$ ). В практических задачах массопереноса концентрации  $x$  и  $y$  определены; концентрации  $x_{\text{п}}$  и  $y_{\text{п}}$  важны для понимания модели и механизма массопереноса, в технологических расчетах их, как правило, не используют.

Согласно двухпленочной модели вещество из ядра фазы “у” движется к границе раздела фаз под действием частной разности концентраций  $\Delta y'$  и далее в ядро фазы “х” под действием частного концентрационного напора  $\Delta x'$ . Двухпленочная модель массопереноса базируется на двух основных постулатах:

— все изменение концентраций в пределах каждой из фаз сосредоточено в пограничных пленках, за их границами ( $\delta_x$  и  $\delta_y$  соответственно) концентрации вещества в каждой фазе *выравнены* (см. горизонтальные линии  $x = \text{const}$  и  $y = \text{const}$  на рис. 10.11,б);

— на границе раздела фаз *отсутствует* сопротивление переносу вещества, именно поэтому концентрации  $y_{\text{п}}$  и  $x_{\text{п}}$  — равновесны.

Коэффициенты массопередачи не могут быть представлены (исходя из примитивно понимаемой аналогии с теплопередачей) в форме

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\beta_x} + \frac{1}{\beta_y} \quad (?!). \quad (\text{a})$$

Применительно к системам класса 3(2-2)1, а также ряду других систем,  $\beta_x$  и  $\beta_y$  — величины разных размерностей (они отнесены к движущим силам, базирующимся на разных инертах); для систем с формально одинаковыми размерностями [типа 2(2-2)2, например] формула (а) тоже неправомерна из-за несовпадения понятий равенства и равновесия концентраций: при равенстве концентраций нет равенства химических потенциалов компонента в разных фазах.

По указанным причинам определение коэффициентов массопередачи можно вести по той же канве, что и в случае теплопередачи, но обязательно с учетом отличительных особенностей массопереноса. При этом определению подлежат *оба* коэффициента —  $k_x$  и  $k_y$ , так что анализ придется проводить раздельно — в терминах (на языке) каждой из фаз.

Представим потоки вещества на основе *частных* движущих сил — уравнения массоотдачи:

$$M = \beta_y(y - y_{\text{п}})F, \quad M = \beta_x(x_{\text{п}} - x)F; \quad (\text{б})$$

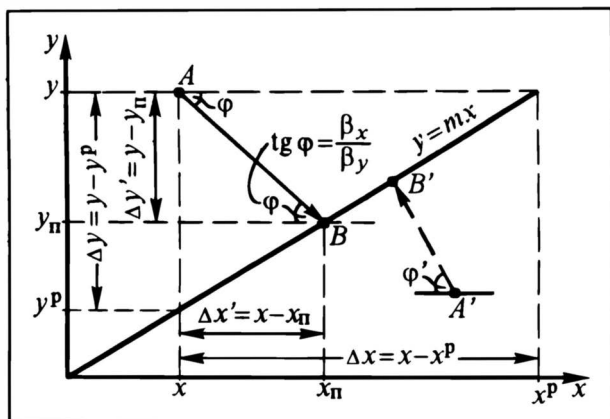


Рис. 10.12. Массоперенос в контексте двухплечной модели

произведения  $\beta_y F$  и  $\beta_x F$  представляют собой пропускные способности стадий поверхностного непрерывного массопереноса (массоотдачи) в фазах "y" и "x" соответственно.

Связи и соотношения между величинами  $y$ ,  $x$ ,  $y_п$ ,  $x_п$ ,  $\beta_y$ ,  $\beta_x$  наглядно высвечиваются при графической интерпретации двух последовательных стадий — массоотдачи в фазах. Пусть контактируют фазы с концентрациями вещества  $y$ ,  $x$  (точка  $A$  на рис. 10.12). Значения  $\beta_y$  и  $\beta_x$  будем считать известными. Тогда точку равновесных концентраций  $B$  легко найти, приравняв правые части выражений (6); после сокращения на  $F$

$$\beta_y(y - y_п) = \beta_x(x_п - x) \quad \text{и} \quad \frac{y - y_п}{x_п - x} = \frac{\beta_x}{\beta_y}. \quad (10.16)$$

Следовательно, при известных точке  $A$  (концентрации  $x$ ,  $y$  заданы) и коэффициентах  $\beta_y$ ,  $\beta_x$  легко найти точку  $B(y_п, x_п)$ , проведя из точки  $A$  прямую:

- под углом  $\varphi$ , тангенс которого (см. рисунок) равен  $\beta_x/\beta_y$ ;
- до пересечения с линией равновесия, поскольку, согласно постулату двухфазной модели, концентрации  $y_п$  и  $x_п$  — равновесны.

Отрезок  $AB$  будем называть **вектором массопередачи**. Он берет свое начало в точке сопряженных концентраций  $A(y, x)$ , всегда направлен к линии равновесия и заканчивается на ней. Вектор ориентирован (см. рис.10.12) под углом  $(\pi - \varphi)$  к положительному направлению оси абсцисс. Все эти подходы пра-

\* О пропускных способностях периодических и полунепрерывных процессов, включающих *временные* характеристики, см. разд.10.14, 10.16.

вомерны и в тех случаях, когда рабочая область расположена под линией равновесия; векторы массопередачи здесь будут изображаться направленными отрезками типа  $A'B'$ . Рассмотренные положения справедливы безотносительно к тому, прямой или кривой является линия равновесия.

### Расчет коэффициентов массопередачи

На базе *полных* движущих сил (они также показаны на рис. 10.12) тот же поток вещества записывается соответственно выражению (10.15):

$$M = k_y(y - y^p)F; \quad M = k_x(x^p - x)F, \quad (в)$$

причем произведения  $k_y F$  и  $k_x F$  представляют собой пропускные способности поверхностной стадии в целом (массопередачи), записанные на языках фаз "у" и "х" соответственно. Здесь *две частные стадии массоотдачи объединены в одну общую стадию массопередачи*, которая может быть представлена в терминах фазы "у" либо фазы "х".

Отвлечемся от возможности изменения коэффициента распределения  $m$  с концентрацией (этот момент важен в аспекте массообмена, но не массопередачи). Определим сначала  $k_y$ , затем  $k_x$ .

**Коэффициент массопередачи на языке фазы "у".** Используем первое из выражений (в). Весь анализ будем вести в терминах фазы "у"; в этих целях избавимся от концентраций фазы "х" во втором из выражений (б):  $x_n = y_n/m$ ,  $x = y^p/m$ . Тогда это выражение переписывается в виде

$$M = \frac{\beta_x}{m} (y_n - y^p)F. \quad (б')$$

Теперь в целях исключения  $y_n$  решим первое из выражений (б) и (б') относительно разностей концентраций и сложим полученные разности:

$$+ \left. \begin{aligned} y - y_n &= \frac{M}{F\beta_y} \\ y_n - y^p &= \frac{M}{F(\beta_x/m)} \end{aligned} \right\} \rightarrow y - y^p \equiv \Delta y = M \left( \frac{1}{\beta_y F} + \frac{1}{\beta_x F/m} \right), \quad (г)$$

откуда

$$M = \frac{1}{\frac{1}{\beta_y F} + \frac{1}{\beta_x F/m}} \Delta y = \frac{1}{\frac{1}{\beta_y} + \frac{1}{\beta_x}} F \Delta y. \quad (д)$$

Сопоставляя (д) с первым из выражений (в), находим

$$k_y F = \frac{1}{\frac{1}{\beta_y F} + \frac{1}{\beta_x F / m}} \text{ и } k_y = \frac{1}{\frac{1}{\beta_y} + \frac{m}{\beta_x}}, \quad \frac{1}{k_y} = \frac{1}{\beta_y} + \frac{m}{\beta_x}. \quad (10.17y)$$

Величина  $\beta_x F / m$ , как и  $\beta_x F$ , представляет собой пропускную способность массоотдачи в фазе "х", но только  $\beta_x F / m$  записано теперь на языке фазы "у", т.е. в размерностях, характерных для этой фазы.

**Коэффициент массопередачи на языке фазы "х".** Определение  $k_x$  ведется аналогичным образом; только замене здесь подлежат концентрации вещества в фазе "у":  $y_{\Pi} = m x_{\Pi}$ ,  $y = m x$ . Первое из выражений (б) при этом принимает вид

$$M = m \beta_y (x^p - x_{\Pi}) F. \quad (6'')$$

Используя (6'') и второе из выражений (б), исключим неизвестное  $x_{\Pi}$ :

$$+ \left. \begin{aligned} x^p - x_{\Pi} &= \frac{M}{m \beta_y F} \\ x_{\Pi} - x &= \frac{M}{\beta_x F} \end{aligned} \right\} \rightarrow x^p - x \equiv \Delta x = M \left( \frac{1}{m \beta_y F} + \frac{1}{\beta_x F} \right), \quad (e)$$

откуда

$$M = \frac{1}{\frac{1}{m \beta_y F} + \frac{1}{\beta_x F}} \Delta x = \frac{1}{\frac{1}{m \beta_y} + \frac{1}{\beta_x}} F \Delta x. \quad (ж)$$

Из сопоставления (ж) со вторым из выражений (в) ясно:

$$k_x F = \frac{1}{\frac{1}{m \beta_y F} + \frac{1}{\beta_x F}} \text{ и } k_x = \frac{1}{\frac{1}{m \beta_y} + \frac{1}{\beta_x}}, \quad \frac{1}{k_x} = \frac{1}{m \beta_y} + \frac{1}{\beta_x}. \quad (10.17x)$$

Величина  $m \beta_y F$ , как и  $\beta_y F$ , выражает пропускную способность массоотдачи в фазе "у", только  $m \beta_y F$  записано на языке фазы "х", в ее характерных размерностях.

Из сопоставления выражений (10.17y) и (10.17x) прямо следует соотношение между коэффициентами массопередачи:

$$k_x / k_y = m; \quad k_x = m k_y, \quad k_y = k_x / m. \quad (з)$$

Полученные выражения для  $k_i$  и  $k_i F$  позволяют провести анализ на лимитирующую стадию. Пусть интенсивность массопереноса (иначе — пропускная способность) в фазе “у” значительно выше, чем в фазе “х”, т.е.  $\beta_y F \gg \beta_x F/m$ , или (что то же самое)  $m\beta_y F \gg \beta_x F$ . Тогда слагаемые  $1/(\beta_y F)$  или  $1/(m\beta_y F)$  в знаменателях формул (10.17) пренебрежимо малы (разумеется, сопоставление можно проводить не только по пропускным способностям, но и по величинам  $\beta_x, \beta_y, m$ ). В этом случае выражения для  $k_i$  упрощаются:  $k_y = \beta_x/m$ ,  $k_x = \beta_x$ . При обратном неравенстве ( $\beta_y F \ll \beta_x F/m$ ) очевидно  $k_y = \beta_y$ ,  $k_x = m\beta_y$ .

Проблема выбора языка, на котором целесообразно вести расчет, вообще говоря, возникает при переходе от массопередачи к массообмену. В случае *прямой* линии равновесия безразлично, язык какой фазы выбрать: здесь нет затруднений с  $m = \text{const}$ . В случае *кривой* равновесной линии ( $m = \text{var}$ ) расчетная ситуация усложняется. Дело в том, что при заменах типа  $y = x^P/m$  и  $y_n = x_n/m$  здесь, строго говоря, надо брать *разные*  $m$ , что не позволяет по приведенной выше канве выразить движущую силу  $y - y^P$ . В этих условиях *теряет определенность* само понятие коэффициента массопередачи. Но других приемлемых инженерных подходов пока нет, поэтому в не очень широких диапазонах концентраций линию равновесия искусственно спрямляют и пользуются неким усредненным (“постоянным”) значением  $m$ . Если же диапазон рабочих концентраций широк, то использование “средних” коэффициентов распределения может привести к ошибкам. Существует ряд рекомендаций о способах усреднения  $m$ ; видимо, наиболее строгий способ состоит в записи уравнений массопереноса для элементарной поверхности контакта  $dF$  с последующим интегрированием (как правило, численным) по всей поверхности  $F$  и нахождением полного потока вещества  $M$ .

Затруднения с  $m = \text{var}$  снимаются при наличии лимитирующей стадии массоотдачи: достаточно вести расчет на языке *той фазы, которая лимитирует массоперенос*. В самом деле, пусть, например, массоперенос лимитируется массоотдачей в фазе “у”. Тогда  $k_y \approx \beta_y$ , поскольку слагаемое  $m/\beta_x$  пренебрежимо мало. Значит,  $m$  не будет входить в расчет, если его вести в терминах фазы “у”.

Линейность равновесия ( $m = \text{const}$ ) и кинетики (независимость  $k_x F$ ,  $k_y F$  от уровня концентраций и движущих сил) создает предпосылки для *аналитического* расчета процессов массообмена, учитывающего продольные потоки фаз и компонентов.

Достоинство двухпленочной модели — в ее относительной простоте. Вместе с тем надо понимать ее *приближенность*, поскольку:

- возможно диффузионное сопротивление на границе раздела фаз;

- возможны нелинейные эффекты даже при линейной кинетике в отдельных фазах (за счет взаимного влияния массоотдачи по разные стороны межфазной границы);

- $\beta_x$  и  $\beta_y$  могут изменяться с уровнем концентраций, так как будут непостоянны  $D_{дх,у}$  (да и  $\delta_{х,у}$ ) и т.д.

### 10.6.2. Материальный баланс аппарата

Общая схема непрерывного массообменного процесса показана на рис. 10.13: фазовые потоки  $D$  и  $L$ , несущие переходящее вещество  $B$ , движутся через аппарат, причем взаимное направление потоков *здесь* для описания процесса несущественно. Входные концентрации вещества (для процессов рассматриваемого класса — *относительные*) обозначим индексом “1”, выходные — индексом “2”. Для определенности принято (см. на рисунке стрелку  $M$ , пересекающую границу раздела фаз), что  $B$  переходит из фазы “у” в фазу “х”, так что  $y_1 > y_2$ ,  $x_2 > x_1$ .

Материальный баланс *по потокам фаз* составлять не станем: очевидно (и это показано в разд. 10.5), что он вырождается в тривиальные равенства типа  $L - L = 0$  и  $L = \text{const}$ .

Материальный баланс (МБ) аппарата *по потокам компонента*  $B$  призван связать концентрации *вне (на концах)* аппарата и потоки фаз. Для составления МБ (применительно к 1 с, так как процесс непрерывный) выделим контуры  $K_1$  и  $K_2$  и поочередно запишем балансы (в отсутствие Источников и Стоков вещества), обозначив поток  $B$  из фазы в фазу символом  $M$ :

$$+ Dy_1 - Dy_2 - M = 0, \quad \text{откуда } M = D(y_1 - y_2); \quad (10.18y)$$

$$+ Lx_1 + M - Lx_2 = 0, \quad \text{откуда } M = L(x_2 - x_1). \quad (10.18x)$$

В этих соотношениях **пропускные способности потоковых стадий** равны  $M/(y_1 - y_2) = D$  и  $M/(x_2 - x_1) = L$ ; заметим, что  $L$  и  $D$  выражены на языках *разных* фаз — в обоих случаях ( $\kappa_2$  ин.)/с, но инерты — разные. При  $m = \text{const}$  пропускные способности одной фазы нетрудно выразить в размерностях другой. Например, от выражения (10.18x) перейдем к записи на языке фазы “у”, подставив  $x_1 = y_1^p/m$  и  $x_2 = y_2^p/m$ :

$$M = L(x_2 - x_1) = L \left( \frac{y_1^p}{m} - \frac{y_2^p}{m} \right) = \frac{L}{m} (y_1^p - y_2^p). \quad (\text{и})$$

Тогда **пропускная способность стадии отвода вещества из аппарата с фазой “х”** будет на языке фазы “у” выражена как  $L/m$ . Соответственно **пропускная способность стадии подвода  $B$  в аппарат с фазой “у”** запишется на языке фазы “х” в форме  $mD$ .

Материальный баланс возможно составить для контура (на рис.10.13 не показан), охватывающего аппарат в целом:

$$+ Dy_1 + Lx_1 - Dy_2 - Lx_2 = 0,$$

откуда

$$D(y_1 - y_2) = L(x_2 - x_1). \quad (10.18)$$

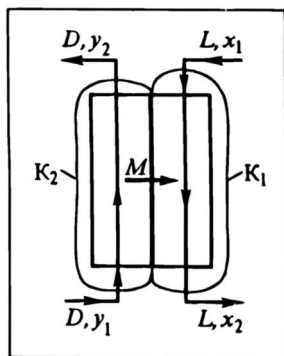
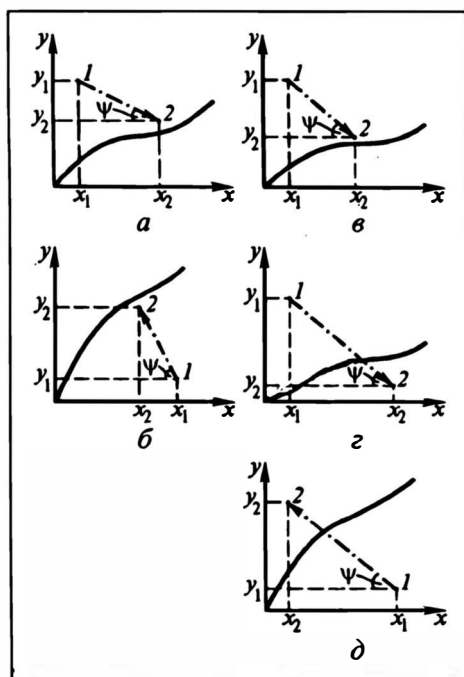


Рис. 10.13. К материальному балансу массообменного аппарата ( $K_1$  и  $K_2$  — контуры)

Рис. 10.14. Балансовые линии массообменного процесса для различных технологических ситуаций:

$a, б$  — прямоток или идеальное перемешивание фаз,  $в$  —  $д$  — противоток фаз;

$a, в, з$  — перенос вещества из фазы "у" в фазу "х",  $б, д$  — перенос вещества из фазы "х" в фазу "у"



В полученное выражение, естественно, не входит поток вещества  $M$  через межфазную поверхность, поскольку эта поверхность не пересекается общим контуром.

Материальные балансы типа (10.18) правомерны не только для систем класса  $3(2-2)_1$ , но и для других классов, если потоки фаз постоянны. Далее увидим, что такие выражения описывают и МБ ряда периодических процессов с постоянным количеством инертов; разумеется, входные и выходные концентрации в этих случаях заменяются на *начальные* и *конечные*.

Баланс (10.18) связывает 6 величин: 2 потока фаз и 4 концентрации, так что по пяти известным величинам можно определить одну неизвестную. В практических задачах часто выделяют целевой поток — очистка или насыщение именно этого потока является целью конкретного технологического процесса. Пусть для определенности здесь — это поток фазы "у"; тогда для него обычно (в задачах проектирования) задан расход (производительность)  $D$ , входная  $y_1$  и выходная  $y_2$  концентрации. В качестве неизвестного выступает поток нецелевой фазы (в принятом примере —  $L$ ) или одна из концентраций  $x_1$  или (чаще)  $x_2$ . Разумеется, при известных  $D, y_1$  и  $y_2$  по (10.18у) легко определить поток переносимого вещества  $M$ .

На рис. 10.14 представлена графическая интерпретация ба-



лансовых соотношений. Эти соотношения, конечно, не зависят от формы кривой равновесия, и на рисунке показан общий случай — кривые равновесные линии. Отрезок 1—2 (показан жирным штрих-пунктиром) будем называть **вектором баланса** [строго говоря, следует рассматривать не отрезок, а только начальную (1) и конечную (2) точки]. Направление вектора баланса определяется из выражения (10.18):

$$\frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1} = \frac{L}{D} . \quad (10.18a)$$

Из графика ясно, что положение отрезка 1—2, т.е. угол  $\psi$ , устанавливается — по (10.18a) — отношением фазовых потоков:  $\operatorname{tg} \psi = L/D$ . Поскольку приращение концентрации в одной фазе сопровождается уменьшением ее в другой, то вектор баланса всегда направлен из точки 1 ( $y_1, x_1$ ) к равновесной линии, причем с осью абсцисс этот вектор составляет тупой угол ( $\pi - \psi$ ).

В случае прямотока и при идеальном перемешивании фаз балансовая линия не может пересекать равновесную (рис. 10.14, а, б); в случае противотока — может (вид з, д), хотя при небольших изменениях концентраций в фазах это не обязательно (вид е).

Построение балансовой линии при известных потоках  $L$  и  $D$ , входных концентрациях  $y_1$  и  $x_1$  и выходной концентрации целевого компонента (в принятом примере —  $y_2$ ) ведется в следующем порядке:

- определяется направление вектора баланса, т.е. тангенс угла  $\psi$  из условия  $\operatorname{tg} \psi = L/D$ ;

- из точки 1 ( $y_1, x_1$ ) проводится прямая под углом  $\psi$  до пересечения с линией конечной концентрации (в принятом примере — с горизонталью  $y_2$ ), фиксируется точка 2;

- на оси  $x$  отсчитывается  $x_2$  — абсцисса точки 2.

Разумеется, можно предварительно найти  $x_2$  из материального баланса (10.18) и построить балансовую линию по точкам ( $y_1, x_1$ ) и ( $y_2, x_2$ ), при этом определится и угол  $\psi$ .

При неизвестном потоке одной из фаз (в примере — нецелевой  $L$ ) и заданных входных и выходных концентрациях сначала строят точки 1 и 2, по ним — балансовую линию, а по ее положению определяют угол  $\psi$ ; далее при известном целевом потоке  $D$  рассчитывают  $L$  из равенства  $\operatorname{tg} \psi = L/D$ . Разумеется, и в этом случае неизвестный поток  $L$  может быть найден непосредственно из баланса (10.18).

Для процессов теплопереноса также может быть построен график с балансовой линией, отвечающей *тепловому* балансу. Этого не было сделано в главе 7

только потому, что при описании теплообмена не принято пользоваться диаграммами  $T - t$ .

Векторы массопередачи и баланса начинаются в точке 1; оба вектора ориентированы от этой точки к линии равновесия под тупым углом к оси абсцисс ( $\pi - \varphi$  и  $\pi - \psi$  соответственно). Подчеркнем, что рассматриваемые векторы характеризуют совсем *разные* стороны явления массопереноса — различать эти стороны совершенно необходимо.

### 10.6.3. Пропускные способности массообменного процесса

Для схемы массопереноса, изображенной на рис. 10.8, характерны четыре стадии. Если две стадии массоотдачи объединить в одну — поверхностную, то процесс можно трактовать как трехстадийный: стадии подвода и отвода вещества с фазами и стадия массопередачи. При этом каждая стадия может быть описана на языке фазы “у” или фазы “х”. В случае линейной равновесной зависимости  $(y/x)^p = m = \text{const}$  переход от одного языка к другому осуществляется с помощью постоянно-го множителя  $m$ , выраженного в

$$\frac{(\kappa_2 B)/(\kappa_2 L)}{(\kappa_2 B)/(\kappa_2 D)} = (\kappa_2 L)/(\kappa_2 D).$$

Как показано в разд. 10.6.1 и 10.6.2, пропускные способности отдельных стадий записываются так:

— в терминах и символах фазы “у”:  $D$  (потокотная стадия),  $k_y F$  (поверхностная);

— в терминах и символах фазы “х”:  $L$  (потокотная стадия),  $k_x F$  (поверхностная).

Для сопоставления и совместного использования потокотных стадий, выраженных на *разных* языках, необходим переход к записи в терминах другой фазы. Так, пропускная способность  $L$  на языке фазы “у” записывается как  $L/m$ , а  $D$  на языке фазы “х” — как  $mD$ . Правомерность такой записи обоснована в разд. 10.6.1 и подтверждается анализом размерностей, например:

$$[L / m] = \frac{\kappa_2 L}{c} \bigg/ \frac{\kappa_2 L}{\kappa_2 D} = \frac{\kappa_2 D}{c}.$$

Переход от символики одной фазы к другой при выражении поверхностной стадии задан выражением (з) в разд. 10.6.1.

Пропускная способность *массообменного процесса в целом* определяется (как и в случае теплообмена) отношением потока  $M$  переносимого (из фазы в фазу) вещества к *входной* разности концентраций. Последняя при записи по фазе “у” равна  $\Delta y_* \equiv$

$\equiv y_1 - y_1^p$ , где  $y_1^p$  — концентрация, равновесная с входной  $x_1$  для фазы “х”. При анализе в терминах фазы “х” входная разность концентраций  $\Delta x_* \equiv x_1^p - x_1$ , где  $x_1^p$  — концентрация, равновесная с  $y_1$ . Пропускная способность массообменного процесса записывается как  $M/\Delta y_*$  или  $M/\Delta x_*$ .

При описании массообмена (как и в случае теплообмена — см. разд. 7.9) удобно использовать *безразмерные комплексы*, представляющие собой отношения пропускных способностей. При выражении этих комплексов будем придерживаться обозначений, введенных в ходе изучения процессов теплопереноса:

— отношения пропускных способностей поверхностной и потоковых стадий:

$$\frac{k_y F}{D} = \frac{k_x F}{mD} \equiv a; \quad \frac{k_x F}{L} = \frac{mk_y F}{L} \equiv b; \quad (10.19)$$

— отношения пропускных способностей потоковых стадий:

$$\frac{L}{mD} \equiv c \text{ и } \frac{mD}{L} \equiv c'. \quad (10.20)$$

Величины  $a$  и  $b$  называют **числами единиц переноса**; в отечественной литературе их обычно обозначают соответственно  $S_y$  и  $S_x$ . Это *безразмерные* критерии, и поэтому численные их значения не зависят от того (при  $m = \text{const}$ , конечно), в терминах какой фазы (через  $k_y$  или  $k_x$ ) они представлены.

При линейном описании процессов удобно оперировать *общим* отношением пропускных способностей — системы в целом и поверхностной стадии. Это отношение может быть записано на языке любой из фаз:

$$r_* \equiv \frac{M}{\Delta y_* k_y F} = \frac{M}{\Delta x_* k_x F}. \quad (10.21)$$

В случае линейных равновесия, кинетики и баланса (для многих процессов класса 3(2-2)1 это характерно или может быть принято с известным приближением) аппарат пропускных способностей — весьма плодотворен. Он позволяет достаточно просто решать некоторые эксплуатационные задачи; кроме того, с его помощью выявляется и обосновывается смысл ряда понятий и соотношений, введенных ранее технологами без обоснования (зачастую — интуитивно) в практику инженерных расчетов.

## 10.7. РАБОЧИЕ ЛИНИИ В АППАРАТЕ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНОГО ПРОЦЕССА КЛАССА 3(2-2)1

Цель массообменного процесса — перенос вещества (В) из фазы в фазу: одна из фаз отдает В, другая его получает. В ходе процесса по мере движения потоков в аппарате вдоль поверхности контакта происходит изменение концентраций В — по-

нижение в отдающей фазе, повышение — в принимающей. Поэтому в разных точках, сечениях аппарата контактируют фазы с разными концентрациями; эти концентрации в точке или сечении контакта называются **сопряженными**.

В разд. 10.6.1 массоперенос рассматривался безотносительно к изменению сопряженных концентраций, так что в уравнении *массопередачи* (10.15) фигурирует движущая сила  $\Delta$  ( $\Delta u$  или  $\Delta x$ ) для некоторой пары сопряженных концентраций ( $y$ ,  $x$ ). Поскольку в процессах *массообмена* сопряженные концентрации изменяются, движущая сила в общем случае также изменяется вдоль поверхности межфазного контакта. Поэтому в уравнениях *массообмена* должна фигурировать **средняя** (по поверхности  $F$ ) **движущая сила**:

$$M = k_x F \Delta x_{\text{ср}}, \quad M = k_y F \Delta y_{\text{ср}}. \quad (10.22)$$

Эти выражения с очевидностью вытекают из уравнений *массообмена* (а по существу — *массопередачи*), записанных для элементарной поверхности  $dF$ :

$$dM = k_x \Delta x dF, \quad dM = k_y \Delta y dF. \quad (10.22a)$$

Интегрирование по поверхности  $F$  при условии постоянства  $k_x$ ,  $k_y$  дает (с использованием теоремы о среднем):

$$M = \int_F k_x \Delta x dF = k_x \int_F \Delta x dF = k_x F \Delta x_{\text{ср}};$$

аналогично:

$$M = \int_F k_y \Delta y dF = k_y F \Delta y_{\text{ср}}.$$

Для определения  $\Delta x_{\text{ср}}$ ,  $\Delta y_{\text{ср}}$  необходимо располагать законом изменения сопряженных концентраций; иногда говорят — определить геометрическое место точек этих концентраций. Зависимость сопряженных концентраций  $y = f(x)$  в рабочем диапазоне их изменения носит название **рабочей линии** процесса. Она выражает материальный баланс по потоку вещества *внутри* массообменного аппарата (напомним, что балансовая линия выражает МБ *на концах* последнего). В отличие от векторов *массопередачи* и баланса рабочая линия направления не имеет.

Определение уравнений рабочих линий, их положения в диаграмме  $y - x$  и построение для различных структурно-конфигурационных комплексов (СКК) и технологических ситуаций является предметом настоящего раздела.

### 10.7.1. Уравнения и положение рабочих линий

Рассмотрим пять наиболее простых вариантов организации массообменного процесса в аппарате: прямоток фаз; противоток фаз (в обоих случаях подразумевается, что потоки движутся в режиме идеального вытеснения), идеальное перемешивание (ИП) только одной фазы — “ $y$ ” или “ $x$ ”; ИП обеих фаз. Для опре-

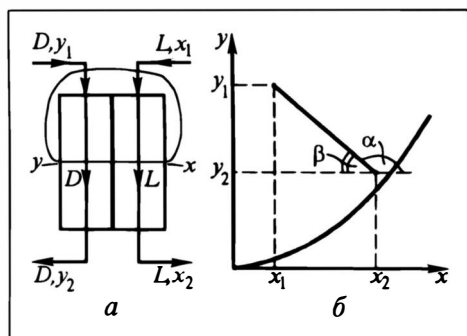


Рис. 10.15. Рабочая линия в случае прямотока фаз:

*a* — расчетная схема, *б* — диаграмма  $y - x$

деленности примем, что вещество переходит из фазы “ $y$ ” в фазу “ $x$ ”, т.е. рабочая область процесса — над линией равновесия.

Уравнение и положение рабочей линии не связаны с формой

линии равновесия; поэтому будем рассматривать общий случай *кривой* равновесной линии (разумеется, все выводы остаются справедливыми и в случае линейного равновесия  $m = \text{const}$ ).

Для всех СКК вывод уравнений рабочих линий базируется на материальном балансе, причем пространственный контур ограничивается сечениями: с текущими значениями сопряженных концентраций; с известными концентрациями на одном из концов аппарата.

**Прямоток фаз.** Расчетная схема показана на рис. 10.15,*a*: оба фазовых потока с известными концентрациями вещества  $y_1$  и  $x_1$  входят в аппарат с одного конца и выходят с другого ( $y_2, x_2$ ). При этом в процессах класса 3(2-2)1, как и для некоторых других классов, потоки фаз  $D$  и  $L$  постоянны. Для установления связи  $y = f(x)$  выделим контур, проходящий через начальное и произвольное сечения; в последнем текущие концентрации равны  $y$  и  $x$ . Запишем МБ по веществу (в отсутствие Источников и Стоков, а также Накопления, поскольку процесс — непрерывный):

$$+Dy_1 + Lx_1 - Dy - Lx = 0, \text{ откуда } y = \frac{Dy_1 + Lx_1}{D} - \frac{L}{D}x. \quad (10.23)$$

При постоянных  $D$  и  $L$  это уравнение *прямой* линии, образующей с осью абсцисс угол  $\alpha$ , причем  $\text{tg} \alpha = -L/D$  (тангенс дополнительного угла  $\beta = \pi - \alpha$  равен  $L/D$ ). Легко убедиться, что прямая проходит через точку с координатами  $(y_1, x_1)$ : положив в (10.23)  $x = x_1$ , получим  $y = y_1$ . Такой результат можно было предвидеть, поскольку в качестве концевой взято сечение контура, характеризуемое концентрациями  $y_1, x_1$ . Отрезок прямой (см. рис. 10.15,*б*) между точками  $(y_1, x_1)$  и  $(y_2, x_2)$  и носит название **рабочей линии**. Легко видеть, что в случае прямотока рабочая линия *совпадает с балансовой*. Рабочая линия не может пересечь равновесную; в самой благоприятной ситуации

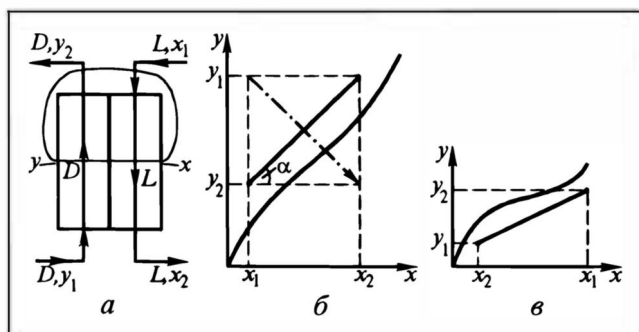


Рис. 10.16. Рабочая линия в случае противотока фаз:  
а — расчетная схема, б, в — диаграммы  $y-x$

(бесконечно большая интенсивность массопереноса —  $kF \rightarrow \infty$ , т.е. контакт фаз — идеальный) рабочая линия заканчивается на линии равновесия, т.е. точка  $(y_2, x_2)$  расположена на ней.

**Противоток фаз.** Расчетная схема показана на рис.10.16,а: потоки фаз с известными концентрациями  $y_1$  и  $x_1$  входят в аппарат с разных концов. При этом потоки  $D$  и  $L$  остаются постоянными в ходе массообмена. Для установления связи текущих сопряженных концентраций выделим, как и в случае прямотока, контур так, чтобы одно из его сечений было произвольным, характеризуемым текущими концентрациями  $y$  и  $x$ . В качестве второго выберем сечение, в котором известны обе концентрации — входная (она известна для любой из фаз) и выходная (обычно задана для целевой фазы); на схеме это  $x_1$  и  $y_2$ , т.е. верхнее сечение аппарата. Если была бы задана концентрация  $x_2$ , а не  $y_2$ , то контур замкнули бы на нижнее сечение.

Для схемы на рис.10.16,а запишем МБ по веществу:

$$+Dy + Lx_1 - Dy_2 - Lx = 0, \text{ откуда } y = \frac{Dy_2 - Lx_1}{D} + \frac{L}{D}x. \quad (10.24)$$

При постоянных  $D$  и  $L$  это уравнение *прямой* линии (см. рис. 10.16,б), проходящей через точку (она соответствует выбранному конечному сечению) с концентрациями  $(y_2, x_1)$ . Прямая наклонена к оси абсцисс под углом  $\alpha$ , причем  $\operatorname{tg} \alpha = L/D$ . Рабочая линия и в этом случае не может пересечь равновесную (хотя балансовая линия — может, она в целых сопоставления показана на рисунке тонким штрих-пунктиром). В предельном гипотетическом случае ( $kF \rightarrow \infty$ ) рабочая линия может закончиться на кривой равновесия.

На рис. 10.16,в показано положение рабочей линии для противоточного процесса при переносе вещества из фазы “ $x$ ” в фазу “ $y$ ”.

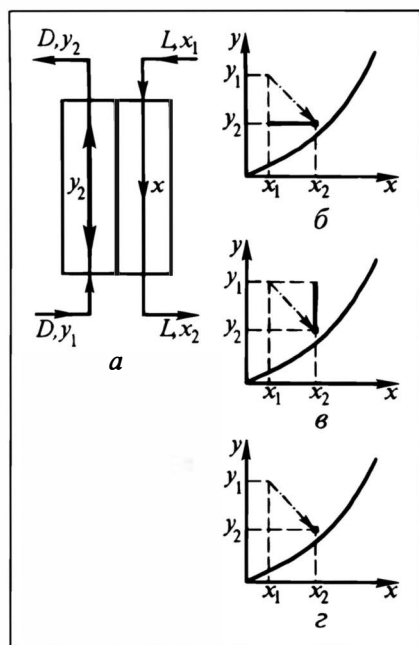


Рис. 10.17. Рабочие линии в случае идеального перемешивания одной или обеих фаз:

$a$  — расчетная схема,  $b$  —  $z$  — диаграммы  $y - x$  для идеального перемешивания фазы  $y$  ( $b$ ), фазы  $x$  ( $v$ ) и обеих фаз ( $z$ )

**Идеальное перемешивание одной или обеих фаз.** На рис. 10.17,  $a$  представлена расчетная схема для движения фазы  $y$  в режиме идеального перемешивания (ИП), а фазы  $x$  — в режиме идеального вытеснения (ИВ). В этом случае (см. гл. 8) концентрация  $y$  выровнена по всей поверхности контакта  $F$  и равна концентрации уходящего компонента в этой фазе  $y_2$ . Следовательно, рабочая линия (жирная сплошная прямая) пойдет (рис. 10.17,  $b$ ) по горизонтали

ли  $y_2 = \text{const}$ ; она будет ограничена концентрациями  $x_1$  и  $x_2$ .

На рис. 10.17,  $v$  изображена рабочая линия в случае ИП потока фазы  $x$  (жирная сплошная линия): это вертикальный отрезок по линии  $x_2 = \text{const}$ , ограниченный концентрациями  $y_1$  и  $y_2$ .

На рис. 10.17,  $z$  представлена ситуация для ИП обеих фаз. В этом случае рабочая линия вырождается в точку с координатами  $(y_2, x_2)$ , поскольку вдоль всей поверхности массообмена концентрации в фазах выровнены и равны соответствующим выходным значениям  $x_2$  и  $y_2$ .

Разумеется, и в этих случаях рабочие линии не могут пересечь равновесную (при ИП обеих фаз рабочая точка не может оказаться ниже линии равновесия для рассматриваемого направления переноса вещества). Лишь в случае идеального контакта фаз ( $kF \rightarrow \infty$ ) рабочая линия заканчивается (рабочая точка при ИП обеих фаз — располагается) на равновесной линии.

С понятием рабочих линий и идеального контакта фаз связана концепция **теоретической ступени** (иногда говорят: **теоретической тарелки**). Под теоретической ступенью понимается контактное устройство, из которого потоки фаз уходят с равновесными концентрациями. В случае прямотока, а также ИП одной или обеих фаз это означает бесконечно интенсивный кон-

такт фаз в аппарате\*, т.е.  $kF \rightarrow \infty$ , так что точка  $(y_2, x_2)$ , соответствующая уходящим концентрациям, лежит на линии равновесия. В случае противотока теоретическая ступень может быть реализована и при конечном значении  $kF$  — этот случай отвечает вектору баланса, заканчивающемуся на линии равновесия. А при векторе баланса, пересекающем эту линию, одностороннее противоточное массообменное устройство при достаточно больших  $kF$  может оказаться даже *эффективнее* теоретической ступени.

Из сопоставления рис. 10.17,б—г с рис.10.15,б и 10.16,б можно видеть, что перемешивание потоков фаз смещает рабочую линию ближе к линии равновесия. Этому сопутствует *понижение движущей силы* массообменного процесса, а значит (при прочих равных условиях) *уменьшение потока  $M$  переносимого компонента*; для сохранения  $M$  придется увеличивать интенсивность массопереноса  $kF$ , например развивая поверхность контакта  $F$ .

### 10.7.2. Построение рабочих линий

Будем и здесь анализировать процесс на примере переноса вещества из фазы “у” в фазу “х”. Рабочая линия связывает 6 переменных: 2 потока ( $D$  и  $L$ ) и 4 концентрации.

Если задано *пять переменных* из шести, то неизвестная величина находится однозначно по уравнению материального баланса (10.18) или по рабочей линии, а она полностью определена уравнениями типа (10.23), (10.24).

Пусть, например, фазы в аппарате движутся противотоком, при этом заданы потоки  $D$ ,  $L$  и три концентрации:  $y_1$ ,  $x_1$  и  $y_2$ . Недостающую концентрацию  $x_2$  найдем одним из следующих способов:

- из баланса (10.18);
- из уравнения (10.24), положив в нем  $y = y_1$ ;
- построением рабочей линии (рис. 10.18,а): через точку  $(y_2, x_1)$  проведем прямую под углом  $\alpha$  так, чтобы  $\operatorname{tg} \alpha = L/D$ , продолжим эту прямую до пересечения с горизонталью  $y_1$  — абсцисса точки пересечения будет равна  $x_2$ .

Пять переменных могут быть заданы таким образом (рис. 10.18,б), что возможно осуществить процесс как с прямотоком (отрезок  $L$ ), так и с противотоком ( $II$ ) фаз. В этом случае балансовая линия, совпадающая с рабочей в случае прямотока, *не пересекает* линию равновесия. Но переменные могут быть заданы и таким образом, что балансовая линия *пересекает* равновесную. В этом случае осуществим *только противоточный* процесс (как это показано на рис. 10.18,а) либо осуществление процесса вообще невозможно (рис. 10.18,в), поскольку заданные условия проведения процесса несовместны.

\* В случае периодического процесса —  $kFt \rightarrow \infty$  (см. разд.10.14).



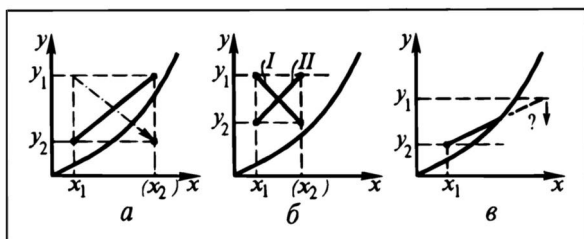


Рис. 10.18. К построению рабочей линии при пяти известных переменных:

*a* — определение концентрации  $x_2$ , *б* — осуществимость прямоточного (I) и противоточного (II) процессов, *в* — неосуществимость процесса

Если заданы *четыре переменные* и есть связывающее их уравнение рабочей линии, то появляется одна степень свободы, и рабочая линия может быть построена по-разному. Чтобы построить конкретную рабочую линию, надо использовать имеющуюся степень свободы — принять значение какой-либо из неизвестных переменных. Это делается с помощью **техно-экономического расчета (ТЭР)**.

ТЭР чаще всего заключается в определении **капитальных затрат** (точнее — амортизационных расходов) и **эксплуатационных затрат** (прежде всего — энергетических). Первые обычно возрастают с ростом поверхности контакта  $F$ , а вторые — с увеличением потоков фаз. При этом возрастанию  $F$  при прочих равных условиях сопутствует, как правило, уменьшение эксплуатационных затрат. Такой характер изменения этих двух видов затрат обуславливает экстремальное изменение **суммарных затрат** с изменением поверхности контакта или фазовых потоков. Поскольку безграничному увеличению  $F$  либо  $L(D)$  отвечают бесконечно большие затраты, то экстремум является **минимумом** при некотором определенном значении  $F$  или потоков  $L$ ,  $D$ . Задача ТЭР состоит в определении **оптимального значения**  $F$  или  $L$  (либо  $D$ ), отвечающего минимуму суммарных затрат. Такого рода оптимизация была продемонстрирована в разд. 2.3.2 (см. рис. 2.19) на примере наивыгоднейшего диаметра трубопровода. Более конкретное воплощение анализ на оптимальные характеристики процесса найдет при изучении ряда отдельных технологических приемов.

Рассмотрим некоторые из типовых ситуаций.

**Прямоток.** Пусть заданы потоки  $D$ ,  $L$  и входные концентрации  $y_1$ ,  $x_1$  — типичная задача **эксплуатации**. Тогда известны точка исходных сопряженных концентраций (см. рис. 10.19, *a*) и наклон рабочей линии (по величине отношения  $L/D$ ). Однако где заканчивается рабочая линия — неизвестно.

Определим сначала предельные варианты. Если поверхность контакта фаз  $kF \rightarrow 0$ , то массообмена не происходит, и рабочая линия вырождается в точку с координатами  $y_1$ ,  $x_1$ ; иначе:  $y_2 = y_1$ ,  $x_2 = x_1$ . Если наоборот —  $kF \rightarrow \infty$ , то будет теоретическая ступень: рабочая линия доходит до равновесной, т.е. точка с координатами  $y_2$ ,  $x_2$  лежит на кривой равновесия. Положение конечной точки ( $y_2$ ,  $x_2$ ) рабочей линии в реальной ситуации  $0 <$

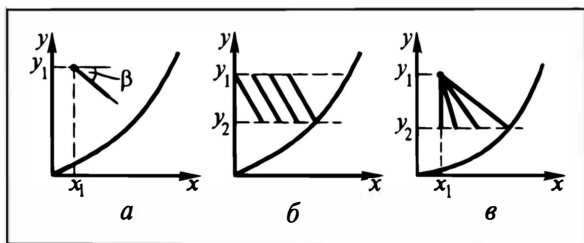


Рис. 10.19. Семейства рабочих линий в случае прямотока фаз (условия процесса см. в тексте)

$< kF < \infty$  зависит от конкретной величины  $k_x F$ ,  $k_y F$  (смотря по какой фазе ведется расчет). В результате получается *семейство* рабочих линий — отрезки разной длины, выходящие из точки  $(y_1, x_1)$  под одним и тем же углом  $\beta$ . При известном\* количестве перенесенного вещества  $M$  с помощью (10.18) отыскиваются  $y_2$  и  $x_2$ , т.е. конечная точка рабочей линии.

Пусть теперь заданы потоки фаз, а также входная и выходная концентрации вещества в одной из них, скажем  $y_1$  и  $y_2$  (см. рис.10.19,б). Это одна из задач *проектирования*. Здесь известен наклон рабочей линии (по отношению  $L/D$ ) и границы изменения концентраций фазы “у”. Семейство рабочих линий представлено параллельными отрезками между горизонталями  $y_1$  и  $y_2$ . При этом крайнему левому положению отвечает чистая фаза “х” на входе в аппарат ( $x_1 = 0$ ), а крайнему правому — равновесие выходных потоков: точка  $(y_2, x_2)$  на линии равновесия, что могло бы быть достигнуто при  $kF \rightarrow \infty$ .

Пусть, наконец, известен поток фазы (например,  $D$ ) и концентрации  $y_1$ ,  $x_1$  и  $y_2$  — тоже задача *проектирования*, именно она встречается чаще всего. Тогда в диаграмме  $y - x$  (рис. 10.19,в) задана точка входных (сопряженных) концентраций  $(y_1, x_1)$  и уровень выходной концентрации  $y_2$ . Семейство рабочих линий будет представлено веером, расходящимся из точки  $(y_1, x_1)$ . Крайнее левое (вертикальное) положение рабочей линии отвечает бесконечному потоку  $L$  ( $\operatorname{tg} \alpha = L/D \rightarrow \infty$ ,  $\alpha \rightarrow \pi/4$ ): при бесконечном потоке фазы изменение концентрации в ней в ходе массообмена не ощущается, так что  $x_2 = x_1$ . Крайнее правое положение характеризуется конечной точкой на линии равновесия: здесь при необходимости выдержать заданное значение  $y_2$  поток фазы  $L$  — минимален; естественно, еще и  $kF \rightarrow \infty$ .

Конкретное (в том числе — оптимальное) положение рабочей линии в рассматриваемых случаях определяется выбором  $F$  (строже —  $kF$ ) и (или)  $L$  либо  $D$ .

\* О подходе к расчету  $M$  в рассматриваемом случае см. разд. 10.9.2.

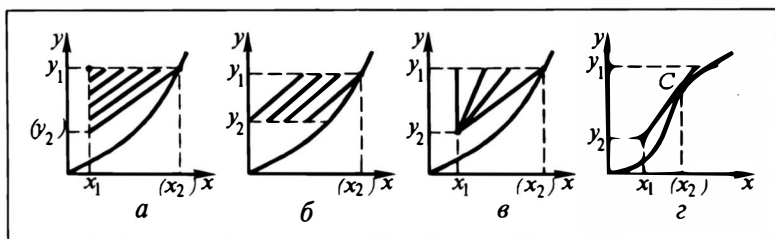


Рис. 10.20. Семейства рабочих линий в случае противотока фаз (условия процесса см. в тексте)

**Противоток.** Пусть, как и в случае прямотока, заданы потоки  $D$ ,  $L$  и начальные концентрации в них  $y_1$ ,  $x_1$  — типичная задача *эксплуатации*. Однако здесь не задана ни одна из сопряженных точек, известны лишь (рис. 10.20,а) вертикальная ( $x_1$ ) и горизонтальная ( $y_1$ ) границы рабочей линии и ее наклон ( $\operatorname{tg} \alpha = L/D$ ). В предельной ситуации  $kF = 0$  рабочая линия тоже вырождается в точку ( $y_1$ ,  $x_1$ ), поскольку массопереноса не происходит и  $x_2 = x_1$ ,  $y_2 = y_1$ . В противоположной ситуации  $kF \rightarrow \infty$ , и точка *на одном из концов* массообменного аппарата ( $y_2$ ,  $x_1$ ) либо ( $y_1$ ,  $x_2$ ) должна находиться на линии равновесия; в рассматриваемом на рис. 10.20,а примере это вторая из названных выше точек. Семейство рабочих линий — параллельные отрезки, ограниченные упомянутыми выше линиями  $y_1 = \text{const}$  и  $x_1 = \text{const}$ . Конкретное положение рабочей линии здесь также определяется величиной  $k_y F$  или  $k_x F$  (в зависимости от того, по какой фазе ведется расчет). При известном\* потоке вещества  $M$  с помощью (10.18) отыскивают  $y_2$  и  $x_2$ , т.е. конечные точки рабочей линии.

Пусть теперь заданы  $D$ ,  $L$  и концентрации целевого потока  $y_1$  и  $y_2$  — одна из задач *проектирования*. Семейство рабочих линий будет представлено также параллельными отрезками с известным углом наклона  $\alpha$  к оси абсцисс ( $\operatorname{tg} \alpha = L/D$ ), заключенными между горизонталями  $y_1$  и  $y_2$  (рис. 10.20,б). Семейство ограничено слева линией, отвечающей чистой нецелевой фазе ( $x_1 = 0$ ), а справа — отрезком, один конец которого находится на линии равновесия (случай  $kF \rightarrow \infty$ ). Какой из концов рабочей линии попадет на равновесную, зависит от конфигурации последней и наклона рабочей линии.

Пусть, наконец, известны поток целевой фазы (например,  $D$ ) и концентрации  $y_1$ ,  $x_1$  и  $y_2$  — наиболее часто встречающаяся *проектная* задача. Тогда заданы точка ( $y_2$ ,  $x_1$ ) и уровень входной концентрации  $y_1$ . Семейством рабочих линий (см. рис. 10.20,в)

\* О подходе к расчету  $M$  в рассматриваемом случае см. разд. 10.9.2.

будет веер, расходящийся из заданной точки. Крайнее левое положение займет вертикаль, отвечающая бесконечному потоку второй фазы  $L \rightarrow \infty$ , иначе:  $L/D \rightarrow \infty$ , так что  $\alpha = \pi/4$ . Крайнее правое положение займет отрезок, оканчивающийся в точке пересечения горизонтали  $y_1$  с линией равновесия; для этой ситуации характерно  $kF \rightarrow \infty$ . Важно, что такое положение рабочей линии отвечает наименьшему возможному углу, значит и **минимальному потоку  $L$** ; при меньшем потоке в заданных условиях понижение  $y$  в диапазоне от  $y_1$  до  $y_2$  невозможно. На практике не исключена такая конфигурация кривой равновесия, при которой минимальный поток  $L$  определяется не точкой пересечения, а *точкой касания* рабочей линии к кривой равновесия (рис. 10.20,з); разумеется, в таком случае условие  $kF \rightarrow \infty$  относится к этой точке касания.

*Оптимальное* положение рабочей линии в рассматриваемых случаях определяется выбором  $F$  (точнее —  $kF$ ) или  $L$  (либо  $D$ ) на основе ТЭР.

Аналогичным образом могут быть проанализированы другие ситуации: с противоположным направлением переноса вещества; с перемешиванием одной или обеих фаз; с иными известными переменными — потоками и концентрациями.

### 10.7.3. Рабочие линии в некоторых специфических случаях

На практике приходится встречаться с ситуациями, когда часть потока одной из фаз (иногда — обеих фаз) движется *вне аппарата* без контакта с другой фазой. В тех случаях, когда часть фазового потока, *выходящего* из аппарата, возвращается и присоединяется к входному потоку этой фазы, говорят о **рецикле** (рис. 10.21,а). Если же часть *исходного* потока фазы минует аппарат и присоединяется далее к уходящему из него потоку этой фазы, то говорят о **байпасе** (см. рис. 10.22,а). Рассмотрим поочередно трансформацию рабочих линий при наложении на процесс рецикла и байпаса на примере противотока фаз.

Пусть *в отсутствие рецикла* рабочая линия занимает (рис. 10.21,б) положение 1. Осуществим **рецикл** фазы “х”, причем исходные концентрации обеих фаз  $y_1$  и  $x_1$  остаются неизменными, выходные  $y_2$  и  $x_2$  (качество продуктов!) — тоже. Однако возврат некоторого количества  $L_{\text{ц}}$  фазы с концентрацией  $x_2$  и его присоединение к исходному потоку  $L$  с концентрацией  $x_1$  приведет к изменению концентрации вещества на входе в аппарат до величины  $x_1'$ . Эта *входная* концентрация определится по правилу рычага: смешиваются потоки  $L$  состава  $x_1$  и  $L_{\text{ц}}$  состава  $x_2$ . Заметим, что операция смешения происходит здесь в пределах фазы “х”, т.е. не на концентрационном уровне  $y_2$ , а

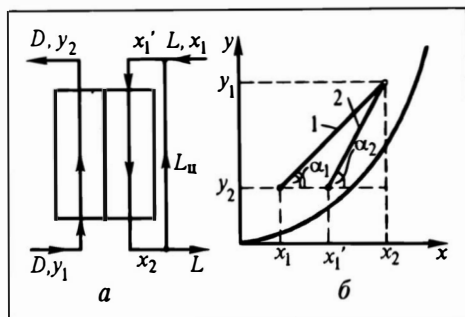


Рис. 10.21. Рецикл фазы (а — схема процесса, б — рабочие линии)

на оси абсцисс. Рабочая линия при сохранении  $x_2$  и наличии рецикла займет положение 2, т.е. пойдет круче, под *большим* углом к оси абсцисс. Это полностью соответствует уравнению рабочих линий: в

отсутствие рецикла  $\operatorname{tg} \alpha_1 = L/D$ , в присутствии —  $\operatorname{tg} \alpha_2 = (L + L_{\text{ц}})/D$ . Из рис. 10.21, б ясно, что доля потока, возвращаемого на рецикл, ограничена предельным значением концентрации  $x_1'$ , получающимся при смешении свежего и возвращаемого потоков: точка сопряженных концентраций ( $y_2, x_1'$ ) не может оказаться правее (ниже) линии равновесия.

Аналогичный подход позволяет проанализировать трансформацию рабочей линии при рецикле другой фазы, а также обеих фаз.

Существенно, что *рецикл* приближает рабочую линию к равновесной кривой, т.е. *сопровождается* *понижением движущей силы* массообменного процесса — значит, и интенсивности процесса в целом. А чтобы в условиях рецикла сохранить эффективность процесса (т.е. необходимое значение выходной концентрации  $y_2$ ), придется увеличивать поверхность контакта фаз (например, путем увеличения габаритов аппарата). И тем не менее возможны технологические ситуации, когда рецикл целесообразен. Чаще всего это связано с плохим межфазным контактом при *малых* потоках одной из фаз или обеих фаз: плохая смачиваемость жидкостью насадки в насадочном или стенки в пленочном аппарате, высокая поперечная неравномерность потока в барботажном аппарате и т.п. Рецикл способствует повышению интенсивности массообмена и поверхности контакта фаз. Нередко с помощью рецикла удастся снизить температурный перепад вдоль аппарата и приблизиться к изотермическому проведению процесса, что может положительно сказаться на его селективности. В общем, при организации рецикла необходимо *сопоставить* его положительное и отрицательное влияние на процесс и оценить эффект в целом. В терминах структуры потоков рецикл представляет собой одно из проявлений обратного перемешивания (не распределенного по длине аппарата, а сосредоточенного).

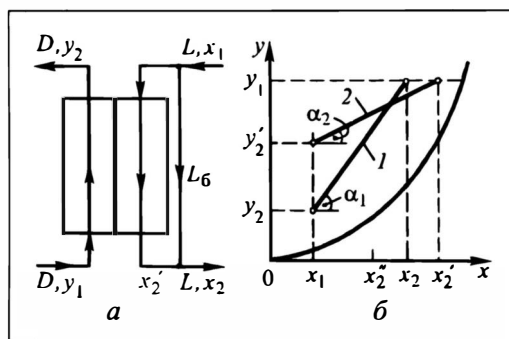


Рис. 10.22. Байпас фазы (а — схема процесса, б — рабочие линии)

Пусть в отсутствие байпаса рабочая линия занимает (рис. 10.22, б) положение 1: выходные концентрации равны  $x_2$  и  $y_2$ . Примем: часть  $L_6$  исходного потока фазы “х” идет мимо массообменного аппарата. Байпасный поток  $L_6$  (концентрация  $x_1$ ) и покидающий аппарат  $L - L_6$  (концентрация  $x_2'$ ) смешиваются. Получается поток  $L$  с концентрацией  $x_2''$  на выходе из системы. При этом  $x_2''$  определяется по правилу рычага.

Рабочая линия 2 процесса с байпасом проходит с меньшим (чем без байпаса) углом наклона к оси абсцисс, поскольку  $(L - L_6)/D < L/D$ . Эта линия, как и раньше, ограничена вертикалью  $x_1$  и горизонталью  $y_1$ . Но уменьшение потока фазы “х” в аппарате сопровождается, согласно материальному балансу типа (10.18), уменьшением потока переданного вещества  $M$ , так как (см. рис. 10.22, б) повышается выходная концентрация фазы “у” и понижается фазы “х”:  $y_2' > y_2$ ;  $x_2'' < x_2$ . Иначе: при появлении байпаса ухудшаются результаты массообменного процесса.

В отличие от рецикла байпас в подавляющем большинстве случаев не используется технологами для управления процессом, а возникает *внутри* (весьма редко — *снаружи*) аппарата самопроизвольно. Причина — крайняя степень поперечной неравномерности потока, появление преимущественных зон движения отдельных фаз; это и есть байпас с нарушением межфазного контакта, уменьшением реальной (“активной”) поверхности массопереноса  $F$ .

Аналогичный подход позволяет проанализировать трансформацию рабочей линии при байпасе другой фазы или обеих фаз. Качественно модель байпаса (в ее простейшей или более сложных модификациях) затронута в главе 8.

Построение рабочих линий 2 в случае рецикла и байпаса является в некотором аспекте формальной операцией: *внешний* (относительно аппарата) поток совместно с внутренним трактуется как целиком *внутренний* относительно системы “аппарат — рецикл (или байпас)”.

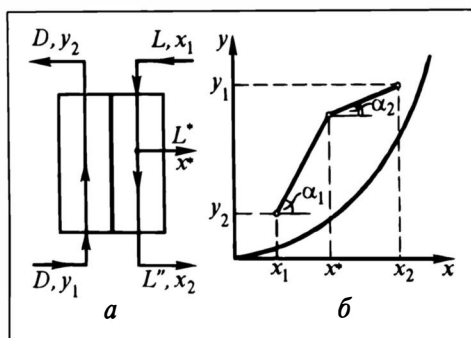


Рис. 10.23. Отвод части потока одной из фаз из промежуточного сечения аппарата (*а* — схема процесса, *б* — рабочие линии)

Самостоятельный интерес представляет построение рабочих линий для процессов с отводом или подводом потока какой-нибудь фазы в произвольное сечение аппарата. Про-

стейшие примеры такой ситуации рассмотрены ниже.

Пусть из промежуточного сечения массообменного аппарата отводится (рис. 10.23, *а*) часть потока  $L^*$  фазы “ $x$ ”; концентрация вещества в этом сечении равна  $x^*$ . Очевидно, для рабочих линий на участках аппарата до и после отвода  $L^*$  характерны разные углы наклона (см. рис. 10.23, *б*): больший  $\alpha_1$  — соответственно отношению  $L/D$  для верхней части аппарата до отвода (это нижняя часть диаграммы  $y - x$ ); меньший  $\alpha_2$  — соответственно  $(L - L^*)/D$  для нижней части аппарата после отвода  $L^*$  (это верхняя часть диаграммы). Сечению отвода  $L^*$  на диаграмме отвечает излом рабочей линии, но не разрыв, так как потоки — приходящий в это сечение и уходящий из него, как и отводимый здесь из аппарата, — имеют одинаковую концентрацию  $x^*$ .

Пусть теперь поток  $L^*$  фазы “ $x$ ” с концентрацией  $x^*$  подается в некоторое промежуточное сечение аппарата (рис. 10.24, *а*). Здесь возможны два случая: в сечении аппарата та же концентрация  $x^*$ , что и в подводимом потоке ( $x^*$ ); в сечении иная концентрация,  $x_* \neq x^*$ .

В первом случае (рис. 10.24, *б*) подход к построению рабочей линии тот же, что и при отводе части фазы из аппарата. До точки подвода (верхней части аппарата отвечает отрезок рабочей линии  $AB$  на нижней диаграмме  $y - x$ ) наклон рабочей линии соответствует отношению  $L/D$  (это меньший угол  $\alpha_1$ ); после этой точки рабочая линия (отрезок  $BC$ ) пойдет под *большим* углом  $\alpha_2$  — соответственно увеличившейся величине дроби  $(L + L^*)/D$ . Абсцисса точки излома  $B$  характеризуется концентрацией  $x^* = x_* = x^*$ .

Во втором случае (рис. 10.24, *в*) остаются справедливыми все рассуждения относительно наклонов рабочих линий — отрезки  $AB$  и  $CD$ . Однако  $x^* \neq x_*$ , поэтому в сечении подпитки потоком  $L^*$  наблюдается *разрыв*  $BC$  рабочих линий — он отвечает сме-

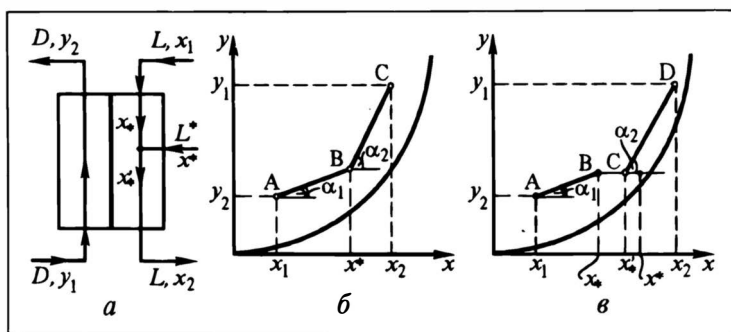


Рис. 10.24. Подвод дополнительного потока одной из фаз в промежуточное сечение аппарата (а — схема процесса, б, в — рабочие линии)

шению (по правилу рычага) потоков фазы “х”:  $L$  и  $L^*$ . При этом концентрации  $x_*$  и  $x_*$  являются сопряженными с одной и той же промежуточной концентрацией вещества в фазе “у” в сечении дополнительного питания.

Концентрация вещества в дополнительном потоке ( $x^*$ ) может оказаться весьма высокой, и тогда при достаточно больших значениях  $L^*$  (точнее — отношения  $L^*/L$ ) точка смеси может оказаться правее (ниже) линии равновесия. Принятое направление массопереноса (напомним: рассматривается перенос вещества из фазы “у” в фазу “х”) запрещает такое положение рабочей линии.

Аналогичный подход позволяет установить положения рабочих линий для различных технологических ситуаций: отвод или подвод в промежуточное сечение аппарата фазы “у” или обеих фаз; отвод или дополнительное питание какой-либо из фаз в нескольких точках; те же ситуации, но при переносе вещества из фазы “х” в фазу “у” и т. д.

Отвод части потока фазы из промежуточного сечения или подвод фазы в такое сечение может трактоваться как простейший вариант разделения одного аппарата на два, для каждого из которых характерно свое соотношение фазовых потоков. В этом аспекте рассмотренные выше ситуации являются *переходными* от работы одного аппарата к работе *сетей*, рассмотренных в разд. 10.11—10.13.

## 10.8. СРЕДНЯЯ ДВИЖУЩАЯ СИЛА ДЛЯ ПРОЦЕССОВ КЛАССА 3(2-2)1

Проблема заключается в определении средней (по поверхности массообмена) движущей силы  $\Delta_{\text{ср}}$  (иначе — среднего концентрационного напора) в *проектных* стационарных задачах



массообмена. Это возможно сделать, поскольку в задачах проектирования заданы: поток целевой фазы, поток второй фазы (известен или найден с помощью ТЭР), входные концентрации вещества в обеих фазах и выходная концентрация в целевой фазе; тогда недостающая концентрация определяется из (10.18), а при известных входных и выходных концентрациях и равновесной зависимости, заданной аналитически или графически, можно определить и среднюю движущую силу.

Общий подход к расчету  $\Delta_{\text{ср}}$  аналогичен продемонстрированному для теплообмена (разд.7.6), однако есть и некоторые отличия. Во-первых, “линия равновесия” в диаграмме  $T - t$  — *прямая* ( $T = t$ ), она выходит из начала координат и идет под углом  $45^\circ$ ; здесь  $\Delta_{\text{ср}}$  выражается аналитически как среднелогарифмическая величина. В случае массообмена равновесная линия может быть *прямой* (тогда также возможен аналитический расчет) и *кривой* — это более общий случай, здесь приходится искать иные методы определения  $\Delta_{\text{ср}}$ . Во-вторых, в случае теплообмена анализ ведется на единственном языке — в терминах температур. В массообмене анализ, а значит и выражение  $\Delta_{\text{ср}}$ , возможен на языке любой из фаз — “у” или “х”. Если рассмотрение кинетики позволяет установить, в какой из фаз массообмен протекает *медленнее*, то анализ предпочтительнее вести *на языке этой фазы*. Это особенно существенно в случае *кривой* линии равновесия: в пограничной пленке упомянутой фазы сосредоточена основная доля концентрационного напора; кроме того, в ряде случаев удастся избежать сложностей, связанных с переменным коэффициентом распределения  $m$ .

Определение средней движущей силы ниже рассматривается для стационарных процессов массопереноса применительно к различным структурно-конфигурационным комплексам. В этих разделах анализ ведется на языке фазы “х” на примере переноса вещества из этой фазы в фазу “у” (рабочая область процесса — *под линией равновесия*).

### 10.8.1. Идеальное перемешивание обеих фаз

На рис. 10.25,а представлена схема массообменного процесса с ИП обеих фаз (место ввода и вывода потоков здесь роли не играет), на рис. 10.25,б — диаграммы  $y - x$ : штриховые линии — векторы массопередачи, штрих-пунктирные — векторы баланса. Диаграмма I иллюстрирует общий случай: линия равновесия — кривая. Точка  $A(y_1, x_1)$  отвечает входным (сопряженным) концентрациям потоков; точка  $B$  — рабочая точка процесса;  $AB$  — вектор баланса (строже здесь следовало бы говорить не об отрезке  $AB$ , а о его крайних точках  $A$  и  $B$ );

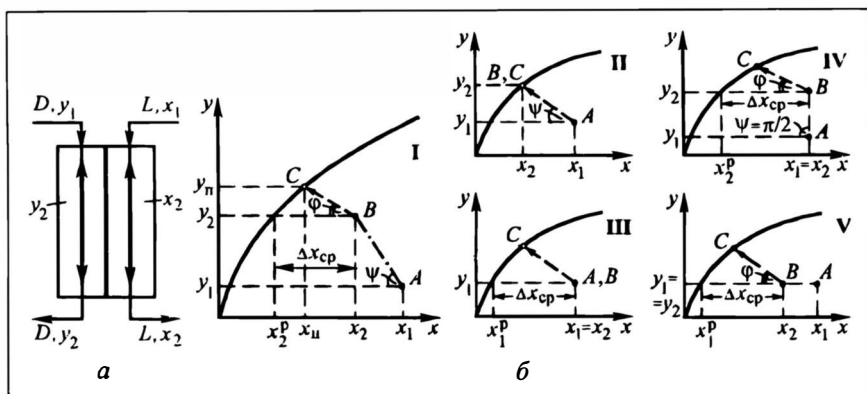


Рис. 10.25. К расчету движущей силы массообмена при идеальном перемешивании обеих фаз:

*a* — расчетная схема, *б* — диаграмма  $y-x$ ;

I — общий случай: смешанная задача массопереноса; II — поверхностная задача; III — потоковая задача; IV — смешанная задача массопереноса при  $L \rightarrow \infty$ ; V — то же при  $D \rightarrow \infty$

$BC$  — вектор массопередачи. Соответственно (10.16)  $\operatorname{tg} \varphi = \beta_x / \beta_y$ , соответственно (10.18a)  $\operatorname{tg} \psi = L/D$ . Подчеркнем, что вдоль всей массообменной поверхности концентрации вещества в каждой из фаз постоянны (ИП!) и равны выходным  $x_2$  и  $y_2$ . Значит, и полная средняя движущая сила равна выходному концентрационному напору  $\Delta x_{cp} = \Delta x_2 = x_2 - x_2^p$ , где  $x_2^p$  равновесно с  $y_2$ . Аналогичным образом определится и  $\Delta y_{cp}$ .

В частном случае, когда пропускная способность поверхностной стадии массообмена значительно больше, нежели потоковых ( $k_x F \gg L$ ,  $k_y F \gg D$ ), точка  $B$  будет находиться на линии равновесия:  $x_2 = x_n = x_2^p$ ,  $y_2 = y_n = y_2^p$  — диаграмма II, поверхностный перенос уже не контролирует процесс — задача становится потоковой. В этом случае массообмен теряет кинетический характер и в определении движущей силы нет необходимости (очевидно,  $\Delta x_{cp} = 0$ ).

В обратном (тоже частном) случае, когда лимитирует поверхностная пропускная способность ( $k_x F \ll L$ ,  $k_y F \ll D$ ), задача является **поверхностной**. Здесь вследствие больших потоков фаз изменение концентраций в них становится малозначимым:  $x_2 = x_1$ ,  $y_2 = y_1$  — диаграмма III. В этом случае  $\Delta x_{cp} = x_1 - x_1^p$ .

Если доминирует поток одной из фаз (например,  $L \gg D$ ), то диаграмма I для общего случая трансформируется в диаграмму IV: точки  $A$  и  $B$  будут на одной вертикали,  $x_2 = x_1$ , так что  $\Delta x_{cp} = x_1 - x_2^p$ . А если, наоборот,  $L \ll D$ , то точки  $A$  и  $B$  будут на одной горизонтали (диаграмма V), и  $\Delta x_{cp}$  выражается общей формулой:  $\Delta x_{cp} = x_2 - x_1^p$ .

### 10.8.2. Прямоточное движение фаз в режиме ИВ

Расчетная схема процесса приведена на рис. 10.26,а, где принято направление координат ( $F$ ,  $x$ ,  $y$ ) снизу вверх. Рабочая (она же — балансовая) линия прямоточного процесса и перемещение вектора массопередачи в ходе этого процесса показаны на рис. 10.26,б. Там же обозначена движущая сила  $\Delta x = x - x^p$  для промежуточного сечения аппарата. Применительно к бесконечно малой поверхности  $dF$  (контур  $k_1$  на виде а) материальный баланс по веществу для фазы “х” имеет вид

$$Lx - dM - L(x + dx) = 0 \quad \text{и} \quad dM = -Ldx. \quad (\text{а})$$

Для зоны движения фазы “х” в целом (контур  $K_1$  на виде а)

$$Lx_1 - M - Lx_2 = 0 \quad \text{и} \quad M = L(x_1 - x_2). \quad (\text{б})$$

Материальные балансы по фазе “у”, записанные для элементарного контура  $k_2$  (пунктир) и зоны движения этой фазы в целом (контур  $K_2$ ), имеют вид

$$Dy + dM - D(y + dy) = 0 \quad \text{и} \quad dM = Dy, \quad (\text{в})$$

$$Dy_1 + M - Dy_2 = 0 \quad \text{и} \quad M = D(y_2 - y_1). \quad (\text{г})$$

Кроме того, надо записать уравнение массопередачи для элементарной  $dF$  и полной  $F$  поверхности межфазного контакта:

$$dM = k_x dF \Delta x \quad \text{и} \quad M = k_x F \Delta x_{\text{ср}}, \quad (\text{д})$$

причем  $\Delta x = x - x^p$ .

Таким образом,

$$dM = -Ldx = Ddy = k_x (x - x^p) dF, \quad (\text{е})$$

$$M = L(x_1 - x_2) = D(y_2 - y_1) = k_x \Delta x_{\text{ср}} F. \quad (\text{ж})$$

Поделим по отдельности фрагменты равенств (е) и (ж) для  $dF$  и  $F$ ; после сокращений (соответственно на  $L$ ,  $D$  и  $k_x$ ) имеем (с учетом знака)

$$\frac{dx}{x_2 - x_1} = \frac{dy}{y_2 - y_1} = \frac{(x - x^p) dF}{\Delta x_{\text{ср}} F}. \quad (\text{з})$$

Способ определения движущей силы на основе выражения (з) зависит от формы равновесной линии.

**Прямая линия равновесия.** Здесь дальнейший анализ сходен с рассмотренным в разд. 7.7.2 для теплопереноса. Надо только последовательно вести его на языке одной из фаз. В этих целях выразим концентрации фазы “у”, входящие в равенство (з), через концентрации фазы “х”:  $y = mx^p$ ,  $y_2 = mx_2^p$ ,  $y_1 = mx_1^p$ . Тогда равенство (з) переписывается (с учетом сокращения на  $m$ ):

$$\frac{dx}{x_2 - x_1} = \frac{dx^p}{x_2^p - x_1^p} = \frac{(x - x^p) dF}{\Delta x_{\text{ср}} F} \equiv \gamma. \quad (\text{и})$$

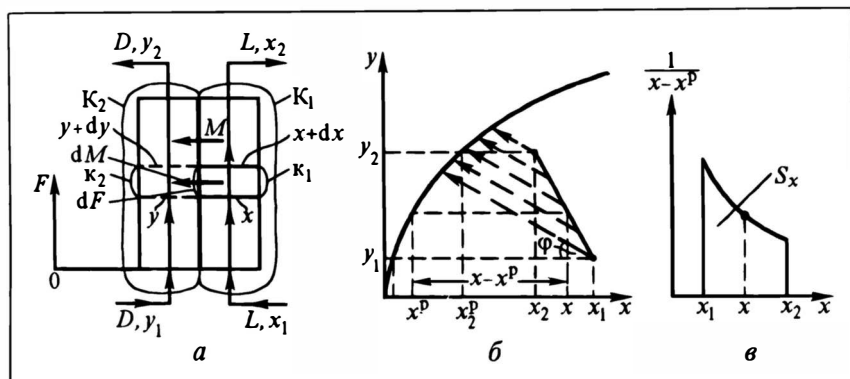


Рис. 10.26. К расчету движущей силы массообмена при прямотоке фаз:  
а — расчетная схема, б — диаграмма  $y-x$ , в — к определению ЧЕП;  $K_1$  и  $K_2$ ,  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  — контуры

Используем один из рассмотренных в главе 7 способов решения. Введем для обозначения отношений символ  $\gamma$ ; тогда

$$\begin{aligned} dx &= \gamma(x_2 - x_1), \quad dx^p = \gamma(x_2^p - x_1^p); \\ dx - dx^p &= d(x - x^p) = \gamma[(x_2 - x_1) - (x_2^p - x_1^p)]. \end{aligned} \quad (\kappa)$$

Группируем слагаемые в квадратной скобке, выражая концентрационные напоры во входном и выходном сечениях:  $x_1 - x_1^p \equiv \Delta x_1$ ,  $x_2 - x_2^p \equiv \Delta x_2$ . Запишем теперь значение  $\gamma = d(x - x^p) / (\Delta x_2 - \Delta x_1)$  и приравняем его последнему слагаемому в (и). После разделения переменных и интегрирования имеем

$$\int_{x_1 - x_1^p}^{x_2 - x_2^p} \frac{d(x - x^p)}{x - x^p} = \frac{\Delta x_2 - \Delta x_1}{\Delta x_{\text{ср}}} \frac{F}{0} \int dF \quad \text{и} \quad \ln \frac{x_2 - x_2^p}{x_1 - x_1^p} = \frac{\Delta x_2 - \Delta x_1}{\Delta x_{\text{ср}}} F. \quad (\lambda)$$

Сокращая на  $F$  и меняя местами разности концентраций, чтобы иметь дело с положительными величинами (при прямотоке  $\Delta x_1 > \Delta x_2$ ), получим в более лаконичной записи

$$\Delta x_{\text{ср}} = \frac{\Delta x_1 - \Delta x_2}{\ln(\Delta x_1 / \Delta x_2)}. \quad (10.26x)$$

Таким образом, **средняя движущая сила массопереноса** в случае *прямой* линии равновесия рассчитывается как **среднелогарифмическая величина** из входного и выходного концентрационных напоров  $\Delta x_1$  и  $\Delta x_2$ .

**Кривая равновесная линия.** В этом общем случае связать  $y$  и  $x$  простым соотношением не удастся, поэтому фрагмент  $dy/(y_2 - y_1)$  из последующего анализа исключают. В оставшемся равенстве (и) разделим переменные и проинтегрируем по всей

поверхности  $F$ :

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x - x^p} = \frac{x_2 - x_1}{\Delta x_{cp}} \int_0^F dF \quad \text{или} \quad \Delta x_{cp} = \frac{x_1 - x_2}{\int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{x - x^p}}. \quad (м)$$

Изменение пределов интегрирования и знака разности ( $x_2 - x_1$ ) вызвано желанием видеть в числителе и знаменателе положительные величины.

Из (м) следует, что интеграл

$$\text{Int} = \int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{x - x^p} = \frac{x_1 - x_2}{\Delta x_{cp}}.$$

Но согласно (з),  $(x_1 - x_2)/\Delta x_{cp} = k_x F/L$  — справа стоит *отношение пропускных способностей поверхностной и потоковой стадий* по фазе “х”. Это отношение в теплопереносе (разд. 7.7.1) для отдельного теплоносителя было обозначено символом  $a$ , сохраним здесь это обозначение. Его называют (см. разд. 10.6.3) **числом единиц переноса ЧЕП** (в данном случае — по фазе “х”) и в учебной и научной литературе обозначают еще  $S_x$ . Для расчета  $a \equiv S_x$  в случае кривой равновесной линии находят значение интеграла  $\text{Int}$  — графически (см. рис.10.26,в) или численными методами. Разумеется, при переносе вещества из фазы “у” в фазу “х” тоже удобно оперировать положительными значениями числителя и знаменателя, поэтому здесь  $S_x \equiv$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x^p - x}.$$

Таким образом, в общем случае (кривая линия равновесия,  $m = \text{var}$ ) среднюю движущую силу определяют из соотношения

$$\Delta x_{cp} = \frac{x_1 - x_2}{S_x}. \quad (10.27x)$$

Разумеется, при линейной связи равновесных  $y$  и  $x$  величину  $\text{Int} = S_x$  можно найти аналитически; в результате получится среднелогарифмическая величина  $\Delta x_{cp}$  по (10.26 x).

Аналогичные преобразования могут быть выполнены на языке фазы “у”. Для *прямой* линии равновесия также получается среднелогарифмическая движущая сила:

$$\Delta y_{cp} = \frac{\Delta y_1 - \Delta y_2}{\ln(\Delta y_1 / \Delta y_2)}; \quad (10.26y)$$

для *криволинейной* равновесной зависимости

$$\Delta y_{cp} = \frac{y_2 - y_1}{S_y}. \quad (10.27y)$$

При этом в случае переноса вещества из фазы “х” в фазу “у” ЧЕП вычисляется как  $S_y = \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{y^p - y}$ , при обратном на-

правлении переноса  $S_y = \int_{y_2}^{y_1} \frac{dy}{y - y^p}$ , а в числителе выражения типа (10.27у) будет разность  $(y_1 - y_2)$ . Физический смысл  $S_y \equiv b$  (см. разд. 7.7.1) определится как *отношение пропускных способностей стадий массопереноса* в терминах фазы “у”:  $S_y = b = k_y F/D$ .

### 10.8.3. Противоточное движение фаз в режиме ИВ

Расчетная схема процесса приведена на рис. 10.27,а; направление отсчета координат ( $F$ ,  $x$ ,  $y$ ) принято снизу вверх. Рабочая линия и перемещающиеся в ходе массообмена векторы массопередачи показаны на рис. 10.27,б. Для бесконечно малой  $dF$  и полной  $F$  поверхности контакта (контуры  $k_1$  и  $K_1$ ) материальные балансы по веществу для фазы “х” записываются так же, как для прямотока; результат — тот же:

$$dM = -Ldx \quad (a); \quad M = L(x_1 - x_2). \quad (б)$$

По фазе “у” есть отличие (при сохранении подхода), поскольку здесь — противоположное направление потока относительно принятой системы отсчета. Для контура  $k_2$  (элементарная поверхность  $dF$ )

$$+D(y + dy) + dM - Dy = 0 \quad \text{и} \quad dM = -Ddy. \quad (н)$$

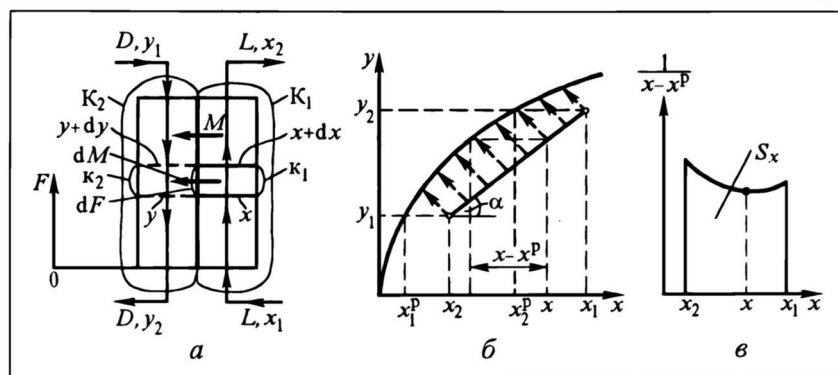


Рис. 10.27. К расчету движущей силы массообмена при противотоке фаз:

а — расчетная схема, б — диаграмма  $y - x$ , в — к определению ЧЕП;  $K_1$  и  $K_2$ ,  $k_1$  и  $k_2$  — контуры

Для зоны движения фазы “у” в целом (контур  $K_2$ ) запись баланса сохраняется; результат:

$$M = D(y_2 - y_1). \quad (г)$$

Уравнения массопередачи и массообмена (е) также сохраняют свой вид. Таким образом, для  $dF$  и  $F$  имеем

$$dM = -Ldx = -Ddy = k_x(x - x^P)dF \quad (о)$$

и аналогично прямоотку

$$M = L(x_1 - x_2) = D(y_2 - y_1) = k_x \Delta x_{cp} F. \quad (ж)$$

Поделим по отдельности фрагменты равенств (о) и (ж); после сокращений (соответственно на  $L$ ,  $D$  и  $k_x$ ) получаем (с учетом знаков)

$$\frac{dx}{x_2 - x_1} = \frac{dy}{y_1 - y_2} = \frac{(x - x^P)dF}{\Delta x_{cp} F}. \quad (п)$$

Далее анализ ведется по той же канве, что и для противотока.

**Прямая линия равновесия.** При  $m = \text{const}$  концентрации фазы “у” выражаются:  $y = mx^P$ ,  $y_1 = mx_1^P$ ,  $y_2 = mx_2^P$ . Тогда равенства (п) после сокращения на  $m$  примут вид

$$\frac{dx}{x_2 - x_1} = \frac{dx^P}{x_1^P - x_2^P} = \frac{(x - x^P)dF}{\Delta x_{cp} F}. \quad (р)$$

Воспользуемся далее (для разнообразия) методом производных пропорций (см. разд. 7.6.2):

$$\frac{dx - dx^P}{(x_2 - x_1) - (x_1^P - x_2^P)} = \frac{(x - x^P)dF}{\Delta x_{cp} F}.$$

Объединяем сумму дифференциалов (числитель в левой части) в дифференциал суммы; группируем знаменатель, вычлняя в нем концевые движущие силы — они формируются иначе, нежели в прямоотке:  $\Delta x_1 \equiv x_1 - x_2^P$  и  $\Delta x_2 \equiv x_2 - x_1^P$ . Тогда

$$\frac{d(x - x^P)}{(x_2 - x_1^P) - (x_1 - x_2^P)} = \frac{(x - x^P)dF}{\Delta x_{cp} F}. \quad (с)$$

После разделения переменных и интегрирования:

$$\int_{x_1 - x_2^P}^{x_2 - x_1^P} \frac{d(x - x^P)}{x - x^P} = \frac{\Delta x_2 - \Delta x_1}{\Delta x_{cp} F} \int_0^F dF \quad \text{и}$$

$$\ln \frac{x_2 - x_1^p}{x_1 - x_2^p} = \frac{(x_2 - x_1^p) - (x_1 - x_2^p)}{\Delta x_{cp}} F. \quad (\Gamma)$$

Сократив на  $F$ , получим выражения для  $\Delta x_{cp}$  в случае противотока (в зависимости от того, что больше —  $\Delta x_1$  или  $\Delta x_2$ ):

$$\Delta x_{cp} = \frac{\Delta x_2 - \Delta x_1}{\ln(\Delta x_2/\Delta x_1)} \quad \text{или} \quad \Delta x_{cp} = \frac{\Delta x_1 - \Delta x_2}{\ln(\Delta x_1/\Delta x_2)}. \quad (10.28x)$$

Таким образом, и при противотоке **средняя движущая сила** в случае *прямой* линии равновесия рассчитывается как **среднегарифмическая величина** из концентрационных напоров на концах аппарата.

В случае  $m = \text{const}$  при противотоке фаз возможна ситуация  $\Delta x_1 = \Delta x_2$  (равновесная и рабочая линии параллельны). Тогда выражение (10.28x) дает *неопределенность*. Ее раскрывают по правилу Лопиталя либо введя параметр  $\varepsilon \equiv (\Delta x_1 - \Delta x_2)/\Delta x_2$ . Тогда (10.28x) можно переписать в виде  $\Delta x_{cp} = \varepsilon \Delta x_2 / \ln(1 + \varepsilon)$ . Очевидно, в рассматриваемой ситуации  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Разлагая  $\ln$  в степенной ряд и ограничиваясь (вследствие  $\varepsilon \ll 1$ ) первым членом разложения  $\ln(1 + \varepsilon) \approx \varepsilon$ , получаем

$$\Delta x_{cp} = \frac{\Delta x_1 - \Delta x_2}{\ln(\Delta x_1/\Delta x_2)} = \frac{\varepsilon \Delta x_2}{\varepsilon} = \Delta x_2 \quad \text{и} \quad \Delta x_{cp} = \Delta x_2 = \Delta x_1 = \Delta x. \quad (10.28a)$$

**Кривая линия равновесия.** В этом общем случае концентрации  $y$  и  $x$  не удастся связать простыми соотношениями, поскольку  $m = \text{var}$ . Поэтому, как и для прямотока, анализ ведут, исключая из рассмотрения в (п) отношение  $dy/(y_1 - y_2)$ . В оставшемся равенстве разделим переменные и проинтегрируем по всей поверхности  $F$  (с учетом того, что по условию  $x_1 > x_2$ , поскольку вещество покидает фазу “х”):

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x - x^p} &= \frac{x_2 - x_1}{\Delta x_{cp}} \frac{F}{F} \int_0^1 dF, & \int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{x_2 - x^p} &= \frac{x_1 - x_2}{\Delta x_{cp}} F \quad \text{и} \quad \Delta x_{cp} = \\ &= \frac{x_1 - x_2}{\int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{x - x^p}}. \end{aligned} \quad (y)$$

Согласно (y) интеграл в знаменателе

$$\text{Int} \equiv \int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{x - x^p} = \frac{x_1 - x_2}{\Delta x_{cp}}.$$

Но из (ж) следует, что  $(x_1 - x_2)/\Delta x_{cp} = k_x F/L$ . Это *отношение пропускных способностей стадий* — поверхностной и потоковой по фазе “х”, — как уже указывалось, именуется **числом единичности**



переноса ЧЕП и обозначается: в учебнике  $a$ , в отечественной литературе обычно  $S_x$ . Способ определения  $S_x \equiv a$  ясен из рис. 10.27, в. С этой символикой средняя движущая сила для общего случая  $m = \text{var}$  запишется:

$$\Delta x_{\text{cp}} = \frac{x_1 - x_2}{S_x}. \quad (10.29x)$$

Разумеется, при  $m = \text{const}$  выражение для  $\text{Int} = S_x$  можно найти аналитически; в результате придем к среднелогарифмической величине  $\Delta x_{\text{cp}}$  по (10.28x).

Аналогичные преобразования могут быть выполнены на языке фазы “у”. В результате получатся **среднелогарифмическая движущая сила** в случае *прямой* линии равновесия:

$$\Delta y_{\text{cp}} = \frac{\Delta y_1 - \Delta y_2}{\ln(\Delta y_1 / \Delta y_2)} \quad \text{или} \quad \Delta y_{\text{cp}} = \frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{\ln(\Delta y_2 / \Delta y_1)} \quad (10.29y)$$

и выражение, подобное (10.27y), в случае *кривой* равновесной линии:

$$\Delta y_{\text{cp}} = \frac{y_2 - y_1}{S_y}. \quad (10.29y)$$

При этом для переноса вещества из фазы “х” в фазу “у” ЧЕП будет вычисляться как

$$S_y = \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{y^p - y} \quad \text{и} \quad S_y = \int_{y_2}^{y_1} \frac{dy}{y - y^p} \quad (\text{для обратного направления переноса}),$$

а в числитель (10.29y) войдет разность  $(y_1 - y_2)$ . Физический смысл ЧЕП тот же, что и в случае прямотока:  $S_y \equiv b = k_y F / D$  — *это отношение пропускных способностей поверхностной и поточковой стадий массообмена.*

Оставшаяся простейшая схема движения фаз — **перекрестный ток** — применительно к отдельному массообменному устройству весьма сложна для анализа. Этот случай затронут в разд. 10.13.

#### 10.8.4. Основные размеры массообменных аппаратов

Определение основных размеров массообменных аппаратов — один из важнейших практических результатов решения *проектных* задач. К таким размерам относятся прежде всего поперечное сечение  $f_a$  и высота  $H$  (либо длина) аппарата.

Нижe рассматриваются *простые* массообменные устройства, в которых фазы движутся стационарно прямотоком или противотоком (в режиме ИВ) либо проходят рабочую зону в режиме ИП. Более сложные системы, состоящие из совокупности простых, т.е. сети аппаратов непрерывного действия, аппараты для периодических и полунепрерывных процессов, для иных СКК рассматриваются в других главах при изложении конкретных технологических приемов.

**Поперечное сечение аппарата  $f_a$ .** Расчет  $f_a$  ведется на базе уравнений расхода (1.17), (1.18):

$$f_a = \frac{G}{\rho w} = \frac{V}{w} . \quad (10.30)$$

*Выбор фазы*, по которой ведется расчет для двухфазного массообменного процесса, прост, если объемный расход одной из фаз  $V_i$  является преобладающим: скажем, в случае  $V_y \gg V_x$  расчет  $f_a$  ведется по объемному расходу  $V_y$ . Ситуация с выбором фазы чаще всего бывает ясной для систем газ (пар) — жидкость и газ (пар) — твердое, когда объемный поток газовой фазы значительно больше, нежели жидкой или твердой, из-за различия в плотностях на 2—3 порядка. Для систем жидкость — жидкость и жидкость — твердое требуется специальный анализ.

Четкие рекомендации к выбору *рабочей скорости*  $w$  расчетной фазы сформулировать вряд ли возможно из-за разнообразия физико-химических, механических и других свойств участвующих в массообмене рабочих тел, а также специфики (конструктивных особенностей, например) рассчитываемых массообменных аппаратов. Поэтому здесь рассматриваются лишь самые общие аспекты.

При *прямотоке* скорость сплошной фазы  $w$  должна быть достаточной для транспортирования дисперсной фазы. Поэтому устанавливается нижний предел скорости  $w_{\min}$ . В случае восходящих транспортных систем (например, пневмотранспортных) такой физической границей является скорость стесненного витания  $w_c$ ; практически для устойчивого транспорта рекомендуется  $w_{\min} \geq 2w_c$ . При *противотоке*, наоборот, скорость сплошной среды обычно ограничивается верхним пределом  $w_{\max}$ , дабы предотвратить унос дисперсной фазы с потоком сплошной, а в ряде случаев — избежать образования и срыва капель со стекающей вниз жидкостной пленки и их уноса газовым потоком. Эти максимальные скорости чаще всего рассчитываются по эмпирическим формулам. В некоторых аппаратах (пленочных и насадочных, например) в качестве  $w_{\max}$  выступает “скорость захлебывания” или “скорость зависания” — они также определяются по эмпирическим соотношениям.

Более сложным является выбор рабочей скорости при противоточном движении фаз для систем с близкими объемными расходами — это обычно системы Ж — Ж и Ж — Т. База расчета для них та же — скорость стесненного витания  $w_c$ . Но для систем с близкими плотностями фаз величина  $w_c$  очень чувствительна к объемной концентрации дисперсной фазы в сплошной среде и потому должна определяться (и выдерживаться в ходе процесса) весьма тщательно.

Встречаются ситуации, когда на скорость  $w$  накладывается несколько ограничений. Так, при работе с псевдооживленной твердой фазой величина  $w$  снизу ограничена скоростью начала псевдооживления, а сверху — скоростью уноса. А для движущегося слоя в случае противотока имеются два ограничения снизу:  $w$  должна быть ниже скорости начала псевдооживления и скорости зависания (чтобы не было псевдооживления и чтобы слой не прекратил своего нисходящего

движения). Здесь приходится определять оба ограничения и выбирать из них более жесткое.

После расчета  $f_a$  находят габаритные размеры сечения: диаметр  $d_a$ , если сечение круглое ( $f_a = \pi d_a^2/4$ ) или длину  $l$  и ширину  $b$  (скажем, в случае прямоугольного сечения  $f_a = bl$ ).

**Высота простого массообменного устройства  $H$ .** Расчет  $H$  для процессов, протекающих в условиях *поверхностной* или *смешанной* задачи, проводится по предварительно найденной величине поверхности межфазного контакта  $F$ . В основе расчета — уравнение массообмена (10.22) с известными значениями  $M$  и  $\Delta x_{cp}$ ,  $\Delta y_{cp}$ :

$$M = k_x F \Delta x_{cp} = k_y F \Delta y_{cp}, \text{ откуда } F = \frac{M}{k_x \Delta x_{cp}} = \frac{M}{k_y \Delta y_{cp}}; \quad (10.31)$$

при этом  $M$  найдено из уравнений материального баланса (10.18).

Далее должна быть установлена связь найденного  $F$  и искомого  $H$  — в зависимости от конструкции массообменного устройства. Например, для *плёночных устройств* в виде  $n$  параллельных труб, по внутренней поверхности которых течет пленка жидкости толщиной  $\delta$ , а вдоль оси движется газ:

$$F = \pi n (d_{\text{вн}} - 2\delta) H. \quad (\Phi)$$

Для *насадочного аппарата* с удельной поверхностью насадки  $F_{уд}$ :

$$F = F_{уд} f_a H, \quad (x)$$

причем поперечное сечение  $f_a$  уже рассчитано (см. выше), а значение  $F_{уд}$  взято по справочной литературе в зависимости от типоразмера насадки.

В проектной практике высоту рабочей зоны  $H$  часто определяют по *высоте единицы переноса*. Суть метода проиллюстрируем на примере насадочного аппарата в терминах фазы “х”, последовательно подставляя значения  $H$ ,  $F$ ,  $M$  и  $\Delta x_{cp}$  по (x), (10.31), (10.18x) и (10.27x):

$$H = \frac{F}{F_{уд} f_a} = \frac{M}{k_x \Delta x_{cp} F_{уд} f_a} = \frac{MS_x}{k_x (x_1 - x_2) F_{уд} f_a} = \frac{L(x_1 - x_2) S_x}{k_x (x_1 - x_2) F_{уд} f_a}.$$

Окончательно:

$$H = \frac{L}{k_x F_{уд} f_a} S_x. \quad (10.32)$$

К (10.32) можно также прийти, последовательно расшифровывая смысл  $S_x \equiv \equiv k_x F/L$ .

Комплекс  $L/(k_x F_{уд} f_a)$  получил название **высоты единицы переноса** (ВЕП); из (10.32) ясно, что он равен  $H/S_x$  (отсюда и название комплекса). Рассчитав по эмпирическим формулам этот комплекс (через  $k_x$  или по отдельным соотношениям — они приводятся в литературе) и определив (см. разд.10.8.3) значение  $S_x$ , находим  $H$  по (10.32).

Из приведенного должно быть ясно, что “метод ВЕП” *не является отдельным методом расчета  $H$* . По существу это — вариант расчета с помощью уравнения массообмена, видимо, вариант менее удачный, поскольку в ВЕП “спрятан” ряд физически ясных характеристик процесса.

В случае *поточковой (балансовой)* задачи величина  $F$ , а с ней и  $H$ , роли не играет; высота рабочей зоны выбирается здесь из конструктивных соображений. Надо только в ходе проектирования (конструирования) устройства взять *достаточные* значения  $H$  и  $F$ , поскольку при чрезмерно малых их значениях задача перестанет быть поточковой.

Некоторые общие оценки расчета и выбора  $H$  применительно к составным противоточным аппаратам (сетям, цепям аппаратов) даны в разд. 10.12.

## 10.9. ПОТОК ВЕЩЕСТВА В ПРОЦЕССАХ КЛАССА 3(2-2)1

В *эксплуатационных* задачах рассматривается готовый аппарат с известными габаритами. Здесь считаются известными:

- потоки фаз;
- концентрации вещества в фазовых потоках на входе в аппарат;
- поверхность межфазного контакта\*  $F$ ;
- коэффициент массопередачи.

Определению подлежат поток  $M$  переносимого вещества и его концентрации в фазах на выходе из аппарата.

Уравнение (10.22) в задачах эксплуатации остается, конечно, справедливым, но воспользоваться им напрямую для расчета  $M$  нельзя, так как невозможно определить  $\Delta x_{\text{ср}}$ , поскольку не известны выходные концентрации.

В случае *линейного* описания всех составляющих массопереноса (прежде всего — *равновесия*, остальные составляющие обычно принимают линейными) задачу относительно  $M$  удается решить прямо, базируясь на *входных* концентрациях фаз для любых СКК. В случае *кривой* линии равновесия задачу определения  $M$  приходится, как правило, решать как обратную, сводя ее к *проектной*. По существу это метод подбора: задаемся положением рабочей линии, решаем задачу проектирования с определением поверхности контакта  $F$ , сравниваем найденные  $F$  с заданными по условию задачи. При совпадении этих  $F$  задача считается решенной, в противном случае подбор положения рабочей линии продолжается до совпадения. Зная  $F$ , нахо-

---

\* Поверхность контакта зависит от конструкции и параметров работы аппарата, точно она может быть неизвестна. Сегодня проблему  $F$  зачастую приходится решать на эмпирическом уровне.

дим  $M$  по (10.22), а после определения  $M$  легко будет по уравнениям материального баланса (10.18) найти *выходные* концентрации  $x_2$  и  $y_2$ .

Ниже рассмотрены некоторые простые технологические ситуации. Как и при определении средней движущей силы, анализ ведется в терминах фазы "х" для переноса вещества из нее в фазу "у".

### 10.9.1. Идеальное перемешивание обеих фаз

Расчетная схема процесса представлена на рис. 10.25. Концентрации вещества в каждой из обеих фаз выравнены вдоль поверхности фазного контакта и равны  $x_2$  и  $y_2$ ; последние неизвестны — их надо в ходе анализа исключить из конечных (расчетных) выражений. Это удастся сделать, если линия равновесия — *прямая*,  $y = mx^p$ .

Выразим в терминах и символах фазы "х" потоки вещества  $M$  через пропускные способности:

$$\begin{aligned} M &= L(x_1 - x_2); \quad M = k_x F(x_2 - x_2^p); \\ M &= D(y_2 - y_1) = mD(x_2^p - x_1^p). \end{aligned} \quad (a)$$

Чтобы исключить конечные концентрации, решим равенства (а) относительно частных разностей концентраций и сложим эти разности:

$$\left. \begin{aligned} x_1 - x_2 &= \frac{M}{L} \\ + x_2 - x_2^p &= \frac{M}{k_x F} \\ x_2^p - x_1^p &= \frac{M}{mD} \end{aligned} \right\} \rightarrow x_1 - x_1^p = M \left( \frac{1}{L} + \frac{1}{k_x F} + \frac{1}{mD} \right).$$

Отсюда получается выражение для искомого потока вещества:

$$M = \frac{x_1 - x_1^p}{\frac{1}{L} + \frac{1}{k_x F} + \frac{1}{mD}}. \quad (10.33)$$

Эта формула может быть записана и более детально, если выразить  $k_x F$  по (10.17х) через  $\beta_x F$  и  $\beta_y F$ :

$$M = \frac{x_1 - x_1^p}{\frac{1}{L} + \frac{1}{\beta_x F} + \frac{1}{m\beta_y F} + \frac{1}{mD}}. \quad (10.33a)$$

Аналогичный подход позволяет получить расчетное выражение для  $M$  в терминах и символах фазы "у":

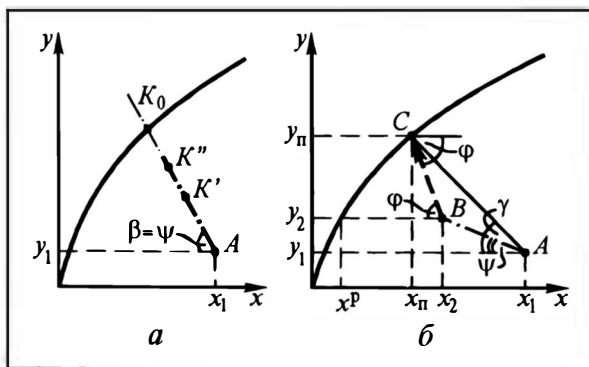


Рис. 10.28. К решению задачи эксплуатации при идеальном перемешивании фаз или их прямого тока:

*а* — метод подбора, *б* — прямое решение

$$M = \frac{y_1^P - y_1}{\frac{1}{L/m} + \frac{1}{k_y F} + \frac{1}{D}} = \frac{y_1^P - y_1}{\frac{m}{L} + \frac{m}{\beta_x F} + \frac{1}{\beta_y F} + \frac{1}{D}}. \quad (10.336)$$

В случае *кривой* линии равновесия возникают упомянутые в начале раздела 10.9 трудности в определении  $M$ . Если следовать общему подходу к их разрешению, надо придерживаться такой последовательности действий (рис. 10.28, *а*):

- на балансовой линии (ее начальная точка  $A$  и угол наклона  $\psi$ , определяемый отношением  $L/D$ , — известны) выбирается некая точка  $K'$ ;
- эта точка принимается за рабочую  $K'(y_2', x_2')$ ;
- решается задача проектирования на базе  $K'$ , т.е. определяется  $\Delta x_{ср}' = \Delta x_2'$  и рассчитывается  $F'$ ;
- найденное  $F'$  сравнивается с заданным  $F$ ; при их недопустимом расхождении выбирается новая рабочая точка  $K''$  — и т.д. до совпадения  $F^{(i)}$  и  $F$ .

Для процессов с идеальным перемешиванием фаз (только в этом случае) можно избежать итеративной процедуры, присущей обратным задачам, и решить задачу прямо даже при нелинейном равновесии. С этой целью выпишем, подобно (*а*), но более подробно, выражения для  $M$ :

$$\begin{aligned} M &= L(x_1 - x_2); \quad M = \beta_x F(x_2 - x_n); \\ M &= \beta_y F(y_n - y_2); \quad M = D(y_2 - y_1); \end{aligned} \quad (б)$$

здесь  $x_n$  и  $y_n$  — равновесные концентрации на границе раздела фаз (см. разд. 10.6.1 — постулаты двухплечной модели).

Исключим конечные концентрации  $x_2$  и  $y_2$  — они неизвестны:

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 = \frac{M}{L} & & y_2 - y_1 = \frac{M}{D} \\ + & & + \\ x_2 - x_{\Pi} = \frac{M}{\beta_x F} & & y_{\Pi} - y_2 = \frac{M}{\beta_y F} \\ \hline x_1 - x_{\Pi} = M \left( \frac{1}{L} + \frac{1}{\beta_x F} \right) & & y_{\Pi} - y_1 = M \left( \frac{1}{D} + \frac{1}{\beta_y F} \right) \end{array} \quad (\text{в})$$

Отсюда

$$\frac{y_{\Pi} - y_1}{x_1 - x_{\Pi}} = \frac{\frac{1}{D} + \frac{1}{\beta_y F}}{\frac{1}{L} + \frac{1}{\beta_x F}}. \quad (\text{г})$$

Легко видеть (рис. 10.28,б), что в диаграмме  $y - x$  соотношение (г) выражает отрезок прямой от начальной точки  $A(y_1, x_1)$  до линии равновесия — точка  $C(y_{\Pi}, x_{\Pi})$ , причем тангенс угла наклона  $\gamma$  отрезка  $AC$  равен

$$\text{tg} \gamma = \frac{\frac{1}{D} + \frac{1}{\beta_y F}}{\frac{1}{L} + \frac{1}{\beta_x F}}. \quad (\text{д})$$

Заметим, что в случае *поверхностной* задачи, когда  $\beta_y F \ll D$  и  $\beta_x F \ll L$ , первые слагаемые в числителе и знаменателе правой части пропадают, и выражение (г) трансформируется в (10.16), а  $\gamma = \varphi$ . В случае *поточковой* задачи, когда  $\beta_y F \gg D$  и  $\beta_x F \gg L$ , пропадают вторые слагаемые, и выражение (г) переходит в (10.18а), а  $\gamma = \psi$ .

Способ определения *рабочей* точки  $B$  иллюстрируется на рис. 10.28,б:

— из начальной точки  $A(y_1, x_1)$  проводится прямая под углом  $\gamma$  [в задаче эксплуатации все величины в правой части (г), (д) — заданы];

— отыскивается точка пересечения этой прямой с линией равновесия  $C(y_{\Pi}, x_{\Pi})$ ;

— из точки  $A$  проводится балансовая линия под углом  $\psi$ , так что  $\text{tg} \psi = L/D$ ;

— из точки  $C$  проводится линия массопередачи под углом  $\varphi$ , так что  $\text{tg} \varphi = \beta_x / \beta_y$ ;

— определяется точка пересечения двух последних прямых — точка  $B(y_2, x_2)$ .

Точка  $B$  является рабочей при ИП обеих фаз. Последующее отыскание движущей силы  $x_2 - x^p$  и расчет  $M$  по (10.22) затруднений не вызывают.

### 10.9.2. Прямоточное движение фаз в режиме ИВ

Расходная схема процесса представлена на рис. 10.26,а. В отличие от ИП фаз их концентрации *изменяются* вдоль поверхности и рабочей линии от известных значений  $y_1, x_1$  (точка  $A$ ) до пока не известных  $y_2, x_2$ . Последние можно определить аналитически в случае *прямой* линии равновесия, предварительно рассчитав поток вещества  $M$ . В этих целях воспользуемся соотношениями (а) и выразим неизвестные конечные концентрации:

$$x_2 = x_1 - \frac{M}{L}; \quad x_2^p = x_1^p + \frac{M}{mD}. \quad (е)$$

Раскроем теперь написание  $\Delta x_{cp}$ :

$$\begin{aligned} M &= k_x F \Delta x_{cp} = k_x F \frac{\Delta x_2 - \Delta x_1}{\ln(\Delta x_2 / \Delta x_1)} = k_x F \frac{(x_2 - x_1^p)}{\ln \frac{x_2 - x_2^p}{x_1 - x_1^p}} = \\ &= k_x F \frac{x_1 - \frac{M}{L} - x_1^p - \frac{M}{mD} - x_1 + x_1^p}{\ln \frac{x_1 - \frac{M}{L} - x_1^p - \frac{M}{mD}}{x_1 - x_1^p}}. \end{aligned} \quad (ж)$$

Перепишем (ж) более лаконично, проводя ряд сокращений и обозначив (на языке фазы “ $x$ ”) разность входных концентраций  $x_1 - x_1^p \equiv \Delta x^*$ :

$$M = -k_x F \frac{M \left( \frac{1}{L} + \frac{1}{mD} \right)}{\Delta x^* - M \left( \frac{1}{L} + \frac{1}{mD} \right)} \cdot \ln \frac{\Delta x^*}{\Delta x^* - M \left( \frac{1}{L} + \frac{1}{mD} \right)}. \quad (з)$$

После сокращения на  $M$  и перехода (в числителе) к отношениям пропускных способностей  $k_x F / L \equiv a$  и  $k_x F / mD = k_y F / D \equiv b$  получим

$$1 = - \frac{\frac{k_x F}{L} + \frac{k_y F}{mD}}{\Delta x^* - M \left( \frac{1}{L} + \frac{1}{mD} \right)} \ln \left[ 1 - \frac{M}{\Delta x^*} \left( \frac{1}{L} + \frac{1}{mD} \right) \right] = -(a+b). \quad (и)$$



Потенцируем (и), обозначив здесь и ниже поток вещества при *прямоточном* движении фаз  $\dot{M}$ :

$$1 - \frac{\dot{M}}{\Delta x_*} \left( \frac{1}{L} + \frac{1}{mD} \right) = e^{-(a+b)}. \quad (\kappa)$$

Отсюда находим поток переносимого при прямотоке вещества в разных формах записи:

$$\begin{aligned} \dot{M} &= \frac{1 - e^{-(a+b)}}{\frac{1}{L} + \frac{1}{mD}} \Delta x_*; & \dot{M} &= \frac{1 - e^{-(a+b)}}{\frac{k_x F}{L} + \frac{k_x F}{mD}} k_x F \Delta x_*; \\ \dot{M} &= \frac{1 - e^{-(a+b)}}{a+b} k_x F \Delta x_*; & \dot{M} &= \frac{1 - \exp \left[ - \left( \frac{k_x F}{L} + \frac{k_x F}{mD} \right) \right]}{\frac{k_x F}{L} + \frac{k_x F}{mD}} k_x F \Delta x_*. \end{aligned} \quad (10.34)$$

Далее в случае необходимости по (10.18) рассчитываем  $x_2$  и  $y_2$ .

В случае *кривой* линии равновесия поток вещества  $\dot{M}$  определяют подбором (см. рис. 10.28,а). В отличие от режима ИП теперь речь идет не о рабочей *точке*  $B(y_2, x_2)$ , а о рабочей *линии*  $AB$ , поэтому однозначное определение конечной точки  $B(y_2, x_2)$  здесь невозможно. Неизвестную точку  $B$  ищем, сводя эксплуатационную задачу с известной поверхностью контакта  $F$  к проектной (см. рис. 10.28,а):

- из начальной точки  $A(y_1, x_1)$  проводится балансовая линия (ее направление совпадает с направлением рабочей линии,  $\angle \beta = \angle \psi$ ,  $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \psi = L/D$ );

- на этой линии выбирается некая точка  $K'$ , предполагается, что это и есть конечная точка рабочей линии  $B$ ;

- по присущим точке  $K'$  концентрациям  $y_2, x_2$  (это еще не окончательно найденные выходные концентрации) рассчитывается поток вещества  $\dot{M}'$ ;

- по рабочей линии  $AK'$  решается задача проектирования, т.е. определяется  $\Delta x_{cp}$  по (10.27х) и с предварительно найденным потоком  $\dot{M}'$  рассчитывается  $F'$  по (10.31);

- найденное значение  $F'$  сравнивается с заданным  $F$ ; при их совпадении задача считается решенной; при недопустимом их расхождении выбирается новая конечная точка рабочей линии  $K''$ , и расчет повторяется сначала — до совпадения.

Установленной окончательно точке  $B(y_2, x_2)$  отвечает найденное в ходе расчета значение  $\dot{M}'$ .

### 10.9.3. Противоточное движение фаз в режиме ИВ

Расчетная схема процесса представлена на рис.10.27. Для противоточного процесса, как и для прямоточного, характерно постепенное изменение концентраций в фазах вдоль поверхности  $F$  и рабочей линии. При этом наклон рабочей линии (угол  $\alpha$ , отвечающий отношению  $L/D$ ) и ограничивающие ее вертикаль  $x_1$  и горизонталь  $y_1$  в задачах эксплуатации заданы (рис. 10.29), но конкретное положение рабочей линии — неизвестно.

В случае *прямой* линии равновесия задача определения потока вещества  $M$  (далее —  $y_2$  и  $x_2$ ) решается аналитически. Воспользуемся опять соотношениями (а) и выразим неизвестные конечные концентрации, как и в случае прямотока, в форме (е). Раскроем написание  $\Delta x_{cp}$  — оно будет иным, нежели в прямотоке, поскольку здесь  $\Delta x_1 \equiv x_1 - x_2^p$ ,  $\Delta x_2 \equiv x_2 - x_1^p$ ; с использованием выражения (е):

$$\begin{aligned} M &= k_x F \Delta x_{cp} = k_x F \frac{\Delta x_2 - \Delta x_1}{\ln(\Delta x_2 / \Delta x_1)} = k_x F \frac{x_2 - x_1^p - x_1 + x_2^p}{\ln \frac{x_2 - x_1^p}{x_1 - x_2^p}} = \\ &= k_x F \frac{x_1 - \frac{M}{L} - x_1^p - x_1 + x_1^p + \frac{M}{mD}}{\ln \frac{x_1 - \frac{M}{L} - x_1^p}{x_1 - \frac{M}{mD} - x_1^p}}. \end{aligned} \quad (л)$$

Перепишем (л) более лаконично, проводя ряд сокращений и обозначив разность входных концентраций (в терминах фазы “х”)  $x_1 - x_1^p \equiv \Delta x_*$ :

$$M = k_x F \frac{M \left( \frac{1}{mD} - \frac{1}{L} \right)}{\ln \frac{\Delta x_* - \frac{M}{L}}{\Delta x_* - \frac{M}{mD}}}. \quad (м)$$

После сокращения на  $M$  и перехода к отношениям пропускных способностей  $k_x F / L \equiv a$  и  $k_x F / mD \equiv b$  получим

$$\ln \frac{\Delta x_* - \frac{M}{L}}{\Delta x_* - \frac{M}{mD}} = \frac{k_x F}{mD} - \frac{k_x F}{L} = b - a. \quad (н)$$

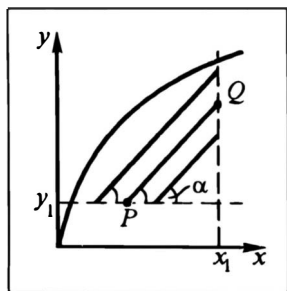


Рис. 10.29. К решению задачи эксплуатации при противотоке фаз

Потенцируем (н), обозначив здесь и ниже поток вещества при *противоточном* движении фаз  $\ddot{M}$  :

$$\frac{\Delta x_* - \frac{\ddot{M}}{L}}{\Delta x_* - \frac{\ddot{M}}{mD}} = e^{b-a}. \quad (o)$$

Отсюда находим поток переносимого вещества в разных формах записи:

$$\begin{aligned} \ddot{M} &= \frac{e^{b-a} - 1}{\frac{1}{mD}e^{b-a} - \frac{1}{L}} \Delta x_*; \quad \ddot{M} = \frac{e^{b-a} - 1}{\frac{k_x F}{mD}e^{b-a} - \frac{k_x F}{L}} k_x F \Delta x_*; \\ \ddot{M} &= \frac{e^{b-a} - 1}{be^{b-a} - a} k_x F \Delta x_*; \\ \ddot{M} &= \frac{\exp\left(\frac{k_x F}{mD} - \frac{k_x F}{L}\right) - 1}{\frac{k_x F}{mD} \exp\left(\frac{k_x F}{mD} - \frac{k_x F}{L}\right) - \frac{k_x F}{L}} k_x F \Delta x_*. \end{aligned} \quad (10.35)$$

Далее, если это необходимо, по (10.18) рассчитываем  $x_2$  и  $y_2$ .

В случае *кривой* линии равновесия поток вещества  $\ddot{M}$  может быть определен подбором. В этих целях между ограничивающими прямыми  $x_1$  и  $y_1$  проводят произвольную рабочую линию, например  $PQ$  (см. рис.10.29), под заданным в эксплуатационных задачах углом  $\alpha$ , так что  $\operatorname{tg} \alpha = L/D$ . А далее решают проектную задачу:

- по значениям  $y_2$  или  $x_2$ , отвечающим принятой рабочей линии  $PQ$ , рассчитывают  $\ddot{M}'$  с помощью (10.18);
- по (10.29х) рассчитывают  $\Delta x_{\text{ср}}$ ;
- по (10.31) с промежуточным  $\ddot{M}'$  вычисляют массообменную поверхность  $F'$ , соответствующую принятому положению рабочей линии  $PQ$ ;
- сравнивают это  $F'$  с заданной: по условиям эксплуатационной задачи величиной  $F$ : при их совпадении с приемлемой точностью задачу считают решенной, при неприемлемом расхождении выбирают новое положение рабочей линии и повторяют расчет, пока не добьются совпадения.

Установленному окончательно положению рабочей линии отвечает найденное в ходе расчета значение  $\dot{M}$ .

## 10.10. ПРОПУСКНЫЕ СПОСОБНОСТИ И ЛИМИТИРУЮЩИЕ СТАДИИ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ КЛАССА 3(2-2)<sub>1</sub>

Ниже анализ проводится применительно к стационарным процессам массопереноса (для нестационарных процессов проблема рассматривается в разд. 10.14). Анализ может быть доведен до аналитических соотношений лишь при *линейном* описании всех составляющих массопереноса (практически это в наибольшей мере относится к описанию равновесия  $y = mx$  при  $m = \text{const}$ ). Однако качественно (на уровне “лучше-хуже”, а иногда и “больше-меньше”) получаемые результаты применимы ко многим нелинейным процессам рассматриваемого класса, а также к другим процессам по КФ-классификации — линейным и нелинейным.

### 10.10.1. Пропускная способность массообменного аппарата

Пропускная способность массообменного аппарата в целом  $M/\Delta^*$  легко получается из уже найденных (при решении задач эксплуатации) выражений для потока вещества  $M$ . Запишем пропускные способности (например, на языке фазы “х”) для различных случаев применительно к переносу вещества из фазы “х” в фазу “у”.

**Идеальное перемешивание обеих фаз.** В основе — выражения (10.33), (10.33а), (10.33б). Обозначим в целях сокращения записи:  $x_1 - x_1^p = \Delta x^*$ ,  $y_1^p - y_1 = \Delta y^*$ . Тогда для аппарата в целом: на языке фазы “х”

$$\frac{M}{\Delta x^*} = \frac{1}{\frac{1}{L} + \frac{1}{k_x F} + \frac{1}{mD}}; \quad \frac{M}{\Delta x^*} = \frac{1}{\frac{1}{L} + \frac{1}{\beta_x F} + \frac{1}{m\beta_y F} + \frac{1}{mD}}. \quad (10.36)$$

Для большей общности с процессами теплопереноса (разд.7.7) перепишем первое из выражений (10.36) в форме

$$\frac{M}{\Delta x^*} = \frac{1}{\frac{k_x F}{L} + 1 + \frac{k_x F}{mD}} k_x F = \frac{1}{a + 1 + b} k_x F, \quad (10.36a)$$

причем отношения пропускных способностей  $a \equiv k_x F/L$  и  $b \equiv k_x F/mD = k_y F/D$  введены ранее.

Аналогичное выражение на языке фазы “у” (подход к его

выводу — тот же) имеет вид

$$\frac{M}{\Delta y_*} = \frac{1}{\frac{mk_y F}{L} + 1 + \frac{k_y F}{D}} k_y F = \frac{1}{a + 1 + b} k_y F. \quad (10.366)$$

Из сопоставления разных форм записи  $M$  — (10.22) и (10.33), (10.36) — нетрудно выразить движущие силы через  $\Delta x_*$ ,  $\Delta y_*$ :

$$M = kF\Delta_{cp} = \frac{\Delta_*}{a + 1 + b} kF \quad \text{и} \quad \Delta_{cp} = \Delta_* \frac{1}{a + 1 + b}. \quad (a)$$

Здесь  $k \equiv k_x, k_y$ ;  $\Delta_{cp} = \Delta x_{cp}, \Delta y_{cp}$ ;  $\Delta_* = \Delta x_*, \Delta y_*$  соответственно.

Обобщенное отношение пропускных способностей аппарата выражается одинаковой записью в терминах обеих фаз:

$$r_* = \frac{M}{k_x F \Delta x_*} = \frac{M}{k_y F \Delta y_*}. \quad (10.37)$$

**Прямоточное движение фаз.** В основе — выражения (10.34). Пропускная способность прямоточного аппарата в целом на языке фазы “x” равна:

$$\frac{\dot{M}}{\Delta x_*} = \frac{1 - \exp\left[-\left(\frac{k_x F}{L} + \frac{k_x F}{mD}\right)\right]}{\frac{k_x F}{L} + \frac{k_x F}{mD}} k_x F = \frac{1 - e^{-(a+b)}}{a + b} k_x F. \quad (10.38)$$

Аналогичным образом получаемое выражение на языке фазы “y” имеет вид

$$\frac{\dot{M}}{\Delta y_*} = \frac{1 - e^{-(a+b)}}{a + b} k_y F. \quad (10.38a)$$

Связь  $\Delta_{cp}$  и  $\Delta_*$  определяется на тех же основаниях, что и для ИП фаз:

$$\Delta_{cp} = \Delta_* \frac{1 - e^{-(a+b)}}{a + b}. \quad (б)$$

Обобщенное отношение пропускных способностей аппарата имеет одинаковое численное значение на языке обеих фаз:

$$r_* = \frac{\dot{M}}{k_x F \Delta x_*} = \frac{\dot{M}}{k_y F \Delta y_*}. \quad (10.39)$$

**Противоточное движение фаз.** В основе — выражения (10.35). Пропускная способность противоточного аппарата в целом пред-

ставляется по фазе “х” как

$$\frac{\ddot{M}}{\Delta x_*} = \frac{\exp\left(\frac{k_x F}{mD} - \frac{k_x F}{L}\right) - 1}{\frac{k_x F}{mD} \exp\left(\frac{k_x F}{mD} - \frac{k_x F}{L}\right) - \frac{k_x F}{L}} k_x F = \frac{e^{b-a} - 1}{be^{b-a} - a} k_x F. \quad (10.40)$$

Аналогичное выражение (способ его получения — тот же) на языке фазы “у” запишется в виде

$$\frac{\ddot{M}}{\Delta y_*} = \frac{e^{b-a} - 1}{be^{b-a} - a} k_y F. \quad (10.40a)$$

Связь  $\Delta_{\text{ср}}$  определяется на тех же основаниях, что для ИП фаз и прямотока:

$$\Delta_{\text{ср}} = \Delta_* \frac{e^{b-a} - 1}{be^{b-a} - a}. \quad (B)$$

Обобщенное отношение пропускных способностей аппарата может быть записано в терминах обеих фаз:

$$r_* = \frac{\ddot{M}}{k_x F \Delta x_*} = \frac{\ddot{M}}{k_y F \Delta y_*}. \quad (10.41)$$

Влияние пропускных способностей *стадий* на пропускную способность *аппарата в целом* нагляднее всего высвечивается при анализе процессов с идеальным перемешиванием обеих фаз — см. соотношения (10.36). В знаменателе стоят выражения, *обратные* пропускным способностям отдельных стадий, — это *диффузионные сопротивления массопереносу* на соответствующих стадиях. Можно констатировать: *увеличение пропускной способности любой из стадий приводит к возрастанию пропускной способности (интенсивности массообмена) аппарата в целом*. Но при этом *чем выше пропускная способность какой-либо стадии, тем меньше отвечающая ей обратная величина, а значит и влияние этой стадии на общую интенсивность массопереноса*. И наоборот, *уменьшение пропускной способности какой-либо стадии повышает ее значимость для массопереноса в целом*.

Эти общие выводы позволяют технологу грамотно выбрать способ воздействия на массоперенос, на процессы переноса вообще: надо, если это возможно, воздействовать прежде всего на фактор, в наибольшей мере влияющий на процесс, т.е. для последовательного переноса — на наиболее *медленную* стадию (с наименьшей пропускной способностью).

При существенном понижении пропускной способности какой-либо стадии массопереноса эта стадия может стать *лимитирующей*.

### 10.10.2. Лимитирующие стадии процесса

**Лимитирующей** будем называть стадию, протекающую существенно медленнее всех остальных, которые в сравнении с ней протекают “мгновенно”. Продолжительность любой из этих остальных стадий значительно меньше не только продолжительности лимитирующей, но (при строгом понимании последней) и погрешности, с которой она определена. Поэтому при наличии лимитирующей стадии при расчете интенсивности массообменного процесса следует рассматривать только эту стадию. Наиболее нагляден анализ в случае ИП обеих фаз.

Пусть, например,  $k_x F \ll L$ ,  $mD$ ; применительно к выражению (10.36а) это означает  $a, b \ll 1$ . Тогда массоперенос лимитируется массопередачей через поверхность контакта, поскольку дробь  $1/k_x F$  значительно превышает остальные слагаемые в знаменателе. Для расчета массообмена здесь *необходимо располагать* значениями кинетических характеристик  $\beta_x$  и  $\beta_y$  (а также  $m$ ) или сразу коэффициента  $k_x$  (либо  $k_y$ ) и величиной  $F$ ; пропускные способности  $L$  и  $mD$  в такой ситуации роли не играют. В этом случае говорят о **массообмене в условиях поверхностной задачи**. И для интенсификации массопереноса в целом нужно увеличивать  $F$ , повышать  $k_x$ . При этом может возникнуть вопрос, какая из стадий массопередачи контролирует процесс — перенос вещества через пограничную пленку со стороны фазы “у” или фазы “х”. Разумеется, следует увеличивать в первую очередь ту из стадий  $\beta_x F$  или  $m\beta_y F$ , которая медленнее (скажем, при  $\beta_x F < m\beta_y F$  принять меры для дополнительной турбулизации фазы “х” с целью уменьшения толщины диффузионной пограничной пленки в этой фазе).

Пусть теперь  $L \ll mD$ ,  $\beta_x F$  — лимитирующей становится стадия подвода вещества с фазой “х” в рабочую зону массообменного устройства; тогда в рассмотрении остальных стадий необходимости нет. В этом случае задача называется **поточковой по фазе “х”**. Для повышения интенсивности массопереноса в целом здесь нужно увеличивать фазовый поток  $L$ ; поток фазы “у”, как и кинетическая характеристика  $k_y F$ , в этих условиях роли не играет. Разумеется, при  $mD \ll L$ ,  $\beta_x F$  лимитировать будет отвод вещества из аппарата с фазой “у”, т.е. поток  $D$ .

Аналогичные выводы могут быть сделаны также для прямых, противоточных и других процессов переноса вещества (любой субстанции вообще). Такой анализ применительно к некоторым случаям теплопереноса при движении фаз в режиме ИВ приведен в разд.7.9.2.

Выявление лимитирующей стадии существенно в различных аспектах:

— управления процессом переноса (здесь — массообмена): надо интенсифицировать лимитирующую стадию — может

статья, что в результате интенсификации она перестанет быть лимитирующей;

— расчета процесса массопереноса: надо вести расчет только лимитирующей стадии процесса.

При сопоставимости нескольких пропускных способностей (хотя бы двух из них) задача массопереноса именуется смешанной. Это означает, что в расчетах придется учитывать влияние пропускных способностей нескольких стадий, в наиболее общем случае массопереноса в процессах класса 3(2-2)1 — всех трех ( $L$ ,  $k_x F$ ,  $mD$ ) или четырех (если в пропускной способности  $k_x F$  выделить  $\beta_x F$  и  $\beta_y F$ ). При выборе способа воздействия на процесс надо будет сопоставить пропускные способности разных стадий и установить, какая или какие из них вносят больший вклад в массоперенос — на них и воздействовать в первую очередь.

### 10.10.3. О подмене задачи в массопереносе

В практике химической технологии при теоретическом исследовании процессов и обобщении экспериментальных данных не всегда проводится сопоставительный анализ пропускных способностей различных стадий массопереноса с целью установления лимитирующей стадии или вывода об отсутствии такой стадии. При этом способ описания процесса нередко обусловлен не столько научным его анализом, сколько традициями, многолетней привычкой использовать устоявшиеся подходы. В результате достаточно часто игнорируется наличие лимитирующей стадии, и массоперенос описывается в понятиях (символах и терминах) совсем иной стадии — происходит подмена задачи. К математическим описаниям и практическим рекомендациям, сделанным на такой основе, надо относиться критически, дабы не прийти к ошибочным решениям. Специально подчеркнем, что подмена задачи иногда бывает вынужденной: мы порой просто не умеем количественно оценивать эффект и вклад некоторых стадий массопереноса, приходится идти на подмену задачи, вводя некие коэффициенты незнания.

Примером подмены задачи, чаще всего — неосознанной, может служить трактовка *поточковой* задачи в привычных рамках *поверхностной*: принимается (чаще всего без оговорок), что процесс может быть описан на основе коэффициентов массообмена  $\beta_x$ ,  $\beta_y$ ,  $k_x$  и т.д., тогда как в действительности он лимитируется, например, подводом в аппарат вещества с фазой “х”. Фактически здесь пропускная способность лимитирующей стадии  $L$  подменяется величиной, скажем,  $\beta_x F$  (а если задача смешанная, то две стадии с пропускными способностями  $L$  и  $\beta_x F$  подменяются одной, характеризующейся величиной  $\beta_x F$ ). В случае потоковой задачи в этих ситуациях “неожиданно” получаются эмпирические или теоретические уравнения, в которых  $\beta_x \sim L/F$ ; поскольку  $\beta_x$  входит в  $Sh_x \equiv \beta_x l/D_{\text{д}}$ , а  $L$  — в  $Re$ , то для предлагаемых расчетных уравнений характерно  $Sh \sim Re^1$ . В случае смешанных задач расчетные уравнения типа  $Sh = f(Re)$  выглядят более пристой-



но: кривые отклоняются вниз от линейной зависимости, и показатель степени при  $Re$  получается ниже 1.

Более осознанно смешанную поверхностно-потоковую задачу подменяют смешанной потоковой: исключают из рассмотрения поверхностную стадию массопереноса. При этом понимают, что на самом деле поверхностный перенос (пусть его пропускная способность составляет  $\beta_x F$ ) в какой-то степени влияет на массообмен. Но величина  $\beta_x F$  (или  $k_x F$  и т.п.) достоверно не известна: из-за неточностей в определении  $\beta_x$  (и  $\beta_y$ ); неопределенности в значениях  $m$  в случае нелинейного равновесия; в наибольшей мере — из-за объективных трудностей в определении  $F$  (особенно в процессах с изменяющейся поверхностью контакта фаз). Поэтому мысленно полагают величины  $\beta_x F$ ,  $k_x F$  достаточно большими, чтобы фазы в массообменном устройстве пришли в равновесие, — говорят об **идеальном контакте фаз**. Если в качестве примера рассматривать прямоточный процесс, то точка  $K_0$  на рис. 10.28,а, характеризующая уходящие потоки фаз, при идеальном межфазном контакте будет лежать на линии равновесия (при этом начальная точка  $A$  и наклон линии  $AK_0$  при известных потоках  $L$  и  $D$  — определены). Но в действительности *нет* идеального контакта фаз, так что реально конечная точка  $B$  рабочей линии  $AB$  лежит на прямой  $AK_0$  где-то правее и ниже точки  $K_0$  (это может, например, быть точка  $K''$ ). Отличие реального процесса от идеального обычно учитывают коэффициентом полезного действия аппарата, характеризующим “степень приближения процесса к идеальному”. Этот КПД и есть “коэффициент незнания” поверхности контакта  $F$  и пропускной способности  $\beta_x F$  или  $k_x F$ .

Поясним смысл КПД на примере процесса с идеальным перемешиванием обеих фаз. Сопоставим для этого описание процесса с учетом реальной пропускной способности  $k_x F$  и без ее учета (идеальный контакт фаз,  $k_x F \rightarrow \infty$ ); КПД выразится как отношение пропускных способностей массообменного устройства в реальном и идеальном процессах:

$$\eta = \frac{\frac{1}{1/L + 1/k_x F + 1/mD}}{\frac{1}{1/L + 1/mD}} = \frac{\frac{1}{L} + \frac{1}{mD}}{\frac{1}{L} + \frac{1}{k_x F} + \frac{1}{mD}}. \quad (10.42)$$

Кстати, из (10.42) при известных по опытным данным значениям  $\eta$  можно оценить пропускную способность поверхностной стадии  $k_x F$ , а при известных  $k_x$  — трудноопределимую истинную поверхность межфазного контакта  $F$ :

$$k_x F = \frac{\eta}{1-\eta} \frac{1}{\frac{1}{L} + \frac{1}{mD}}. \quad (10.42a)$$

Соответствующие выражения можно получить и для других схем взаимного движения фаз, других СКК. Здесь возникают трудности не только в определении величины  $F$ , но и в оценке структуры потоков фаз, если речь не идет о простейших предельных моделях ИП и ИВ. В этих случаях часто постулируют идеальное вытеснение фазовых потоков, а незнание истинной структуры потоков также учитывают с помощью КПД, усложняя его смысл и выражение.

## 10.11. СЕТИ АППАРАТОВ (ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА)

Ранее анализировалась работа **одиночных** массообменных устройств (аппаратов). Такие устройства могут функционировать в различных комбинациях, образуя **сети** устройств. Если при этом аппараты вытянуты в одну цепочку, то такие сети

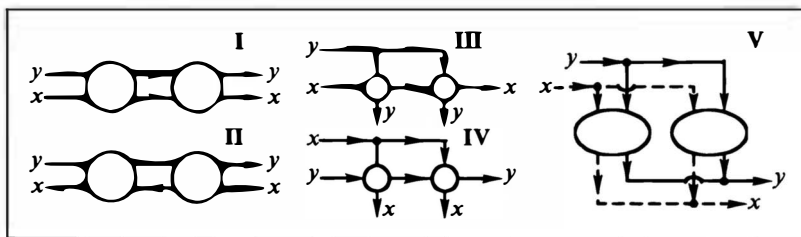


Рис. 10.30. Простейшие сети аппаратов:

I — прямоток, II — противоток, III — перекрестный ток при разбиении фазы "у", IV — то же при разбиении фазы "х", V — разбиение обеих фаз

называют *одномерными*. Если же аппараты связаны в сеть несколькими цепочками, то говорят о *двумерных* сетях; нетрудно представить себе и *трехмерные* сети. Предметом последующего изучения являются простейшие одномерные сети — *цепочки* аппаратов, принадлежащих классу 3(2-2)1; функционирование цепочек для некоторых других классов рассматривается при изучении отдельных технологических приемов. Заметим, что цепочка аппаратов весьма часто конструктивно оформляется в виде одного общего аппарата — системы (например, колонного типа).

Массообменный эффект сети аппаратов при прочих равных условиях зависит от того, *каким образом* аппараты собраны в сеть. Покажем возможности соединения в сеть простейшей системы из двух аппаратов; таких вариантов — пять (рис. 10.30). При этом в каждом варианте *внутри отдельного устройства* возможны различные СКК — прямоток, противоток, ИП одной или обеих фаз.

При соединении аппаратов в цепи возникает *ступенчатый* контакт фаз. Чаще всего это *ступенчатый противоток*, нередко используют *перекрестное* соединение аппаратов. *Ступенчатый прямоток* эффективен только в смысле наращивания поверхности контакта фаз, его использование обусловлено лишь конструктивными соображениями либо спецификой технологического процесса, лежащей, как правило, вне массопереноса.

Каждому способу соединения аппаратов в сеть отвечает своя рабочая линия в диаграмме  $y - x$ , учитывающая как этот способ, так и СКК внутри каждого аппарата.

В качестве примера на рис. 10.31, а-I изображена цепочка из двух аппаратов, причем в каждом из них — прямоток, а соединены они по ступенчато-противоточной схеме. Диаграммы  $y - x$  построены (рис. 10.31, а-II, III) для процессов класса 3(2-2)1. Входные концентрации переносимого вещества в фазах обозначены  $y_1$  и  $x_1$ , выходные —  $y_2$  и  $x_2$ , промежуточные (между аппаратами) —  $y'$  и  $x'$ . Для *левого* аппарата входными концентрациями являются  $y_1$  и  $x'$ , выходными  $y'$  и  $x_2$ . В соответствии с проведенным ранее анализом (разд. 10.7) рабочая линия для этого аппарата представлена нижним левым отрезком на рис. 10.31, а-

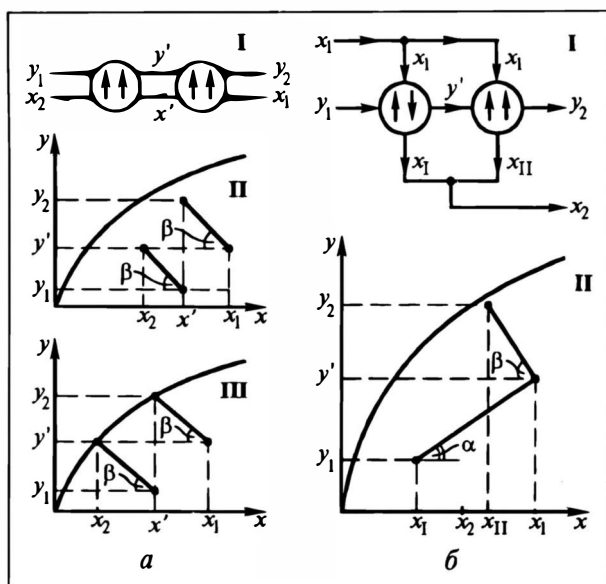


Рис. 10.31. Рабочие линии для простейших цепочек из двух аппаратов:

*a* — ступенчатый противоток с прямотоком фаз в каждом аппарате: I — схема потоков, II — диаграмма  $y-x$  (общий случай), III — диаграмма  $y-x$  (идеальный контакт фаз);

*б* — ступенчато-перекрестное движение фаз с разбиением фазы "х" при противотоке фаз в первом аппарате и прямотоке во втором: I — схема потоков, II — диаграмма  $y-x$  (общий случай)

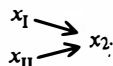
II в диаграмме  $y-x$ , наклоненным под углом  $\beta$  ( $\operatorname{tg} \beta = L/D$ ). Для *правого* аппарата входными будут концентрации  $y'$  и  $x_1$ , выходными —  $y_2$  и  $x'$ . Этому аппарату отвечает верхняя правая рабочая линия, ее угол наклона тоже равен  $\beta$ , поскольку потоки  $L$  и  $D$  — те же.

Таким же образом будет обозначен ступенчато-противоточный процесс при ИП обеих фаз в каждом аппарате. Только здесь рабочие линии вырождаются в рабочие точки с координатами:  $y', x_2$  для левого аппарата и  $y_2, x'$  — для правого.

Чем больше пропускная способность поверхностной стадии (т.е. величины  $a$  и  $b$ ), тем ближе к линии равновесия заканчивается рабочая линия. Если в отдельных массообменных устройствах контакт фаз происходит *идеально* ( $k_x F \rightarrow \infty$ , потоковая задача переноса), то фазы из каждой ступени уходят в равновесии. Поэтому рабочие линии должны заканчиваться на равновесной кривой, как это показано на рис. 10.31, *a*-III. Рассмотренные ситуации часто встречаются на практике; именно они фигурируют в последующем анализе.

На рис. 10.31, *б*-I приведена цепочка аппаратов, где в левом аппарате — противоток, в правом — прямоток, аппараты соединены в ступенчато-перекрестную схему с разбиением фазы "х". Диаграмма  $y-x$  для этого случая — тоже применительно к процессам класса 3(2-2)1 — представлена на рис. 10.31, *б*-II. Положение рабочих линий (их начальные и конечные точки, углы наклона) отвечает правилам, выявленным при анализе работы одиночных аппаратов. Фазу "х" разбивают совсем не обязательно поровну; вполне возможно, что ее потоки в левом и правом аппаратах не одинаковы, пусть для определенности  $L_I < L_{II}$ . В этом случае углы  $\alpha$  и  $\beta$  не равны, причем  $\alpha < \beta$ , поскольку  $\operatorname{tg} \alpha = L_I/D < \operatorname{tg} \beta =$

$= L_{II}/D$ . Процесс может завершаться смешением потоков фазы “х”, покидающих аппараты (так показано на схеме):

 Сам акт смешения изображается на оси  $x$  и рассчитывается по

правилу рычага; поскольку в рассматриваемом примере  $L_{II} > L_I$ , результирующая точка  $x_2$  расположена ближе к  $x_{II}$ , нежели к  $x_I$ .

В предыдущих разделах рассматривались аппараты с **непрерывным** контактом фаз. Сети аппаратов реализуют **дискретный** (ступенчатый) контакт фаз. Ранее было установлено, что при непрерывном контакте наиболее эффективно *противоточное* движение фазовых потоков. Однако в одиночном аппарате обеспечить такое движение удастся далеко не всегда: из-за необходимости диспергирования фаз для увеличения поверхности контакта; из-за особенностей конструкции, обуславливающих поперечную неравномерность и обратное перемешивание потоков; из-за специфических требований конкретной технологии. Поэтому в одиночном аппарате СКК может соответствовать прямотоку либо ИП одной или обеих фаз. Соединение таких одиночных аппаратов в цепочку с *противоточным перемещением фаз от аппарата к аппарату* позволяет приблизиться к *противотоку*, т.е. использовать достоинства этой схемы.

Разумеется, соединение *противоточных* одиночных аппаратов в *ступенчато-противоточную* схему дает просто суммирующий эффект: пропускные способности поверхностных стадий отдельных аппаратов  $k_x f_i$  складываются в общую пропускную способность  $k_x F$  (причем в случае одинаковых  $k_x$  здесь  $F = \sum_i f_i$ ).

Ниже этот тривиальный случай отдельно не рассматривается.

Далее сети наиболее подробно анализируются применительно к цепочке аппаратов с противоточным движением фаз между аппаратами, менее детально — применительно к ступенчато-перекрестной схеме. В случае кривых линий равновесия расчет сетей ведется графически; при  $m = \text{const}$  сети для процессов класса 3(2-2)1 поддаются аналитическому расчету.

## 10.12. СТУПЕНЧАТЫЙ ПРОТИВОТОК ДЛЯ ПРОЦЕССОВ КЛАССА 3(2-2)1

Схема ступенчатого противотока представлена на рис. 10.32, где концентрации вещества *в одном сечении* (между ступенями) обозначены в фазах *одинаковыми индексами*:  $y_1$  и  $x_1$ ,  $y_i$  и  $x_i$ . Условимся анализировать ступенчатый противоток на языке фазы “х” применительно к переносу вещества из этой фазы в фазу “у”. Проблема расчета ступенчатого противотока связана с числом ступеней — известными (задача эксплуатации) или искомыми (задача проектирования).

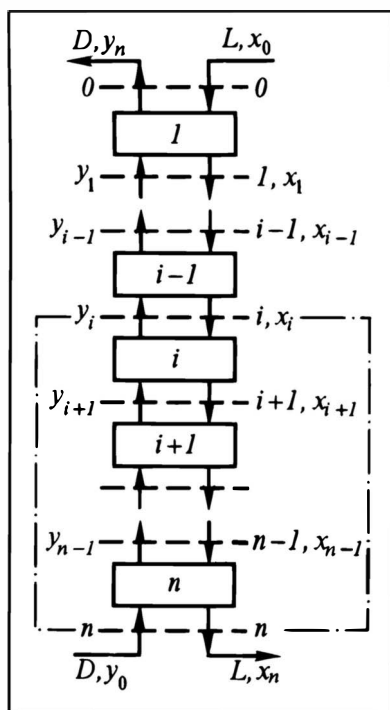


Рис. 10.32. Ступенчатый противоток: цепочка из  $n$  аппаратов

### 10.12.1. Общие положения. Графоаналитический расчет

На практике чаще всего в каждом массообменном устройстве (ступени) осуществляют идеальное перемешивание обеих фаз, их прямоток либо ИП одной из фаз и движение другой в режиме, приближенном к ИВ. Во всех этих случаях, как показано в разд. 10.7, рабочая линия строится формально одинаково (при ИП обеих фаз она вырождается в рабочую точку, но последняя находится на рабочей линии, характерной для прямотока фаз). Построенная в упомянутом разделе рабочая линия воспроизведена применительно к  $i$ -й ступени на рис. 10.33, *a* для общего случая — *кривой* линии равновесия. Началу рабочей линии отвечает точка с концентрациями  $y_{i+1}$ ,  $x_i$ , концу (или рабочей точке при ИП обеих фаз) — с концентрациями  $y_i$ ,  $x_{i+1}$ ; угол наклона рабочей линии  $\beta$  определяется потоками фаз:  $\operatorname{tg} \beta = L/D$ . Такое представление рабочей линии (она показана жирными штрихами), вполне приемлемое для единичной сту-

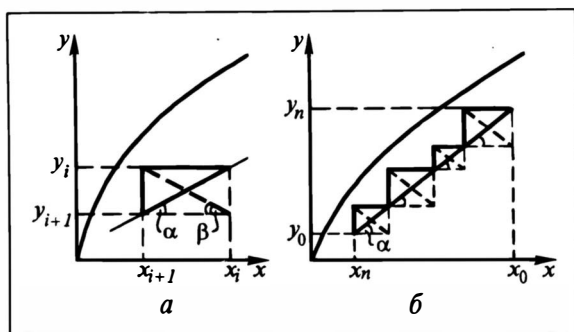


Рис. 10.33. Ступенчатый противоток — реальные ступени в диаграмме  $y - x$ :  
 а — интерпретация реальной ступени, б — построение реальных ступеней

пени, не очень удобно для изображения  $n$ -ступенчатой цепочки аппаратов, так как требует громоздких пошаговых операций при переходе от ступени к ступени. Поэтому принято изменять базу построения, существенно упрощая и графические процедуры.

Очертим около рабочей линии прямоугольник (рис. 10.33,а), ограниченный упомянутыми выше концентрациями, — рабочая линия является для него диагональю. Проведем вторую диагональ — она пройдет через середину рабочей линии под углом  $\alpha$  к оси абсцисс, причем  $\alpha = \beta$ ; концы второй диагонали характеризуются точками с координатами  $y_i, x_i$  и  $y_{i+1}, x_{i+1}$ . Тогда **ступень**, т.е. **переход от одного сечения к другому**, можно изобразить (жирные линии на рисунке) прямоугольным треугольником, опирающимся своей гипотенузой на эту вторую диагональ. Последняя при этом представляет собой **фрагмент рабочей линии ступенчато-противоточной цепочки аппаратов** (см. ниже).

Такой подход позволяет сформулировать принципы построения ступеней в противоточной цепочке из  $n$  аппаратов (рис. 10.33,б). Отрезки рабочих линий для каждой ступени в такой цепочке составляют продолжение один другого, так как начало одного отрезка совпадает с концом другого, а углы их наклона  $\alpha$  — одинаковы (как и  $\beta$ ), причем  $\operatorname{tg} \alpha = L/D$ . Положение рабочей линии для цепочки в целом определено входными и выходными концентрациями — точками  $y_0, x_n$  и  $y_n, x_0$ . В этом смысле цепочка аналогична единичному противоточному массообменному устройству, поэтому и **уравнение рабочей линии** для цепочки будет по существу таким же, как и для противоточного устройства, т.е. повторит (10.24). С обозначениями, принятыми на рис. 10.32, такое уравнение получают из материального баланса для контура, показанного штрих-пунктиром, замкнутого на сечение  $n$  (низ цепочки) и текущее сечение  $i$ , где

$y = y_i$  и  $x = x_i$ . Для стационарного процесса

$$+Dy_0 + Lx - Dy - Lx_n = 0,$$

откуда

$$y = \frac{Dy_0 - Lx_n}{D} + \frac{L}{D} x. \quad (10.43)$$

Контур выше приведен на базе сечения “ $n$ ”, это обусловлено предположением, что наряду с входными концентрациями  $y_0$  и  $x_0$  известна также выходная  $x_n$ , так что начальная точка рабочей линии  $y_0, x_n$  задана. Если же известна выходная концентрация  $y_n$ , то уравнение типа (10.43) будет получено из материального баланса для контура, замкнутого на концевое сечение “0”.

Для построенной рабочей линии характерны все особенности и ограничения, рассмотренные в разд.10.7 применительно к одиночному противоточному устройству. В частности, остается правомерным понятие о минимальном потоке второй (нецелевой) фазы.

На рабочей линии, ограниченной точками  $y_0, x_n$  и  $y_n, x_0$ , предполагается определенное число ступеней, соединенных в противоточную схему. Отдельные ступени этой цепочки на диаграмме  $y - x$  предстанут в виде последовательно расположенных прямоугольных треугольников, опирающихся своими гипотенузами на рабочую линию (рис. 10.33,б). При этом для реальной ситуации размеры этих треугольников могут быть определены аналитически (в случае прямой линии равновесия — по материальным балансам и пропускным способностям каждой ступени) или графически (в случае кривой равновесной линии — методика расчета для ИП и прямого тока фаз изложена в разд. 10.8.1 и 10.8.2). Это весьма громоздкая процедура, требующая знания коэффициентов массопередачи  $k_x$  или  $k_y$  и поверхности межфазного контакта в каждой  $i$ -й ступени  $f_i$  (при этом  $k_i$  и  $f_i$  могут различаться от ступени к ступени, потому и размеры треугольников могут быть разными — см. рис. 10.33,б). Отсутствие достоверных сведений об этих величинах заставляет технологов идеализировать ситуацию — рассматривать теоретические ступени с идеальным контактом и равновесными выходными концентрациями на каждой, т.е. полагать  $k_x f_i \rightarrow \infty$ , а затем вводить поправку на отличие реального процесса от идеального — потокового.

Построение теоретических ступеней демонстрируется на рис. 10.34 применительно к кривой линии равновесия (общий случай). Переход от некой  $i$ -й ступени к  $(i + 1)$ -й трактуется следующим образом (рис. 10.34,а). Будем вести построение от точки  $M$  (сечение с концентрацией  $x_i$ ) в несколько этапов — соответственно схеме на рис. 10.32:

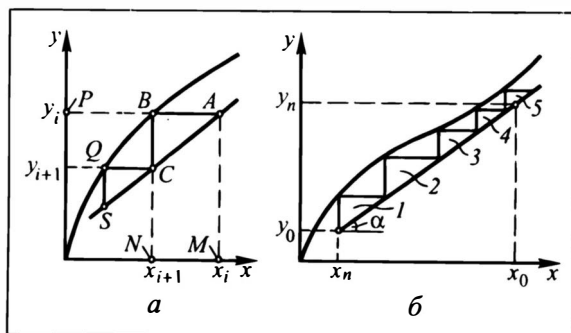


Рис. 10.34. Ступенчатый противоток: теоретические ступени в диаграмме  $y - x$ .  
 а — интерпретация теоретической ступени, б — построение теоретических ступеней

— находим (пересечением с вертикалью  $x_i$ ) на рабочей линии цепочки начальную точку линии сопряженных концентраций для  $i$ -го сечения  $A(y_i, x_i)$ , причем концентрации  $y_i$  отвечает точка  $P$  на оси  $y$ ;

— находим равновесную с  $y_i$  выходную концентрацию  $x_{i+1}$ , она соответствует точке  $B$ , лежащей на равновесной кривой, и точке  $N$  на оси  $x$ ;

— устанавливаем конечную точку сопряженных концентраций в сечении  $(i + 1)$ :  $C(y_{i+1}, x_{i+1})$ .

Последовательный переход  $M \rightarrow A \rightarrow P \rightarrow B \rightarrow N \rightarrow C$  и есть построение одной теоретической ступени, иначе — переход от сечения  $i$  (точка  $A$ ) к сечению  $i + 1$  (точка  $C$ ). Разумеется, нет необходимости фиксировать точки  $M$ ,  $P$  и  $N$  — достаточно просто построить треугольник  $ABC$  между рабочей и равновесной линиями. Переход к следующему сечению (построение следующей теоретической ступени) обозначится треугольником  $CQS$ . Число таких прямоугольных треугольников в заданном диапазоне изменения концентраций от  $x_0$  до  $x_n$  и есть число теоретических ступеней  $n_T$ , необходимых для обеспечения процесса. В задачах проектирования при построении может получиться “дробное” значение  $n_T$ ; его следует округлить в сторону ближайшего большего, чтобы гарантировать некоторый запас. В задачах эксплуатации известны наклон рабочей линии, ее границы (вертикаль  $x_0$ , горизонталь  $y_0$ ) и число ступеней  $n_T$  (будем пока считать известным число теоретических ступеней). В случае кривой линии равновесия положение рабочей линии (с определением выходных концентраций  $y_n$  и  $x_n$ ) можно установить лишь подбором. Проводится произвольно, но с заданными ограничениями ( $\text{tg} \alpha = L/D$ ;  $y_0$  и  $x_0$ ) рабочая линия; строятся теоретические ступени. Если их число совпадает с заданным  $n_T$ , то задача решена; если нет, то проводится новая рабочая ли-



ния, и так — до совпадения построенного и заданного значений  $n_T$ . В случае *прямой* линии равновесия задача решается аналитически.

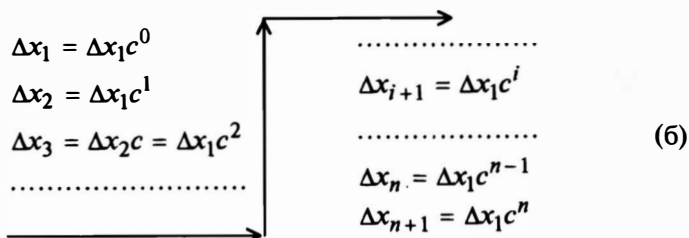
### 10.12.2. Аналитический расчет идеального процесса

Расчетная схема процесса с прямой линией равновесия (угол ее наклона  $\theta$  отвечает  $\operatorname{tg} \theta = m$ ) и рабочей линией (угол  $\alpha$ , причем  $\operatorname{tg} \alpha = L/D$ ) представлена на рис. 10.35. Крайние точки рабочей линии соответствуют парам конечных концентраций  $y_n$ ,  $x_0$  и  $y_0$ ,  $x_n$ . Между равновесной и рабочей линиями построены теоретические ступени — треугольники, их счет условимся вести от точки с координатами  $(y_n, x_0)$ : 1, 2, ...,  $i$ ,  $i+1$ , ...,  $n$ . Соответственно пометим отрезки — от  $\Delta x_1$  до  $\Delta x_n$  и  $\Delta x_{n+1} = x_n - x_0^P$  (последний отрезок не входит в счет числа ступеней, он лишь характеризует движущую силу на нижнем конце системы, изображенной на рис. 10.32). Пометим также отрезок  $\Delta y_i$  — именно он послужит базой для установления соотношения между соседними отрезками  $\Delta x_{i+1}$  и  $\Delta x_i$ . Из треугольника  $i$ :  $\Delta y_i = \Delta x_i \operatorname{tg} \alpha = \Delta x_i (L/D)$ ; из треугольника, расположенного над ступенью  $i+1$ :  $\Delta y_i = \Delta x_{i+1} \operatorname{tg} \theta = \Delta x_{i+1} m$ . Приравняем выражения для  $\Delta y_i$ :

$$\Delta x_i \frac{L}{D} = \Delta x_{i+1} m \quad \text{и} \quad \frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_i} = \frac{L}{mD} = c, \quad (\text{a})$$

причем  $c = a/b$  представляет собой *безразмерное отношение пропускных способностей потоковых стадий массопереноса* (символы введены в разд. 7.7 и 10.6); иногда  $c$  называют **фактором массопереноса**.

Соотношение (a) справедливо для двух любых соседних ступеней. Поэтому, начиная с движущей силы в первом сечении  $\Delta x_1 = x_0 - x_n^P$ , запишем



$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= \Delta x_1 c^0 \\ \Delta x_2 &= \Delta x_1 c^1 \\ \Delta x_3 &= \Delta x_2 c = \Delta x_1 c^2 \\ &\dots \\ \Delta x_{i+1} &= \Delta x_1 c^i \\ &\dots \\ \Delta x_n &= \Delta x_1 c^{n-1} \\ \Delta x_{n+1} &= \Delta x_1 c^n \end{aligned} \quad (\text{б})$$

Последовательность (б) позволяет подойти к решению задач *проектирования* (определение числа теоретических ступеней  $n = n_T$ ) и *эксплуатации* (определение неизвестных выходных концентраций при заданном  $n_T$ ).

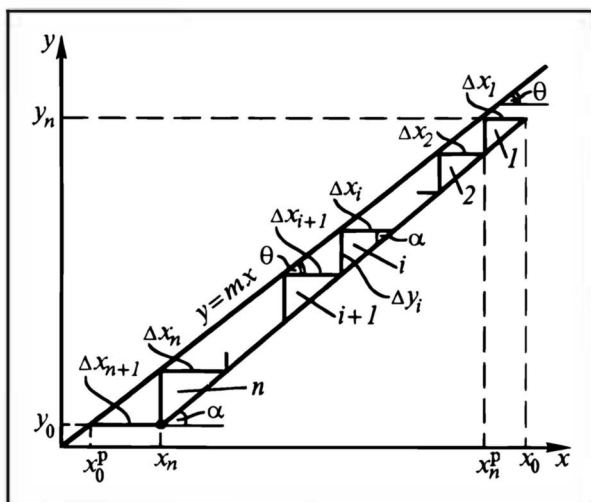


Рис. 10.35. К аналитическому расчету ступенчато-противоточного процесса при идеальном контакте фаз

**Задача проектирования** решается на базе последней строки последовательности (б):

$$n_T = \frac{\ln \frac{\Delta x_{n+1}}{\Delta x_1}}{\ln c} = \frac{\ln \frac{x_n - x_0^p}{x_0 - x_n^p}}{\ln(L / mD)} = \frac{\ln \frac{x_0 - x_n^p}{x_n - x_0^p}}{\ln(mD / L)}, \quad (10.44)$$

причем в проектной задаче параметры рабочей линии (как и равновесной) заданы, поэтому все величины в правой части известны.

На практике ступенчатый противоток нередко применяется для массообменных процессов с очень высокой степенью завершенности (извлечения, очистки и т.п.). В этом случае цепочка, как правило, состоит из большого числа аппаратов  $n = n_T$ , а потоки фаз удобно выбрать так, чтобы рабочая линия была примерно *параллельна* равновесной. Тогда  $c = 1$ , поскольку  $L/D = m$ ; при этом  $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_i = \Delta x_{n+1} = \Delta x = \text{const}$ . Правая часть формулы (10.44) дает *неопределенность* типа  $0/0$ , но в математическом раскрытии ее нет необходимости: сумма  $n$  одинаковых отрезков равна (см. рис.10.35) полному диапазону концентраций  $x_0 - x_n$ . Следовательно, при  $c = 1$

$$n_T = \frac{x_0 - x_n}{\Delta x} = \frac{x_0 - x_n}{x_0 - x_n^p} = \frac{x_0 - x_n}{x_0 - y_n / m}. \quad (10.44a)$$

**Задача эксплуатации** решается путем сложения последовательности (6), кроме последнего слагаемого. Получается геометрическая прогрессия, ее сумма определяется по известной формуле:

$$\sum_{i=1}^n \Delta x_i = x_0 - x_n = \Delta x_1 (1 + c + c^2 + \dots + c^{n-1}) = \Delta x_1 \frac{c^n - 1}{c - 1}; \quad (в)$$

разумеется, при  $c < 1$  величины в числителе и в знаменателе следует поменять местами.

Чтобы найти  $x_n$ , используем связь  $\Delta x_{n+1} \equiv x_n - x_0^p = \Delta x_1 c^n$  и подставим в (в) величину  $\Delta x_1 = (x_n - x_0^p)/c^n$ :

$$x_0 - x_n = \frac{x_n - x_0^p}{c^n} \frac{c^n - 1}{c - 1},$$

откуда

$$x_n = x_0 \frac{c^{n+1} - c^n}{c^{n+1} - 1} + x_0^p \frac{c^n - 1}{c^{n+1} - 1}. \quad (10.45)$$

Задачу эксплуатации можно считать решенной, поскольку  $y_n$  теперь легко определяется из материального баланса (10.18).

Решение задачи эксплуатации целесообразно представить через пропускные способности ступенчато-противоточной цепочки аппаратов  $M/\Delta x_*$ , где  $M = L(x_0 - x_n)$ , а  $x_* = x_0 - x_0^p$ . С этой целью вычтем из  $x_0$  левую и правую части равенства (10.45):

$$x_0 - x_n = x_0 \left( 1 - \frac{c^{n+1} - c^n}{c^{n+1} - 1} \right) - x_0^p \left( \frac{c^n - 1}{c^{n+1} - 1} \right) = (x_0 - x_0^p) \frac{c^n - 1}{c^{n+1} - 1} = \Delta x_* \frac{c^n - 1}{c^{n+1} - 1}. \quad (г)$$

Умножив теперь обе части равенства на  $L$ , получим в привычной форме для  $c > 1$  или  $c < 1$

$$\frac{L(x_0 - x_n)}{\Delta x_*} = \frac{M}{\Delta x_*} = \frac{c^n - 1}{c^{n+1} - 1} L \quad \text{или} \quad \frac{M}{\Delta x_*} = \frac{1 - c^n}{1 - c^{n+1}} L. \quad (10.46)$$

Межфазный поток вещества составляет

$$M = \frac{c^n - 1}{c^{n+1} - 1} L \Delta x_*. \quad (10.46a)$$

В случае  $c = 1$  формулы (10.45), (10.46) содержат неопределенность. Чтобы раскрыть ее, используем правило Лопиталья, беря производные по  $c$  и затем устремляя  $c$  к 1. Тогда

$$\lim_{c \rightarrow 1} \frac{c^{n+1} - c^n}{c^{n+1} - 1} = \lim_{c \rightarrow 1} \frac{\frac{d}{dn}(c^{n+1} - c^n)}{\frac{d}{dn}(c^{n+1} - 1)} = \lim_{c \rightarrow 1} \frac{(n+1)c^n - nc^{n-1}}{(n+1)c^n - 0} =$$

$$= \frac{(n+1) - n}{n+1} = \frac{1}{n+1}; \quad (\text{д}')$$

соответственно (опуская аналогичные промежуточные преобразования)

$$\lim_{c \rightarrow 1} \frac{c^n - 1}{c^{n+1} - 1} = \frac{n}{n+1}. \quad (\text{д}'')$$

С учетом (д) формула (10.45) принимает вид

$$x_n = x_0 \frac{1}{n+1} + x_0^p \frac{n}{n+1}, \quad (10.45a)$$

а формулы (10.46) и (10.46a) —

$$\frac{M}{\Delta x_*} = \frac{n}{n+1} L \quad \text{и} \quad M = \frac{n}{n+1} L \Delta x_*. \quad (10.46a)$$

Таким образом, используя понятие о пропускных способностях, можно в задачах эксплуатации найти межфазный поток переносимого вещества (далее — и выходные концентрации фазовых потоков), причем без предварительного определения профиля концентраций по цепочке аппаратов.

### 10.12.3. Аналитический расчет реального процесса

Ступенчато-противоточные процессы класса 3(2-2)1 поддаются аналитическому расчету в случае линейности составляющих, в том числе и равновесия ( $m = \text{const}$ ). С помощью получаемых соотношений возможно решать задачи эксплуатации и проектирования. Ниже вехи и результаты такого расчета представлены для простейшей цепочки из двух *одинаковых* аппаратов и далее обобщены на ступенчато-противоточную схему с числом ступеней  $n$ .

#### *Ступенчатый противоток для цепочки из двух аппаратов*

В целях общности с последующим изложением входные концентрации потоков *в цепочку* (рис.10.36) снабдим индексами “0”, выходные — индексами “ $n$ ” (для цепочки из двух аппаратов  $n = 2$ ). Пусть и в этом случае вещество переходит из фазы “ $x$ ” в фазу “ $y$ ”. Анализ будем вести в терминах фазы “ $x$ ”. Тогда поток фазы “ $y$ ” составляет  $mD$ , а концентрация вещества, соответствующая  $y_i$ , запишется  $x_i^p$ .

Примем (эта ситуация весьма близка к широко встречающейся на практике), что аппараты *одинаковы*: в них идентичны СКК (хотя тип их — ИП фаз, прямо-ток и т.д. — для анализа безразличен) и равны пропускные способности, в частности  $k_{x1f1} = k_{x1f2} \equiv k_{xf}$ , индексы при  $k_x$  и  $f$  — номера аппаратов. Очевидно, что

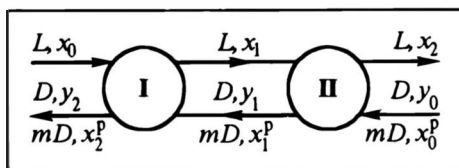


Рис. 10.36. К аналитическому расчету реального ступенчато-противоточного процесса: цепочка из двух аппаратов (I и II)

в случае двух аппаратов  $k_x f = k_x F/2$ , где  $f$  и  $F$  — поверхности межфазного контакта в одном и во всех (здесь — двух) аппаратах цепочки. Этот простейший вариант ступенчатого противотока характеризуется одинаковыми обобщенными пропускными способностями отдельных аппаратов  $r_{*I} = r_{*II} = r_*$ , базирующимися по (10.37) на разных входных концентрациях для каждого из них:

$$r_* = \frac{M_I}{(x_0 - x_1^p)k_x f} = \frac{M_{II}}{(x_1 - x_0^p)k_x f}. \quad (10.47)$$

Разумеется, в зависимости от СКК в аппаратах величина  $r_*$  будет выражаться по-разному; здесь важно, что эти выражения одинаковы для всех (при  $n = 2$  — для обоих) аппаратов цепочки.

В (10.47) содержатся промежуточные (с позиций цепочки аппаратов) концентрации  $x_1$  и  $x_1^p$ ; их надо исключить, оставив лишь входные — для цепочки — концентрации  $x_0$  и  $x_0^p$ . Сделать это можно с помощью материальных балансов для каждого из аппаратов:

$$M_I = L(x_0 - x_1), \text{ так что } x_1 = x_0 - M_I/L; \quad (e)$$

$$M_{II} = D(y_1 - y_0) = mD(x_1^p - x_0^p), \text{ так что } x_1^p = x_0^p - M_{II}/mD. \quad (ж)$$

Выразим  $M_I$  и  $M_{II}$  из (10.47) и подставим значения  $x_1$  и  $x_1^p$ :

$$M_I = (x_0 - x_1^p)k_x f r_* = \left(x_0 - x_0^p - \frac{M_{II}}{mD}\right)k_x f r_*, \quad (з)$$

$$M_{II} = (x_1 - x_0^p)k_x f r_* = \left(x_0 - \frac{M_I}{L} - x_0^p\right)k_x f r_*. \quad (и)$$

В более лаконичной форме, учитывая, что  $x_0 - x_0^p = \Delta x$  — входная движущая сила для цепочки аппаратов,  $k_x F/L = a$ ,  $k_x F/mD = b$  и  $f = F/2$ , запишем

$$\left. \begin{aligned} M_I &= \Delta x \cdot k_x f r_* - \frac{b}{2} r_* M_{II} \\ M_{II} &= \Delta x \cdot k_x f r_* - \frac{a}{2} r_* M_I \end{aligned} \right\} \quad (к)$$

Решая систему (к) относительно  $M_I$  и  $M_{II}$  (например, методом подстановки), получаем

$$M_I = \frac{k_x f - \frac{b}{2} k_x f r_*}{1 - \frac{ab}{4} r_*^2} \Delta x \cdot r_* \quad (л)$$

$$M_{II} = \frac{k_x f - \frac{a}{2} k_x f r_*}{1 - \frac{ab}{4} r_*^2} \Delta x \cdot r_* \quad (м)$$

Полный межфазный поток вещества в цепочке из двух аппаратов составляет  $M = M_I + M_{II}$ ; тогда из (л), (м) с учетом  $k_x f = k_x F/2$  имеем

$$\frac{M}{\Delta x_*} = \frac{2k_x f - \frac{1}{2}(b+a)k_x f r_*}{1 - \frac{ab}{4} r_*^2} \quad r_* = \frac{1 - (b+a)\frac{r_*}{4}}{1 - \frac{ab}{4} r_*^2} k_x F r_* \quad (10.48)$$

— это полная пропускная способность цепочки из двух аппаратов.

Как и в случае одиночных массообменных устройств, удобно ввести понятие об обобщенной пропускной способности сети (здесь — цепочки)  $R_*$ , представляющей собой отношение пропускных способностей — полной  $M/\Delta x_*$  и поверхностной стадий  $k_x F$ :

$$R_* \equiv \frac{M}{\Delta x_* k_x F} = \frac{1 - (b+a)\frac{r_*}{4}}{1 - \frac{ab}{4} r_*^2} \quad r_* = \frac{4 - (b+a)r_*}{4 - ab r_*^2} \quad r_* \quad (10.49)$$

В таком же виде обобщенная пропускная способность записывается на языке фазы “у”:  $R_* \equiv M/(\Delta y_* k_y F)$ . С помощью (10.49) решаются задачи эксплуатации и проектирования для двухступенчатой цепочки. Пути таких решений показаны ниже для противоточной цепочки из  $n$  аппаратов.

### *Ступенчатый противоток для цепочки из $n$ одинаковых аппаратов*

Анализ процесса для  $n$  аппаратов является весьма громоздким, поэтому ограничимся в учебнике результирующей формулой для обобщенной пропускной способности цепочки:

$$R_* \equiv \frac{M}{\Delta x_* k_x F} = \frac{\left(1 - \frac{b}{n} r_*\right)^n - \left(1 - \frac{a}{n} r_*\right)^n}{a \left(1 - \frac{b}{n} r_*\right)^n - b \left(1 - \frac{a}{n} r_*\right)^n} \quad (10.50)$$

Легко убедиться (путем подстановки соответствующих значений  $n$ ), что  $R_*$  по (10.50) при  $n = 1$  тождественно превращается в  $r_*$ , а при  $n = 2$  — в  $R_*$  по (10.49).

Из общих соображений очевидно, что при наращивании числа аппаратов в цепочке поток переносимого вещества  $M$  будет возрастать из-за увеличения общей поверхности контакта  $F$  и пропускной способности  $k_x F$ .

Представляет интерес трансформация формулы (10.50) при  $n \rightarrow \infty$ , если увеличение числа аппаратов происходит не за счет их наращивания, а при сохранении общей поверхности контакта  $F$  путем ее дробления на  $n$  частей. В этом случае поверхностная пропускная способность отдельной ступени  $k_x f = k_x F/n$  будет стремиться к нулю при  $k_x F = \text{const}$ . Но при малых  $k_x f$  поверхностная стадия становится лимитирующей в массопереносе, так что пропускная способность отдельного аппарата — обозначим ее  $(M/\Delta x_*)_0$  — будет равна пропускной

способности его поверхностной стадии  $k_x f$ . Поэтому при  $n \rightarrow \infty$  получится  $r_* = \frac{(M / \Delta x_*)_0}{k_x f} = 1$ . Значит, согласно (10.50), при  $n \rightarrow \infty$  для всей цепочки аппаратов

$$R_* = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\left(1 - \frac{b}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n}{a \left(1 - \frac{b}{n}\right)^n - b \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n} \right\}. \quad (\text{н})$$

Входящие в (н) фрагменты типа  $\left(1 - \frac{b}{n}\right)^n$  при переходе к пределу  $n \rightarrow \infty$

упрощаются на основе замечательного предела  $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{b}{n}\right)^n = \lim_{|n/b| \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-b}{n}\right)^{(-n/b)(-b)} = e^{-b}.$$

Тогда

$$R_* = \frac{e^{-b} - e^{-a}}{ae^{-b} - be^{-a}} = \frac{1 - e^{b-a}}{a - be^{b-a}} \quad (\text{о})$$

и

$$\frac{M}{\Delta x_*} \equiv R_* k_x F = \frac{1 - e^{b-a}}{a - be^{b-a}} k_x F = \frac{e^{b-a} - 1}{be^{b-a} - a} k_x F, \quad (\text{п})$$

что совпадает с (10.40) для противотока в отдельном массообменном устройстве. Таким образом, *дробление ступеней в ступенчато-противоточной схеме в пределе тождественно переходу к чисто противоточному процессу — независимо от СКК в отдельных аппаратах цепочки.*

Пропускную способность ступенчато-противоточной цепочки  $M / \Delta x_*$  при конечном числе аппаратов  $n$  тоже удобно выразить через пропускные способности отдельных аппаратов  $(M / \Delta x_*)_0$ . Подчеркнем, что индекс “0” указывает, что  $M$  и  $\Delta x_*$  в скобках при наличии этого индекса относятся к *отдельному* аппарату. Раскроем смысл некоторых величин, входящих в (10.50):  $a \equiv k_x F / L$  и  $a/n = k_x f / L$ ,  $b \equiv k_x F / mD$  и  $b/n = k_x f / mD$ ;  $r_* = \frac{(M / \Delta x_*)_0}{k_x f}$ ;  $\frac{a}{n} r_* = \frac{(M / \Delta x_*)_0}{L}$ ;  $\frac{b}{n} r_* = \frac{(M / \Delta x_*)_0}{mD}$ . Тогда

формула (10.50) преобразуется к виду

$$\frac{M}{\Delta x_*} \equiv R_* k_x F = \frac{\left[1 - \frac{(M / \Delta x_*)_0}{mD}\right]^n - \left[1 - \frac{(M / \Delta x_*)_0}{L}\right]^n}{\frac{1}{L} \left[1 - \frac{(M / \Delta x_*)_0}{mD}\right]^n - \frac{1}{mD} \left[1 - \frac{(M / \Delta x_*)_0}{L}\right]^n}. \quad (10.51)$$

Это выражение является базовым для решения задач эксплуатации и проектирования применительно к прямой линии равновесия ( $m = \text{const}$ ).

Задача эксплуатации решается *прямо* на основе формулы (10.51): в правой части стоят известные величины, поскольку потоки фаз  $L$  и  $D$  — известны, число аппаратов в цепочке  $n$  — тоже, пропускные способности отдельных аппаратов  $(M / \Delta x_*)_0$  уже найдены (см. разд.10.10). При известном  $\Delta x_* = x_0 - x_0^p$  определяется поток вещества  $M$ , а с помощью материальных балансов (10.18) — выходные концентрации  $x_n$  и  $y_n$ .

Путь решения задачи проектирования зависит от ее конкретной постановки. Чаще всего заданы поток и концентрации (входная и выходная) целевой фазы и входная концентрация второй фазы. Тогда технико-экономический анализ (сопоставление капитальных и эксплуатационных затрат и нахождение условий минимума суммарных затрат — см. разд.10.7.2) позволяет найти поток второй (нецелевой) фазы и рассчитать из материального баланса (10.18) выходную концентрацию вещества в ней. Определению здесь подлежит необходимое число аппаратов  $n$  (реальных!) в ступенчато-протиточной цепочке.

Для разрешения уравнения (10.51) относительно  $n$  обозначим (в целях сокращения записи) первое и второе слагаемые в числителе соответственно  $B$  и  $A$ ; тогда

$$\frac{M}{\Delta x_*} = \frac{B - A}{\frac{B}{L} - \frac{A}{mD}}. \quad (10.51a)$$

Выразим отсюда отношение  $B / A = \left[ \frac{1 - (M / \Delta x_*)_0 / mD}{1 - (M / \Delta x_*)_0 / L} \right]^n$ :

$$\frac{M}{\Delta x_*} \frac{1}{L} \frac{B}{A} - \frac{M}{\Delta x_*} \frac{1}{mD} = \frac{B}{A} - 1 \quad \text{и} \quad \frac{B}{A} = \frac{1 - \frac{M/\Delta x_*}{mD}}{1 - \frac{M/\Delta x_*}{L}}.$$

Таким образом,

$$\frac{1 - \frac{M/\Delta x_*}{mD}}{1 - \frac{M/\Delta x_*}{L}} = \left[ \frac{1 - \frac{(M/\Delta x_*)_0}{mD}}{1 - \frac{(M/\Delta x_*)_0}{L}} \right]^n,$$



откуда искомое (необходимое для осуществления процесса) число ступеней составляет

$$n = \frac{1 - \frac{M/\Delta x^*}{\ln \frac{mD}{1 - \frac{M/\Delta x^*}{L}}}}{1 - \frac{(M/\Delta x^*)_0}{\ln \frac{mD}{1 - \frac{(M/\Delta x^*)_0}{L}}}}. \quad (10.52)$$

Подчеркнем, что формула (10.52) дает необходимое число **реальных** ступеней (аппаратов, тарелок и т.п. индивидуальных массообменных устройств).

Числитель формулы (10.52) удобно выразить через входные и выходные концентрации для цепочки аппаратов — в задачах проектирования они известны. Преобразуем фрагменты числителя с учетом материальных балансов — см. выражения (а) в разд.10.9.1:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{M/\Delta x^*}{mD} &= \frac{mD\Delta x^* - M}{mD\Delta x^*} = \frac{mD\Delta x^* - D(y_n - y_0)}{mD\Delta x^*} = \\ &= \frac{mD(x_0 - x_0^p) - mD(x_n^p - x_0^p)}{mD\Delta x^*} = \frac{x_0 - x_n^p}{\Delta x^*} \end{aligned} \quad (o)$$

и более коротко:

$$1 - \frac{M/\Delta x^*}{L} = \frac{L\Delta x^* - M}{L\Delta x^*} = \frac{L(x_0 - x_0^p) - L(x_0 - x_n)}{L\Delta x^*} = \frac{x_n - x_0^p}{\Delta x^*}. \quad (п)$$

Подставляя (о) и (п) в (10.52), получаем после сокращений

$$n = \frac{\ln \frac{x_0 - x_n^p}{x_n - x_0^p}}{1 - \frac{(M/\Delta x^*)_0}{\ln \frac{mD}{1 - \frac{(M/\Delta x^*)_0}{L}}}}. \quad (10.52a)$$

Это выражение справедливо для **любых** СКК в отдельных ступенях (напомним: **одинаковых** для разных аппаратов в цепочке). Знаменатель  $Z_n$  в (10.52) и (10.52a) характеризует СКК в ступенях: конкретное выражение  $Z_n$  будет своим для каждого

из СКК в ступенях (ИП фаз, прямоток, противоток и др.). Наиболее просто  $Z_n$  выражается в случае ИП фаз — соответственно формуле (10.36). В этом случае фрагменты знаменателя запишутся:

$$1 - \frac{(M/\Delta x_*)_0}{mD} = 1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{L} + \frac{1}{k_x f} + \frac{1}{mD}\right)mD} = \frac{\frac{1}{k_x f} + \frac{1}{L}}{\frac{1}{L} + \frac{1}{k_x f} + \frac{1}{mD}} \quad (p)$$

и

$$1 - \frac{(M/\Delta x_*)_0}{L} = 1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{L} + \frac{1}{k_x f} + \frac{1}{mD}\right)L} = \frac{\frac{1}{k_x f} + \frac{1}{mD}}{\frac{1}{L} + \frac{1}{k_x f} + \frac{1}{mD}}. \quad (c)$$

В результате для ИП фаз знаменатель, после очевидных сокращений, принимает вид

$$Z_n = \ln \frac{\frac{1}{k_x f} + \frac{1}{L}}{\frac{1}{k_x f} + \frac{1}{mD}} = \ln \frac{mD}{L} \left( \frac{L + k_x f}{mD + k_x f} \right). \quad (r)$$

Окончательно:

$$n = \frac{\ln \frac{x_0 - x_n^p}{x_n - x_0^p}}{\ln \frac{mD}{L} \frac{L + k_x f}{mD + k_x f}}. \quad (10.53)$$

Заметим, что под знак логарифма в знаменателе входит безразмерное отношение потоковых пропускных способностей  $mD/L = a/b = c'$ ; второй сомножитель также может быть представлен в виде соответствующих отношений  $a$  и  $b$ , но уже с участием пропускной способности поверхностной стадии  $k_x f$ .

Если ступени характеризуются крайне малыми поверхностями контакта  $k_x f$ , то они не эффективны, так что для обеспечения процесса, т.е. получения заданных выходных концентраций, потребуется много ступеней. При  $k_x f \rightarrow 0$  подлогарифменное выражение в знаменателе стремится к единице, а  $Z_n = \ln 1 \rightarrow 0$ ; число необходимых ступеней устремляется к бесконечности.

Если, наоборот, контакт фаз в каждой ступени очень эффективен,  $k_x f \rightarrow \infty$ , то:

— фазы из каждой ступени будут уходить в равновесии (ступени будут *теоретическими*, или *идеальными*);

— под знаком  $\ln$  в знаменателе выражения (10.53) остается безразмерное отношение потоков  $mD/L$ , т.е. задача потеряет поверхностный характер;

— для обеспечения процесса в заданном диапазоне концентраций (от  $x_0$  до  $x_n$ ) при фиксированном отношении  $mD/L$  потребуется наименьшее число ступеней:

$$n = n_T = \frac{\ln \frac{x_0 - x_n^P}{x_n - x_0^P}}{\ln(mD / L)}. \quad (10.53a)$$

Это выражение справедливо для ступенчато-противоточных цепочек при всех рассмотренных СКК в отдельных массообменных устройствах с непрерывным контактом фаз, кроме противоточных.

#### 10.12.4. Оценка эффективности функционирования ступенчато-противоточной цепочки реальных массообменных аппаратов

В разд. 10.12.1 и 10.12.2 изложены применяемые на практике методы определения числа *теоретических* ступеней  $n_T$  при заданных концевых концентрациях (задачи проектирования), потока переданного вещества и выходных концентраций при известном  $n_T$  (задача эксплуатации). Между тем при проектировании и эксплуатации технологических схем в конечном счете необходимо оперировать *реальным* числом ступеней  $n$ . В разд. 10.12.3 даны необходимые для этого соотношения; однако они имеют ограничения:

— справедливы только для линейных процессов, применительно к классу 3(2-2)1 — для прямой линии равновесия (добавим: и для одинаковых СКК в аппарате цепочки);

— предполагают знание кинетических поверхностных характеристик массопереноса типа  $k_{xf}$ ,  $k_xF$ .

Первое обстоятельство ограничивает круг технологических процессов, для которых возможен аналитический расчет. Второе (для многих реальных ситуаций, когда поверхность межфазного контакта неизвестна) — делает такие расчеты либо невозможными, либо приближенными. Здесь достоверно лишь число *теоретических* ступеней  $n_T$ . Переход от  $n_T$  к числу *реальных* ступеней  $n$  осуществляют с помощью **коэффициента полезного действия сети аппаратов**  $\eta_c$ . Этот КПД определяется как отношение теоретического и реального числа ступеней при одинаковой эффективности сети (цепочки):

$$\eta_c \equiv n_T/n, \quad \text{откуда} \quad n = n_T/\eta_c. \quad (10.54)$$

Численные значения  $\eta_c$  устанавливают эмпирически — с помощью специального эксперимента или обследования многочисленных работающих аппаратов. В наиболее тщательных исследованиях устанавливают зависимость  $\eta_c$  от конструктивных особенностей аппарата (или группы аппаратов) и параметров процесса.

Подчеркнем, что понятие о КПД сети, цепочки аппаратов или, что то же самое, в случае линейного описания процесса — отдельного массообменного устройства является *вынужденным шагом*, обусловленным прежде всего незнанием (неточным знанием) величины поверхности контакта  $f$ ,  $F$ .

В науке ПАХТ исторически сложилось, что процессы массообмена в одноконтурном устройстве с непрерывным контактом фаз принято преимущественно рассчитывать в терминах *поверхностной задачи*, т.е. на основе поверхности контакта фаз (по величине типа  $k_x F$  или методами, связанными с определением  $k_x$  и  $F$ ). В то же время массообмен в сетях аппаратов (прежде всего в ступенчато-противоточных цепочках) рассчитывают в терминах *смешанной потоковой задачи* (по величинам типа  $L$  и  $D$ ,  $mD$ ) — на основе теоретических ступеней с использованием КПД, призванного отразить степень приближения к равновесию. Связи этих двух подходов не прослеживаются.

Сопоставление аналитических выражений для  $n_T$  и  $n$  позволяет установить количественную связь между  $\eta_c$  и пропускной способностью  $k_x F$ . Важно: эта связь предполагает полную сегрегацию фазовых потоков, т.е. отделение одной фазы от другой, и движение их между аппаратами в строго заданном противоточном направлении (без обратного перемешивания за счет захвата некоторого количества другой фазы), как это показано на рис.10.32 и 10.36. Используя выражения (10.44) и (10.53), найдем связь  $\eta_c$  и  $k_x F$  для наиболее простого случая — ИП обеих фаз:

$$\eta_c \equiv \frac{n_T}{n} = \frac{\ln \frac{mD}{L} \frac{L + k_x f}{mD + k_x f}}{\ln(mD/L)} = \frac{\ln \frac{L}{mD} \frac{mD + k_x f}{L + k_x f}}{\ln(L/mD)} = \frac{\ln \frac{1+b}{1+a}}{\ln c} \quad (10.55)$$

С ростом  $k_x f$  по (10.55)  $\eta_c$  увеличивается, и при  $k_x f \rightarrow \infty$  получается  $\eta_c \rightarrow 1$ , что соответствует физическому смыслу КПД.

Не представляет трудностей выразить  $k_x f$  в зависимости от  $\eta_c$  в явном виде. Из (10.55), имея в виду  $L/mD \equiv c$ , получим из предпоследнего фрагмента

$$\eta_c \ln c = \ln c \frac{mD + k_x f}{L + k_x f} \rightarrow c^{\eta_c} = c \frac{mD + k_x f}{L + k_x f} \rightarrow L c^{\eta_c} + k_x f c^{\eta_c} = mD c + k_x f c.$$

Отсюда, с учетом  $c(mD/L) \equiv 1$ , имеем

$$k_x f = \frac{mD c - L c^{\eta_c}}{c^{\eta_c} - c} = L \frac{1 - c^{\eta_c}}{c^{\eta_c} - c} = L \frac{c^{\eta_c} - 1}{c - c^{\eta_c}} \quad (10.56)$$

Легко показать, что  $\eta_c = 1$  соответствует  $k_x f \rightarrow \infty$  (для этого следует раскрыть неопределенность в правой части, например по Лопиталю).

В случае  $c = 1$  выражения (10.55) и (10.56) содержат неопределенность. Рассмотрим ее:

$$\lim_{c \rightarrow 1} \frac{c^{\eta_c} - 1}{c - c^{\eta_c}} = \lim_{c \rightarrow 1} \frac{\frac{d}{dc}(c^{\eta_c} - 1)}{\frac{d}{dc}(c - c^{\eta_c})} = \lim_{c \rightarrow 1} \frac{\eta_c c^{\eta_c - 1}}{1 - \eta_c c^{\eta_c - 1}} = \frac{\eta_c}{1 - \eta_c}. \quad (y)$$

С учетом (10.56)

$$k_x f = L \frac{\eta_c}{1 - \eta_c} \quad \text{и} \quad \frac{k_x f}{L} \equiv a = \frac{\eta_c}{1 - \eta_c}, \quad \eta_c = \frac{a}{1 + a} = \frac{b}{1 + b}. \quad (ф)$$

Выражение (10.56) позволяет по опытным значениям  $\eta_c$  оценить поверхность контакта ступени (массообменного устройства), точнее – величину  $k_x f$ . Особо просто это сделать, подобрав смесь с прямой линией равновесия и выдержав такое отношение фазовых потоков, чтобы  $L/mD = 1$ .

В случае *кривой* линии равновесия представленные выше соображения приобретают оценочный характер. Кроме того, и при  $m = \text{const}$  неполнота сегрегации фаз (скажем, унос определенного количества капель дискретной фазы потоком сплошной) нарушает принятую модель ступенчатого противотока и делает анализ приближенным. Именно поэтому практически найденные значения  $\eta_c$  нередко отражают не только вскрытую выше связь с  $k_x f$  (или  $k_x F$ ), но и другие трудноопределимые эффекты. По существу, КПД выступает в качестве “коэффициента незнания”, но степень этого незнания при установлении его связи с пропускными способностями  $k_x f$ ,  $L$ ,  $mD$  и их отношениями  $a$ ,  $b$ ,  $c$  становится значительно меньше.

На практике весьма часто встречаются технологические ситуации, когда поверхностный массоперенос и в самом деле не лимитирует процесс массообмена. Иными словами, рабочая линия прамоточного акта массообмена заканчивается (либо рабочая точка в аппарате с ИП фаз располагается) достаточно близко к линии равновесия. Тогда концепцию КПД можно считать прагматически оправданной: наиболее медленные стадии – потоковый перенос вещества; эти стадии в основном контролируют процесс, по ним и надо вести расчет. А поверхностный перенос “почти” завершен, некую его незавершенность позволительно учитывать с помощью КПД, достаточно близкого к 1 (скажем, на уровне 0,7–0,8 и выше в некоторых экстракционных аппаратах).

Но встречаются ситуации, когда КПД далек от 1 (в некоторых абсорбционных аппаратах, например, он ниже 0,1). Это означает, что процесс контролируется в основном поверхностными стадиями массопереноса; поэтому подменять задачу, используя концепцию КПД, здесь вряд ли оправданно. В этих случаях нужно определять и класть в основу расчета поверхностные характеристики массопереноса –  $k_x$  и  $f$ ,  $F$ .

### 10.12.5. О расчете противоточных аппаратов и их цепочек по “методу ВЭТС”

При расчете массообменных противоточных устройств с *непрерывным* контактом фаз (см. разд. 10.8.4) нередко возникают затруднения, связанные с определением поверхности контакта  $F$ . Их пытаются разрешить, подменяя поверхностную либо смешанную задачу практически удобными представлениями, имеющими отдаленное отношение к потоковой задаче.

Отклонение реального процесса от идеального учитывается затем с помощью понятия о Высоте рабочей зоны, Эквивалентной (по эффекту массопереноса, т.е. изменению концентрации в фазе) одной Теоретической Ступени (ВЭТС). Тогда, определив (по диаграмме  $y - x$  в случае кривой линии равновесия и аналитически — в случае прямой) число теоретических ступеней  $n_T$ , далее просто рассчитывают высоту рабочей зоны аппарата  $H$ :

$$H = \text{ВЭТС} n_T. \quad (10.57)$$

Все трудности расчета здесь переносятся на определение ВЭТС, которую выражают в виде эмпирической зависимости от параметров процесса и конструктивных характеристик аппарата.

Метод ВЭТС внешне напоминает определение  $H$  по ВЕП. Однако там учетные характерные особенности контактного массообмена, здесь они игнорируются путем *отказа* от реальной поверхностной модели. Иначе говоря, *математическое описание по методу ВЭТС* (ступенчатая модель массопереноса) *не соответствует физике процесса* (непрерывному контакту фаз). Попытки чисто эмпирического (вне физической модели) учета кинетики процесса в расчетных формулах для ВЭТС — малопродуктивны, сами формулы — ненадежны и непрогнозные при выходе за исследованные в эксперименте диапазоны изменения натуральных параметров процесса и конструктивных характеристик аппаратуры.

К результатам расчетов высоты рабочей зоны аппаратов с непрерывным контактом фаз по методу ВЭТС надо относиться с осторожностью.

## 10.13. ПЕРЕКРЕСТНОЕ СОЕДИНЕНИЕ АППАРАТОВ В СЕТИ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ КЛАССА 3(2-2)1

Типичные схемы перекрестных массообменных процессов были приведены в разд. 10.11 (см. рис. 10.30 — III, IV, V). При этом возможно разбиение потоков любой из фаз или обеих фаз. Расчетная схема ступенчато-перекрестного процесса с разбиением (в качестве примера) фазы “у” представлена на рис. 10.37. Потоки фаз имеют исходные концентрации  $x_0$  и  $y_0$ . Поток фазы “х” с постоянным расходом  $L$  (в расчете на инерт) последовательно проходит через каскад массообменных аппаратов. Фаза “у” отдельными потоками  $D_1, D_2, \dots, D_n$  (в общем случае — различными) проходит через отдельные аппараты, контактируя в каждом с фазой “х”. Из сети (цепочки) аппара-

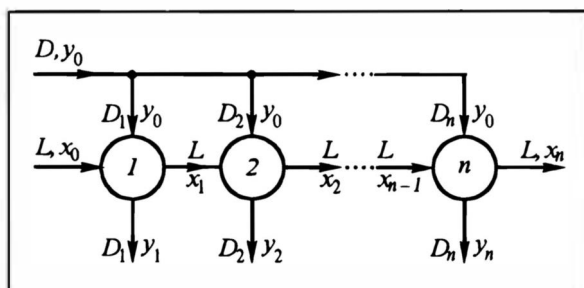


Рис. 10.37. Типовая схема ступенчатого (1, 2, ..., n) перекрестного процесса с разбиением одной фазы

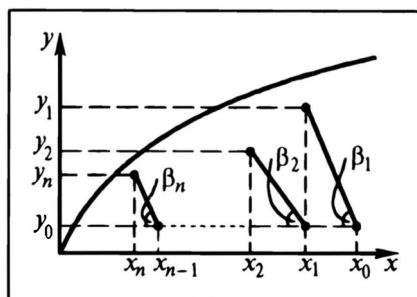


Рис. 10.38. Ступенчатый перекрестный ток: реальные ступени в диаграмме  $y - x$

тов выходят один поток фазы “x” с концентрацией  $x_n$  и  $n$  потоков фазы “y”, каждый со своей выходной концентрацией  $y_1, y_2, \dots, y_n$ ; эти потоки при необходимости могут быть объединены в общий поток (их смешение на схеме не показано).

Диаграмма  $y - x$  для реального ступенчатого перекрестного процесса, соответствующего приведенной выше схеме, изображена на рис. 10.38. Исходные точки рабочих линий для каждой ступени (аппарата) характеризуются *одинаковой* входной концентрацией  $y_0$  фазы “y” (в случае “чистой” фазы, первоначально свободной от переносимого компонента,  $y_0 = 0$ ). В то же время входные концентрации фазы “x” для разных ступеней различны:  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ , причем входная концентрация  $i$ -й ступени есть выходная концентрация предыдущей  $(i - 1)$ -й.

Определение конечной точки рабочей линии (при прямом точном движении фаз в режиме ИВ либо при таком движении одной из фаз, а другой — в режиме ИП) или рабочей точки (при ИП обеих фаз) подробно рассмотрено в разд. 10.7 применительно к *одиночному* аппарату. Для ступенчатых перекрестных схем эти точки отыскиваются соответственно параметрам работы *каждого* аппарата:

— направление линии (угол  $\beta_i$ ) отвечает  $\operatorname{tg} \beta_i = L/D_i$ ,  $D_i$  — поток фазы “y” в  $i$ -й ступени;

— положение конечной (или рабочей) точки на этой линии соответствует отношениям пропускных способностей поверхностной и потоковой стадий в данной ступени.

Разумеется, при одинаковых потоках фазы “у” ( $D_1 = D_2 = \dots = D_i = \dots = D_n$ ) рабочие линии будут параллельны вследствие равенства углов  $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_i = \dots = \beta_n$ . Чем выше пропускные способности поверхностных стадий в аппаратах, тем ближе к равновесной линии располагаются конечные точки для каждой ступени.

Основное затруднение при построении реального процесса в случае *кривой* линии равновесия при известных кинетических характеристиках массопереноса  $k_{xif_i}$  состоит в громоздкости процедуры определения конечных (при ИП обеих фаз — рабочих) точек. Это затруднение снимается в случае *прямой* равновесной линии, когда становится возможным аналитический расчет. Однако на практике часто неизвестны поверхностные пропускные способности  $k_{xif_i}$ ; тогда приходится принимать процесс идеальным (полагая  $k_{xif_i} \rightarrow \infty$ ), осуществляемым в условиях потоковой задачи, а далее учитывать отклонение от реальности с помощью КПД ступени или каких-либо иных поправочных коэффициентов.

Ниже рассмотрен сначала расчет перекрестных схем с идеальным контактом фаз в каждой ступени, а затем продемонстрированы возможности аналитического расчета реального процесса для случая  $m = \text{const}$ .

### 10.13.1. Массоперенос при идеальном контакте фаз в ступенях

**Кривая линия равновесия.** Расчет ступенчатого перекрестного процесса в случае  $m = \text{var}$  ведется графоаналитически. Диаграмма  $y - x$  для *идеального* процесса применительно к разбиению на порции фазы “у” и переходу в нее вещества изображена на рис. 10.39,а. Точки сопряженных выходных концентраций фаз для каждой ступени лежат здесь на линии равновесия.

Направления рабочих линий характеризуются углом наклона  $\beta_i$ , так что  $\text{tg} \beta_i = L/D_i$ . Эти углы для любой ступени *больше*, нежели для одноступенчатого процесса с подачей в аппарат всей фазы “у”:  $D = D_1 + D_2 + \dots + D_n > D_1, D_2, \dots, D_n$  (рабочая линия для такого одноступенчатого процесса для сравнения проведена на диаграмме штрих-пунктиром, конечная концентрация вещества в фазе “х” равна  $x_1$ ). Построение показывает (а расчет для прямой линии равновесия это подтверждает — см. ниже), что эффект в случае разбиения какой-либо фазы выше, чем при контакте обеих фаз в одном аппарате:  $x_n < x_1$ , т.е. фаза “х” здесь в большей мере очищается от переносимого вещества.



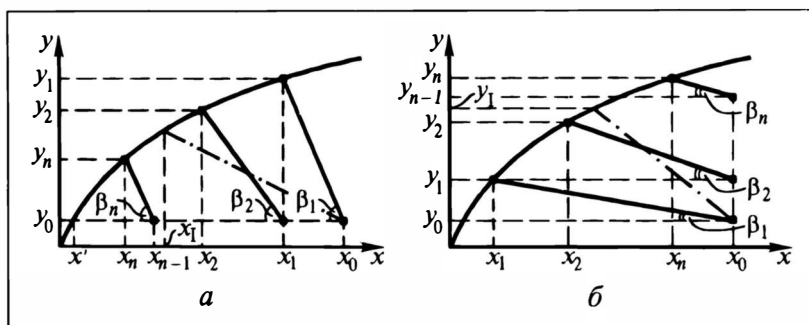


Рис. 10.39. Ступенчато-перекрестная схема: диаграммы для идеального контакта фаз: а — разбиение фазы “у”, б — разбиение фазы “х”

При разбиении фазы “х” расчетная схема аналогична приведенной на рис. 10.37, только здесь уже фаза “у” неизменным потоком последовательно проходит через все аппараты, а фаза “х” делится на потоки  $L_1, L_2, \dots, L_n$ , подаваемые в отдельные аппараты. Рабочие линии для этого варианта изображены на рис. 10.39,б. Здесь углы наклона рабочей линии *меньше*, чем при подаче обеих фаз в один аппарат (рабочая линия тоже показана штрих-пунктиром):  $L = L_1 + L_2 + \dots + L_n > L_1, L_2, \dots, L_n$ , а  $\tan \beta_i = L_i/D$ . Результирующий эффект и здесь выше, чем при контакте потоков  $L$  и  $D$  в одном аппарате:  $y_n > y_1$ , фаза “у” в большей мере насыщается переносимым веществом.

За пределами анализа остаются пока две проблемы:

- какую из фаз целесообразно распределить (разбить);
- каким образом разбиваемую фазу целесообразно распределять между аппаратами (ступенями).

Эти проблемы строго решаются аналитически в случае *прямой* линии равновесия; при  $m = \text{var}$  однозначного ответа нет, так что для каждого конкретного случая к решениям приходят методом проб и ошибок. В оценочном плане можно воспользоваться рекомендациями, вытекающими из анализа для  $m = \text{const}$ , но точное решение здесь зависит от конфигурации кривой равновесия и рабочего диапазона концентраций.

**Прямая линия равновесия.** Рассмотрим для  $m = \text{const}$  сначала процесс в первой ступени, для чего воспользуемся выражением (10.36) для пропускной способности, только применительно к схеме и обозначениям на рис.10.37. Для ИП обеих фаз и идеального их контакта ( $k_{xf} \rightarrow \infty$ )

$$\frac{M}{\Delta x_*} \equiv \frac{M}{x_0 - y_0 / m} \equiv \frac{M}{x_0 - x_0^p} = \frac{1}{\frac{1}{L} + \frac{1}{mD_1}}. \quad (\text{a})$$

Нетрудно убедиться, что при  $k_f \rightarrow \infty$  такое же выражение получается и в случае прямотока фаз.

Подставив в (а) поток вещества  $M = L(x_1 - x_0)$ , найдем значение концентрации  $x_1$  в фазе "х" на выходе из первой ступени:

$$\frac{L(x_0 - x_1)}{x_0 - y_0/m} = \frac{1}{\frac{1}{L} + \frac{1}{mD_1}} ; \quad \frac{x_0 - x_1}{x_0 - y_0/m} = \frac{1}{1 + \frac{L}{mD_1}} ;$$

$$x_0 + x_0 \frac{L}{mD_1} - x_1 \left( 1 + \frac{L}{mD_1} \right) = x_0 - y_0/m ;$$

окончательно:

$$x_1 = \frac{x_0 + y_0 \frac{D_1}{L}}{1 + \frac{mD_1}{L}} = \frac{Lx_0 + D_1y_0}{L + mD_1} . \quad (10.58)$$

Значение выходной концентрации вещества в фазе "у" составит

$$y_1 = mx_1 = \frac{Lx_0 + D_1y_0}{L/m + D_1} = \frac{y_0 + x_0 \frac{L}{D_1}}{1 + \frac{L}{mD_1}} . \quad (10.58a)$$

Выражения для  $x_1$  и  $y_1$  можно получить непосредственно из материального баланса для первого аппарата (он представит собой пространственный контур):

$$D_1y_0 + Lx_0 - D_1y_1 - Lx_1 = 0. \quad (б)$$

Подставив для первой ступени  $y_1 = mx_1$ , имеем

$$D_1y_0 + Lx_0 = mD_1x_1 + Lx_1 , \quad (в)$$

откуда сразу получается  $x_1$  по (10.58) и затем  $y_1$  по (10.58a).

В задачу эксплуатации входит определение всех выходных концентраций вещества в обеих фазах по заданным потокам  $L$  и  $D_i$  и входным концентрациям  $y_0$  и  $x_0$  для первой ступени,  $y_0$  и  $x_{i-1}$  для  $i$ -й ступени. При этом входная концентрация  $x_{i-1}$  определяется как выходная для предыдущей ступени; такой *пошаговый* расчет позволяет поочередно найти все выходные концентрации.

Значение  $x_1$  определяется выражением (10.58). Аналогично получается и записывается выражение для  $x_2$ ; из материального баланса второй ступени при идеальном контакте фаз ( $y_2 = mx_2$ ) имеем

$$\begin{aligned} Lx_1 + D_2y_0 - Lx_2 - D_2y_2 &= 0, & Lx_1 + D_2y_0 &= \\ &= Lx_2 + Dy_2 = Lx_2 + mDx_2, \end{aligned} \quad (г)$$

откуда

$$x_2 = \frac{x_1 + y_0 \frac{D_2}{L}}{1 + \frac{mD_2}{L}}. \quad (10.586)$$

Здесь надо заменить  $x_1$  в (10.586) через  $x_0$  по (10.58) — получится  $x_2$  в зависимости от  $x_0$ ,  $y_0$  и потоков фаз  $L$ ,  $D_1$  и  $D_2$ .

Далее аналогичные преобразования проводятся для третьей и последующих ступеней. Эта процедура достаточно проста, если в процесс массообмена вводится чистая фаза “у”, не содержащая вещества:  $y_0 = 0$ . Чтобы осуществить анализ в таком простом варианте, сохранив при этом общность с реальной ситуацией ( $y_0 \neq 0$ ), перенесем начало отсчета концентраций в точку  $A$  ( $y_0$ ,  $x_0^p$ ) — см. рис. 10.40. Тогда сохранится угол наклона равновесной линии  $\theta$ , так что  $\operatorname{tg} \theta = m$ , а новые (“приведенные”) концентрации составят  $Y = y - y_0$ ,  $X = x - x_0^p$ , причем  $x_0^p = y_0/m$ .

В приведенных концентрациях  $Y_0 = y_0 - y_0 = 0$ , и выражение (10.58) принимает вид

$$\bar{X}_1 = \frac{X_0}{1 + \frac{mD_1}{L}}. \quad (д)$$

Приведенная концентрация после второй ступени записывается аналогично (с учетом  $Y_0 = 0$ ):

$$X_2 = \frac{X_1}{1 + \frac{mD_2}{L}}. \quad (е)$$

Подстановка значения  $X_1$  по (д) позволяет избавиться от  $X_1$ :

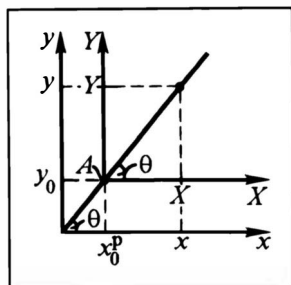
$$X_2 = \frac{X_0}{\left(1 + \frac{mD_1}{L}\right)\left(1 + \frac{mD_2}{L}\right)}. \quad (ж)$$

После  $n$ -й ступени путем таких же подстановок получим

$$X_n \equiv x_n - x_0^p = \frac{X_0}{\left(1 + \frac{mD_1}{L}\right)\left(1 + \frac{mD_2}{L}\right) \dots \left(1 + \frac{mD_n}{L}\right)} = \frac{x_0 - x_0^p}{\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{mD_i}{L}\right)}. \quad (10.59x)$$

Концентрация вещества в фазе “х” после промежуточной  $j$ -й ступени рассчитывается по идентичному выражению, только верхний индекс произведения будет не “ $n$ ”, а “ $i$ ”.

Рис. 10.40. К преобразованию координат для аналитического расчета перекрестного ступенчатого массообмена



Концентрация вещества в фазе “у” после  $j$ -й ступени при идеальном контакте фаз выразится:

$$Y_i = mX_i; y_i - y_0 = m(x_i - x_0^p);$$

$$y_i = y_0 + m(x_i - x_0^p/m). \quad (10.59y)$$

Полученные решения позволяют поставить ряд задач *оптимизации* ступенчато-перекрестного массообмена — их следует относить к проектным или проектно-эксплуатационным задачам.

### 10.13.2. Оптимизация ступенчато-перекрестных процессов при идеальном контакте фаз

Решение задач оптимизации доводится до простых аналитических выражений только при линейном описании процесса, в частности, в случае  $m = \text{const}$  (прямая линия равновесия).

#### *Оптимизация потоков распределяемой фазы*

Задача легко решается на примере *двух* ступеней; здесь  $D_2 = D - D_1$ , где  $D$  — полный поток фазы “у” (см. рис. 10.37), так что выходная концентрация по (ж) будет функцией одной переменной —  $D_1$ :

$$X_2 = \frac{X_0}{\left(1 + \frac{mD_1}{L}\right) \left[1 + \frac{m(D - D_1)}{L}\right]}. \quad (3)$$

Цель анализа — в установлении такой величины  $D_1$ , при которой массообмен происходит с наибольшей полнотой; иначе: надо найти такое значение  $D_1$ , которое обеспечивает минимум  $X_2$  при данном (определенном, постоянном) полном потоке  $D$ .

Рассмотрение выражения (3) показывает, что согласно первому сомножителю в знаменателе ( $Z_n$ ) рост  $D_1$  вызывает уменьшение  $X_2$ , а согласно второму — увеличение; значит, функция  $X_2 = X_2(D_1)$  может иметь экстремум. Для проверки его существования и определения значения  $D_1$  в точке экстремума надо приравнять нулю производную:  $dX_2/dD_1 = 0$ . Операцию дифференцирования можно упростить, так как числитель от  $D_1$  не зависит, и вполне достаточно взять производную знаменателя (при этом изменится тип экстремума):

$$\frac{dZ_n}{dD_1} = \frac{d}{dD_1} \left[ \left(1 + \frac{mD_1}{L}\right) \left(1 + \frac{mD}{L} - \frac{mD_1}{L}\right) \right] = \frac{m}{L} \left(1 + \frac{mD}{L} - \frac{mD_1}{L}\right) + \left(-\frac{m}{L}\right) \left(1 + \frac{mD_1}{L}\right) = 0.$$

После сокращения на  $m/L$ , раскрытия скобок и очевидных упрощений получаем

$$D - 2D_1 = 0, \quad D_1 = \frac{D}{2}; \quad \text{значит, } D_1 = D_2 = \frac{D}{2}. \quad (\text{и})$$

Анализ на тип экстремума (приравнивание нулю второй производной и проверка ее знака в точке  $D_1 = D/2$ ) показывает, что в точке экстремума  $Z_n$  проходит через максимум. Значит, при делении общего потока  $D$  поровну на  $D_1$  и  $D_2$  выходная концентрация  $X_2$  (а с ней и  $x_2$ ) минимальна, а процесс массообмена наиболее эффективен. Полученный результат одновременно показывает, что разбиение потока  $D$  на  $D_1$  и  $D_2$  выгоднее подачи всего потока фазы "у" в один аппарат для контакта с фазой "х": в противном случае анализ на минимум  $X_2$  привел бы к результату  $D_1 = D$  или  $D_1 = 0$ .

Заметим, что цель анализа может быть сформулирована иначе: надо найти такое распределение потоков разбиваемой фазы между ступенями, чтобы достичь заданного значения  $X_2$  при минимальном общем потоке  $D$ . В этом случае необходимо выразить  $D$  в виде функции от  $D_1$  при постоянном  $X_2$  и найти значение  $D_1$  в точке минимума  $D$ . Результат получается тот же:  $D_1 = D_2 = D/2$ .

Аналогичный подход позволяет определить оптимальное распределение фазы "у" в случае трех ступеней. Только конечная концентрация  $X_3$  является функцией уже двух переменных —  $D_1$  и  $D_2$ , поток в третьей ступени будет взят по разности:  $D_3 = D - D_1 - D_2$ . Далее придется приравнивать нулю уже две производные:  $\partial X_3 / \partial D_1 = 0$  и  $\partial X_3 / \partial D_2 = 0$  — и решать полученную систему уравнений. Решение ее приводит к результату

$$D_1 = D_2 = D_3 = \frac{D}{3}. \quad (\text{к})$$

В случае большего числа ступеней анализ можно вести аналогичным образом; результат — тот же; наиболее выгодно распределять разбиваемый поток между ступенями поровну:

$$D_1 = D_2 = \dots = D_i = \dots = D_n = \frac{D}{n}. \quad (\text{л})$$

Тогда сомножители в знаменателе (10.59х) становятся одинаковыми по величине, так что

$$X_n = \frac{X_0}{\left(1 + \frac{mD_i}{L}\right)^n} = \frac{X_0}{\left(1 + \frac{mD}{Ln}\right)^n}. \quad (10.60)$$

Отсюда можно найти число ступеней  $n$ , необходимых для осуществления процесса с заданной эффективностью (от  $x$  до  $x_n$ ) при известных  $L$ ,  $D$  и  $m$ .

### Оптимизация числа ступеней

Выше показано, что разбиение фазы выгоднее подачи полного потока в один аппарат. Можно предположить, что вообще увеличение числа ступеней  $n$  будет сопровождаться повышением эффективности процесса. Чтобы проверить это предположение, попытаемся найти экстремум функции (10.60)  $X_n = X_n(n)$ , для чего приравняем нулю производную  $X_n$  по  $n$ . Как и ранее, здесь проще искать  $dX_n/dn$ , поскольку числитель  $X_0$  от  $n$  не зависит.

Для дифференцирования сложного  $Zn$  (10.60) возьмем сначала его логарифм:  $\ln Zn = n \ln(1 + 1/cn)$ , где  $c \equiv L/mD$ . Продифференцируем теперь  $\ln Zn$  по  $n$ :

$$\begin{aligned} \frac{d \ln Zn}{dn} &= \frac{d}{dn} \left[ n \ln \left( 1 + \frac{1}{cn} \right) \right] = \ln \left( 1 + \frac{1}{cn} \right) + \\ &+ \frac{n}{\left( 1 + \frac{1}{cn} \right)} \left( -\frac{1}{cn^2} \right) = \ln \left( 1 + \frac{1}{cn} \right) - \frac{1}{n + \frac{1}{c}} = 0 \end{aligned}$$

и

$$\ln \left( 1 + \frac{1}{cn} \right) = \frac{1}{n + \frac{1}{c}}. \quad (\text{м})$$

Последнее равенство удовлетворяется при  $n \rightarrow \infty$ .

Таким образом, анализ показывает, что эффективность ступенчато-перекрестной схемы возрастает с увеличением  $n$ , причем наибольшая эффективность достигается при  $n \rightarrow \infty$ . Представляет интерес определить  $X_n$  при бесконечном  $n$  — это будет характеристика наибольших возможностей ступенчато-перекрестной схемы. На основе (10.60)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_0}{\left( 1 + \frac{mD}{Ln} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_0}{\left( 1 + \frac{1}{cn} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_0}{\left( 1 + \frac{1}{cn} \right)^{(cn)/c}} = \frac{X_0}{e^{1/c}},$$

поскольку  $\lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^t = e$  — “замечательный предел”.

Окончательно: при  $n \rightarrow \infty$

$$X_n \equiv X_\infty = X_0 e^{-1/c} = X_0 e^{-mD/L}. \quad (10.61)$$

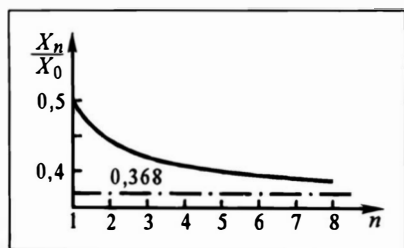


Рис. 10.41. Эффективность ступенчато-перекрестной цепочки массообменных аппаратов

Зависимость типа (10.60) приведена на рис. 10.41 для значения  $c = L/mD = 1$ .

Полученные соотношения позволяют записать выражение для пропускной способности отдельного аппарата с перекрестным током в условиях идеального контакта фаз, поскольку “чистый” перекрестный ток отвечает  $n \rightarrow \infty$ . Поскольку  $M = L(X_0 - X_\infty)$ , а  $\Delta X_* = X_0 - X_0^p = X_0$  (так как при переносе координат  $X_0^p = x_0^p - x_0^p = 0$ ), то

$$\frac{M}{\Delta X_*} = \frac{L(X_0 - X_0 e^{-1/c})}{X_0} = L(1 - e^{-1/c}) = L(1 - e^{-mD/L}). \quad (10.62)$$

Заметим, что прямой вывод этого соотношения требует весьма громоздкого анализа.

### Выбор распределяемой фазы

Проблема состоит в том, какую из фаз целесообразно последовательно пропустить через все аппараты ступенчато-противоточной цепочки, а какую следует распределить (уже доказано: поровну при  $m = \text{const}$ ) между аппаратами — при заданных общих потоках фаз и известном числе аппаратов. Упростим задачу, решая ее для  $n \rightarrow \infty$ ; очевидно, что получаемые выводы будут качественно справедливы для любого  $n > 1$ .

Будем сравнивать пропускные способности цепочек аппаратов при разбиении потоков различных фаз. Выше было получено выражение (10.62), относящееся к разбиению фазы “у”. Симметричное выражение при разбиении фазы “х” (тоже на ее языке) запишется:

$$\frac{M}{\Delta X_*} = mD(1 - e^{-L/mD}) = mD(1 - e^{-c}). \quad (10.62a)$$

В качестве характеристики относительной эффективности разбиения  $Z$  примем отношение пропускных способностей процессов по (10.62) и (10.62a):

$$Z = \frac{L(1 - e^{-1/c})}{mD(1 - e^{-c})} = c \frac{1 - e^{-1/c}}{1 - e^{-c}}. \quad (10.63)$$

Если получится  $Z > 1$ , то выгоднее разбиение фазы “у”, если  $Z < 1$ , то фазы “х”; при  $Z = 1$  разбиения равноценны. Из формулы (10.63) следует, что при  $c = 1$  (т.е. при  $L = mD$ ) тожде-

ственно  $Z = 1$ , т.е. оба способа разбиения равноценны. Анализ показывает, что при  $c \neq 1$  *выгоднее разбивать ту фазу, приведенный поток которой больше.*

### 10.13.3. Массоперенос в реальных ступенях контакта в случае прямой линии равновесия

Реальный контакт фаз в общем случае происходит в условиях смешанной задачи, поэтому надо учитывать кинетические характеристики  $k_x f$ ,  $k_x F$ . Анализ при этом существенно усложняется. Для случая *кривых* линий равновесия подход к построению реальных ступеней при ступенчато-перекрестном движении фаз кратко затронут в начале разд. 10.13; процедура построения ступеней весьма громоздка, а для ряда технологических задач приходится действовать подбором. Для *прямых* линий равновесия ( $m = \text{const}$ ) анализ удается довести до конечных соотношений. Однако сложность преобразований оставляет этот анализ вне учебника; в нем даны лишь некоторые конечные соотношения и вытекающие из них качественные заключения.

Выражение для пропускных способностей ступенчато-перекрестной схемы имеет вид (при разбиении фазы "у")

$$\frac{M}{\Delta x_*} = L \left[ 1 - \left( 1 - \frac{(M/\Delta x_*)_1}{L} \right) \left( 1 - \frac{(M/\Delta x_*)_2}{L} \right) \dots \right] = L \left[ 1 - \prod_{i=1}^n \left( 1 - \frac{(M/\Delta x_*)_i}{L} \right) \right], \quad (10.64)$$

где  $(M/\Delta x_*)_{1,2,\dots,i,\dots,n}$  — пропускные способности отдельных (1-го, 2-го, ...,  $i$ -го, ...,  $n$ -го) аппаратов; именно в этих пропускных способностях учтено влияние кинетических характеристик  $(k_x f)_i$ .

Анализ показывает, что при равных  $k_x f$  на разных ступенях и при одинаковых СКК в них максимуму пропускной способности цепочки, как и при идеальном контакте фаз, отвечает разбиение распределяемой фазы на *равные* потоки по ступеням. Тогда и пропускные способности  $(M/\Delta x_*)_i$  по ступеням одинаковы, ниже они обозначены  $(M/\Delta x_*)_0$ . При этом формула (10.64) для всей цепочки преобразуется к виду

$$\frac{M}{\Delta x_*} = L \left[ 1 - \left( 1 - \frac{(M/\Delta x_*)_0}{L} \right)^n \right]. \quad (10.64a)$$

В частности, при идеальном перемешивании фаз на каждой ступени, с учетом  $k_x f = k_x F/n$  и формулы (10.36), имеем

$$\frac{M}{\Delta x_*} = \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{\frac{1}{k_x F/n} + \frac{1}{L} + \frac{1}{mD/n}} \right)^n \right] = L \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{1 + n \left( \frac{1}{a} + \frac{b}{a} \right)} \right)^n \right]. \quad (10.64б)$$



Из (10.64а) следует, что при одинаковых (в массообменном аспекте) ступенях для осуществления процесса с *заданной* эффективностью (задача проектирования, величина  $M/\Delta x_*$  известна) потребуется следующее количество реальных ступеней:

$$n = \frac{\ln\left(1 - \frac{M/\Delta x_*}{L}\right)}{\ln\left(1 - \frac{(M/\Delta x_*)_0}{L}\right)}. \quad (10.65)$$

Приведенные формулы могут быть проанализированы на предельные ситуации. При  $k_x f \rightarrow \infty$  они закономерно переходят в приведенные выше соотношения для *идеального* контакта фаз. При  $n \rightarrow \infty$  выражение (10.64б) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{M}{\Delta x_*} &= L\left(1 - e^{-a/(1+b)}\right) = L\left[1 - \exp\left(-\frac{k_x f/L}{1 + k_x f/mD}\right)\right] = \\ &= L\left[1 - \exp\left(-\frac{1/L}{1/k_x f + 1/mD}\right)\right]. \end{aligned} \quad (10.64в)$$

Это — *общее описание перекрестного тока в одной реальной ступени непрерывного контакта фаз*. При  $k_x f \rightarrow \infty$  оно закономерно переходит в (10.62).

## 10.14. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И ПОЛУНЕПРЕРЫВНЫЕ ПРОЦЕССЫ КЛАССА 3(2-2)1

В разд. 10.1 были выделены массообменные процессы, проводимые в **периодическом** и **полунепрерывном** режимах. В первом случае в аппарат загружаются определенные *количества* фаз с начальными концентрациями  $x_n$  и  $y_n$ , причем эти исходные концентрации — неравновесны. В результате во времени  $\tau$  происходит изменение концентрации вещества в обеих фазах, и по истечении определенного промежутка времени  $\tau_k$  фазы выгружаются из аппарата с конечными концентрациями  $x_k$  и  $y_k$ . В случае полунепрерывного процесса (его иногда называют “дифференциальным”) одна из фаз (например, “х”) загружается в аппарат и пребывает там в ходе всего процесса; концентрация вещества в этой фазе изменяется от  $x_n$  до  $x_k$ . А вторая (здесь — фаза “у”) непрерывно подается в аппарат с *неизменной* концентрацией  $y_n$  и непрерывно выводится из него с *переменной* во времени (вследствие протекающего массообмена с фазой “х”, в которой концентрация  $x = \text{var}$ ) выходной концентрацией  $y_k$ .

В отличие от непрерывных процессов здесь приходится оперировать не потоками, а *количествами* фаз (в периодических процессах), *количествами* и *потоками* (в полунепрерывных).

Ниже последовательно рассмотрены основные подходы к расчету простейших схем периодических и полунепрерывных

процессов класса 3(2-2)1. Для определенности принято, что и здесь вещество переходит из фазы “х” в фазу “у”. Анализ ведется на языке фазы “х”.

#### 10.14.1. Периодические процессы

В случае периодических процессов в качестве пропускных способностей потоковых стадий выступают *количества* фазы. Будем обозначать их теми же символами, но полужирным прямым шрифтом. Пропускная способность поверхностной стадии в целом выразится в форме  $k_x F \tau_k$  (или  $k_x F \tau$  для текущего момента времени,  $k_x F d\tau$  — для бесконечно малого).

Общая расчетная схема массообменного периодического процесса с обозначенной на ней поверхностью раздела фаз представлена на рис. 10.42. Количества фаз постоянны и равны  $L$  и  $D$ . В задачу анализа входит установление связи текущих концентраций вещества в фазах  $x$  и  $y$  (в итоге — конечных  $x_k$  и  $y_k$ ) с текущим временем процесса  $\tau$  (в итоге — с конечным  $\tau_k$ ). Для анализа процесса очертим для *отдельных фаз* пространственные контуры, проходящие через поверхность раздела фаз  $F$ . Концентрации вещества в фазах в промежуточный момент времени  $\tau$  равны  $x$  и  $y$ ; дадим времени приращение  $d\tau$  и запишем для этого бесконечно малого промежутка времени материальные балансы.

Для контура  $K_1$ :

$$+0 - dM = d(Lx) = Ldx, \text{ откуда } dM = -Ldx. \quad (a)$$

Для контура  $K_2$ :

$$+dM - 0 = d(Dy) = Ddy, \text{ откуда } dM = Ddy. \quad (b)$$

Вместе с тем

$$dM = k_x F (x - x^p) d\tau, \quad (b)$$

где  $x^p$  — равновесная с  $y$  концентрация: она берется по равновесной зависимости — из графика (если линия равновесия — кривая,  $m = \text{var}$ ) либо аналитически (если  $m = \text{const}$ ).

В целях упрощения анализа примем, что фазы идеально перемешаны, так что  $x$  и  $y$  *вдоль поверхности контакта не изменяются*, они являются функциями времени.

Из выражений (a) — (b)

$$dM = -Ldx = Ddy = k_x F (x - x^p) d\tau. \quad (r)$$

Проинтегрируем по отдельности

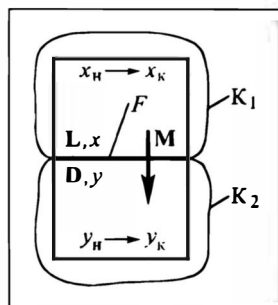


Рис. 10.42. Расчетная схема периодического процесса ( $K_1$  и  $K_2$  — контуры)

выражения (г):

$$\int_0^M dM = -L \int_{x_n}^{x_k} dx = D \int_{y_n}^{y_k} dy = k_x F \int_0^{\tau_k} (x - x^p) d\tau,$$

или

$$M = L(x_n - x_k) = D(y_k - y_n) = k_x F(x - x^p)_{cp} \tau_k \equiv k_x F \Delta x_{cp} \tau_k, \quad (10.66)$$

причем  $\Delta x_{cp}$  — средняя во времени движущая сила для всего массообменного процесса продолжительностью  $\tau_k$ .

Поделим почленно выражения (г) и (10.66); с учетом знака по (а)

$$\frac{dx}{x_k - x_n} = \frac{dy}{y_n - y_k} = \frac{x - x^p}{\Delta x_{cp}} \frac{d\tau}{\tau_k}. \quad (д)$$

Примечательно, что выражение (д) для **периодического** процесса математически *идентично* выражению (и) в разд.10.8.2 для **непрерывного стационарного прямоточного** процесса. Только вместо  $dF/F_k$  (для прямотока) в случае периодического процесса в правом выражении стоит  $d\tau/\tau_k$ . Физическое различие заключается в том, что в случае непрерывных прямоточных процессов рассматривается изменение концентраций *вдоль массообменной поверхности*, т.е. оси  $F$  (для фиксированного промежутка времени, например — 1 с), а в случае периодических процессов — изменение концентраций *вдоль оси времени* (для фиксированной поверхности контакта  $F$ , если речь идет о ИП фаз). Именно поэтому в периодическом процессе движущая сила усредняется *по времени* (в стационарном противотоке она усредняется *по поверхности контакта*).

Таким образом, математически **периодический процесс** может трактоваться как **прямоточный во времени**.

Продemonстрируем идентичность выражений для  $\Delta x_{cp}$  (этой величиной оперируют в задачах *проектирования*). В случае *кривой* линии равновесия расчет ведется графически. С этой целью используются только первое и третье из выражений (д); разделим переменные и проинтегрируем:

$$\int_{x_n}^{x_k} \frac{dx}{x - x^p} = \frac{x_k - x_n}{\Delta x_{cp} \tau_k} \int_0^{\tau_k} d\tau; \quad S_x = \frac{x_n - x_k}{\Delta x_{cp}}; \quad \Delta x_{cp} = \frac{x_n - x_k}{S_x}, \quad (10.67)$$

поскольку интеграл в левой части равен  $S_x$  — числу единиц переноса по фазе “х”. Правое выражение (10.67) совпадает с (10.27 х).

В случае *прямой* линии равновесия ( $m = \text{const}$ ) надо *полностью повторить* анализ, выполненный в разд. 10.8.2. И

тогда, естественно, приходим к формуле, совпадающей с (10.26 x):

$$\Delta x_{\text{ср}} = \frac{\Delta x_{\text{н}} - \Delta x_{\text{к}}}{\ln(\Delta x_{\text{н}} / \Delta x_{\text{к}})}, \quad (10.68)$$

где  $\Delta x_{\text{н}} = x_{\text{н}} - x_{\text{н}}^{\text{Р}}$  (вычитаемое равновесно с  $y_{\text{н}}$ ),  $\Delta x_{\text{к}} = x_{\text{к}} - x_{\text{к}}^{\text{Р}}$  (вычитаемое равновесно с  $y_{\text{к}}$ ).

Решение задачи *эксплуатации* для периодических процессов на основе определения пропускной способности периодически работающего аппарата также ведется аналогично продемонстрированному ранее (разд. 10.9) для непрерывного прямотока, только с заменой оси  $f$  на ось  $\tau$ . Конечные выражения для прямотока типа (10.34), (10.38), (10.39) сохраняют силу, но в качестве пропускной способности поверхностной стадии в них фигурирует не  $k_x F$ , а  $k_x F \tau$ ; и все отношения пропускных способностей ( $a$ ,  $b$  и др.) понимаются как отношения не потоков (например, кг/с или моль/с), а количеств (кг, моль и т.п.). Разумеется, в повторном написании здесь математических преобразований, выполненных для прямотока в разд. 10.8 и 10.9, нет необходимости.

#### 10.14.2. Полунепрерывные процессы

Пусть в аппарат непрерывно подается фаза “у”, ее *поток*  $D$  — постоянен; фаза “х” в *количестве*  $L$  (в ходе процесса не изменяется) находится в аппарате. В самом общем случае в аппарате может находиться также некоторое постоянное количество  $D_0$  фазы “у”. Пропускными способностями *поточковых* стадий для постоянных количеств фаз будут величины  $L$  и  $D_0$ , для стадии непрерывного подвода и отвода фазы “у” количество  $D_{\text{к}} = D \tau_{\text{к}}$  для всего процесса (соответственно:  $D = D \tau$  для текущего времени  $\tau$ ,  $dD = D d\tau$  — для элементарного промежутка времени  $d\tau$ ). Пропускная способность *поверхностной* стадии выражается, как и для периодического процесса, величиной  $k_x F \tau_{\text{к}}$  ( $k_x F \tau$ ;  $k_x F d\tau$ ). Соответственным образом выражаются введенные ранее отношения пропускных способностей  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

Общая расчетная схема полунепрерывного массообменного процесса приведена на рис. 10.43, где показаны: граница межфазной поверхности, количества фаз  $L$  и  $D_0$ , непрерывный поток фазы  $D$ . Начальная концентрация вещества в непрерывно подаваемом потоке  $y_{\text{н}}$  в ходе процесса не изменяется; начальная концентрация фазы “х” составляет  $x_{\text{н}}$ . Примем (это не обязательно), что фаза “у”, постоянно находящаяся в аппарате в количестве  $D_0$ , *первоначально* находится в равновесии с  $x_{\text{н}}$ , т.е. ее концентрация  $y_{\text{н}}^{\text{Р}}$ .

Расчет реального полунепрерывного процесса весьма сло-

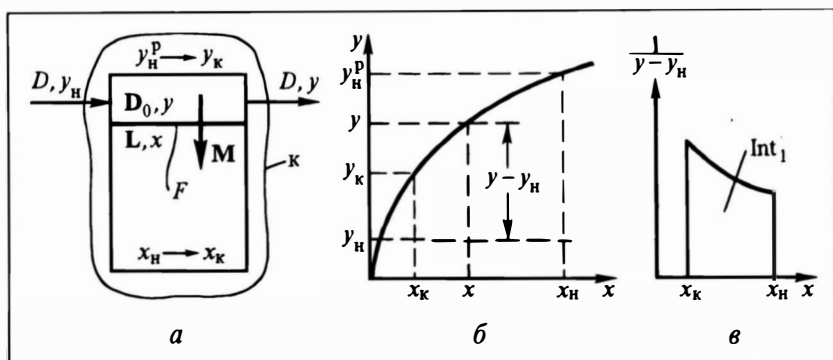


Рис. 10.43. К расчету полунепрерывного процесса:

*a* — расчетная схема, *б* — диаграмма  $y - x$ , *в* — к расчету интеграла  $\text{Int}_1$

жен, поэтому анализ проведем применительно к упрощенному его варианту:

— величина  $R_x F t \rightarrow \infty$  (фазы в аппарате в каждый момент времени, включая конечный, — в равновесии);

— поток  $D$  движется через аппарат, а фаза “ $x$ ” пребывает в нем в режиме ИП (т.е. фазы “ $y$ ” и “ $x$ ” имеют выравненные — каждая по своему объему — концентрации в аппарате); поэтому в каждый момент времени концентрации  $y$  в объеме аппарата и на выходе из него одинаковы.

Очертим пространственный контур, охватывающий весь аппарат. Выберем промежуточный момент времени  $\tau$  (текущие концентрации вещества в фазах  $x$  и  $y$  равновесны; последняя равна выходной концентрации фазы “ $y$ ”). Дадим времени приращение  $d\tau$  и для этого элементарного отрезка времени запишем материальный баланс по веществу:

$$+Dy_N d\tau - Dy d\tau = Ldx + D_0 dy \quad (e)$$

Разделим переменные и проинтегрируем по всему процессу (от 0 до  $\tau_K$ ). Изменив знаки и пределы интегрирования, получим связь продолжительности процесса  $\tau_K$  с конечными концентрациями  $x_K$  и  $y_K$ :

$$\begin{aligned} D \int_0^{\tau_K} d\tau &= D\tau_K = L \int_{x_K}^{x_N} \frac{dx}{y - y_N} + \\ &+ D_0 \int_{y_K}^{y_N} \frac{dy}{y - y_N} \equiv L\text{Int}_1 + D_0 \text{Int}_2. \end{aligned} \quad (10.69)$$

Способ нахождения интеграла  $\text{Int}_1$  с использованием диаграммы  $y - x$  в случае *кривой* линии равновесия ясен из рис.

10.43, б, в. Интеграл  $\text{Int}_2$  определяется аналитически (напомним:  $y_H = \text{const}$ ):

$$\text{Int}_2 \equiv \int_{y_K}^{y_H^p} \frac{dy}{y - y_H} = \ln \frac{y_H^p - y_H}{y_K - y_H} = \ln \frac{mx_H - y_H}{y_K - y_H} . \quad (\text{ж})$$

Связь *текущих* значений  $\tau$ ,  $x$ ,  $y$  будет получена, если эти значения подставить в качестве пределов вместо  $\tau_K$ ,  $x_K$ ,  $y_K$ .

При практической организации полунепрерывных процессов весьма часто  $D_0$  мало, так что Накоплением (изменением количества вещества) в зоне  $D_0$  можно пренебречь. Тогда выражение (10.69) упрощается:

$$D\tau_K = L \int_{x_K}^{x_H} \frac{dx}{y - y_H} . \quad (10.69a)$$

В случае *прямой* равновесной линии возможен аналитический расчет с использованием постоянного коэффициента распределения  $m$ . Проведем такой анализ применительно к упрощенному варианту, описываемому уравнением (10.69a). Для этого выразим концентрации фазы “ $y$ ” на языке фазы “ $x$ ”:  $y = mx$  и  $y_H = mx_H^p$ , причем  $x_H^p = \text{const}$ , поскольку в ходе массообмена  $y_H$  остается неизменным. Преобразуем теперь (10.69a):

$$D\tau_K = L \int_{x_K}^{x_H} \frac{dx}{mx - mx_H^p} = \frac{L}{m} \ln \frac{x_H - x_H^p}{x_K - x_H^p} \quad (10.70)$$

— в результате найдена аналитическая связь продолжительности процесса  $\tau_K$  и конечной концентрации  $x_K$ ; при этом  $y_K = mx_K$ .

Представляет интерес *сопоставление* выражений для полунепрерывного процесса с найденными ранее для непрерывного массообмена. В этих целях перенесем  $L/m$  в (10.70) в левую часть равенства; при этом сохраним введенное ранее обозначение отношения пропускных способностей применительно к *полунепрерывному* процессу:  $mD\tau_K/L \equiv c' = 1/c$ . Тогда

$$\frac{x_H - x_H^p}{x_K - x_H^p} = e^{mD\tau_K/L} = e^{1/c}; \quad x_K - x_H^p = (x_H - x_H^p) e^{-1/c} . \quad (10.70a)$$

При отсчете концентраций не от нуля, а от  $y_H$  и  $x_H^p$ , т.е. при замене  $x_H - x_H^p \equiv X_H$  и  $x_K - x_H^p \equiv X_K$ , получаем

$$X_K/X_H = e^{-1/c}, \quad X_K = X_H e^{-1/c} . \quad (10.70б)$$

Последние выражения совпадают с соотношением (10.61), установленным для *стационарного* массопереноса в аппарате с непрерывным контактом фаз при их *перекрестном движении*. Таким образом, *полунепрерывный массоперенос* математически может трактоваться в аспекте *перекрестного процесса*.

## 10.15. О РАСЧЕТЕ МАССООБМЕННЫХ ПРОЦЕССОВ ИНЫХ КЛАССОВ, НЕЖЕЛИ 3(2-2)1

В предыдущих разделах главы основное внимание было уделено массообменным процессам класса 3(2-2)1, характеризующего наличием двух фаз, инертном (носителем) в каждой из них и одним переносимым веществом (компонентом). Вместе с тем по ходу изложения были затронуты некоторые общие положения, справедливые и для процессов иных классов, предусмотренных КФ-классификацией.

Процессам класса 3(2-2)1 в пределах рассмотренных схем движения фазовых потоков присуща *линейность балансовых соотношений* — она обусловлена постоянством этих потоков  $L$  и  $D$ , их независимостью от концентраций. В упрощенных подходах к процессам упомянутого класса приписывается и *линейность кинетики* — независимость пропускных способностей типа  $k_x F$  от уровня концентраций и движущей силы. *Равновесие* рассматривалось как в *линейном* варианте ( $m = \text{const}$ ), так и в *нелинейном* ( $m = \text{var}$ ). Основное *качественное* отличие большинства процессов, принадлежащих к другим классам, — отсутствие (невозможность выделения) инерта и как результат принципиальная *нелинейность балансов*. Это может привести к существенным осложнениям при математической интерпретации. В наибольшей мере такие затруднения относятся к описанию и построению рабочих линий, например для широко распространенных противоточных процессов — даже достаточно простых, двухфазных, представляемых в диаграмме  $y - x$  (двухкомпонентные смеси в каждой из фаз). Дело в том, что фазовые потоки  $L$  и  $D$  здесь обычно *изменяются* при движении вдоль поверхности межфазного контакта, т.е. с изменением концентраций  $x$  и  $y$ . Поэтому рабочая линия становится *кривой*, неудобной для построения.

Существуют различные пути преодоления возникших затруднений.

*Первый* из них заключается в выборе такого способа выражения концентраций, чтобы потоки фаз оставались постоянными, хотя эти фазы и не являются инертами. Это возможно для процессов, характеризующихся эквивалентной *разнонаправленной диффузией*. Пусть из фазы “ $x$ ” в фазу “ $y$ ” и в обратном направлении переносится в единицу времени *одинаковое* количество молей (или килограммов) компонентов. Тогда мольные (соответственно — массовые) потоки фаз будут оставаться неизменными. При этом, разумеется, надо оперировать *абсолютными потоками фаз и абсолютными концентрациями компонентов в фазах*. С такой ситуацией мы встречаемся, например, в

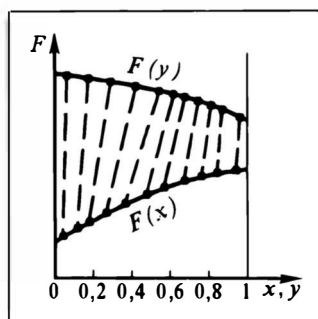
Рис. 10.44. Типичная равновесная диаграмма "состав ( $x, y$ ) — свойство ( $F$ )"

процессах ректификации. Заметим, что при слабо выраженной (в какой-то мере — сохраняющейся) кривизне рабочей линии ее отличием от прямой нередко пренебрегают, если возникающие при этом погрешности не нарушают приемлемой точности расчета.

*Второй путь* состоит в следовании обстоятельствам — построении **кривой рабочей линии**. Дело в том, что в некоторых случаях удастся достаточно достоверно выявить причины нарушения линейности баланса и математически связать (количественно!) сопутствующие эффекты с изменением концентрации. Это могут быть эффекты, связанные с тепловыделением (испарение—конденсация, плавление—затвердевание и т.п.), взаимной растворимостью и др. Тогда в диаграмме  $y — x$  удастся построить кривую рабочую линию, хотя сама процедура ее построения является весьма громоздкой. Последующие расчеты осуществляются графоаналитически либо численными методами; чисто аналитические методы здесь, как правило, неприменимы.

*Третий путь* — более радикальный — состоит в отказе от расчетов в концентрационных диаграммах (например, типа  $y — x$ ) и переходе к диаграммам типа "состав — свойство". При этом выбирается именно то свойство рабочих тел ( $F$ ), которое явилось причиной нарушения линейности рабочей линии. Скажем, для *двухкомпонентных* систем в декартовых координатах составляют диаграмму "Свойство  $F$ " —  $x, y$  (рис. 10.44): строят две кривые  $F — x$  и  $F — y$ . Равновесные точки на кривых соединяют **нодами** (на рисунке — штриховые линии). Для *трехкомпонентных* систем такого рода диаграммы строятся в концентрационном треугольнике, где также проводятся линии свойств (например, растворимости) и равновесные ноды. Понятие "рабочая линия" в этих случаях не используется, но понятия **сопряженных** и **равновесных** концентраций, **теоретической ступени** и т.п. остаются в силе. Одновременно вводятся некоторые необходимые для расчета дополнительные понятия — они будут рассмотрены при изучении конкретных технологических приемов (ректификации, жидкостной экстракции, выщелачивания и др.).

Проблема **нелинейности кинетики** может быть связана с определением пропускных способностей и движущих сил.





Проблема *линейности-нелинейности пропускных способностей*, строго говоря, крайне сложна. Эта сложность обусловлена двумя основными причинами:

— возможной (даже — вероятной) зависимостью коэффициентов диффузии и толщины пограничных пленок от уровня концентраций (с изменением последних изменяются и свойства фазы); следовательно, и коэффициенты массоотдачи (с ними — и массопередачи) могут оказаться существенно переменными в рабочем диапазоне изменения концентраций;

— приближенностью принятой для расчета двухпленочной модели, как в плане отдельных ее постулатов (например, о равновесии на границе раздела фаз), так и в аспекте правомерности самого подхода (игнорирование нестационарных элементарных актов массопереноса).

Поскольку отмеченные моменты не учитываются, то кинетические характеристики ( $k_x F$ ,  $k_y F$  и т.п.) получаются (в экспериментах, где определяются  $\beta_x$ ,  $\beta_y$ ) *зависящими от уровня концентраций, иногда — от движущей силы*. Свой вклад может внести и неопределенность процедуры усреднения коэффициента распределения  $m$  в случае  $m \neq \text{const}$ .

**Нелинейность движущей силы** может быть обусловлена эффектами продольного перемешивания (см. главу 8). Такая нелинейность не вызывает осложнений лишь в простейших (“крайних”) ситуациях — в режимах ИВ (где ее нет) и ИП обеих фаз (где ее часто удается весьма просто учесть, поскольку рабочая линия вырождается в рабочую точку). Ограниченное продольное перемешивание сказывается на локальных движущих силах  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  и на средних по поверхности контакта  $\Delta x_{\text{ср}}$ ,  $\Delta y_{\text{ср}}$ . Упомянутые эффекты могут быть учтены при составлении балансовых соотношений, приводящих к описанию (построению) кривых рабочих линий.

Подчеркнем, что нелинейность пропускных способностей поверхностных стадий не играет роли при идеальном контакте фаз (потокосая задача). Нелинейность движущей силы оказывает влияние на процесс и в этом случае; характер такого влияния в общем плане рассмотрен в разд. 8.2.

В целом отклонения от сравнительно простых расчетных процедур, присущих процессам класса 3(2-2)1, как правило, специфичны для различных технологических приемов. Поэтому при сохранении изложенных выше общих подходов к расчету процессов массопереноса особенности расчета конкретных приемов рассмотрены в соответствующих главах курса.

## 10.16. МАССООБМЕН С ТВЕРДЫМИ ТЕЛАМИ

### 10.16.1. Общие положения

Массообмен с твердыми телами широко распространен в химической технологии. Это, например, процессы адсорбции и десорбции (в частности, сушки), растворения, выщелачивания, кристаллизации, сублимации и т.д. Кроме того, в качестве одной или нескольких стадий он может играть существенную роль в ряде химических процессов — каталитических и некаталитических. Чаще всего твердая фаза в таких процессах используется в виде не очень крупных зерен (их размеры редко превышают несколько сантиметров) или мелких частиц (доли миллиметра). Эти зерна, частицы (дискретная фаза) контактируют со сплошной средой (газ, жидкость), и происходит перенос какого-либо компонента (компонентов) от среды к твердой фазе или в обратном направлении.

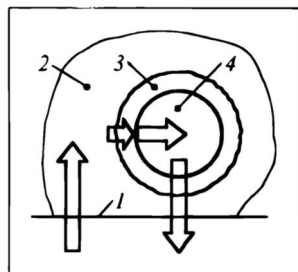
Процесс массообмена с твердой фазой может быть организован в непрерывном, периодическом или полунепрерывном варианте. Однако относительно единичного зерна массообмен с твердым телом (например, округлым; в других случаях речь может идти о цилиндрических или плоских телах), как правило, представляет собой *нестационарный акт* с характерной кинетикой переноса вещества внутри зерна и вне его (в сплошной среде около зерна). Известным исключением из этого правила являются стационарные каталитические процессы с постоянным Источником или Стоком переносимого вещества.

Процессы массопереноса с участием твердой фазы проходят в несколько стадий. В отсутствие химической реакции это (рис.10.45) ввод вещества в рабочую зону процесса с потоком сплошной фазы; диффузия вещества из объема этой фазы через пограничную пленку к поверхности зерна (*внешняя диффузия*); миграция вещества внутри зерна (*внутренняя диффузия*); вывод вещества из рабочей зоны с твердой фазой. Разумеется, в случае переноса вещества из твердой фазы в газ, жидкость порядок стадий будет обратным.

При протекании в зерне химических превращений с выделением (поглощением) переносимого компонента к перечисленным выше добавляется еще стадия химической реакции со

Рис. 10.45. К стадиям массопереноса с участием твердой фазы:

1 — граница рабочей зоны, 2 — сплошная среда, 3 — диффузионная пограничная пленка, 4 — твердое зерно



своими кинетическими характеристиками. Если они неблагоприятны (реакция протекает существенно медленнее массопереноса), то массообменные стадии для анализа и расчета интенсивности технологического процесса не представляют интереса — расчет следует вести на основе *кинетики* самой *химической реакции*. Если, наоборот, химическая реакция в сравнении с другими стадиями протекает практически мгновенно, то влияние химической кинетики на технологический процесс вырождается, и расчет ведется на основе *закономерностей массопереноса*. При сопоставимости этих стадий приходится совместно рассматривать кинетические характеристики массопереноса и химической реакции — говорят о *макрокинетических закономерностях* химических превращений. Проблемы макрокинетики находятся за пределами учебника: в нем рассматриваются процессы массопереноса только в отсутствие химической реакции (или при наличии быстрых превращений, когда вклад кинетики исчезающе мал из-за ее высокой пропускной способности).

В основе расчета массообмена с твердым телом лежит уравнение Фика (1.22), записываемое для твердого тела без конвективных членов:

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = D_M \nabla^2 C + \kappa \quad (1.23), (10.71)$$

или в отсутствие Источников или Стоков переносимого вещества ( $\kappa = 0$ ):

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = D_M \nabla^2 C, \quad (10.71a)$$

причем  $D_M$  — коэффициент диффузии переносимого вещества в твердом теле.

Если речь идет о сферическом зерне, то эти уравнения записываются в сферических координатах.

Уравнения Фика решаются с условиями однозначности (см. разд. 1.7), формулируемыми в соответствии со спецификой конкретного процесса. При этом *начальные* условия описывают распределение концентраций в начальный момент времени, а *граничные* — отражают особенности массопереноса на границе сплошной среды с твердым телом. Результаты решения уравнений (10.71) позволяют установить распределение концентраций по объему зерна в любой момент времени. Сочетая это решение с подробно рассмотренными выше закономерностями переноса в сплошной среде, получают решение технологической задачи в целом — для сплошной и дискретной фаз, т.е. для массообменного процесса.

Масштабные преобразования уравнения Фика и граничных условий позволяют (разд. 1.8) сформулировать ряд критериев подобия. Среди них — **диффузионный критерий Био**  $Bi_d \equiv \beta Rm/D_m$ , выражающий отношение пропускных способностей стадий внешнего (в пограничной пленке сплошной среды) и внутреннего (в твердой фазе) массопереноса.

Если стадия внешней диффузии является существенно медленной (ее продолжительность гораздо больше, нежели любой другой стадией,  $Bi_d \rightarrow 0$ ), то эта стадия контролирует массоперенос в целом — ее называют *лимитирующей* и говорят, что массообмен протекает в **условиях внешней задачи**. В этом случае проще прямо использовать уравнения конвективного массопереноса, не обращаясь к уравнению Фика. Если в качестве лимитирующей стадии выступает миграция вещества внутри зерна (тогда  $Bi_d \rightarrow \infty$ ), то говорят о **внутренней задаче** массопереноса. Однако возможны технологические ситуации, когда условия внешнего и внутреннего массопереноса весьма благоприятны, а существенно медленной стадией является *подвод* вещества в рабочую зону со сплошной средой или же ее *отвод* из рабочей зоны с твердой фазой. Тогда массообмен в рабочей зоне будет практически завершен, контакт фаз считается *идеальным*, фазы уходят с равновесными концентрациями переносимого компонента. Это означает, что массоперенос происходит в условиях **поточковой задачи** по одной из фаз — той, что лимитирует массоперенос в целом.

При наличии лимитирующей стадии расчет процессов массопереноса относительно прост. В отсутствие лимитирующей стадии, когда хотя бы две контролирующие процесс стадии сопоставимы по интенсивности, расчет обычно значительно сложнее; в этом случае говорят о **смешанной задаче** массопереноса.

Ниже в общем плане рассматриваются процессы массопереноса, протекающие *при наличии* различных лимитирующих стадий. При этом концентрация переносимого вещества в сплошной среде обозначена символом  $y$ , ее поток — символом  $L$  (или количество —  $L$ ); для твердой (дискретной фазы) использованы символы:  $C$  — концентрация,  $G$  — поток или  $G$  — количество (при изучении массообмена в других главах возможно отступление от этой символики). В целях определенности будем считать, что перенос вещества происходит из сплошной фазы “ $y$ ” в дискретную “ $C$ ”.

### 10.16.2. Внешняя задача массопереноса

#### *Составляющие внешнего массопереноса*

В основе расчета конвективного переноса вещества из сплошной среды к поверхности твердого тела лежат понятия и подходы, изложенные в разд. 10.4.4.

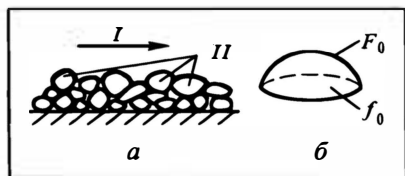


Рис. 10.46. К расчету поверхности контакта при омывании сплошной средой (поток  $I$ ) засыпки твердых зерен (II):

$a$  — схема протекания процесса,  $b$  — модельная полусфера и ее геометрические характеристики

**Коэффициенты массоотдачи** редко удается установить теоретически; чаще всего их находят из эмпирических уравнений внешнего массопереноса, представленных в критериальной форме:

$$\text{Sh} \equiv \beta l / D_d = f(\text{Re}, \text{Sc}, \dots), \quad (10.8)$$

где  $D_d$  — коэффициент диффузии переносимого вещества в *сплошной* среде.

При этом за **определяющий линейный размер**  $l$  для твердых тел сферической или цилиндрической формы принимают диаметр  $d$ , для тел другой формы — эквивалентный диаметр, для пластины — толщину (или полутолщину).

Располагая значениями  $\text{Re}$  и  $\text{Sc}$ , рассчитывают число Шервуда  $\text{Sh}$  и находят массообменный коэффициент  $\beta$  или  $\beta_r$ , входящий в основное уравнение массообмена типа (10.22). Следует, однако, подчеркнуть существенное отличие выражения (10.8) от (10.22), справедливого для двухфазного массообмена при контакте *двух сплошных* фаз. В массообмене с твердыми телами представление о “пограничной пленке”, примыкающей к межфазной границе со стороны твердого тела, — некорректно, так что понятие о коэффициенте **массопередачи**  $k$  теряет смысл. Здесь физически обоснованно вместо  $k_x$  (или  $k_y$ ) использовать коэффициент **массоотдачи**  $\beta$ :

$$M = \beta' F(y - y^p)_{\text{ср}} = \beta' F \Delta y_{\text{ср}}, \text{ или } M = \beta_r F \Delta y_{\text{ср}}. \quad (10.72)$$

Конкретный вид расчетных формул для  $\beta$  типа (10.8) зависит от специфики рассматриваемого массообменного процесса; они приводятся в учебной, научной, справочной литературе\*. В качестве примера такого уравнения для одиночной сферической частицы в разделе 10.4.4 приведено выражение (10.86).

Как и в случае двух сплошных фаз, здесь также иногда в чисто прагматических целях вводят “объемные коэффициенты массоотдачи”  $\beta_v$  (см. разд. 10.4.4).

**Поверхность межфазного контакта**  $F$  тел *правильной формы* определяется из геометрических соображений.

Для тел, *беспорядочно насыпанных* на какой-либо площади  $f$ , при движении сплошной среды *над* засыпкой (рис. 10.46,  $a$ ) поверхность контакта  $F$  находят из модельного представления: выделяют элемент твердого тела и принимают (рис. 10.46,  $b$ ), что поверхность его контакта с потоком близка к *полусфере* (пусть

\* См., например, [2, 8, 9, 10, 13, 20, 23].

ее диаметр  $d$ ). Тогда поверхность контакта составляет  $\pi d^2/2$ , а площадь, на которую опирается эта полусфера, равна  $\pi d^2/4$ . Таким образом, поверхность контакта зерна  $F_0$  вдвое превышает площадку  $f_0$  основания полусферического зерна. И если площадка  $f$  полностью покрыта насыщенным материалом, то общая поверхность контакта  $F \approx 2f$ , поскольку контакту доступен только верхний слой зерен (жирная граница на рис.10.46,а).

В случае движения сплошной среды *сквозь слой* зерен (неподвижный, движущийся или псевдооживленный и т.п.) поверхность контакта определяют через удельную поверхность (см. разд.2.7):  $F_{уд} = 6(1 - \epsilon)/d$ , где  $\epsilon$  — порозность. Очевидно, что для объема рабочей зоны  $V$

$$F = F_{уд}V. \quad (a)$$

Следует, однако, иметь в виду, что по (а) рассчитывается *полная* поверхность твердых тел в рабочей зоне; реально в массообмене может принимать участие меньшая (“активная”) поверхность  $F_a < F$ . Задача технолога — на стадии проектирования и эксплуатации — обеспечить возможно более полное раскрытие поверхности контакта, т.е. постараться приблизить  $F_a$  к  $F$ .

**Среднюю (по поверхности контакта) движущую силу** массообменного процесса  $\Delta u_{ср}$  чаще всего определяют, используя путь, принятый в разд. 10.8:

— записывают уравнение массоотдачи для элементарной поверхности контакта  $dF$ :

$$dM = \beta\rho(y - y^p)dF = \beta\rho\Delta y dF; \quad (б)$$

— устанавливают связь  $y$  и  $y^p$  с  $M$  или  $F$ ;

— интегрируют в полном диапазоне изменения переменных в ходе процесса;

— полученное выражение представляют в форме (10.72).

Тогда слева в этом выражении фигурирует  $M$ , а справа —  $\beta\rho$ ,  $F$  и фрагмент, найденный в результате интегрирования. Этот фрагмент и будет представлять собой  $\Delta u_{ср}$ .

#### *Массообмен в псевдооживленном слое в условиях внешней задачи*

Проиллюстрируем путь расчета для непрерывного стационарного процесса массообмена с идеальным перемешиванием твердых зерен, находящихся, например, в псевдооживленном состоянии. Расчетная схема процесса изображена на рис. 10.47: поток сплошной фазы  $L$ , входная и выходная концентрации —  $y_1$  и  $y_2$ ; поток твердой фазы (псевдооживленные зерна) равен  $G$ , входная концентрация —  $C_1$ ; в результате ИП вся масса зерен  $G_T$  имеет одинаковую концентрацию вещества, равную выходной  $C_2$ . Запишем материальный баланс по переносимому компоненту в сплошной среде для элементарной поверхности контакта  $dF$  (контур к):

$$Ly - dM - L(y + dy) = 0, \quad dM = -Ldy. \quad (в)$$

Вместе с тем  $dM$  выражается соотношением (б). Приравняв (б) и (в), разделим переменные и проинтегрируем, учиты-

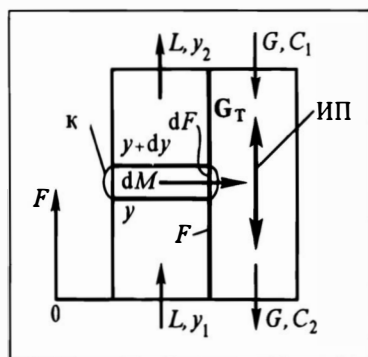


Рис. 10.47. К определению средней движущей силы массообмена с твердыми телами

вая, что равновесная концентрация в сплошной фазе  $y^p = \text{const}$  по всей массе  $G_T$  и поверхности контакта  $F$ , поскольку  $C = C_2 = \text{const}$ :

$$-L \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{y - y^p} = \beta \rho \int_0^F dF \quad \text{и}$$

$$L \ln \frac{y_1 - y^p}{y_2 - y^p} = \beta \rho F. \quad (\text{г})$$

Отсюда находим  $L$  и домножаем его на  $(y_1 - y_2)$ , чтобы получить  $M$ :

$$L(y_1 - y_2) = M = \beta \rho F \frac{y_1 - y_2}{\ln \frac{y_1 - y^p}{y_2 - y^p}}. \quad (\text{д})$$

Сравнивая теперь (д) и (10.72), видим:

$$\Delta y_{\text{ср}} = \frac{y_1 - y_2}{\ln \frac{y_1 - y^p}{y_2 - y^p}} = \frac{(y_1 - y^p) - (y_2 - y^p)}{\ln \frac{y_1 - y^p}{y_2 - y^p}} = \frac{\Delta y_1 - \Delta y_2}{\ln(\Delta y_1 / \Delta y_2)}. \quad (10.73)$$

Разумеется, не для всех процессов  $\Delta y_{\text{ср}}$  получается столь просто и выражается как среднелогарифмическая величина. В общем случае основная трудность состоит в установлении закономерности изменения  $y^p$  (с  $F$  или с  $y$ ) при  $y^p = \text{var}$ .

Пропускная способность стадии внешнего массопереноса записывается как  $\beta' F = \beta \rho F$ ; существенно, что вместо  $k_y$  здесь фигурирует  $\beta'$ ,  $\beta \rho$ . В условиях внешней задачи именно эта пропускная способность контролирует процесс массопереноса в целом.

В условиях внешней задачи (только в этих условиях!) практически оправданно для некоторых процессов массообмена между дискретной (твердой) и сплошной фазами использование уже рассмотренных представлений о непрерывных стационарных (например, противоточных) процессах. При этом массоперенос относительно каждой перемещающейся частицы, конечно, остается нестационарным, но по отношению к выбранному сечению аппарата (т.е. — к неподвижному наблюдателю) стационарность процесса нарушена не будет. В аспекте

нестационарного массопереноса в твердой фазе такой подход означает замену временной координаты  $\tau$  на поверхностную  $f$ .

При описании ряда процессов нередко удается представить потоки контактирующих фаз постоянными (т.е. потоками инертных — носителей переходящего вещества). Тогда для расчета пригодны подходы, понятия и математический аппарат, примененные для процессов класса 3(2-2)1 — естественно, с заменой коэффициентов массопередачи на коэффициенты массоотдачи.

Заметим: строго говоря, выражения типа (в) — (д) описывают *смешанную* (потоково-внешнюю) задачу массопереноса, поскольку в этих выражениях присутствует поток  $L$ . Чтобы задача была чисто внешней, этот поток должен быть бесконечно большим; при  $L \rightarrow \infty$  и конечном  $M$  будет  $y_2 = y_1$ . Иначе говоря, внешняя задача массообмена означает ее сведение к массопередаче (здесь — к массоотдаче).

### 10.16.3. Внутренняя задача массопереноса

В основе анализа — **уравнение Фика с граничными условиями I рода**: задается концентрация вещества на межфазной границе, в простейшем случае — постоянная во времени и одинаковая вдоль всей поверхности тела.

*Качественно* картина изменения концентрации во времени в случае симметричного массопереноса применительно к бесконечной пластине толщиной  $2\delta$  показана на рис. 10.48. До начала массообмена концентрация по толщине пластины одинакова и равна  $C_0$ . Как только пластину помещают в рабочую зону, на ее границах  $x = \pm\delta$  мгновенно (поскольку стадия массоотдачи здесь бесконечно интенсивна,  $\beta\rho F \rightarrow \infty$ ) устанавливается и поддерживается постоянная концентрация вещества, равновесная с концентрацией  $y$  в сплошной среде,  $C_\delta = C^p$ . Сначала массообмен захватывает приграничные зоны пластины, практически не затрагивая внутренних ее областей. Постепенно повышение концентрации захватывает и внутренние области. Через бесконечно долгое время концентрация по толщине пластины выравнивается и становится равной  $C^p$ .

Приведенное качественное описание массообменного процесса математически представляется следующим образом. Закономерность изменения концентрации вещества в пластине  $C = C(x, \tau)$  должна явиться решением уравнения Фика для одномерной (вдоль оси  $x$ ) диффузии, поскольку в бесконечной пластине градиенты концентраций в направлении других осей ничтожны:

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = D_m \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad -\delta < x < +\delta. \quad (10.74)$$



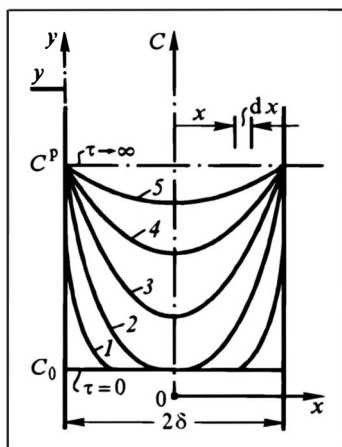


Рис. 10.48. Общая картина изменения концентрации вещества во времени по толщине плоской бесконечной пластины в граничных условиях I рода.

Цифры у кривых 1, 2, ..., ∞ отвечают нарастающим моментам времени процесса, отсчитанным от  $\tau = 0$

Начальное условие:

$$C(x, 0) = C_0, \quad \tau = 0, \\ -\delta \leq x \leq +\delta. \quad (10.75a)$$

Граничное условие I рода:

$$C(\delta, \tau) = C^P, \quad \tau \geq 0. \quad (10.75b)$$

Условие симметрии и ограниченности концентрации (данное специфическое условие тоже является граничным):

$$\left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{\partial C(0, \tau)}{\partial x} = 0, \quad \tau \geq 0. \quad (10.75b)$$

Это условие утверждает, что касательные к концентрационным кривым (см. рис. 10.48) в любой момент времени в точке  $x = 0$  параллельны оси  $x$ .

Подобные задачи для шара (тоже симметричные, одномерные) были рассмотрены в разд. 7.10.3 применительно к переносу теплоты. В массопереносе при коэффициенте диффузии вещества *внутри твердой фазы*  $D_m = \text{const}$  решение  $C = C(x, \tau)$  также получается в виде бесконечного ряда.

Решение практических задач обычно требует усреднения концентрации вещества по толщине пластины: именно усредненные концентрации  $\bar{C}(\tau)$  фигурируют в материальных балансах. Переходя от бесконечно тонкого слоя  $dx$  к конечному  $\delta$ , имеем

$$\bar{C}(\tau) = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} C(\tau, x) dx. \quad (10.76)$$

Далее по уравнению материального баланса нетрудно рассчитать количество вещества, воспринятого участком пластины длиной  $l$  и шириной  $b$  за время  $\tau$ . Если  $C$  — массовая концентрация и  $\rho_T$  — плотность материала пластины, то

$$M = lb \cdot 2\delta \rho_T [\bar{C}(\tau) - C_0]. \quad (e)$$

В целях большей общности выражения  $C(x, \tau)$  и  $\bar{C}(\tau)$  пред-

ставляют в критериальной форме:

$$\frac{C^P - C(x, \tau)}{C^P - C_0} = f_1(Fo_d, x/\delta) \quad (10.77)$$

и

$$\frac{C^P - \bar{C}(\tau)}{C^P - C_0} = f_2(Fo_d), \quad (10.78)$$

где  $Fo_d \equiv D_M \tau / \delta^2$  — диффузионный критерий Фурье, его часто еще называют критерием Фика.

В качестве примера приведем конкретный вид формулы для  $\bar{C}$  в случае плоской пластины при  $D_M = \text{const}$ :

$$\frac{C^P - \bar{C}(\tau)}{C^P - C_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n^2} e^{-\mu_n^2 Fo_d}, \quad (10.78a)$$

где

$$\mu_n \equiv \frac{2n-1}{2} \pi. \quad (\text{ж})$$

При не очень малых значениях  $Fo_d$  ряд (10.78a) быстро сходится, так что можно ограничиться одним членом ряда (в частности, при  $Fo_d \geq 0,12$  ошибка не превысит 1%). При малых значениях  $Fo_d$  приходится рассчитывать сумму нескольких членов ряда.

Относя количество переданного вещества  $M$  к начальной движущей силе  $\Delta C_* \equiv C^P - C_0$ , получим пропускную способность стадии внутреннего переноса вещества  $M/\Delta C_*$ .

Аналогичным образом ставятся задачи для твердых тел другой формы — цилиндрической, сферической и т.п. Разумеется, при этом лапласиан имеет иное написание, и решения  $C(r, \tau)$  и  $\bar{C}(\tau)$  имеют иной вид. Операция усреднения концентраций для этих случаев также имеет свои особенности; для сферы такая операция была продемонстрирована в разд. 7.10.3 применительно к переносу теплоты — формула (7.35).

Решение можно считать законченным, если все элементы твердой фазы находятся в рабочей зоне одинаковое время. Однако в системах с продольным перемешиванием это условие не выполняется. Скажем, частицы в псевдоожигенном слое характеризуются широким спектром времени пребывания в зоне массообмена ( $\tau$  изменяется от 0 до  $\infty$ , поскольку псевдоожигенный слой очень близок по твердой фазе к системам ИП). Здесь требуется усреднение по времени пребывания элементов в рабочей зоне; предварительно надо установить закон их рас-

пределения по времени пребывания (см. главу 8). Такая операция усреднения выполнена в разд. 15.8.4 применительно к псевдооживленным сферическим частицам, высушиваемым в условиях внутренней задачи.

Строго говоря, зерна, как правило, на практике неодинаковы также и по размерам, так что надо учитывать их распределение (и проводить их усреднение) еще и по размерам — задача усложняется. Но, пожалуй, наибольшие сложности вызывает расчет процесса массообмена, если коэффициент диффузии вещества в твердом материале  $D_m$  оказывается *непостоянным*, зависящим от уровня концентраций. В этом случае предварительно потребуется установить зависимость  $D_m = D_m(C)$ . Задача переноса здесь становится существенно *нелинейной*, так что ее решение возможно, как правило, только численными методами.

#### 10.16.4. Поточковая задача массопереноса

Задача массопереноса является **внешней**, когда лимитирует перенос вещества из объема сплошной среды к поверхности твердого тела, и **внутренней**, когда превалирует диффузионное сопротивление внутри тела. Нередко встречаются технологические ситуации, когда эти стадии протекают в благоприятных условиях и не являются лимитирующими:

- высокие коэффициенты массоотдачи и развитые поверхности контакта: мелкие частицы, когда  $Sh_{\min} \geq 2$  и получают высокие  $\beta$ ; кроме того, малым  $d$  отвечают еще и большие  $F_{уд}$ ;

- высокие коэффициенты диффузии  $D_m$  внутри твердого тела: мелкие частицы, тонкие нити или пленки *высокой пористости* — при сравнительно крупных и преимущественно сквозных порах, специфических физико-химических свойствах вещества и твердого тела.

Тогда внешняя и внутренняя стадии протекают с высокими скоростями, так что нестационарный акт массопереноса быстро завершается: *фазы приходят в равновесие*. В этих случаях массообмен в целом может лимитироваться одной из потоковых стадий — подводом вещества в рабочую зону (в рассматриваемом примере — с потоком сплошной среды) или его отводом из рабочей зоны (с твердым телом; с потоком твердых зерен, например). Это означает, что массоперенос протекает в условиях *потоковой задачи*, а контакт фаз является *идеальным*. При этом кинетические характеристики внешней ( $\beta$ ,  $F$ ) и внутренней ( $D_m$ ,  $d$ ) задач перестают влиять на интенсивность процесса в целом.

Массоперенос в условиях потоковой задачи описывается уравнением материального баланса типа (10.18), дополненным

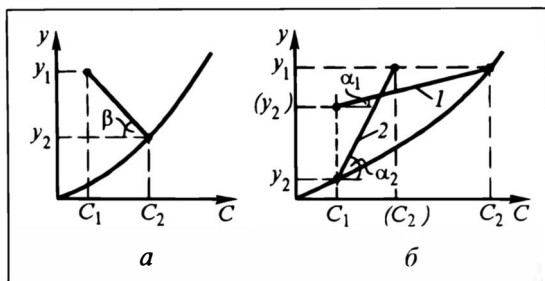


Рис. 10.49. Идеальный массоперенос с твердыми телами в условиях потоковой задачи: *а* — рабочая линия (точка) при прямотоке или ИП обеих фаз, *б* — рабочие линии при противотоке фаз: лимитирует поток сплошной среды (1) или твердой дискретной фазы (2)

равновесной зависимостью  $y = f^P(C)$ , причем для рассматриваемой задачи  $C = C_{\Pi} = \bar{C}$  (где  $C_{\Pi}$  — концентрация на поверхности тела). Поскольку фазы уходят из системы в равновесии, то в балансовом уравнении (записано для непрерывного процесса)

$$L(y_1 - y_2) = G(\bar{C}_2 - \bar{C}_1) \quad (10.79)$$

выходные концентрации  $y_2$  и  $\bar{C}_2$  — равновесны.

В рассматриваемом случае пропускные способности потоковых стадий равны  $L$  и  $G$ ; одна из них может быть лимитирующей.

Рабочая линия при идеальном контакте фаз заканчивается (а рабочая точка при ИП фаз — располагается) на линии равновесия. Иными словами (рис. 10.49,а), при ИП одной или обеих фаз либо при их прямотоке точка выходных концентраций ( $y_2$ ,  $C_2$ ) лежит на равновесной линии. В случае противотока (рис. 10.49,б) на линии равновесия будет лежать один из концов рабочей линии. Если лимитирующим является поток  $L$  фазы “у”, то рабочая линия занимает положение 1 (при заданном  $C_2$  она выше пойти не может из условий материального баланса), и равновесной будет точка с координатами  $y_1$ ,  $C_2$ . Если же лимитирует поток  $G$  (в терминах фазы “у” — поток  $mG$ ), то рабочая линия занимает положение 2 (при заданном  $y_2$  левее она пойти не может по условиям материального баланса), а равновесной будет точка ( $y_2$ ,  $C_1$ ).

Решение эксплуатационных и проектных задач применительно к непрерывным процессам массообмена с твердыми телами при идеальном контакте фаз не отличается от рассмотренных в разд.10.7 (и последующих) для отдельных аппаратов и в разд. 10.12 и 10.13 для их сетей. В случае прямой линии равновесия ( $y = mC$ ,  $m = \text{const}$ ) задачи решаются аналитически.

Изложенный подход к решению потоковых задач использован в последующих главах при рассмотрении конкретных технологических приемов.

### 10.16.5. О смешанных задачах массопереноса

Массообмен нередко протекает в отсутствие лимитирующей стадии: две медленные стадии (или больше) имеют *сопоставимые* пропускные способности. В этих случаях расчет процесса, как правило, заметно усложняется. Исключением в этом смысле является идеальный контакт фаз — **смешанная потоковая задача**. Здесь подходы к расчету остаются *качественно независимыми* от соотношения потоков  $L$  и  $G$  (в сопоставимых единицах при  $m = \text{const}$  — от соотношения величин  $L$  и  $mG$ ); это соотношение  $G/L$  (или  $mG/L$ ) отражается лишь на *количественных* результатах, поскольку определяет наклон рабочих линий.

В тех случаях, когда по величине сопоставимы пропускные способности **внешней и внутренней** стадий, уравнение Фика должно решаться в граничных условиях III рода — одна из **смешанных задач** массопереноса. Эти условия выражают равенство потоков вещества, подводимых конвекцией из сплошной фазы к границе с твердым телом и отводимых диффузией (массопроводностью) от границы внутрь тела:

$$\beta\rho(y - y^p)F = -D_m \frac{\partial C}{\partial n} F \Big|_{\text{гр}}; \quad (10.80)$$

здесь символ “гр” означает принадлежность к границе раздела фаз.

Масштабные преобразования этого соотношения приводят к диффузионному критерию Био  $Bi_d \equiv \beta Rm/D_m$ , разграничивающему **внешнюю** ( $Bi_d \rightarrow 0$ , практически — к достаточно малым величинам) или **внутреннюю** ( $Bi_d \rightarrow \infty$ , практически — к достаточно большим величинам) задачу — и **смешанную** (когда  $Bi_d$  ограничен, практически не более чем на порядок больше или меньше 1).

Общая картина изменения во времени концентрации вещества в твердой плоской пластине при симметричном массопереносе приведена на рис.10.50 для простейшего варианта задачи: концентрация вещества в потоке постоянна во времени и одинакова во всех точках около поверхности пластины. Отличие от внутренней задачи состоит в том, что здесь задана концентрация вещества в *сплошной* среде, а его концентрация *на поверхности* твердого тела  $C_s$  *переменна* — она с течением времени и по мере насыщения твердого тела изменяется, приближаясь к равновесной  $C^p$ . При этом и приповерхностный градиент концентраций  $|\partial C/\partial x|_{\text{гр}}$  понижается во времени: наклоны линий  $C = C(x)|_{\text{гр}}$  в каждый момент времени отвечают выражению (10.80), т.е. эти линии выходят из точки с ординатой  $C^p$  и абсциссой  $|\delta_d| = \beta/D_m$  (см. рис. 10.50).

Рис. 10.50. Общая картина изменения концентрации вещества во времени по толщине плоской бесконечной пластины в граничных условиях III рода.

Цифры у кривых 1, 2, ...,  $\infty$  отвечают нарастающим моментам времени процесса, отсчитанным от  $\tau = 0$

Решение задачи массопереноса в граничных условиях III рода (в отличие от внутренней задачи — см. разд. 10.16.3) должно в качестве независимой переменной включать критерий  $Bi_d$ :

$$\frac{C^P - C(x, \tau, \beta, D_M, \dots)}{C^P - C_0} = f_3(Fo_d, x/\delta, Bi_d)$$

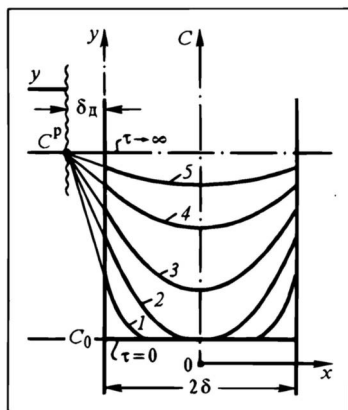
$$\text{и} \quad \frac{C^P - \bar{C}(\tau, \beta, D_M, \dots)}{C^P - C_0} = f_4(Fo_d, Bi_d). \quad (10.81)$$

Конкретные решения (10.81) сходны с получаемыми для внутренней задачи, например в форме (10.78a). Однако в случае граничных условий III рода корни  $\mu_n$  выражаются через  $Bi_d$ , формула (ж) теряет силу. Вид функции  $\mu_n = \mu_n(Bi_d)$  различен для разных задач массопереноса, например для пластины, цилиндра или шара.

В предельных ситуациях ( $Bi \rightarrow 0, \infty$ ) решения типа (10.81) закономерно переходят в выражения для внешнего и внутреннего массопереноса.

Пусть теперь сопоставимы пропускные способности **внешней** и одной из **поточковых** стадий переноса вещества — тоже одна из **смешанных задач**. Здесь анализ массопереноса аналогичен рассмотренному в разд. 10.8—10.10 для двух сплошных фаз: процесс определяется отношениями пропускных способностей  $a \equiv \beta r F / L$  и (или)  $b \equiv \beta r F / m G$ .

**Смешанная задача** при сопоставимости пропускных способностей **поточковой** и **внутренней** стадий массопереноса требует представления отношений их пропускных способностей. Чтобы конкретно записать соответствующее отношение, необходимо предварительно выразить градиент  $\partial C / \partial n$  в (10.80) и пропускную способность внутреннего переноса. Выражения получают различные для тел разной формы (см. разд. 6.3). Для текущих и конечных значений пропускных способностей стадии внутреннего переноса должна быть учтена специфика нестационарного процесса (время  $\tau$ ,  $\tau_k$  и т.п.).



Подходы к анализу и расчету массообмена с твердыми телами, изложенные в разд. 10.16, могут оказаться полезными и при анализе процессов массообмена с каплями, пузырями, т.е. с дискретными образованиями с *изменяющейся* конфигурацией элементов. Однако в этом случае все процессы переноса протекают значительно сложнее, поскольку на молекулярную диффузию внутри элемента дискретной фазы (теплопроводности в случае теплопереноса, молекулярной вязкости при переносе импульса) накладывается **внутренняя циркуляция** жидкости, газа. Она вызвана взаимным перемещением сплошной и дискретной фаз — см. рис. 2.43. Эта циркуляция слабо выражена в случае мелких капель, пузырей (скажем, размером менее 1 мм), но ее интенсивность быстро нарастает при увеличении размера элемента дискретной фазы. Циркуляционный и диффузионный переносы протекают параллельно. Для *мелких* элементов превалирует диффузионный механизм переноса, так что здесь в значительной мере работают подходы и справедливы выводы и оценки, полученные в разделе 10.16. Для *крупных* элементов дискретной фазы доминирующим становится циркуляционный перенос, требующий особого анализа; эти сложные вопросы — за пределами учебника.

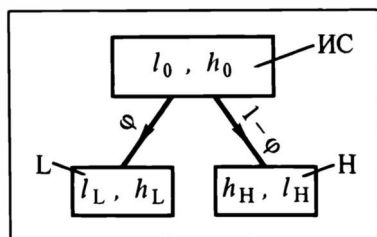
## 10.17. К ОЦЕНКЕ КАЧЕСТВА РАЗДЕЛЕНИЯ

В результате процессов разделения из исходной смеси разных компонентов, находящихся в ней в каком-либо определенном соотношении, получаются два или более продуктов (фракций, классов и т.п.), содержащих эти компоненты в иных соотношениях. Практически важно *количественно* оценить **качество разделения** смеси на эти продукты, имея в виду *технологическую эффективность* — в плане их пригодности для использования в виде конечных продуктов или полупродуктов, малоотходности, экономичности, экологичности. Такая оценка позволяет сопоставлять различные процессы (схемы) разделения и выбирать оптимальные — с позиций принятого критерия оптимальности.

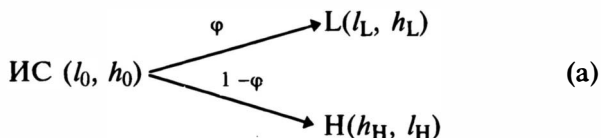
Будем рассматривать один из наиболее простых процессов разделения исходной *бинарной* смеси (ИС) класса 2(2-2)<sub>2</sub> на *два* продукта — L и H (рис. 10.51). Смеси (исходная и продукты) состоят из компонентов, отличающихся друг от друга каким-либо признаком (признаками): химическим строением, физико-химическими свойствами, размерами. Пусть в рассматриваемом случае компоненты различаются, например, плотностью — назовем их легким *l* (light) и тяжелым *h* (heavy).

Количества компонентов будем выражать в массовых, мольных или каких-либо иных величинах, подчиняющихся закону

Рис. 10.51. К оценке качества разделения исходной бинарной смеси ИС на два продукта — L и H



сохранения. Обозначим: количества легкого и тяжелого компонентов (скажем, массовые — в кг) в исходной смеси  $l_0$  и  $h_0$  соответственно. Пусть продукт L в результате разделения обогащается легким компонентом, а продукт H — тяжелым; при этом доля получающегося продукта L составляет  $(L/ИС) = \varphi$ , тогда доля продукта H будет  $(H/ИС) = 1 - \varphi$ . Процесс разделения соответственно рисунку может быть представлен схемой:



В идеале продукт L должен содержать только легкий компонент  $l$ , а продукт H — только тяжелый  $h$ . Реально каждый продукт из-за несовершенства процесса разделения содержит еще нежелательную примесь другого компонента. Пусть (см. рис. 10.51) в продукте L содержится  $l_L$  кг целевого (легкого) компонента и  $h_L$  кг примеси (тяжелого компонента); соответственно в продукте H содержится  $h_H$  кг целевого (тяжелого) компонента и  $l_H$  кг примеси (легкого). По закону сохранения вещества материальные балансы типа (1.8 б—г) запишутся для отдельных компонентов в виде

$$l_0 = l_L + l_H, \quad h_0 = h_H + h_L. \quad (б)$$

Качество каждого из продуктов может быть, с одной стороны, охарактеризовано его чистотой:

$$\varphi_L = \frac{l_L}{l_L + h_L}, \quad \varphi_H = \frac{h_H}{h_H + l_H}. \quad (в)$$

С другой стороны, качество процесса может быть охарактеризовано выходом целевых компонентов (от их содержания в ИС) в каждый из продуктов:

$$B_L = l_L/l_0, \quad B_H = h_H/h_0. \quad (г)$$

Для практических расчетов полезны также соотношения, прямо следующие из схемы (а) или рис.10.51:

$$l_L + h_L = \varphi(l_0 + h_0); \quad h_H + l_H = (1 - \varphi)(l_0 + h_0). \quad (д)$$

С позиций современных технологических требований в процессах разделения обычно желательно увеличение как чистоты



Ч продуктов, так и выходов В целевых компонентов в продуктах; в свете тенденции современных производств к безотходности в ряде случаев требования к В и Ч весьма высоки; эти величины приближаются к 1. Ограничения в увеличении В и Ч на данной стадии развития промышленности носят чаще всего экономический характер: повышение В и Ч сопровождается дополнительными затратами.

Величины  $l_0$  и  $h_0$  обычно заданы. Для определения пяти искомых величин  $l_L$ ,  $h_L$ ,  $h_H$ ,  $l_H$  (или производных от них  $\chi_L$ ,  $\chi_H$ ,  $V_L$ ,  $V_H$ ) и  $\phi$  необходимы пять связей; три из них представлены выражениями (б), а также любым из выражений (д). Следовательно, еще две определяемые величины должны быть заданы дополнительно, остальные будут получены расчетным путем. Например, заданы значения  $V_L$  и  $V_H$ ; требуется определить  $\chi_L$ ,  $\chi_H$  и  $\phi$ . Тогда из (г) находят  $l_L$  и  $h_H$ , далее по (б) рассчитывают  $l_H$  и  $h_L$  и по (в) определяют искомые  $\chi_L$  и  $\chi_H$ . Наконец, доля  $\phi$  продукта L вычисляется по любому из выражений (д).

Из изложенного следует, что даже в рассматриваемом простейшем случае разделения бинарной смеси на два продукта приходится характеризовать качество разделения четырьмя числами (пусть — взаимосвязанными):  $\chi_L$ ,  $\chi_H$ ,  $V_L$ ,  $V_H$  — это весьма громоздко. Желательно располагать более лаконичным способом оценки качества разделения — с меньшим числом показателей. В этих целях предложены *технологические критерии разделения E*, характеризующие одновременно чистоту и выход, — они представляют собой разность выходов в данный продукт целевого компонента и примеси. Для продуктов L и H соответственно:

$$E_L = \frac{l_L}{l_0} - \frac{h_L}{h_0}; E_H = \frac{h_H}{h_0} - \frac{l_H}{l_0}. \quad (10.82)$$

Рассмотрим некоторые свойства этих критериев разделения бинарной смеси на два продукта (фракции, класса).

1. Численные значения критериев разделения для обоих продуктов — одинаковы:

$$E_L = E_H. \quad (е)$$

Для доказательства этого утверждения запишем сначала очевидное тождество:

$$l_0/h_0 = h_0/h_0 \equiv 1,$$

откуда согласно (б)

$$\frac{l_L + l_H}{l_0} = \frac{h_H + h_L}{h_0} \quad \text{или, что то же самое,} \quad \frac{l_L}{l_0} + \frac{l_H}{l_0} = \frac{h_H}{h_0} + \frac{h_L}{h_0}.$$

Собирая теперь стоящие в числителях компоненты  $l$  и  $h$  с одинаковыми индексами в левую и правую части равенства соответственно, приходим к постулату (е):

$$E_L = E_H \equiv E. \quad (ж)$$

Это означает, что использование критериев разделения  $E_L$  и  $E_H$  — равноценно; в дальнейшем критерий  $E$  применяется без индекса.

2. Пусть исходную смесь делят *формально* (чисто механически) на два продукта, не отличающиеся от нее по составу. Иными словами, *отсутствует обогащение* продуктов соответствующими компонентами. В этом случае (на примере продукта L):  $l_L = \varphi l_0$ ,  $h_L = \varphi h_0$  (аналогично можно было бы выразить  $h_H$  и  $l_H$ , но с использованием доли  $1 - \varphi$ ). Тогда

$$E_L \equiv E = \frac{l_L}{l_0} - \frac{h_L}{h_0} = \frac{\varphi l_0}{l_0} - \frac{\varphi h_0}{h_0} = \varphi - \varphi = 0. \quad (3)$$

Такая ситуация полностью соответствует “процессу разделения” без обогащения продуктов.

Тот же результат получится при попадании *всей* исходной смеси ( $\varphi = 0$  или  $\varphi = 1$ ) в один из продуктов.

3. При *идеальном разделении* компонент  $l$  целиком переходит в продукт L ( $l_L = l_0$ ,  $h_L = 1$ ), а примесь в этот продукт не попадает совсем ( $h_L = 0$ ). Тогда

$$E_L \equiv E = \frac{l_L}{l_0} - \frac{h_L}{h_0} = \frac{l_0}{l_0} - \frac{0}{h_0} = 1 \text{ (или 100\%)}, \quad (и)$$

что отвечает смыслу идеального разделения.

Таким образом, в полном диапазоне реального разделительного процесса (от формального деления исходной смеси на порции без обогащения продуктов — до идеального разделения) критерий  $E$  изменяется в диапазоне от 0 до 1. Возрастание критерия  $E$  означает повышение качества разделения; поэтому увеличение  $E$  в общем плане технологически целесообразно. Надо иметь в виду, что несмотря на дополнительные энергетические и прочие затраты, сопутствующие, как правило, повышению  $E$ , требования к величине критерия разделения в ряде случаев носят характер жестких ограничений (подчас — просто вето) не только в технологическом аспекте (последующее использование продуктов), но и в плане экологической чистоты.

На практике значительно чаще технология имеет дело с разделением **многокомпонентных** исходных смесей на *несколько* продуктов с доминирующим содержанием какого-нибудь одного (иногда — нескольких) компонента в каждом. В этих случаях оценка качества разделения с помощью критериев, сформированных на изложенной выше основе, приводит к значительно более сложным выражениям для  $E$ .

Более наглядной, хотя пока и менее привычной, является оценка качества разделения исходной смеси с произвольным количеством компонентов на несколько продуктов — на базе **энтропийного критерия разделения**  $E_S$ . Для  $n$ -компонентной смеси при разделении ее на  $N$  продуктов критерий  $E_S$  представляет собой разность  $S_H - S_K$  полных энтропий — начальной и конечной. Эти энтропии, базирующиеся на **информационных энтропиях** компонентов, вычисляются на основе *мольных* (в случае раз-

деления сыпучих материалов — на основе “частичечных”) концентраций компонентов ( $x$ ).

Для каждого  $i$ -го компонента удельная энтропия определяется как  $s_i = x_i \ln x_i$ . Тогда полная энтропия для  $G$  молей исходной смеси составляет

$$S_H = G \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i. \quad (\kappa)$$

Энтропия  $j$ -го продукта (его мольное количество равно  $G_j$ , а число продуктов —  $N$ ) вычисляется как сумма энтропий содержащихся в нем компонентов:  $G_j \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i$ , причем  $\sum_{j=1}^N G_j = G$ .

Тогда полная суммарная энтропия конечных продуктов составляет

$$S_K = \sum_{j=1}^N G_j \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i. \quad (\lambda)$$

Существуют и другие формы записи энтропийных критериев\*.

Каждому разделительному процессу отвечает (в задачах эксплуатации) или должно отвечать (в задачах проектирования) конкретное значение критерия разделения, определяемое назначением и ограничениями производства.

#### ЛИТЕРАТУРА к главе 10

1. Астарита Дж. Массопередача с химической реакцией: Пер. с англ./ Под ред. Л.А. Серафимова. Л.: Химия, 1971. 224 с.
2. Азров М.Э., Тодес О.М. Гидравлические и тепловые основы работы аппаратов со стационарным и кипящим зернистым слоем. Л.: Химия, 1968. 512 с.
3. Барский Л.А., Пляксин И.Н. Критерии оптимизации разделительных процессов. М.: Наука, 1967 г. 118 с.
4. Барский М.Д., Ревнивец В.И., Соколкин Ю.В. Гравитационная классификация зернистых материалов. М.: Недра, 1974. 232 с.
5. Берд Р., Стьюарт В., Лайтфут Е. Явления переноса: Пер. с англ./ Под ред. Н.М. Жаворонкова, В.А. Малюсова. М.: Химия, 1974. 688 с.
6. Бретшнайдер С. Свойства газов и жидкостей: Пер. с польск./ Под ред. П.Г. Романкова. М.— Л.: Химия, 1966. 536 с.
7. Варгафтик Н.Б. Справочник по физическим свойствам газов и жидкостей. М.: Физматгиз, 1963. 708 с.
8. Гельперин Н.И. Основные процессы и аппараты химической технологии. М.: Химия, 1981. 812 с.
9. Гельперин Н.И., Айнштейн В.Г., Краша В.Б. Основы техники псевдоожижения. М.: Химия, 1967. 664 с.
10. Дытнерский Ю.И. Процессы и аппараты химической технологии. М.: Химия, 1995. 768 с.
11. Жаров В.Т., Серафимов Л.А. Физико-химические основы дистилляции и ректификации. Л.: Химия, 1975. 240 с.
12. Касаткин А.Г. Основные процессы и аппараты химической технологии. М.: Химия, 1971. 784 с.
13. Кафаров В.В. Основы массопередачи. М.: Высшая школа, 1979. 440 с.
14. Коган В.Б. Теоретические основы типовых процессов химической технологии. Л.: Химия, 1977. 592 с.
15. Кришнер О. Научные основы техники сушки: Пер. с нем./ Под ред. А.С. Гинзбурга. М.: ИЛ, 1961. 540 с.
16. Основные процессы и аппараты химической технологии./ Под ред. Ю.И. Дытнерского. М.: Химия, 1991. 496 с.
17. Перри Дж. Справочник инженера-химика: Пер. с англ./ Под ред. Н.М. Жаворонкова. Л.: Химия, 1969. 1144 с. (т. I, 640 с.; т. II, 504 с.).
18. Рамм В.М. Абсорбция газов. М.: Химия, 1976. 656 с.
19. Рид Р., Шервуд Т. Свойства газов и жидкостей: Пер. с англ./ Под ред. А.Н. Плановского. М.: Гостоптехиздат, 1964. 334 с.
20. Романков П.Г., Фролов В.Ф. Массообменные процессы химической технологии (системы с дисперсной твердой фазой). Л.: Химия, 1990. 384 с.
21. Рудобахта С.П. Массоперенос в системах с твердой фазой. М.: Химия, 1980. 248 с.
22. Цибороцкий Я. Процессы химической технологии: Пер. с польск./ Под ред. П.Г. Романкова. Л.: Госхимиздат, 1958. 932 с.
23. Шервуд Т., Пизфорд Р., Уилки Ч. Массопередача: Пер. с англ./ Под ред. В.А. Малюсова. М.: Химия, 1982. 696 с.

\* О требованиях к критериям разделения, способах их конструирования и о сопоставлении различных критериев см. [3, 4] и др.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абсолютно белое тело 510  
Абсолютно черное тело 510 сл.  
Абсорбент(ы) 907  
    относительная теплоемкость 939  
    регенерированный 910  
    требования к ним 909  
Абсорбер(ы)  
    барботажные 917, 918  
    Вентури 921  
    высота 932–35  
    гидравлическое сопротивление 964–67  
    каскадный 913  
    классификация 912  
    конструкции 911–21  
    насадочные 912, 914–17, 933, 966  
    пленочные 912–14, 933, 966  
    полочный 912, 913  
    распылительные 920–21  
    расчет 928, 37  
    со ступенчатым контактом фаз 935, 964–66  
    трубчатые 913, 966  
    форсуночные 920  
    эмульгационный 920  
Абсорбционно-десорбционная установка 910  
Абсорбция 907–68  
    коэффициент ускорения 947  
    летучим поглотителем 951–58  
    многокомпонентной смеси 934–44  
    неизотермическая 938–43  
    с рециркуляцией рабочих потоков 935–38  
    теплота 939  
    фазовое равновесие 922–27  
Абсорбция  
    физическая 907, 922–25  
    с химической реакцией *см.* Хемосорбция  
Аддитивность 51  
Адиабата 326  
Адсорбат 1157  
Адсорбенты 1157–1160  
    гранулированные *см.* Иониты  
    регенерация 1158  
    требования к ним 1158  
Адсорбер(ы) (десорберы, активаторы) 1167–75  
    с движущимся слоем сорбента 1127–73  
    с неподвижным слоем сорбента 1174  
    непрерывного действия 1167–73  
    полунепрерывного действия 1174  
    с псевдоожженным слоем 1167–71  
    расчет 1177–87  
    ступенчато-противоточный 1184–87  
Адсорбтив 1157  
Адсорбция 1157–1212  
    в движущемся слое сорбента 1187–90  
    идеальная 1192–1194, 1199–1201  
    механизм 1161–63  
    в неподвижном слое сорбента 1191–1212  
    непрерывная 1176–90  
    периодическая 1174  
    полунепрерывная 1191–1212  
    противоточная 1187–90  
    в псевдоожженном слое 1176–86  
    равновесие 1163–67  
    реальная 1195–99, 1201

Адсорбция 1157–1212  
     технологический расчет 1175  
     физическая 1161–62, 1165  
     химическая 1727  
 Азеотропные смеси 982  
     разделение 1704, 1712  
 Азеотропообразующие смеси 982, 1066  
 Активные (активированные) угли 1159  
 Алюмогели 1159  
 Амортизационные затраты 173  
 Аморфные вещества 1308  
 Анизотропная среда 49, 95  
 Ансамбль частиц 151  
 Антагонизм свойств 51, 52  
 Аппараты ХТ 38  
     барботажные 746–47  
     воздушного охлаждения (АВО) 1583  
     выпарные см. Выпарные аппараты  
     высота 816  
     диспергирующие 746–47  
     насадочные 745  
     перекрестное соединение 851–62  
     плочные 745–46  
     полочные 745–46  
     поперечное сечение 815  
     пропускная способность 825–27  
     размеры 814–17  
     со ступенчатым противотоком 834 сл. цепи (сети) 830 сл.  
 Атермичные тела 510  
 Аэроусушка 1668  
 Байпас 801, 803  
 Балансы (материальный, тепловой, энергетический и др.) 55–60, 547  
     временной интервал 56, 57  
     пространственный контур 56, 57  
     составление 56–58, 547  
     составляющие (Приход, Уход, Источник, Сток, Накопление) 56  
     уравнения 55 сл.  
 Барботаж 441–43, 912  
 Бародиффузия 773  
 Безразмерные  
     величины 44  
     комплексы 100–01  
     числа 105  
 Биения 402  
 Бинода 1139  
 Бинодаль 1139  
 Брызгоуловители 671, 732  
 Бураты 1660

Вакуумирование 368–75  
     время 374–75  
     глубокое 373  
 Вакуум-кристаллизаторы 1336–67  
 Вакуумметр 123  
 Вакуум-насосы (ВН) 324, 356–59, 368–74  
     водокольцевые 358  
     глубокого вакуума 372–74  
     диффузионные 373  
     индикаторная диаграмма 370  
     поршневые 369–72  
     специальные 372–73  
 Вакуум-сушильный шкаф 1225–26  
 Вакуум-фильтр барабанный 417–18, 426–27  
 Валковый пресс 1485, 1505  
 Величина(ы)  
     безразмерные 44  
     интенсивные 50, 51  
     распределенная 50  
     сосредоточенная 49  
     удельные 51  
     экстенсивные 50  
 Вентиль  
     дрессельный 1556–57  
     – игольчатый 1584  
 Вентиляторы центробежные 324, 359, 366–67  
 Вентиляционные потери 403  
*Вентури* абсорберы 921  
 Виброаэросушилка 1222  
 Виброгранулятор 1484  
 Влага  
     адиабатное испарение 1241–42  
     концентрация в воздухе 1230–33  
     свободная 1286  
     связанная 1286  
 Влагоотделители (сепараторы) 344  
 Влагосодержание 1232  
 Влажность  
     абсолютная 1230–31  
     относительная 1231  
 Возгонка твердой фазы см. Сублимация  
 Воздух влажный  
     диаграммы 1237–39  
     относительная энтальпия 1235  
     относительный удельный объем 1234  
     свойства 1230–39  
 Воздух жидкий, разделение на  $N_2$  и  $O_2$ , агрегат 1612–17  
 Воздушные колпаки 285–88  
 Волна концентрационная 1194

- Вращение вокруг оси  
 вертикальной 126–28  
 горизонтальной 128–29
- Вредное пространство 338, 355
- Время  
 защитного действия 1192, 1198  
 потерянное 1202, 1208–10  
 пребывания 609, 618, 621, 624–26,  
 629, 633, 638  
 проскока 1192  
 среднее 621–22, 647
- Выпаривание 667–735  
 дифференциальное 690  
 непрерывное 693–703  
 периодическое 686–93  
 полунепрерывное 690  
 физико-химические основы 675–83
- Выпарные аппараты 675  
 вакуумные 696–702  
 с вынесенной зоной кипения 673  
 емкостные 675  
 классификация 669–70  
 конструкции 671–75  
 контактного типа 675  
 многокорпусные 703–16  
 непрерывного действия 693–703  
 периодического действия 685–93  
 плочные 672, 674, 727–30  
 с погружной горелкой 675  
 сепарационное пространство 730–  
 32  
 схема расчетная 683–84  
 с тепловым насосом 716–27  
 с циркуляцией раствора 671–74  
 – принудительной 673–74  
 чистка 673
- Высота *см.* Напор
- Выщелачивание (частичное растворе-  
 ние) 1393  
 аппаратура 1398–1402  
 с инертным компонентом 1419–26  
 многоступенчатое (перекрестное)  
 1422–23  
 с непрерывным контактом фаз  
 1426, 1432–34  
 перекрестное 1422–23  
 в потоке растворителя 1430–32  
 противоточное 1423, 1432–34  
 равновесие 1420
- ВЭТС 851
- Вязкость 83  
 динамическая 62  
 кажущаяся (неньютоновских  
 жидкостей) 191
- Вязкость 83  
 кинематическая 62  
 турбулентная 154
- Газ(ы)  
 барботаж 441–43  
 идеальные 49  
 коэффициент сжимаемости 329  
 неконденсирующиеся 697  
 обеспыливание *см.* Обеспылива-  
 ние газов  
 ожигение дросселированием  
 1596–1601  
 осушка 1170  
 сжатие 323 *сл.*  
 степень черноты 517
- Газгольдеры 1616
- Газлифт (эрлифт) 262, 265, 314–15,  
 317, 320–21, 1397
- Газ-носитель 907
- Газовзвесь 404
- Газовые пузыри, образование и дви-  
 жение 241–46
- Газодувка 324, 359
- Газопровод. расчет 179–82
- Газосодержание 247, 314
- Гетероазеотроп 1066
- Гигроскопичность 1470
- Гидравлика 119–260  
 дисперсных систем 213–55  
 сплошных сред 119–213
- Гидравлические потери 138
- Гидравлический  
 радиус живого сечения 139–40  
 удар 182–85
- Гидравлическое сопротивление  
 движущегося слоя 223  
 двухфазных систем 256  
 коэффициент 141, 159–62, 490  
 местное 163–65  
 неподвижного слоя 217  
 пневмотранспорта 250–55  
 псевдоожигенного слоя 228–30  
 суммарное 169  
 эквивалентная длина 164
- Гидродинамика 132–257  
 внешняя задача 133, 219–20  
 внутренняя задача 133, 220  
 смешанная задача 246  
 уравнение дифференциальное 83

- Гидростатика 119–132  
уравнения 10, 121, 164
- Гидроциклоны 412
- Гиперсорбция 1171
- Гомоазеотроп 1066
- Граничные условия (ГУ) 98, 99, 575–76  
классификация 98, 99  
Стефана 1334
- Гранулирование 1469–1518  
агломерацией порошков 1476, 1479, 1496  
аппаратура 1478–90  
безрeturное 1500–02  
десублимацией 1477  
классификация 1474–77  
кристаллизацией капель расплава 1475, 1486–89, 1510–15  
материальные и тепловые балансы 1491–93, 1508–10  
окачиванием 1479, 1496  
из паровой фазы 1515  
порошков 1477, 1490–1507  
в потоке хладагента 1475, 1486  
прессованием 1476, 1485, 1504–07  
расплавов 1477, 1486–89, 1508–15  
из растворов 1477, 1515  
с ретуром 1502  
с теплоносителем 1477  
технологическая схема 1478  
формованием 1476, 1485, 1507
- Гранулометрический анализ 1658
- Гранулирование, кинетика 1496–1503
- Гранулы 1469  
капсулирование 1516–18  
механизмы взаимодействия частиц в них 1472–74  
свойства 1469–70  
– роста 1497  
слеживаемость 1470  
стадии 1470–71  
структурирование 1471  
формование 1470–71
- Гранулятор(ы)  
барабанные 1480  
емкостные 1488  
колонные 1488  
ленточный 1481  
с псевдооживленным слоем 1482–83  
ротационные статистические 1487  
скоростной 1484  
тарельчатый 1481  
с фонтанирующим слоем 1483
- Грануляционная башня 1489
- Грохот(ы) 1657–63  
барабанный 1660–61  
вибрационный 1662–63
- Грохот(ы)  
гирационный 1662–63  
горизонтальные 1663–64  
многогранные (бураты) 1660  
качающиеся 1661–62  
наклонный 1661  
неподвижный 1661  
устройство 1660–63
- Грохочение 1657–67  
расчет 1663–66  
способы 1659–60
- Давление 54  
атмосферное 123  
на боковые стенки сосуда 130–31  
внешнее 122  
гидростатическое 122, 131  
на дно сосуда 130  
закон распределения 121  
избыточное 123  
критическое 522  
локальное 54  
осмотическое 1527  
при относительном покое 124–29  
в покоящемся сосуде 122–23  
полное 122  
силы 79  
среднее 54  
ударное 182 сл.  
центр 131
- Движущая сила  
гидродинамическая *см.* Напор  
массообмена средняя 805–17  
– при идеальном перемешивании 807  
– при противотоке фаз 811  
– при прямотоке фаз 809  
теплообмена 545 *см. также* Температурный напор
- Движущийся слой (ДС) 214, 222–24
- Двухфазные потоки 246–55 *см. также* Массообмен
- Дельта-функция Дирака 625
- Депрессия  
гидравлическая 699  
температурная 677
- Десорбирующий агент 959
- расход 960

- Десорбция 907, 959–67 см. также  
Сушка твердых материалов  
методы 960–61  
расчет 961–64
- Десублимат 1442–43  
плавление 1468
- Десублиматор(ы) (твердофазные конденсаторы) 1450  
емкостные 1450  
объемные 1450–52  
поверхностные 1450, 1452, 1454–55  
скребковый 1453
- Десублимация 1435 сл.  
аппаратура 1448–57  
вакуумная 1449–50  
с инертным газом-носителем 1444–45  
кинетика 1441  
методы 1444–47  
механизм 1442  
объемная 1444–47  
на охлаждаемых поверхностях 1443  
поверхностная 1443  
применение 1435  
равновесия диаграммы 1439  
расчет 1463–68  
физико-химические основы 1436–40  
фракционная 1446
- Детандер(ы) 1556, 1584  
адиабатический КПД 1588  
поршневые 1584, 158, 1602–05, 1611  
центробежные (турбо-) см. Турбо-детандеры
- Дефлегматор 1015  
Дефлегмация 1015  
Джоуль 42  
Диализ 1526  
Динамический свод 22  
Диатермичное тело 510  
Дискретная фаза 213  
Диспергаторы 1486–87  
Диспергирование жидкостей и газов 461–67  
при истечении из отверстий 465–67  
механическое 462–64  
режимы 465–66
- Дисперсионная (сплошная) среда 213, 1103  
Дисперсия 438  
Дисперсная (диспегуемая) фаза 213, 1103  
задержка 247, 25  
размер частиц 241–44  
скорость движения в сплошной среде 244–46
- Дисперсные материалы, свойства 1490  
Дисперсные системы с твердой фазой 214–16
- Диссипация энергии 462  
Дистиллят 990, 1013  
Дистилляционный куб 989  
Дистилляция 969–70, 988–1010  
взаимно нерастворимых компонентов 1007–08  
гидродинамическая 1686  
с дефлегмацией 1006  
многократная 1008  
молекулярная 1002–05  
однократная 996–99  
полунепрерывная 1005–06  
постепенная 990–95, 1006  
простая 990  
расчет 990–96  
в токе инертного газа 999–1002  
фракционированная 996
- Диффузия 89, 770  
внешняя 871  
внутренняя 871  
облегченная 1529
- Диффузор 720–21, 723–24  
Допустимая погрешность 44  
Дробилка(и)  
валковые (ВД) 1634–39  
гладковалковая 1635, 1637  
шековые 1626–33
- Дросселирование 1557, 1585–88  
Друк-фильтр 415–16
- Единицы измерения 41–43
- Живое сечение потока 139, 140  
Жидкость(и)  
абсолютно несжимаемая 48  
бингамовские 193, 195–98  
вязкоупругие 195  
вязкоэластичные 195  
дилатантные 194, 199–202  
диспергирование 461–67



- идеальная 48
- истечение *см.* Истечение жидкости
- кипение 502–06
- коэффициент сжимаемости 184
- неньютоновские 190–202
- ньютоновские 146 сл., 193, 195
- орошающая 915
- осветленные 378
- псевдопластичные 194, 199–202
- реальные 48
- режимы течения *см.* Режимы течения
- реопектантные 195
- реопектические 195
- Жидкость(и)**
  - средства перемещения 261 сл., *см. также* Насосы
  - тиксотропные 195
- Жидкофазные мостики** 1473
- Задача(и) переноса**
  - балансовая 571–72
  - внешняя 576
  - внутренняя 576
  - диффузионная 947
  - кинетическая 946
  - обратные 170
  - поверхностная 569, 571 сл.
  - потокосные 570 сл., 586
  - прямые 170
  - смешанные 571 сл., 585, 586, 947
- Задачи**
  - проектирования 41, 167
  - эксплуатационные 41, 167
- Закон “1/7”** 159
- Закон(ы)**
  - Архимеда 55
  - Генри 924, 973
  - Гаука 183
  - Дарси 66
  - Коновалова 975, 983
  - Ньютона 66, 488
  - Ома 66
  - Паскаля 123
  - природы 45
  - пропорциональности 308–09
  - Паузея 66
  - Рауля 973, 975, 979 сл.
  - сообщающихся сосудов 124
  - стенки 157
  - Стефана-Больцмана 477, 510
  - термодинамики 326
  - турбулентного течения 151–62
  - Фика 63, 66, 488, 770
  - Фурье 63, 66, 477, 488
- Зародышеобразование** 1325–29
- Затравка** 1500
- Затраты** 173
- Захлебывание** 745, 931, 966
- Зеркальное тело** 510
- Зона(ы)**
  - буферная 157
  - водоворотная 163
  - застойные 641–42
- Зонная плавка** 1384–85
- Идеальное вытеснение** 49, 609, 611, 638
  - влияние на химическую реакцию 615
- Идеальное вытеснение**
  - время пребывания 247, 618–21
  - коэффициент массопередачи 821–24
  - кривые отклика 620, 627
  - расчет массообмена 808–13
  - результатирующий эффект 621
- Идеальное перемешивание** 49–50, 638
  - влияние на химическую реакцию 615
  - время пребывания 247, 621–28
  - коэффициент массопередачи 818 сл.
  - кривые отклика 623, 627, 629
  - расчет массообмена 806 сл.
  - результатирующий эффект 624–26
- Излучение тепловое** 509–16
  - абсолютно черного тела 477
  - газов 516
  - поверхностей 511–14
  - поток 510–12
  - экранирование 515–16
  - эффективное 512
- Измельчение твердых материалов** 1619–54
  - затраты энергии 1621–23
  - крупное 1625 сл.
  - мелкое 1639 сл.
  - способы 1620
- Изобара** 976
- Изолиния** 60
- Изоляция тепловая** 541–43
  - толщина 542–43

- Изоповерхность 60
- Изотерма 326, 975
  - абсорбции 923
  - растворимости 1139
  - сорбции 1164
- Изотропная среда 49
- Инвариантность системы 763
- Индикатор 618
- Инерт 766, 907
- Инерционные потери 290–93
- Инжекторы 266, 316, 719, 721
- КПД 722–24
- Инкрустация поверхности теплообмена 673
- Интеграл ошибок 1334
- Иониты 1160, 1470
- Испарение
  - влаги адиабатное 1241–43
  - твердой фазы *см.* Сублимация
- Испарители
  - адиабатные 727
  - барабанные 1583
  - вертикальнотрубные 1583
  - кожухотрубные 1584
  - многоступенчатые 727
  - плечные 672, 674–75
  - роторные 672, 674–75
- Истечение 202
  - газа 202–13
  - жидкости 202–09
- Истирание 1620–21
- Кавитация 271, 313
- Калорифер 1245
- Камера пылесадительная 391
- Капитальные затраты 173
- Капли 241–46
  - диаметр отрывной 242–43
  - при диспергировании 464
  - размеры 241–44
  - частота отрыва 244
  - шейка 242
- Капсулирование 1516–18
- Квазистационарность 40
- Кипение жидкости 502–06
- Кипятильники 990, 1014, 1018
- Кипящий слой 225–26 *см. также* Псевдооживленный слой
- Кирпичева гипотеза 1621
- Классификатор(ы) (сепараторы)
  - барабанные 1692
  - воздушный 1676, 1680–83
  - гидравлический 1677
  - горизонтальный 1691
  - инерционные 1679–80
  - магнитные 1694–95
  - МИТХТ 1676–77
  - непрерывного действия 1675
  - с отвеиванием 1681
  - пневматические 1675–76, 1679–80
  - расчет 1683
  - фрикционные 1683
- Классификация (сепарация) зернистых материалов 1655–96
  - грохочением 1656–67
  - гидравлическая 1656, 1673–79
  - назначение 1655
  - пневматическая 1656, 1673–79
  - в поле инерционных сил 1679–83
  - сил тяжести 1675–79, 1684
  - в псевдооживленном слое 1685–91
  - резинотканевых смесей 1676
  - в тяжелых средах 1667–73
  - электромагнитная 1694–96
- КФ-Классификация 739, 740
- Колонна(ы) ректификационная(ые)
  - барботажные 1016
  - насадочные 1017
  - отгонная часть 1022, 1028–30, 1051–54, 1089–92, 1098–1100
  - плечные 1017
  - полная 1092, 1093
  - укрепляющая часть 1022–28, 1046–51, 1085–89, 1095–98
- Колонны экстракционные 1108 *сл. см также* Экстракторы
  - с вибрирующими перфорированными тарелками 1111–12
  - с вращающимися мешалками 1109
  - насадочные 1108–09
  - без подвода внешней энергии 1008–09
  - с подводом внешней энергии 1109–13
  - пульсационные 1110
  - распылительные 1108–09
  - секционированные 1114
  - ситчатые 1110, 1114
  - со ступенчатым контактом фаз 1113–14
- Колосники 1657
- Компрессор(ы) 323 *сл.*
  - водокольцевые 358
  - с водосборником 359

- воздушный 1592
- двухроторный 367–68
- динамические 325, 328, 359, 367–67 *см. также* Турбокомпрессоры
- классификация 324–25
- коловатные 1583
- КПД 329–30
- линзовые 524
- объемного действия 325, 328, 337, 356–59
- осевые 325
- пластинчатые 365–57
- поршневые 324–25, 330–31, 1583, 1611
- применение 368
- ротационные 325, 356–57
- мокрые 358
- специальные 324
- степень сжатия, оптимизация 324–51
- струйные 325
- термохимические 1576
- центробежные *см.* Турбокомпрессоры
- Конвекция** 475
  - вынужденная 88, 475, 490–91, 508
  - естественная 475, 491–94, 508
- Конденсат** 990
- Конденсатоотводчик** 502
- Конденсаторы** 1014, 1018
  - поверхностные 697
  - смещения 697–702
- Конденсация** 496
  - капиллярная 1162, 116
  - парциальная 988–90, 999, 1006–09
  - плочная 496–502
  - твердофазная *см.* Десублимация
  - частичная *см.* Десублимация
  - фракционная
- Кондукция** *см.* Теплопроводность
- Конода** 763, 1139
- Концентрационная волна** 1194, 1196–97
  - Концентрация(и)** 750–59
    - абсолютные 71, 970
    - истинная 251–52
    - массовые 675, 752–53
    - номинальная твердой фазы 251
    - объемные 754
    - относительные 752–55
    - пересчет 752–55
    - проскоковая 1192
    - сопряженные 793, 1055
- Концепция прилипания** 98
- Координаты**
  - декартовые 76, 77
  - сферические 94
  - цилиндрические 76, 77, 92
- Коэффициент(ы)**
  - внутреннего трения 141, 1490
  - гидравлического сопротивления 141, 159–62, 490
  - динамической вязкости 62
  - диффузии 63, 770, 772
  - захвата маточника 1348
  - защитного действия слоя сорбента 1201, 1203 *сл.*
  - избытка воздуха 1281
  - извилистости 218
  - инжекции 316, 719–24
  - использования насадки 597–98
  - истечения из отверстия 466
  - лобового сопротивления 234, 453
  - массоотдачи 65, 490, 775, 778, 874
  - массопередачи 785–87
  - массопроводности 770
  - местного сопротивления 163
  - незнания 33, 72, 829–30
  - объемного сопротивления 493
  - отражения 510
  - пластической вязкости 193
  - поверхностного напряжения 54
  - поглощения 510
  - подачи (насосов) 273, 281
  - полезного действия *см.* КПД
  - продольного перемешивания 634 *сл.*
  - проницаемости 1522
  - пропускания 510
  - разделения 978, 1003
  - распределения 767
  - расхода (при истечении жидкости) 204
  - рециркуляции 802, 1502
  - рядности (для пучков труб) 501, 519
  - сжатия (сужения) струи 204–05
  - сжимаемости 184, 329
  - теплоотдачи 43, 65, 486, 505, 508–09
    - излучением 514
    - теплопередачи 528–35
    - при параллельном переносе 534–35

- при последовательном переносе 529–34
- теплопроводности 43, 63
- ускорения абсорбции 947
- холодильный 1555
- воздушного цикла 1564
- приведенный 1577
- эффективности разделения 1348
- КПД** (коэффициент полезного действия)
  - адиабатический 329
  - гидравлический 274, 300
  - изотермический 329
  - механический 274
  - объемный (компрессоров) 339–40
  - передачи 274
- Кривые**
  - гранулометрического состава 381–82
  - отклика *см.* Отклик
  - охлаждения расплавов 1311
  - псевдооживления 227, 228
  - равновесия 922
  - растворимости 1317, 1404–05
  - сушки 1285–86
- Криогенные установки** 1456
- Кристаллизатор(ы)** 1342
  - барабанные 1343, 1370, 1373
  - с внешним охлаждением 1352 сл.
  - с выносной греющей камерой 1366
  - выпарной 1365–66
  - дисковые 1344, 1354
  - емкостные 1352–53, 1356, 1362
  - колонные 1362, 1363
  - поршневой 1373
  - пульсационный 1373
  - распылительный 1363
  - ступенчатые 1372 сл.
  - трубчатые 1353, 1370
  - циркуляционные 1355, 1366
  - шнековый 1372, 1373
- Кристаллизация** 1307 *см. также*
  - Фракционная кристаллизация
  - аддуктивная 1725
  - бинарных смесей 1313–17, 1337–38
  - вакуумная 1365, 1368
  - выпарная 1365, 1368
  - кинетика 1324–38
  - контактная 1360–62
  - массовая 1338, 1352–64
  - многокомпонентных смесей 1337–38
  - многоступенчатая 1372 сл
  - направленная 1338, 1347, 1382–83
  - с образованием химических соединений 1314, 1316, 1317
  - однокомпонентных веществ 1311–13
  - особенности 1308–11
  - на охлаждаемых поверхностях 1369–71
  - из паровой фазы 1307 *см. также*
  - Десублимация
  - применение 1307
  - противоточная 1372–77
  - расплавов 1332–37
  - из растворов 1317, 1324
  - скорость 1335
  - тройных систем 1317–24
  - фазовое равновесие 1311–24
  - фракционная *см.* Фракционная
  - кристаллизация
  - фронт 1329, 1332
  - с частичной отгонкой растворителя 1365–69
  - экстрактивная 1713–16
- Кристаллы** (кристаллические вещества) 1308
  - жидкие 1308
  - зарождение 1325–29
  - прессование 1346
  - рост 1329–32
  - форма 1338–40
- Критерии** *см. также* Числа
  - Архимеда 231, 381, 492
  - Био 113–14, 576
  - Вебера 245, 462
  - вырождение 109
  - гомохронности 104
  - Грасгофа 493–94
  - Льюиса 777
  - Нуссельта 113–14, 487, 491, 494
  - оценки 1700
  - Пекле, диффузионный 111
  - продольного перемешивания 636
  - тепловой 111
  - эффективный 636
  - подобия 105 сл.
  - Прандтля 112, 491, 494
  - разделения 886–87

- Рейнольдса 108–09, 112, 231, 234, 491, 547  
 Стантона 489–91  
 Фика 111, 879, 1298  
 Фруда 108, 457  
 Фурье 110, 112, 879, 1298  
 Шервуда 113, 490, 496, 775  
 Шмидта 112, 490  
 Эйлера 107, 112, 457  
 Кубовой остаток 990, 1013
- Ламинарное течение, законы 146–51, 186  
 Лапласиан 91, 92  
 Летучесть относительная 978, 980, 1003  
 Лимитирующая стадии 567–74  
   при массопереносе 828  
   при параллельном теплопереносе 573–74  
   при последовательном теплопереносе 567 сл.
- Линеаризация 46  
 Линии  
   ликвидуса 1315  
   равновесия 764, 922, 926  
   рафинатов 1140  
   результатирующего разделения 1153  
   солидуса 1315  
   тарелки питания 1041  
   тока 132–33  
   экстрактов 1140
- Лопасты  
   мешалок 456–59  
   роторных смесителей 460
- Макрокапсулирование 1517  
 Макропоры 1159  
 Манометр 123  
 Масса 52  
 Массообмен (массообменные процессы) 39, 735, 769  
   движущая сила *см.* Движущая сила массообмена  
   классификация 736–42  
   между жидкостью (газом) и твердыми телами *см.* Выщелачивание (Адсорбция)  
   – твердыми телами 871  
   с нелинейными балансами 868–70  
   нестационарный 769–70, 877  
   поверхность 737  
   в псевдооживленном слое 875–77
- рабочая область 765  
   сопряженный 1705–19  
   стационарный 769–70  
 Массообменные устройства 744–48  
   материальный баланс 788–90  
 Массоотдача 769, 771, 773  
   уравнение 66  
 Массопередача 769  
   время 1197, 1205–08  
   контактная 780–87  
   уравнение 781  
 Массоперенос 735 сл., 768  
   виды 770–71  
   внешняя задача 873–77  
   внутренняя задача 877–80  
   в движущейся жидкости 86–89  
   диффузионный 769, 772–73  
   кинетика 768–78  
   конвективный 771, 773–78  
   контактный 768 сл.  
   периодический 862–65  
   полунепрерывный 862, 865–67  
   поточная задача 880–81  
   смешанные задачи 880–81  
   составляющая описания 742–44  
   уравнение 86–89  
   элементы 768  
 Массопроводность 770 *см. также* Диффузия  
 Масштабные преобразования 102–04  
 Маточник 1103  
 Межтрубное пространство 524  
 Мельницы  
   барабанные (БМ) 1639–52  
   классификация 1640–41  
   коллоидные 1653–54  
   мокрого помола 1653  
   насадки 1640, 1642–45  
   шаровые 1640
- Мембранное разделение 1519–50  
   расчет 1533–42  
   с химическим взаимодействием с мембраной 1529–30  
   без химического взаимодействия 1526–29  
 Мембранные ячейки  
   с идеальным вытеснением потока 1537–41  
   – перемешиванием потоков 1533–37  
   каскадные схемы 1543–50  
   конструкции 1530–33

- из полых полимерных волокон 1532–33
- применение 1520–21
- рулонного типа 1531–32
- схема 1520
- Мембраны** 1519
  - армированные 1531
  - классификация 1520
  - непористые 1520–24
  - пористые 1520–21, 1524–26
- Местное сопротивление** *см.* Гидравлическое сопротивление
- Метод**
  - ВЭТС 851
  - моментов 650–55
  - обобщенных переменных 71
  - подмены задачи 72
  - полуэмпирический 100
- Мешалки**
  - вязкостные диапазоны применения 446
  - лопастные 445 *сл.*
  - мощность 454–60
  - типы 446
- Миделево сечение, площадь** 453
- Микрокапсулирование** 1516
- Микропоры** 1159
- Множители подобия** 102 *сл.*
- Модель(и) течения жидкости (структуры потоков)** 618–650
  - беспараметрическая 653
  - двухпараметрическая 643
  - диффузионная 634–39
  - идеального вытеснения *см.* Идеальное вытеснение
  - перемешивания *см.* Идеальное перемешивание
  - каскадная 629–34
  - комбинированная 643
  - однопараметрическая 639, 653
  - определение параметров 650–55
  - плочная 185–90
  - продольного перемешивания 628–44
  - ступенчатая 629–34
  - ячеистая 629–34, 639
- Модуль сита** 1658
- Молекулярное течение** 257–60
- Момент(ы)**
  - безразмерные 651–53
  - инерции 131
  - начальные 650
  - нормировка 651
  - центральные 651
- Монтежю** 261–62, 320–21
- Мультициклоны** 406–07
- Напор (высота)**
  - геометрический (нивелирный) 136
  - динамический 136
  - кинетический (скоростной) 136
  - нивелирный 136
  - падение по длине трубопровода 166
  - полезный 301
  - полный 136
  - потери на участке стабилизации 151
  - потерянный 138
  - пьезометрический 123, 136
  - располагаемый 169
  - скоростной 136
  - теоретический 301
- Напряжение**
  - тепловое 477
  - трения 54, 62
  - критическое 192
- Насадка(и) массообменные** 746, 915
  - блочные 916–17
  - гидравлическое сопротивление 967
  - нерегулярная 1017
  - поверхность удельная 915
  - порозность 915
  - псевдооживленная 747, 919
  - регулярные 916, 1017
  - сетчатая 917
  - “Спрейпак” 915
  - требования к ним 915
  - хордовая 746, 916
- Насадки теплообменные** 595–98
- Насос(ы)**
  - винтовой 265, 318
  - вихревые 262, 265
  - всасывающая способность 272
  - высота всасывания, геометрическая 266
  - – предельная 271–72, 293, 313
  - – реальная 293
  - нагнетания, геометрическая 266
  - движение поршня 281–82
  - диагональные 265
  - достоинства и недостатки 317
  - классификация 262–66

- коэффициент подачи 273, 281
- полезного действия 274
- лопастные 262, 264–65, 295 сл.
- метаболический 1530
- механические 261–65
- мощность 270, 273–74
- напор 267–69
- немеханические 261–62, 265–66, 314–22
- объемные 262–65, 317–321
- осевые 297, 317, 319
- пластинчатый 263, 318
- поршневые *см.* Поршневые насосы
- производительность 267, 273, 280
- локальная 283
- мгновенная 283
- регулирование 294
- пропеллерный 265, 697
- рабочая точка 289, 306, 307, 404
- реверсивный 264
- ротационный 263, 264
- струйные 262, 266, 316–17, 319, 321
- тепловой 703, 1553
- характеристики 269, 289, 304–10
- центробежные *см.* Центробежные насосы
- шестеренчатый 263, 318
- шланговый 265
- Начальные условия (НУ) 97
- Недорекупация 1595
- Неизотропная среда 49
- Неподвижный слой (НС)
- гидродинамика 214, 217–22
- идеальный 217
- предел устойчивости 222
- фиктивный 217
- Нода 763, 1139
- Нутч-фильтр 415, 416
- Ньютон 42
- Ньютоновские жидкости 146 сл., 193, 195
- Обеспыливание газов
- в отстойных газоходах 391
- в фильтрах 415
- в циклонах 404–12
- Обобщенные переменные 100 сл.
- для пограничного слоя 113
- в уравнениях переноса 106–12
- Обогащение 1667
- Обратное перемешивание 611
- Ожижающий агент (ОА) 225
- Ожигатель (О) 1606
- Онзагера* соотношения 66, 67
- Осадок, промывка 435–36
- Осаждение твердых частиц 378–413
- естественное 383–92, 396
- производительность 379
- скорость 380–81, 396
- схема 380
- центробежное 392–412
- время 395, 398 сл.
- в газах 404–412
- в жидкостях 392–404
- Осмоз 1527
- аномальный 1528
- обратный 1528
- Отвешивание 1681, 1684
- Отверждение расплавов
- в тонком слое 1343–44
- в формах 1341–42
- Отклик (кривые отклика) 620, 623, 627, 629
- в разных координатах 645
- связь с функцией распределения 645
- Относительная погрешность 44
- Отсев 1659
- Отстойник(и)
- классификатор 1675–76
- гидравлический 1677–78
- многополочные 390, 391
- непрерывного действия 379, 381
- – вертикальный 384, 387–88, 390
- – горизонтальный 384–85, 388–89
- очистка от осадка 390
- периодического действия 384–87
- – вертикальный 384–87
- площадь 1659
- Отход 1659
- Охладители гранул *см.* Хладогент(ы)
- Охлаждаемая среда 1580, 1582
- Охлаждающая среда *см.* Хладогент(ы)
- Охлаждение
- глубокое 1551, сл.
- аппаратура 1610–12
- классификация 1584–85
- циклы 1590 сл.
- пути 1585
- умеренное 1553–84

– аппаратура 1582–84  
Очистка веществ сублимацией–десублимацией 1457

*Палля* кольца 916

Пар  
вторичный 667, 680–82  
перегретый 999, 1002

Паскаль 42

Перегонка 969  
сублимационно–  
десублимационная 1457  
физико–химические основы 970–  
87

Перекрестный ток 546

Перекристаллизация 1386–91

многократная 1390  
однократная 1389  
сублимационно–  
десублимационная 1446

Перемешивание 436–60

влияние на растворение 437  
время 438  
затраты энергии 440, 453  
идеальное *см.* Идеальное переме-  
шивание  
кинетика 438–40  
механическое 441, 445–60  
обратное 611  
паст 460  
пневматическое жидкостей 441–  
43  
поперечное 610  
продольное *см.* Продольное пере-  
мешивание  
сыпучих материалов 460  
циркуляционное 441, 443–45, 612  
эффективность 437

Перенос вещества 39 *см. также* Мас-  
соперенос, Перенос субстанции  
в движущейся жидкости 86–89  
дифференциальное уравнение 88  
через мембраны 1521–26

Перенос импульса 39, 79, 377 сл.

Перенос субстанции 607 сл. *см. также*  
Потоки  
активный 1530  
безградиентный 99  
движущая сила 60  
законы (линеаризованные) 66  
интенсивность 60 сл.  
поперечный 607–08

продольный 607  
составление балансов 56–58  
уравнение 73 сл., 85 сл.

Перенос теплоты *см.* Теплоперенос  
Переохлаждение при кристаллизации  
1328, 1331–02, 1340

Пермеат 1530

Плавление  
однократное 1378  
последовательное 1379–80, 1381  
фракционное 1377–82

Пластичность 193

Пленка (слой)  
пограничная 470  
тепловая 486

Пленочные устройства 745

Плотность 52  
насыпная 215  
орошения 188, 915, 966  
распределения 624–25, 633, 638

Пневможелоб 526

Пневмотранспортные системы 250–55

Поверхностное натяжение 54  
межфазное 462, 463

Поверхность(и)  
межфазного контракта 874  
жидкости свободная 122, 127, 129  
уровня 121

Пограничный слой 64  
диффузионный 65, 774

Погрешности расчетов 44

Подмена задачи 72

Подобие  
гидродинамическое 106–10  
диффузионное 111  
в переносе разных субстанций 112  
тепловое 110, 111  
физическое 99–101

Полиморфизм 1309

Политропа 326

показатель 327

Полос диаграммы 954–55, 1019, 1054,  
1087, 1151

Помпаж 308

Пористость 215, 1470

Порозность 215, 378  
критическое значение 1673  
при псевдоожижении 237–40

Порошки, свойства 1490–91

Поршневые компрессоры 330–55  
влияние влаги 344  
вредное пространство 338



- двойного действия 331–32
- затраты энергии 332–37, 352–53
- КПД, объемный 339
- многоступенчатые 343–51, 353
- мощность 353
- с обводной линией 354
- охлаждение 351–52
- производительность 337–42
  - регулирование 354–55
- простого действия 331
- с ресивером 332
- степень сжатия 342–43
- требования к смазке 343
- цикл 331
- Поршневые насосы** 263–64, 274–94, 318
  - с воздушными колпаками 286
  - высота всасывания 290–93
  - двойного действия 279, 284
  - диаграммы подачи 283–85
  - достоинства и недостатки 318
  - классификация 276
  - коэффициент подачи 281
  - мощность 273–74, 293
  - однократного действия 278
  - плунжерные 277–78
  - производительность 280, 283
  - простого действия 278
  - прямодействующие 277
  - скальчатые 277
  - схема 275
  - тройного действия 279, 284–85
  - характеристика 289
  - четверного действия 279, 284
  - электропроводные 277
- Потенциал(ы)** 60 сл.
  - градиент 61, 62
- Поток(и) вещества** 60, 61
  - двухфазные 246–55
  - живое сечение 139–40
  - при идеальном вытеснении 821–24
  - – перемешивании 819
  - с обратным перемешиванием 611
  - плотность 61, 770
  - полный 770
  - поперечная неравномерность 611
  - поршневой 609
  - при противотоке фаз 823–24
  - проходящий 1519–20
  - в процессах массопереноса 817–24
  - при прямотоке фаз 821–22
- стабилизация гидродинамики 150, 162
- стержневой 609
- структура 607–66
  - модели 629–44 *см. также* Модели течения жидкости
  - в модельных системах 618–28
  - в реальных системах 628–38
  - учет в расчетах 656–66
- циркуляционный направленный 612
- Поток импульса** 62
- Поток тепловой** *см.* Тепловой поток
- Поток энтальпии** 546–50
- Правила** *см. также* Законы
  - Бабо 679
  - Вревского 983
  - рычага 759–62
  - смешения 759
  - фаз 762, 972
- Предел текучести** 192
- Пресс валковый** 1485, 1505
- Проводимость кондуктивная** 480
- Продольное перемешивание** 610, 628 сл.
  - влияние на эффективность ХТП 612–17
  - в двухфазных системах 610–11
  - коэффициент 634 сл.
  - кривые отклика 629
  - модели 628–44
  - причины 611–12
  - учет в расчетах 656–66
  - экспериментальное изучение 644–55
- Пропускная способность** 68, 115
  - массопереноса 791–92
  - диффузионного 772
  - теплопереноса конвективного 116
  - кондуктивного 116, 480
  - нестационарного 574
  - продольного
- Просыпь** 1507
- Противоток** 247, 546
- Процессы переноса**
  - в анизотропных средах 95–97
  - гидромеханические 39, 377–467
  - диффузионные 39
  - интенсивность 60 сл.
  - классификация 39–41
  - массообменные *см.* Массообмен
  - механические 39

- многокомпонентные 41
- непрерывные 40
- нестационарные 40, 59, 97
- периодические 40
- полунепрерывные 40
- стационарные 40, 58, 98
- тепловые 39 *см. также* Теплоперенос
- установившиеся 40
- химические 39
- Процесс(ы) термодинамические
  - адиабатические 326–27, 330
  - изобарный 326
  - изотермический 326
  - изохорный 326
  - политропные 327–28
- Процессы ХТ
  - комбинированные 1697–1701
  - периодические 1699
  - последовательные 1698
  - совмещенные *см. Совмещенные процессы*
  - сопряженные *см. Сопряженные процессы*
  - холодильные 1551–84
- Прочность пластическая 1491
- Прочность статическая 1470
- Прямоток 247, 546
- Псевдоожижение
  - кривые 227–28
  - неоднородное 226, 239
  - однородное 225, 237–39
  - в поле сил тяжести 229
  - скорость витания единичной частицы 233
  - начала 222, 225, 230–32
  - уноса частиц 232–36
- Псевдоожиженное состояние, скоростной диапазон 236
- Псевдоожиженный слой (ПС) 214, 224, 508
  - виброкипящий 226
  - высокий 586
  - высота активного участка 586
  - гидродинамика 224–41
  - гидравлическое сопротивление 228–30
  - достоинства и недостатки 225
  - заторможенный 227
  - с каналообразованием 226
  - кипящий 225–26
  - классификация 225
- межфазный теплообмен в нем 583–88, 603
- поршневой 226
- предел устойчивости 225
- расширение 238
- тонкий 585–86
- фонтанирующий 241
- Псевдосублимация 1447
- Пульсации 152
- Пьезодиализ 1527
- Пьезометр 123
- Пьезометрическая высота 123, 136
- Работа
  - сжатия 328
  - рабочего тела 184
  - удельная 1590, 1592, 1595
- Рабочая линия процесса (массообмена) 793–805
  - построение 797–801
  - ректификация 1024
  - уравнения 794–96
  - для цепи из двух аппаратов 832
- Рабочее тело 472–74
  - в холодильных установках 1580–81, 1588
- Равновесие
  - бинарных смесей 979–85
  - динамическое 762
  - идеальных смесей 973–79
  - концентрированное 762–68
  - многокомпонентных систем 986–88
  - фазовое, газ – жидкость 922–27
  - газ – твердое 1163–67, 1436–40
  - жидкость – жидкость 1137–41
  - жидкость – твердое 1311–17, 1402–10
  - пар – жидкость 972–79
  - твердое – твердое 1496–1500
- Разбавитель 1103
- Раздавливание 1620–21
- Разделяющий агент 1063 сл.
- Разламывание (изгиб) 1620
- Размерность 42
- Размольные машины 1619 сл.
  - классификация 1619–21
  - схемы типовые 1623–24
  - требования к ним 1623
- Раскалывание 1620
- Расплавы
  - кристаллизаторы 1332–37

отверждение 1341–44  
 Рассолы как хладоагенты 1582  
 Раствор(ы)  
   концентрирование выпариванием 667 сл.  
   массовая концентрация 675  
   свежий 667  
   температура кипения 676  
   теплоемкость 676  
   упаренный 667  
 Растворение 1393–428  
   бинарной смеси в чистом растворителе 1405–07  
   с инертным компонентом 1408–09, 1419–26  
   кинетика 1410–13  
   однокомпонентного вещества в бинарном растворителе 1407–08  
   – в чистом растворителе 1403–04  
   непрерывное 1398  
   полное 1393–95, 1416–19  
   равновесия 1403, 1406, 1408  
   расчет 1416–34  
   способы 1413–16  
   сферического зерна в неподвижной жидкости 1428–30  
   схемы потоков 1415, 1420  
   теплота 1409  
   физико-химические основы 1402–10  
   фракционное 1408, 1410, 1426–28  
   химическое 1393, 1410  
   частичное 1393, 1395, 1408, 1419–26 *см. также* Выщелачивание  
 Растворимость твердых тел  
   кривые 1317, 1404–05  
   критическая точка 1140  
 Растворители (аппараты) 1396–1402  
 Растворитель 907, 1394  
   регенерация 1395  
 Растворяемое вещество 1393–94  
 Расход  
   массовый 78  
   объемный 78  
   путевой 176  
   транзитный 177  
 Рафинад (маточный раствор) 1103  
 Рашига кольца 746, 916  
 Регенератор(ы) 525–26  
   идеальный 596

коэффициент использования насадки 597–98  
 расчет 594–600  
 температурные кривые 595  
 Режим(ы) течения жидкостей (тонких пленок) 142–45  
   автомодельный 144, 148  
   – верхний 161  
   – нижний 188  
   идеального вытеснения *см. Идеальное вытеснение*  
   – перемешивания *см. Идеальное перемешивание*  
   ламинарный 143  
   переходный 144  
   промежуточный 144  
   турбулентный 143  
*Рейнольдса*  
   установка 142, 143  
   число *см. Число Рейнольдса*  
 Ректификационные колонны 1014  
   барботажные 1016  
   высота 1032–33  
   диаметр 1033–34  
   с непрерывным контактом фаз 1017  
   последовательный расчет 1030–31  
   потоки в них 1018–21  
   роторно-пленочные 1017  
   со ступенчатым контактом фаз 1016  
   тарельчатые 1016  
   тепловой расчет 1035–36, 1045–62  
   эффективность 1037–39  
 Ректификация 969, 970, 1010–1100  
   азеотропная 1066, 1067–70  
   азеотрообразующей смеси в двух колоннах 1703–05  
   бинарных смесей 1021–81  
   влияние агрегатного состояния исходной смеси 1039–44  
   гидродинамическая 1687–88  
   многокомпонентных смесей 1093–1100  
   непрерывная 1021–44, 1060–63, 1082, 1084 сл.  
   периодическая 1071–82  
   с разделяющим агентом 1063–71  
   солевая 1070–71  
   статика процесса 1021–31  
   со ступенчатым контактом фаз 1046 сл.

- термическая 1017
- типовая схема 1014
- траектория 1088
- тройных смесей 1083–93
- четырёхкомпонентных смесей 1083–84
- экстрактивная 1063–66
- Рекуператоры 523, 524
- Рекуперация 1265
- Реология 192
- Ресиверы к компрессорам 341–42
- Ретур 1491
- Рецикл 801–02
- Решета 1658
- Решетки 912–16
- Риттингера гипотеза* 1621
- Самоиспарение
  - жидкости 682
  - конденсата греющего пара 725
- Самотек 261
- Связующее 1470 сл.
- Сегрегация 439, 1689
- Сепаратор(ы) 344 *см. также* Классификаторы
  - магнитные 1694–95
  - фрикционные 1692–93
  - электростатические 1695
- Сепарация 1395 *см. также* Классификация
- Сети (цепи) аппаратов 830–31 сл.
- Сжатие газов
  - адиабатическое 335
  - изотермическое 335
  - политропическое 335–37
  - степень 342–43
  - “сухое” 1558
- Сила(ы) 53
  - архимедова 55
  - Ван-дер-Ваальса 1474
  - внутреннего трения 80, 83
  - дисперсионные 1161
  - инерции 53, 81, 83
  - линейные 54
  - массовые 53, 81, 83
  - межчастичного сцепления 1472–74
  - поверхностного натяжения 54
  - поверхностные 53, 55, 79, 80
  - сдвига 54, 80
  - трения 54
- Силикагели 1159
- Симплекс 105
- Синергизм свойств 51, 52
- Система(ы)
  - гидротранспортные 250
  - единиц 41 сл.
  - международная (СИ) 42
  - конденсированные 1313
  - пневмотранспортные 250–55
  - транспортные *см.* Транспортные системы
- Сита 1658
- Скорость 52
  - абсолютная 247
  - витания частиц 233, 281, 1674
  - стесненного 239
  - динамическая 141, 155
  - зависания 224
  - истинная 216, 219
  - критическая 222
  - в ламинарном потоке 150–51
  - локальная 52, 152
  - максимальная 148
  - окружная 451, 454
  - скольжения 223, 239, 247
  - средняя по времени 52, 78
  - – сечению 53, 148
  - стесненного осаждения 239, 395–96
  - в турбулентном потоке 152
  - уноса частиц 225, 232–36
  - циркуляция 673
- Слой
  - вибропсевдоожиженный 226
  - движущийся 222–24
  - кипящий 225–26
  - неподвижный *см.* Неподвижный слой
  - псевдоожиженный *см.* Псевдоожиженный слой
  - фонтанирующий 241
- Смазочные масла для компрессоров 343
- Смачиваемость 1490
- Смачивание 1490
- Смеси *см. также* Системы
  - азеотропные 982
  - азеотропообразующие 982
  - бинарные 972–78, 989 сл., 1313–17
  - взаимно растворимых компонентов 973–83
  - гетероазеотропные 985
  - зеотропные 979, 988

- идеальные 973, 987
- исходные 1013
- монодисперсные 215
- неидеальные (реальные) 979–85
- с неограниченной растворимостью компонентов в твердом состоянии 1315
- с ограниченной растворимостью компонентов в твердом состоянии 1316
- однокомпонентные 1311–13
- перитектические 1316
- полидисперсные 215
- термостабильные 1002
- тройные 972, 986–87, 1317–24
- эвтектикообразующие, разделение 1706–07, 1709–10, 1714–15
- эвтектические 1316
- Смеситель роторный, лопасти 460
- Смоченный периметр 139
- Совмещенные процессы
  - массообменно-массообменные 1728–32
  - с механическими операциями 1730–32
  - реакционно-десублимационные 1726–28
  - кристаллизационные 1724–26
  - массообменные 1720–27
  - ректификационные 1721–27
  - сушильно-грануляционные 1729–30
  - экстракционно-кристаллизационные 1728–29
- Сообщающиеся сосуды 124
- Соотношения взаимности 66, 67
- Соппротивление(я)
  - гидравлическое см. Гидравлическое сопротивление
  - местные 163–65
  - переносу массы, диффузионное 827
  - субстанции 67
  - тепла (термическое) 480, 528, 530
  - термическое 480, 528, 530
- Сопряженные процессы 1699, 1701–19
  - адсорбция – десорбция 1702
  - – с регенерацией сорбента 1716–17
  - выщелачивание – кристаллизация 1716
  - дистилляция – кристаллизация 1705
  - ректификация – кристаллизация 1708
  - с рекуперацией механической энергии 1702
  - – теплоты 1703
  - экстракция – кристаллизация 1713–16
- Сорбент 1157
  - емкость 1198–99, 1210
- Сортировка твердых материалов 1655
- Сплошная среда 48, 213
- Стабильная таблица 679
- Стенка теплопередающая 470
- Степень
  - влажности 1572
  - извлечения 1124
  - измельчения 1619, 1620
  - ожигания 1591
  - реальная 1595, 1599, 1605
  - теоретическая 1594, 1599, 1604
  - рециркуляционная 1266
  - сухости пара 1572
  - черноты газообразной среды 517
  - серого тела 511, 514
  - шероховатости 161
- Стесненное движение 133
- Стесненное обтекание 133
- Структурно-конфигурационный комплекс (СКК) 741
- Ступень см. Теоретическая ступень
- Сублиматор(ы) 1448–57
  - фракционирующий 1457
- Сублимационная сушка 1444, 1458–63
  - непрерывная 1462
  - периодическая 1461
- Сублимация 1435 сл.
  - аппаратура 1448–57
  - вакуумная 1448
  - с инертным газом 1444–45, 1449, 1465–66
  - кинетика 1441
  - механизмы 1442
  - многокомпонентных смесей 1444
  - полная 1444
  - с псевдоожженным слоем 1449
  - равновесие 1439
  - расчет 1463–68
  - физико-химические основы 1436–40
  - фракционная 1444

частичная 1444  
 Субстанциональная производная 82  
 Суммарные затраты 173  
 Суспензии 378–430  
     осаждение 1345  
     разделение 1346  
 Сушилки  
 аэрофонтанная 1222–23  
     барабанные 1218–19  
     идеальные 1249–51, 1260–61, 1269–71  
     камерные 1217  
     конвейерные 1217  
     конвективные 1216–25  
     контактные 1225–26  
     ленточные 1217–18  
     многозональные 1258–64  
     пневмотранспортные 1224  
     полочные 1217, 1225–26  
     простые 1245–58  
     с псевдооживленным слоем 1219–21, 1288, 1290, 1295, 1302  
     распылительные 1224–25  
     реальные 1251–58, 1261–64, 1271–73  
     с рециркуляцией сушильного агента 1266, 1269–73  
     специальные 1225–28  
     сублимационные 1227–28  
     терморрадиационные 1227  
     туннельные 1216–17  
     с частичным возвратом отработанного воздуха 1265–73  
     шахтные 1218  
 Сушильный агент (СА) 1214, 1244  
 Сушка твердых материалов 1213–1305  
     инертным газом 1273–75  
     кинетика 1284–95  
     конвективная 1214  
     простая, потоки 1246–48  
     равновесие 1243–44  
     специальная 1214  
     сублимационная см. Сублимационная сушка  
     токами высокой частоты 1227–28  
     топочными газами 1275–84  
     условие 1229  
     в условиях внешней задачи 1289–93  
     – – внутренней задачи 1295–1305  
     – – потоковой задачи 1293–95

Таблетирование 1476  
 Таблетирующие машины 1486  
 Тарелка(и)  
     колпачково-ситчатая 918–19  
     непровальные 965, 1016  
     питания 1014, 1042  
     провальные 966, 1016  
     распределительная 916  
     реальные 835, 846  
     теоретические см. Теоретическая ступень  
 Твердофазные мостики 1473  
*Тейлора* ряд 46  
*Теллера* розетки 917  
 Температура 471  
     вдоль поверхности теплообмена 550–51, 565–67  
     кипения жидких смесей 971  
     – растворов 676  
     кристаллизации 1309–10  
     ликвидуса 1313  
     мокрого термометра 1241–42  
     насыщения 1241  
     плавления 1309  
     предельно-допустимая 1258  
     салидуса 1313  
 Температурная депрессия 677  
 Температурные  
     источники 1553  
     поля 471  
     – в катализаторной зоне 535–38  
     профили при теплообмене 550–51  
 Температурный напор 471–72  
     при противотоке теплоносителей 553–54  
     при прямотоке теплоносителей 551–52  
     средний 545, 550–58  
 Температуропроводность 63  
 Теоретическая ступень (тарелка) 796, 836–37  
     высота 851  
 Тепловой баланс 547–50  
 Тепловой поток 477, 559–64  
     при идеальном вытеснении 561, 562  
     – – при перемешивании 559–61  
     при противотоке 562  
     при прямотоке 561  
 Теплоемкость 54, 472  
     относительная 1241  
     удельная 54

- Теплоносители 544
  - схема движения 546
  - температурные 551
- Теплообмен 471, 544–50
  - безградиентный 576–77
    - движущая сила *см. также* Температурный напор
    - при интенсивном перемешивании 603–04
  - конвективный 485–96, 661–66
  - лучистый 512
  - межфазный псевдоожигенном слое 583–88
    - на наружной поверхности труб 500
  - нестационарный 549, 574–82, 588–92
  - поверхность 523
    - при противотоке 554 сл.
    - при прямотоке 551
  - регулярный 588–92
  - при смешанном токе 557
  - стационарный 536 сл.
  - твердого тела со сплошной средой 588–92
  - с твердыми телами 574–82
- Теплообменники
  - выбор перспективный 558
  - классификация 523–27
  - кожухотрубные 524, 1583
  - контактные 526–27
  - оросительные 1583
  - с псевдоожигенным слоем 527
  - регенеративные 525–26
  - рекуперативные 523–24
  - смесительные 526–27
  - элементные 1583
- Теплоотдача 470 *см. также* Теплоперенос
  - при кипении жидкости 503, 509, 522
  - конвективная к шару 495–96
  - при конденсации пара 497, 509
  - коэффициент 508–09
    - локальный 499
    - средний 499
  - от поверхности в псевдоожигенном слое 506–08
- Теплопередача 471, 527–43
  - в катализаторной зоне 535–38
  - контактная 782
  - коэффициент 528–35
  - пропускная способность 528 сл.
  - схемы 528
  - уравнение 528
  - через стержень бесконечной длины 539–40
- Теплоперенос 469, 470–518 *см. также*
  - Теплоотдача
  - безградиентный 474
  - виды 475–76
  - граничные условия 98, 99
  - излучением 476, 509–18
    - между двумя телами 512–14
  - при кипении жидкости 502–06
  - при конвекции 485–96
    - – вынужденной 490–91
    - – естественной 491–94
    - – пропускная способность 487
  - при конденсации пара 496–502
  - кондуктивный 475, 478–85
    - через стенки 479–83
  - лимитирующие стадии 567–74
  - нестационарный 474
  - параллельный 573
  - сложный 476
  - стационарный 474, 478 сл.
    - в режиме ИВ 570
    - – – ИП 568 сл.
  - уравнение 85
  - цели 469
  - экранирование 515–16
- Теплопроводность (кондукция) 63, 84, 475
- Теплота
  - абсорбции 939
  - дегидратации веществ 734
  - конденсации, удельная 473
  - плавления, удельная 473
  - растворения 1409
  - сублимация 473
- Термодиффузия 773
- Термолabile вещества 696
- Термосифоны 592–94
- Технико-экономический расчет (ТЭР) 798
- Технологические параметры 1701
- приемы 31, 32
- Течение(я)
  - газа кнудсеновское 259
  - молекулярное 257–60
  - свободномолекулярное 257
  - двухфазные 246–57
    - жидкость – газ 255–57
    - жидкость – жидкость 255–57

- с твердой фазой 246–55
- жидкостей, ламинарное 146–51, 186
- неньютоновских 190–202
- пластичное 193–202
- режимы *см.* Режимы течения жидкостей
- турбулентное *см.* Турбулентное течение
- эпюра (распределение) скоростей 196
- тонких пленок, гравитационное 185–90, 658–61
- – волновое 189
- – ламинарное 186
- – переходное 189
- – пластичное 195–202
- – плоское 189
- – псевдоламинарное 189
- Тонкие пленки 185 *сл.*
- Точка (температура)
  - азеотропная 982, 1712
  - росы 1238
  - тройная 1312
  - эвтектическая 1315
- Точность расчетов 44
- Транспортные системы 214
  - жидкость – газ 255–57
  - жидкость – жидкость 255–57
  - с твердой фазой 250–55
- Трассер 618
  - импульсный ввод 619
  - ступенчатый ввод 619
- Труба(ы)
  - вихревые 1579
  - вскипания 673
  - оребранные 525
  - тепловые 593–94
- Трубка(и)
  - напорные 136
  - тока 133
- Трубное пространство 524
- Трубопроводы 167 *сл.*
  - диаметр оптимальный 172
  - простые 167–171
  - с путевым и транзитным расходами 176–79
  - разветвленные 173–76
  - сложные 167, 176
  - транспортные 252
  - характеристика 269, 307
- Трубчатые охладители 1341–42

- Трубы-сушилки 1223
- Турбогазодувки 359
- Турбодетандеры (детандеры) 1589
- Турбокомпрессоры (центробежные компрессоры) 324–25, 359–67, 717, 1583
  - классификация 359
  - КПД гидравлический 361
  - многоколесный 360
  - напор 361–64
  - производительность 360–61
  - регулирование 365–66
  - степень сжатия 360, 363–64
  - характеристики 364–65
- Турбулентное течение
  - коэффициент гидравлического сопротивления 159–62
  - показатель интенсивности 152
  - распределение скоростей 155–59
- Тяжелая среда 1667
- Угол
  - внешнего трения 1661
  - внутреннего трения 83
  - встречи 1664
  - захвата 1628–30, 1635–36
  - конструктивный 298
  - отрыва в барабанных мельницах 1650
  - технологический 298
- Удар 1620
- Удельный объем 52
- Удерживающая способность (задерж-ка) 247
- Ультрафильтрация 1529
- Умформер 681
- Уравнение(я) (Формулы) *см. также*
  - Законы
  - баланса 55–60
  - Бернулли 133–39
  - для идеальной жидкости 134–36
  - для реальной жидкости 137
  - Блазиуса 160
  - Гагена-Паузеяля 149
  - Дарси-Вейсбаха 141, 219
  - движения несжимаемой жидкости 79–83
  - Женеро 160
  - Клайперона-Менделеева 326
  - Колмогорова-Авраами 1501
  - критериальные 144, 115
  - Ленгмюра 1165



- Навье-Стокса 83, 106, 146
- неразрывности потока 74–77
- Никурадзе 160
- Ньютона 62, 190, 236, 477
- переноса 79–97
- плоской поверхности 125
- поверхности уровня 121
- равномерного движения 141
- расхода 53, 77, 78
- сдвига 190, 192–94
- сплошности 75
- Стокса 235
- теплопереноса 85
- Тодеса для скорости витания 235
- – – начала псевдооживления 232
- Фика 88, 771
- Фрейндлиха 1165
- Фурье-Кирхгофа 85, 89 сл., 110, 478, 575
- Шилова 1202–10
- Эргана 222, 419
- Условие(я)
  - граничные 98
  - классификация 98, 99
  - начальное 97
  - однозначности 97–99
- Утяжелитель 1668
- Фазовое равновесие 1311–24
  - бинарных систем 1313–17
  - однокомпонентных систем 1311–13
  - тройных систем 1317–24
- Фактор
  - массопереноса 838
  - сопротивления осадка 420
  - перегородки 420
  - экстракции 1124
- Фильтр(ы) 415–18
  - дисковые 418
  - классификация 415
  - непрерывного действия 417–18
  - периодического действия 415–17
  - поверхность 423
  - простой 415
  - схемы 416–18
- Фильтрат 414, 422
  - кривые вымывания из осадка 436
- Фильтрация 413–35
  - движущая сила 419
  - непрерывное на барабанном ваку-ум-фильтре 426–28
  - определение параметров 428–30
  - периодическое, режимы 422–25
  - при постоянной движущей силе 422–23
  - – скорости 424
  - продолжительность 422
  - скорость 418–19
  - схема 414
  - уравнение 421, 434
  - центробежное 430–35
- Фильтр-пресс рамный 416–17
- Фильтрующая перегородка 414, 432
- Флегма 1006
- Флегмовое число 1023, 1026–27
- Флорентийский сосуд 1117
- Флотационный аппарат 1694
- Флотореагенты 1693
- Форвакуумный насос 373–74
- Формулы см. Уравнения
- Фракции, узкие и широкие 215–16
- Фракционная кристаллизация 1344–85
  - при контакте с хладагентом 1360–64
  - однократная бинарных смесей 1348–49
  - с отводом теплоты через охлаждающую поверхность 1352–60
  - периодическая 1356–59, 1361
  - последовательная (ИВ) 1359–60
  - (ИП) 1356–58
  - со стекающей пленкой 1371
- Фракционный состав 1658
- Фреоны 1581
- Фронт сорбции 1194
  - время формирования 1196
  - скорость движения 1203
- Хемосорбция 907, 926, 945–50, 1161, 1166
- Хладагент(ы) (охлаждающая среда) 1580
  - газообразный 1364
  - жидкий 1363
  - испаряющийся 1363–64
  - для контактной кристаллизации 1361 сл.
  - промежуточные 1582
  - свойства 1581
- Холодильники-конденсаторы 1018, 1583
- Холодильные машины
  - абсорбционная 1574–77

идеальная 1553–56  
компрессионно-воздушная 1563–65  
– каскадная 1578  
– паровая 1556–63  
– – двухступенчатая 1566–74  
пароэжекторная 1579  
термоэлектрические 1579  
Холодообменники 1592, 1611  
Холодопроизводительность 1561  
удельная 1594, 1604

**Центр**  
давления 131  
масс 131  
тяжести 131

**Центриклоны** 412

**Центрифуги** 392  
вертикальные 392, 393–94  
горизонтальные 393  
затраты энергии на работу 399–404  
мощность 403–04  
осадительные 393–95  
фильтрующие 430, 431 сл.

**Центрифугирование** *см.* Осаждение центробежное

**Центробежные насосы** 265, 295, 296–314, 317, 319  
высота всасывания 313  
с двухсторонним всасыванием 296  
достоинства и недостатки 319–21  
КПД гидравлический 300  
многоступенчатые 297  
напор 298–302  
с односторонним всасыванием 296  
одноступенчатые 297  
основное уравнение 299  
параллельная и последовательная работа 311–13  
производительность 303–04  
рабочая точка 306–07, 311  
характеристики 304–10  
– универсальная 304, 309–10  
– частная 304–06

**Цеолиты** 1160

**Цикл**  
Гейланда 1602–05  
Капицы 1606–10  
Карно 1553  
Клода 1602  
Линде 1593, 1596–1602

охлаждения с детандерами 1602–10  
– регенеративный 1592–1602  
– эталонный обратный 1590

**Циклоны**  
гидравлическое сопротивление 411  
предельный размер улавливаемых частиц 409–10  
производительность 408–09  
рабочий объем 405  
характеристики 406

**Циркуляция жидкости**  
внешняя 443  
внутренняя 443  
естественная 670–72  
направленная 612  
принудительная 670–74

**Число(а) *см. также* Критерии**  
безразмерные 105  
единиц переноса (ЧЕП) массы 810, 1022  
– – теплоты 556  
Жуковского 111, 151  
Кнудсена 257  
Лященко 239  
теоретических тарелок 1154  
флегмовое 1023, 1126–27

**Эжекторы** 266, 316, 1579

**Эквивалентная длина** 164

**Эквивалентный диаметр**  
канала 140  
частиц 216

**Эксплуатационные затраты** 173

**Экстенсивные свойства** 50, 51

**Экстрагирующий агент (экстрагент)**  
1103 сл.  
выбор 1121  
рабочих расход 1155  
регенерация 1146  
требования к нему 1064

**Экстракт** 1103

**Экстрактор-отстойник для выщелачивания** 1398

**Экстракторы жидкостные *см. также***  
Колонны экстракционные  
вибрационные 1111–12  
вывод фаз 1116–18  
дифференциально-контактные 1107

- насосно-отстойные 1115
- с непрерывным контактом фаз 1107–13, 1155
- роторно-дисковые (РДЭ) 1109–10
- ступенчатые смесительно-отстойные (СОЭ) 1114–16
- центробежные 1109, 1112–13
- ящичные 1116
- Экстракционные аппараты 1106–16
  - см. также* Экстракторы
  - высота рабочей зоны 1133
  - гравитационные 1107
  - интенсифицированные 107
  - классификация 1106
  - колонные *см.* Колонны экстракционные
- Экстракция
  - газовая 1444
  - жидкостная 1103–56
  - однократная 1119, 1123–24, 1143–45
  - при полной нерастворимости экстрагента и разбавителя 1127–37
  - порционная 1119, 1124–27, 1145–47
  - противоточная непрерывная 1120, 1127–37, 1147–56
  - с непрерывным контактом фаз 1132–37, 1148
  - ступенчатая 1127–32, 1148
  - ступень 1124
  - из твердых тел *см.* Выщелачивание
  - фактор 1124
  - при частичной растворимости реагента и разбавителя 1137–56
- Экструдеры 1485–86, 1507–08
- Экструзия 1507
- Электродиализ 1527
- Электроосмос 1529
- Электрофильтры 412–13
- Энтальпия 473
  - насыщенного пара 1046
  - относительная 1235
  - потoki 546–48
- Эрлифт *см.* Газлифт
- Эффект(ы)
  - адиабатный 1588
  - дрессельный 1585–86
  - Дюфо 67
  - Онзагера 66–67
  - Соре 67

*Виктор Герцевич АЙНШТЕЙН,  
Михаил Константинович ЗАХАРОВ,  
Геннадий Алексеевич НОСОВ,  
Василий Валериевич ЗАХАРЕНКО,  
Татьяна Вальтеровна ЗИНОВКИНА,  
Александр Леонидович ТАРАН,  
Артаг Ераносович КОСТАНЯН*

**ПРОЦЕССЫ И АППАРАТЫ  
ХИМИЧЕСКОЙ ТЕХНОЛОГИИ**

**ОБЩИЙ КУРС**

В двух книгах

Книга 1

*Под редакцией В. Г. Айнштейна*

**У ч е б н и к**

*Издание восьмое, стереотипное*

Зав. редакцией  
естественнонаучной литературы *М. В. Рудкевич*

ЛР № 065466 от 21.10.97  
Гигиенический сертификат 78.01.10.953.П.1028  
от 14.04.2016 г., выдан ЦГСЭН в СПб

**Издательство «ЛАНЬ»**

lan@lanbook.ru; www.lanbook.com

196105, Санкт-Петербург, пр. Ю. Гагарина, д. 1, лит. А.

Тел./факс: (812) 336-25-09, 412-92-72.

Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 09.10.18.  
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Печать офсетная. Усл. п. л. 57,25. Тираж 100 экз.

Заказ № 614-18.

Отпечатано в полном соответствии  
с качеством предоставленного оригинал-макета  
в АО «Т8 Издательские Технологии».  
109316, г. Москва, Волгоградский пр., д. 42, к. 5.

# ГДЕ КУПИТЬ

## ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИЙ:

Для того, чтобы заказать необходимые Вам книги,  
достаточно обратиться в любую из торговых компаний  
Издательского Дома «ЛАНЬ»:

### по России и зарубежью

«ЛАНЬ-ТРЕЙД»

РФ, 196105, Санкт-Петербург, пр. Ю. Гагарина, 1

тел.: (812) 412-85-78, 412-14-45, 412-85-82

тел./факс: (812) 412-54-93

e-mail: trade@lanbook.ru

ICQ: 446-869-967

**www.lanbook.com**

пункт меню «Где купить»

раздел «Прайс-листы, каталоги»

### в Москве и в Московской области

«ЛАНЬ-ПРЕСС»

109387, Москва, ул. Летняя, д. 6

тел.: (499) 178-65-85, 722-72-30

e-mail: lanpress@lanbook.ru

### в Краснодаре и в Краснодарском крае

«ЛАНЬ-ЮГ»

350901, Краснодар, ул. Жлобы, д. 1/1

тел.: (861) 274-10-35

e-mail: lankrd98@mail.ru

## ДЛЯ РОЗНИЧНЫХ ПОКУПАТЕЛЕЙ:

интернет-магазин

Издательство «Лань»: <http://www.lanbook.com>

магазин электронных книг

**Global F5**

<http://globalf5.com/>



**ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНАЯ  
ЛИТЕРАТУРА  
ДЛЯ ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ**

Мы издаем новые  
и ставшие классическими учебники  
и учебные пособия по общим  
и общепрофессиональным  
направлениям подготовки.

Большая часть литературы  
издательства «ЛАНЬ»  
рекомендована Министерством образования  
и науки РФ и используется вузами  
в качестве обязательной.

Мы активно сотрудничаем  
с представителями высшей школы,  
научно-методическими советами  
Министерства образования и науки РФ,  
УМО по различным направлениям  
и специальностям по вопросам грифования,  
рецензирования учебной литературы  
и формирования перспективных планов издательства.

**Наши адреса и телефоны:**

РФ, 196105, Санкт-Петербург, пр. Юрия Гагарина, 1  
(812) 336-25-09, 412-92-72  
[www.lanbook.com](http://www.lanbook.com)



Мы будем благодарны Вам  
за пожелания по издаваемой нами литературе,  
а также за предложения по изданию книг  
новых авторов или переизданию  
уже существующих трудов.

Мы заинтересованы в сотрудничестве  
с высшими учебными заведениями  
и открыты для Ваших предложений  
по улучшению нашего взаимодействия.

Теперь Вы можете звонить нам бесплатно  
из любых городов России по телефону

**8-800-700-40-71**

Дополнительную информацию  
и ответы на вопросы Вы также можете получить,  
обратившись по электронной почте:

**market@lanbook.ru**