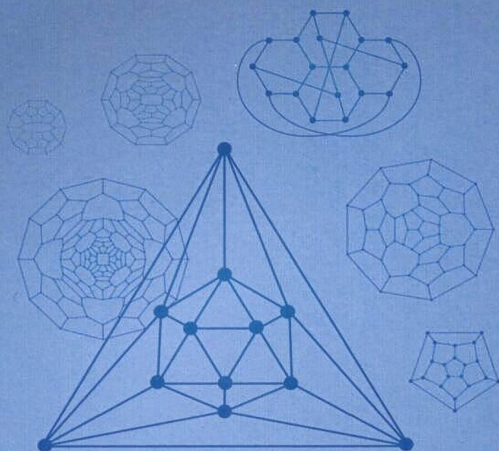


Мишель Мари ДЕЗА  
Матье Дютур СИКИРИЧ

# Геометрия химических графов

Полициклы и биполициклы







# Geometry of Chemical Graphs: Polycycles and Two-faced Maps

MICHEL DEZA  
*École Normale Supérieure, Paris,*

MATHIEU DUTOUR SIKIRIĆ  
*Rudjer Bošković Institute, Zagreb*



CAMBRIDGE  
UNIVERSITY PRESS

Мишель Мари ДЕЗА  
Матье Дютур СИКИРИЧ

# Геометрия химических графов

Полициклы и биполициклы

Перевод с английского  
А. Ю. Еремина и Н. П. Стрелковой

Под редакцией  
А. О. Иванова



Москва ♦ Ижевск

2019

УДК 513  
ББК 22.151  
Д269

Интернет-магазин  
**MATHESIS**

<http://shop.rcd.ru>

- физика
- математика
- биология
- нефтегазовые технологии

**Деза М.-М., Сикирич М.-Д.**

Геометрия химических графов: полициклы и биполициклы. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2019. — 384 с.

Полициклы и симметричные полиэдры возникают как обобщения графов при моделировании молекулярных структур, возникающих в химии и кристаллографии, таких как фуллерены, за открытие которых была присуждена Нобелевская премия. Химия породила много интересных вопросов в математике и компьютерном моделировании, которые, в свою очередь, предлагают новые направления при синтезе молекул. Данная монография содержит новые результаты теории полициклов и биполициклов вместе с необходимой вводной информацией, включающей в себя описание необходимых для изучения материала математических инструментов. Книга организована так, что после чтения вводной главы каждая последующая может быть прочитана независимо от предыдущих. Она будет доступна как исследователям, так и студентам, изучающим теорию графов, дискретную геометрию, комбинаторику, а также более прикладные области, такие как математическая химия и кристаллография. Многие приводимые результаты потребовали использования компьютерного перебора. Соответствующие программы доступны на сайтах авторов.

**ISBN 978-5-4344-0625-3**

**ББК 22.151**

© М.-М. Деза, М.-Д. Сикирич, 2019

© Ижевский институт компьютерных исследований, 2019

<http://shop.rcd.ru>  
<http://ics.org.ru>

# Оглавление

<b>Предисловие к русскому изданию</b> . . . . .	9
<b>Предисловие</b> . . . . .	11
<b>ГЛАВА 1. Введение</b> . . . . .	13
1.1. Графы . . . . .	13
1.2. Топологические понятия . . . . .	15
1.2.1. Карты . . . . .	15
1.2.2. Ориентируемость и классификация поверхностей . . . . .	17
1.2.3. Фундаментальные группы, накрытия и фактор-карты . . . . .	19
1.2.4. Гомологии и характеристика Эйлера–Пуанкаре . . . . .	23
1.3. Представление карт . . . . .	24
1.4. Группы симметрии карт . . . . .	27
1.5. Типы регулярности карт . . . . .	34
1.6. Операции над картами . . . . .	38
<b>ГЛАВА 2. Биполициклы</b> . . . . .	41
2.1. Конструкция Гольдберга–Коксетера . . . . .	46
2.2. Описание классов . . . . .	50
2.3. Компьютерные построения классов . . . . .	57
<b>ГЛАВА 3. Фуллерены как паркеты на поверхностях</b> . . . . .	59
3.1. Классификация конечных фуллеренов . . . . .	59
3.2. Фуллерены на торе и бутылке Клейна . . . . .	62
3.3. Проективные фуллерены . . . . .	63
3.4. Плоские 3-фуллерены . . . . .	64
<b>ГЛАВА 4. Полициклы</b> . . . . .	65
4.1. $(r, q)$ -полициклы . . . . .	65
4.2. Примеры . . . . .	68
4.3. Клеточный гомоморфизм и структура $(r, q)$ -полициклов . . . . .	70
4.4. Углы и кривизна . . . . .	75
4.5. Полициклы на поверхностях . . . . .	78



<b>ГЛАВА 5. Полициклы с заданной границей</b> . . . . .	81
5.1. Проблема единственности $(r, q)$ -заполнений . . . . .	81
5.2. Алгоритмы построения $(r, 3)$ -заполнения . . . . .	87
<b>ГЛАВА 6. Симметрии полициклов</b> . . . . .	91
6.1. Группа автоморфизмов $(r, q)$ -полициклов . . . . .	91
6.2. Изоздральные и изогональные $(r, q)$ -полициклы . . . . .	92
6.3. Изоздральные и изогональные $(r, q)_{gen}$ -полициклы . . . . .	100
<b>ГЛАВА 7. Элементарные полициклы</b> . . . . .	103
7.1. Разложение полициклов . . . . .	103
7.2. Параболические и гиперболические элементарные $(R, q)_{gen}$ -полициклы . . . . .	108
7.3. Ядерно-элементарные полициклы . . . . .	111
7.4. Классификация элементарных $(\{2, 3, 4, 5\}, 3)_{gen}$ -полициклов .	115
7.5. Классификация элементарных $(\{2, 3\}, 4)_{gen}$ -полициклов . . .	122
7.6. Классификация элементарных $(\{2, 3\}, 5)_{gen}$ -полициклов . . .	123
7.7. Приложение 1: 204 отдельных $(\{2, 3, 4, 5\}, 3)$ -полицикла . . .	127
7.8. Приложение 2: 57 отдельных элементарных $(\{2, 3\}, 5)$ -поли- циклов . . . . .	135
<b>ГЛАВА 8. Применения разложения на элементарные <math>(r, q)</math>-поли-     циклы</b> . . . . .	139
8.1. Экстремальные полициклы . . . . .	140
8.1.1. Экстремальные $(5, 3)$ -полициклы . . . . .	142
8.1.2. Экстремальные $(3, 5)$ -полициклы . . . . .	146
8.1.3. Параболические и гиперболические экстремальные $(r, q)$ -полициклы . . . . .	147
8.2. Непродолаемые полициклы . . . . .	149
8.3. 2-вложимые полициклы . . . . .	156
<b>ГЛАВА 9. Строго регулярные сферы и торы</b> . . . . .	161
9.1. Строго регулярные сферы . . . . .	163
9.2. Строго регулярные $(\{a, b\}, k)$ -сферы, не являющиеся много- гранниками . . . . .	174
9.3. Строго регулярные $(\{a, b\}, k)$ -плоскости . . . . .	181
9.3.1. Перечисление возможных случаев . . . . .	183
9.3.2. Доказательство и описание 33 случаев . . . . .	190

<b>ГЛАВА 10. Параболические слабо регулярные сферы . . . . .</b>	<b>211</b>
10.1. Регулярные $(\{2, 6\}, 3)$ -сферы . . . . .	211
10.2. Регулярные $(\{3, 6\}, 3)$ -сферы . . . . .	212
10.3. Регулярные $(\{4, 6\}, 3)$ -сферы . . . . .	212
10.4. Регулярные $(\{5, 6\}, 3)$ -сферы (фуллерены) . . . . .	214
10.5. Регулярные $(\{3, 4\}, 4)$ -сферы . . . . .	221
10.6. Регулярные $(\{2, 3\}, 6)$ -сферы . . . . .	223
<b>ГЛАВА 11. Общие свойства 3-валентных регулярных карт . . . . .</b>	<b>227</b>
11.1. Произвольные $(\{a, b\}, 3)$ -карты . . . . .	232
11.2. Неразрешенные вопросы . . . . .	234
<b>ГЛАВА 12. Сферы и торы со свойством <math>aR_i</math> . . . . .</b>	<b>235</b>
12.1. Карты со свойством $aR_0$ . . . . .	236
12.2. Карты со свойством $4R_1$ . . . . .	238
12.3. Карты, обладающие свойством $4R_2$ . . . . .	244
12.4. Карты, обладающие свойством $5R_2$ . . . . .	254
12.5. Карты, обладающие свойством $5R_3$ . . . . .	254
<b>ГЛАВА 13. Сферы и торы Франка–Каспера . . . . .</b>	<b>273</b>
13.1. Формула Эйлера для $(\{a, b\}, 3)$ -карт, обладающих свойством $bR_0$ . . . . .	273
13.2. Главный остов, элементарные полициклы и классификационные результаты . . . . .	274
<b>ГЛАВА 14. Сферы и торы со свойством <math>bR_1</math> . . . . .</b>	<b>281</b>
14.1. Формула Эйлера для $(\{a, b\}, 3)$ -карт со свойством $bR_1$ . . . . .	281
14.2. Элементарные полициклы . . . . .	282
<b>ГЛАВА 15. Сферы и торы со свойством <math>bR_2</math> . . . . .</b>	<b>293</b>
15.1. $(\{a, b\}, 3)$ -карты со свойством $bR_2$ . . . . .	293
15.2. $(\{5, b\}, 3)$ -торы со свойством $bR_2$ . . . . .	296
15.3. $(\{a, b\}, 3)$ -сферы, содержащие цикл из $b$ -угольников . . . . .	299
<b>ГЛАВА 16. Сферы и торы со свойством <math>bR_3</math> . . . . .</b>	<b>309</b>
16.1. Классификация $(\{4, b\}, 3)$ -карт, обладающих свойством $bR_3$ . . . . .	309
16.2. $(\{5, b\}, 3)$ -карты, обладающие свойством $bR_3$ . . . . .	314
<b>ГЛАВА 17. Сферы и торы со свойством <math>bR_4</math> . . . . .</b>	<b>321</b>
17.1. $(\{4, b\}, 3)$ -карты со свойством $bR_4$ . . . . .	321
17.2. $(\{5, b\}, 3)$ -карты со свойством $bR_4$ . . . . .	325

ГЛАВА 18. Сферы и торы со свойством $bR_j$ при $j \geq 5$ . . . . .	341
18.1. Карты со свойством $bR_5$ . . . . .	341
18.2. Карты со свойством $bR_6$ . . . . .	349
ГЛАВА 19. Икосаэдральные фуллероиды . . . . .	353
19.1. Построение $I$ -фуллероидов и бесконечных серий . . . . .	354
19.2. Необходимые условия на $p$ -вектора . . . . .	358
19.3. От $p$ -вектора к структуре . . . . .	361
Предметный указатель . . . . .	367
Литература . . . . .	371

## Предисловие к русскому изданию

Мы рады, что наша книга выходит на русском языке. Этот перевод позволил нам дать окончательные ссылки на многие статьи, вышедшие за последние четыре года, прошедшие со времени публикации этой книги. Несколько новых замечаний и соответствующих им ссылок было добавлено на страницах 31, 34–36, 42 в главах 2, 3 английского издания.

Мы благодарим всех, кто участвовал в переводе этой книге, и в особенности А. Борисова — директора РХД, А. Иванова — научного редактора книги и переводчиков А. Еремина и Н. Стрелкову.

Париж  
14 апреля 2012 г.

Мишель Мари Деза  
и Матье Дютур Сикирич





# Предисловие

Платоновы тела изучаются с античных времен в самых разных разделах науки и искусства. Более общие объекты, полиэдральные комплексы (карты), повсеместно встречаются в химии и кристаллографии. Их свойства исследуются со времен Кеплера. В этой книге мы изучим классы карт сферы и тора и создадим каталог свойств таких карт, которые будут полезны как математикам, так и представителям естественных наук.

В частности, мы рассматриваем здесь два следующих новых класса карт, обобщающих платоновы многогранники и интересных для приложений, особенно в химии и кристаллографии (для сферы и тора). *Полициклы* представляют собой 2-связные плоские графы, имеющие предписанный комбинаторный тип внутренних граней, одинаковую степень  $q$  внутренних вершин и степень граничных вершин, не превосходящую  $q$ . *Биполициклы* — это карты, имеющие грани не более двух типов и одинаковые степени вершин. Множество примеров и разнообразные обобщения приводятся в тексте книги. Для многих полученных графов приведены иллюстрации, особенно в тех случаях, когда возможна полная классификация. Значительную часть материала мы были вынуждены изложить компактно, но надеемся, что нам удалось сделать это настолько ясно, насколько это возможно.

Главным образом нас интересовали вопросы, связанные с перечислением, симметриями, экстремальными свойствами, регулярностью граней, метрическими вложениями, а также смежные алгоритмические проблемы. Графы, вошедшие в эту книгу, возникли на широких просторах геометрии, теории графов, химии и кристаллографии. Нами получено много новых интересных карт сферы и тора.

Книга устроена следующим образом. В главах 1 и 2 представлены основные понятия. После их прочтения остальные главы можно читать практически независимо друг от друга.

Главы 4–8 посвящены теории полициклов. В главе 4 мы разъясняем общее понятие  $(r, q)$ -полицикла, разбираем случаи, когда возможна классификация, а также описываем клеточный гомоморфизм в правильный паркет типа  $\{r, q\}$ . В главе 5 изучается вопрос о том, насколько граница  $(r, q)$ -полицикла определяет его. В главе 6 рассматриваются возможные симметрии

$(r, q)$ -полициклов, а также вопросы классификации тех из них, у которых группа симметрии действует транзитивно на гранях и/или на вершинах.

В главе 7 описано разложение обобщенного полицикла на элементарные компоненты. Эта универсальная технология применяется затем в главах 8, 12, 13, 14 и 18.

Второй основной объект нашего изучения —  $k$ -валентные бипоциклы — рассматривается в главах 3 и 9–19. В главе 3 обсуждается наш главный пример — фуллерены, в главе 9 классифицированы строго регулярные карты на сфере и торе. В главах 10–18 рассматривается более слабое определение регулярности карт. В главе 19 мы имеем дело с 3-валентными бипоциклами, обладающими икосаэдральной симметрией.

В книге поднято много элементарных вопросов (некоторые из них, возможно, просты). Мы надеемся, что эта книга окажется полезной при их решении. Многие наши результаты получены с помощью компьютерного перебора (и не могут быть получены иначе); соответствующие программы доступны на сайте [Du07].

Мы признательны многим людям, помогавшим нам в работе над этой книгой. Вот список тех, кого особенно хотелось бы выделить: Jacques Beigbeder, Gunnar Brinkmann, Olaf Delgado Friedrichs, Maja Dutour Sikirić, Patrick Fowler, Jack Graver, Вячеслав Гришухин, Gil Kalai, Stanislav Jendrol и Михаил Штогрин.

Мы также признательны École Normale Supérieure of Paris, Hebrew University of Jerusalem, Rudjer Bošković Institute of Zagreb, Institute of Statistical Mathematics of Tokyo и Nagoya University за непрерывную поддержку.

Мишель Мари Деза  
и Матье Дютур Сикирич

# ГЛАВА 1

## Введение

В данной главе мы приводим ряд основных определений, связанных с графами, картами и полициклами. Мы даем здесь только основные понятия. Дальнейшие определения будут вводиться по мере необходимости. Читатель может также обратиться к следующим книгам, в которых найдет более подробную информацию: [Grü67], [Cox73], [Mun71] и [Cro97].

### 1.1. Графы

Граф  $G$  состоит из множества  $V$  своих вершин и множества  $E$  своих ребер, причем каждому ребру приписаны две вершины — концы этого ребра. Две вершины называются *смежными* если между ними имеется ребро. *Степень вершины*  $v \in V$  — это количество ребер, инцидентных этой вершине. Граф называется *простым*, если никакие два ребра не имеют одинаковых концевых вершин, т. е. если граф не содержит петель и кратных ребер. В этом основном случае, т. е. в случае простых графов, автоморфизмы — это перестановки множества вершин, сохраняющие отношение смежности. Для случая непростых графов (например, если имеются 2-угольники), *автоморфизм* графа — это перестановка вершин и перестановка ребер, сохраняющие инцидентность между вершинами и ребрами. Через  $\text{Aut}(G)$  обозначается группа автоморфизмов графа  $G$ , которая также называется его *группой симметрии*.

Для каждого подмножества  $U \subseteq V$  множества вершин обозначим через  $E_U \subseteq E$  множество тех ребер графа  $G = (V, E)$ , концы которых содержатся в  $U$ . Граф  $G_U = (U, E_U)$  называется *индуцированным (множеством  $U$ ) подграфом* в  $G$ .

Граф  $G$  называется *связным*, если для любых двух его вершин  $u$  и  $v$  существует путь в  $G$ , соединяющий  $u$  и  $v$ . Граф называется  *$k$ -связным*, где  $k \geq 2$  — некоторое целое число, если он остается связным после выбрасывания из него любого семейства из  $(k - 1)$ -й вершины.



Пусть  $G_1 = (V_1, E_1)$  и  $G_2 = (V_2, E_2)$  — некоторые графы. Их *прямое произведение*  $G_1 \times G_2$  определяется как граф  $G = (V_1 \times V_2, E)$  с множеством вершин

$$V_1 \times V_2 = \{(v_1, v_2) : v_1 \in V_1 \text{ и } v_2 \in V_2\},$$

ребра которого суть такие пары  $((u_1, u_2), (v_1, v_2))$ , где  $u_1, v_1 \in V_1$  и  $u_2, v_2 \in V_2$ , что или  $(u_1, v_1) \in E_1$ , или  $(u_2, v_2) \in E_2$ .<sup>1</sup>

Подмножество  $E'$  ребер графа называется *паросочетанием*, если никакие два ребра из  $E'$  не имеют общей концевой вершины. Паросочетание называется *совершенным*, если каждая вершина графа принадлежит в точности одному ребру этого паросочетания.

Следующие графы будут часто использоваться ниже.

- *Полный граф*  $K_n$  — это граф с  $n$  вершинами  $v_1, \dots, v_n$ , в котором  $v_i$  смежна с  $v_j$  для всех  $i \neq j$ .
- *Путь*  $P_n = P_{v_1, v_2, \dots, v_n}$  — это граф с  $n$  вершинами  $v_1, \dots, v_n$  и  $(n-1)$ -м ребром  $(v_i, v_{i+1})$ , где  $1 \leq i \leq n-1$ .
- *Цикл*  $C_n = C_{v_1, v_2, \dots, v_n}$  (или  *$n$ -угольник*) — это путь  $P_{v_1, v_2, \dots, v_n}$  с одним дополнительным ребром  $(v_1, v_n)$ .

*Плоский граф* — это связный граф вместе с некоторым его вложением в плоскость, при котором каждому ребру соответствует кривая, и никакие две кривые не пересекаются (за исключением пересечений по общим вершинам). Граф называется *планарным*, если существует по крайней мере одно такое его вложение. Известно, что каждый планарный граф может быть вложен в плоскость так, что все его ребра будут прямыми отрезками (см. [Wa36, Fa48, Tut63]). *Гранью* плоского графа называется часть плоскости, ограниченная линией, составленной из ребер. Плоский граф задает разбиение плоскости на грани. Если  $a$  — вершина, ребро или грань, а  $b$  — ребро, грань или вершина, то говорят, что  $a$  *инцидентно*  $b$ , если или  $a$  содержится в  $b$ , или  $b$  содержится в  $a$ . Две вершины (соответственно, две грани) называются *смежными*, если имеют общее ребро<sup>2</sup>. Количество вершин грани мы будем называть ее *степенью*<sup>3</sup>, или *ковалентностью*. Грань называется *внешней*, если она не ограничена. Ограниченные грани

<sup>1</sup> Авторы обозначают неупорядоченные пары вершин (ребра) круглыми скобками.

<sup>2</sup> Вместо того, чтобы говорить, что две грани *смежны*, мы будем иногда говорить, что они *граничат* друг с другом.

<sup>3</sup> В оригинальном тексте используется термин *gonality*.

называются *внутренними*. Любой конечный плоский граф имеет в точности одну внешнюю грань. Бесконечный плоский граф может иметь любое, от нуля до бесконечности, количество внешних граней. Плоский 3-связный граф допускает в точности одно вложение в сферу, т. е. его множество граней определяется множеством ребер.

Вектор  $v(G) = (\dots, v_i, \dots)$ , составленный из чисел  $v_i$ , где  $v_i$  равно количеству вершин степени  $i$  в графе  $G$ , назовем *v-вектором* графа  $G$ . Плоский граф называется *k-валентным*, если  $v_i = 0$  для всех  $i \neq k$ . Далее, вектор  $p(G) = (\dots, p_i, \dots)$ , где число  $p_i$  равно количеству граней графа  $G$  степени  $i$ , называется *p-вектором* плоского графа  $G$ . Для связного плоского графа  $G$  обозначим через  $G^*$  его *плоский двойственный граф*, который определяется как граф на множестве граней графа  $G$  так, что две грани смежны, если и только если они имеют общее ребро. Ясно, что  $v(G^*) = p(G)$  и  $p(G^*) = v(G)$ .

## 1.2. Топологические понятия

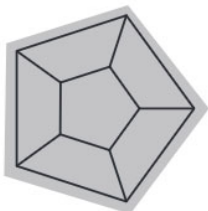
В данном разделе представлены топологические понятия, которые требуются нам при работе с поверхностями. Топология имеет дело с непрерывными структурами и инвариантами относительно непрерывных деформаций. Поскольку мы работаем с вершинами, ребрами и гранями, мы адаптируем классические определения к нашему случаю.

Мы не приводим никакие доказательства, но надеемся, что их отсутствие компенсируется наличием нескольких геометрических примеров.

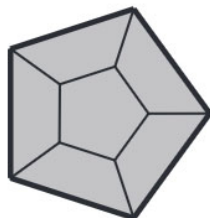
Более полное изложение можно найти в основных учебниках по алгебраической топологии, таких как [Nat01] и [God71].

### 1.2.1. Карты

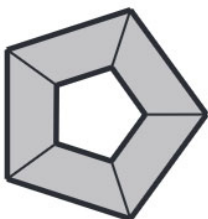
*Карта*  $M$  представляет собой такое семейство вершин, ребер и граней, что каждое ребро содержится не менее чем в одной и не более чем в двух гранях. Ребро, принадлежащее в точности одной грани, называется *граничным*; все такие ребра составляют *границу*. Карта называется *замкнутой*, если у нее нет границы. Карта называется *конечной*, если она имеет конечное число вершин, ребер и граней. Ниже приведены плоские графы (все они имеют отношение к  $Prism_5$ , см. раздел 1.5) с одинаковыми множествами вершин и ребер, но с разными множествами граней; граничные ребра изображены жирными отрезками.



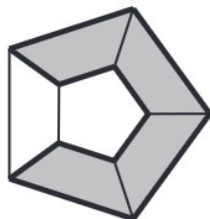
Замкнутая карта, клеточный комплекс многогранника. Это — плоский граф со свойствами  $5R_0$  и  $4R_2$  (см. главу 9)



Карта с граничными ребрами. Это —  $(\{4, 5\}, 3)$ -полицикл (см. главу 7)



Неодносвязная карта с граничными ребрами. Это —  $(4, 3)_{gen}$ -полицикл (см. главу 4.5)



Не карта, так как два ребра не содержатся ни в одной грани. Такие объекты нами не рассматриваются

Если  $M$  — некоторая замкнутая карта, то можно определить двойственную карту  $M^*$ , поменяв местами грани и вершины. В разделе 4.1 приводятся некоторые аналогичные определения двойственности для незамкнутых карт. Карта называется *полиэдральным комплексом*, если пересечение любых двух ее граней, ребер, вершин представляет собой грань, ребро, вершину или пустое множество. Карты, содержащие 2-угольники, не являются полиэдральными комплексами; они представляют собой *СВ-комплексы* (см., например, [Rot88])<sup>4</sup>.

Через  $S^2$  будем обозначать двумерную сферу, заданную как следующее подмножество пространства:  $\{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ . Для каждой точки  $A$  сферы  $S^2$  обозначим через  $A'$  противоположную точку сферы, и пусть  $\mathcal{H}_A$  — плоскость, ортогональная прямой  $AA'$  и проходящая через  $A'$ . Возьмем  $A = (0, 0, -1)$ ; тогда  $\mathcal{H}_A$  — это множество точек  $x \in \mathbb{R}^3$ , для которых  $x_3 = 1$ . Если  $B \in S^2 - \{A\}$ , то определим точку  $f_A(B)$  как пересечение прямой  $AB$  с плоскостью  $\mathcal{H}_A$ . Тем самым, мы построили так

<sup>4</sup>В оригинальном тексте для понятия полиэдрального комплекса используется термин «клеточный комплекс» (cell-complex), но в русской литературе клеточные комплексы — синоним СВ-комплексов.

называемое *отображение Римана*<sup>5</sup>, задающее биекцию между  $S^2 - \{A\}$  и плоскостью  $\mathcal{H}_A$ . Можно продолжить  $f_A$  в точку  $A$ , положив  $f_A(A)$  равным «бесконечно удаленной точке» плоскости  $\mathcal{H}_A$ .

Пусть  $G$  — конечный плоский граф на плоскости  $\mathbb{R}^2 \simeq \mathcal{H}_A$ , и пусть  $f_A^{-1}(G)$  — его образ на сфере  $S^2$ . Вершины графа  $G$  соответствуют точкам сферы  $S^2$ , ребра графа  $G$  соответствуют непересекающимся криволинейным отрезкам на сфере  $S^2$ , а грани графа  $G$  соответствуют областям сферы  $S^2$ , ограниченными циклами, составленными из этих отрезков. Внешняя грань графа  $G$  соответствует той области сферы  $S^2$ , которая содержит  $A$ . Обратно, если задана карта  $M$  на сфере, то можно выбрать точку  $A$ , не принадлежащую карте  $M$ , и соответствующую плоскость  $\mathcal{H}_A$ , и тогда образ карты  $M$  на  $\mathcal{H}_A$  будет конечным плоским графом. Поэтому, допуская некоторую небрежность речи, мы будем использовать термин «сфера» не только для поверхности  $S^2$ , но и для комбинаторных карт на ней, т. е. для конечных плоских графов.

Читатель, интересующийся только плоскими графами, основным объектом нашего изучения, может теперь непосредственно перейти к чтению раздела 1.4. Однако для полного понимания торического случая нам потребуются карты во всей их общности. Ссылки по теории карт можно найти, например, в [BoLi95] и [MoTh01].

Нам также понадобятся карты, имеющие бесконечные наборы вершин, ребер и граней. Степени вершин всегда будут ограничены некоторой константой; однако грани могут иметь бесконечно много ребер. Среди плоских изображений таких карт мы будем разрешать лишь *локально конечные*, т. е. допускающие такое вложение, что каждая ограниченная область содержит конечное число вершин. Например, рассмотрим карту  $\widehat{\mathbb{Z}^2}$ , полученную факторизацией квадратного паркета  $\mathbb{Z}^2$  по операции сдвига  $(x, y) \mapsto (x + 10, y)$ . Карта  $\widehat{\mathbb{Z}^2}$  представляет собой бесконечный цилиндр, сделанный из последовательных колец, каждое из которых составлено из десяти квадратов. Можно нарисовать эти кольца на плоскости как концентрические, однако результирующий плоский граф не будет локально конечным.

### 1.2.2. Ориентируемость и классификация поверхностей

Пусть  $M$  — некоторая карта. Каждая тройка  $(v, e, f)$ , где  $v$  — вершина из  $M$ , содержащаяся в ребре  $e$ , а  $e$  — ребро грани  $f$ , называется *флагом карты*. Наши предположения позволяют задать три частично определен-

<sup>5</sup>Это, разумеется, обычная стереографическая проекция.



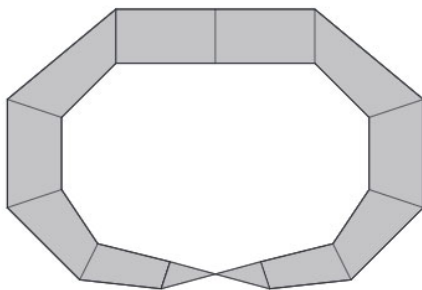


Рис. 1.1. Лист Мебиуса

ных оператора  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , переводящие флаг  $F = (v, e, f)$  в однозначно определенный флаг, отличающийся от  $F$  только на  $v$ ,  $e$  или  $f$  соответственно. Операторы  $\sigma_i$  действуют на множестве флагов  $\mathcal{F}(M)$  карты  $M$ . Операторы  $\sigma_0$  и  $\sigma_1$  всегда определены на каждом флаге  $F \in \mathcal{F}(M)$ , а оператор  $\sigma_2$  определен на каждом флаге  $F \in \mathcal{F}(M)$ , если и только если карта  $M$  замкнута.

Карта  $M$  называется *ориентируемой*, если существует такое разбиение множества  $\mathcal{F}(M)$  на две части  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ , что для любого флага  $(v, e, f) \in \mathcal{F}_1$  флаг  $\sigma_i(v, e, f)$ , если он существует, принадлежит  $\mathcal{F}_2$ . Мы в основном будем иметь дело с ориентируемыми картами.

Понятие ориентации легко определить алгебраически, но сложно визуализировать, так как замкнутые неориентируемые карты невозможно изобразить на рисунке. К счастью, для карт, имеющих границу, сделать это проще. На рис. 1.1 показана неориентируемая карта, называемая *лентой Мебиуса*. В ее неориентируемости можно убедиться следующим образом: двигаясь по одной из сторон ленты и сделав полный оборот, мы придем на другую сторону ленты. Все граничные ребра ленты Мебиуса образуют единственный цикл; после добавления грани к этому циклу, мы получим *проективную плоскость*  $\mathbb{P}^2$ . Проективная плоскость также может быть получена из карты на сфере (такой, как додекаэдр) отождествлением противоположных вершин, ребер и граней, т. е. с помощью *отождествления противоположных точек*.

Если задана поверхность  $S$ , то можно приделать к ней *ручку*,



или *скрещенный колпак*<sup>6</sup>. Ручку и скрещенный колпак можно рассматривать как цилиндр и ленту Мебиуса соответственно.

Теперь рассмотрим классификацию конечных карт.

**Теорема 1.2.1.** *Любая конечная замкнутая карта является одной из следующих карт:*

- 1) сфера  $\mathbb{S}^2$  (ориентируемая),
- 2) сфера  $\mathbb{S}^2$  с  $g$  ручками (ориентируемая),
- 3) сфера  $\mathbb{S}^2$  с  $g$  скрещенными колпаками (неориентируемая).

Теорема 1.2.1 доказана, например, в [Mun71]. Число  $g$ , упомянутое выше, называется *родом* карты. Ниже встречаются лишь следующие конечные замкнутые карты:

- 1) сфера  $\mathbb{S}^2$  с  $g = 0$  (ориентируемая),
- 2) тор  $\mathbb{T}^2$  с  $g = 1$  (ориентируемый),
- 3) проективная плоскость  $\mathbb{P}^2$  с  $g = 1$  (неориентируемая),
- 4) бутылка Клейна  $\mathbb{K}^2$  с  $g = 2$  (неориентируемая); один из способов получить бутылку Клейна состоит в том, чтобы профакторизовать тор  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  по действию следующего автоморфизма без неподвижных точек:  $f(x, y) = \left(x + \frac{1}{2}, -y\right)$ .

Если  $M$  — это конечная незамкнутая карта, то мы можем дополнить ее несколькими гранями по граничным ребрам и получить замкнутую карту. Итак, конечные незамкнутые карты получаются удалением некоторых граней из замкнутых карт.

### 1.2.3. Фундаментальные группы, накрытия и фактор-карты

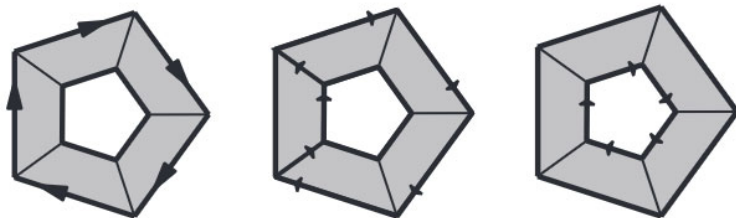
Фиксируем ориентацию на каждом ребре заданной карты  $M$  и определим свободную группу  $G(M)$  с образующими  $g_e$ , индексированными множеством ребер карты  $M$  (необходимые определения из теории групп см., например, в [Hum96]). *Ориентированный путь*  $OP$   $v_1, v_2, \dots, v_m$  —

<sup>6</sup>Изображения поверхностей со скрещенными колпаками, см., например, на сайте <http://mathworld.wolfram.com/Cross-Cap.html>

это такая последовательность вершин  $v_1, v_2, \dots, v_m$ , что  $v_i$  смежна с  $v_{i+1}$ . Для ребра  $e_i = (v_i, v_{i+1})$  обозначим через  $g(v_i, v_{i+1})$  элемент группы  $g_{e_i}$ , если ребро  $e_i$  ориентировано от  $v_i$  к  $v_{i+1}$ , и  $g_{e_i}^{-1}$  в противном случае. Сопоставим ориентированному пути  $\mathcal{OP}$  произведение  $g(\mathcal{OP}) = g(v_1, v_2)g(v_2, v_3) \dots g(v_{m-1}, v_m)$ .

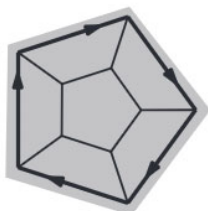
Обозначим через  $\mathcal{Z}_v(M)$  множество всех таких  $g(\mathcal{OP})$ , где  $\mathcal{OP}$  пробегает все множество ориентированных замкнутых путей, начинающихся и кончающихся в заданной *отмеченной вершине*  $v$ . Оно является группой; замена ориентации соответствует взятию обратного элемента, а умножение — конкатенации замкнутых путей. Для заданной грани  $F$  из  $M$ , ограниченной контуром из вершин  $(v_1, \dots, v_{|F|})$ , и ориентированного пути  $\mathcal{OP}$  из вершины  $v$  в вершину  $v_1$  рассмотрим элемент группы  $g(\mathcal{OP})g(v_1, v_2, \dots, v_{|F|}, v_1)g(\mathcal{OP})^{-1}$ . Обозначим через  $\mathcal{B}_v(M)$  подгруппу в  $G(M)$ , порожденную всеми такими элементами. Фундаментальная группа  $\pi_1(M)$ <sup>7</sup> — это фактор-группа группы  $\mathcal{Z}_v(M)$  по нормальной подгруппе  $\mathcal{B}_v(M)$ . Два ориентированных замкнутых пути с общей вершиной  $v$  называются *гомотопными*, если они соответствуют одному и тому же элементу группы  $\pi_1(M)$ . Группа  $\mathcal{B}_v(M)$  — это группа, состоящая из всех элементов, гомотопных *нулевому пути*, т.е. пути из  $v$  в  $v$  из 0 ребер. Если мы заменим отмеченную вершину  $v$  другой вершиной  $w$ , тогда для любого ориентированного пути  $\mathcal{OP}$  из  $v$  в  $w$  мы получим, что  $\mathcal{Z}_v(M) = g\mathcal{Z}_wg^{-1}$  и  $\mathcal{B}_v(M) = g\mathcal{B}_wg^{-1}$  с  $g = g(\mathcal{OP})$ . Итак, фундаментальная группа зависит от отмеченной вершины, но только с точностью до сопряжения. Карта называется *односвязной*, если  $\pi_1(M)$  тривиальна, т.е. любой путь гомотопен нулевому пути. Это эквивалентно утверждению, что любые два пути с одинаковым началом и концом могут быть непрерывно продеформированы друг в друга.

Ниже изображены три гомотопных пути в одной и той же карте.

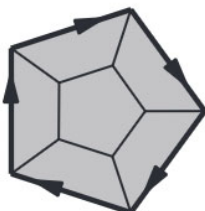


<sup>7</sup>На самом деле, это, конечно,  $\pi_1(M, v)$ .

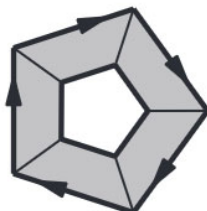
Здесь снова изображены три плоских карты и замкнутый путь на них:



Карта  $M_1$  односвязна  
(бесконечная грань  
включена)



Карта  $M_2$  односвязна  
(бесконечная грань  
не включена)



Карта  $M_3$  не односвязна

В  $M_1$  и  $M_2$  выделенный замкнутый путь гомотопен нулевому пути. В  $M_1$  этот цикл является границей грани, в то время как в  $M_2$  этот цикл — граница объединения всех граней. Более общо, любой плоский граф, а также любой конечный плоский граф за вычетом одной грани, односвязны. Но в  $M_3$  выделенный замкнутый путь не гомотопен нулевому пути. В действительности этот замкнутый путь является образующей фундаментальной группы  $\pi_1(M_3) \simeq \mathbb{Z}$ .

Для заданных карт  $M$  и  $M'$  клеточный гомоморфизм карт  $\phi: M \rightarrow M'$  — это функция, которая переводит вершины, ребра и грани  $M$  в вершины, ребра и грани  $M'$ , сохраняя отношение инцидентности. *Изоморфизм* — это клеточный гомоморфизм, который биективен. Если  $M = M'$ , то он называется *автоморфизмом*; множество всех автоморфизмов карты  $M$  называется *группой симметрии*  $M$ . Говорят, что автоморфизм  $f$  карты  $M$  действует *без неподвижных точек*, если  $f$  или является тождественным отображением, или для любой вершины, ребра, грани  $M$  их  $f$ -образы отличны от них самих. Если  $G$  — группа, состоящая из автоморфизмов без неподвижных точек некоторой карты  $M$ , то  $M/G$  называется *фактор-картой*  $M$  (по действию  $G$ ). Ее вершины, ребра, и грани образованы орбитами вершин, ребер и граней  $M$  (под действием  $G$ ), а отношение инцидентности индуцировано инцидентностью в  $M$ .

Фактор-карта может быть картой с петлями и кратными ребрами. Рассмотрим, например, 4-валентный плоский паркет  $\{4, 4\}$  (см. раздел 1.5), образованный параллелограммами, и группу  $\mathbb{Z}^2$ , действующую параллельными переносами. Здесь имеется одна орбита вершин, две орбиты ребер и одна орбита граней под действием  $\mathbb{Z}^2$ ; таким образом, фактор  $\{4, 4\}/\mathbb{Z}^2$  — это тор, представленный единственной вершиной и двумя петлями.

Для вершины  $v$  (или ребра  $e$ , или грани  $f$ ), *стандартная окрестность*  $N(v)$  — это множество всех вершин, ребер и граней, смежных с  $v$ .



*Локальный изоморфизм* — это такое непрерывное отображение  $\phi: M \rightarrow M'$ , что для любой вершины  $v \in M$  (или ребра, или грани) отображение из  $N(v)$  в  $N(\phi(v))$  взаимно-однозначно. *Накрытие* — это такой локальный изоморфизм, что для любой вершины  $v' \in M'$  (или ребра, или грани) и любой  $w' \in N(v')$ , если положить  $\phi^{-1}(v') = (v_i)_{i \in I}$ , найдутся такие элементы  $w_i \in N(v_i)$ , что  $w_i \neq w_j$  при  $i \neq j$ , и  $\phi^{-1}(w') = (w_i)_{i \in I}$ .

Если  $\mathcal{OP}' = (v'_1, \dots, v'_m)$  — некоторый ориентированный путь в  $M'$ , отображение  $\phi$  — покрытие и  $v_1$  — вершина в  $M$  такая, что  $\phi(v_1) = v'_1$ , то существует единственный ориентированный путь  $\mathcal{OP} = (v_1, \dots, v_m)$  в  $M$  такой, что  $\phi(\mathcal{OP}) = \mathcal{OP}'$ . *Автоморфизм накрытия* — это такой автоморфизм  $u$  карты  $M$ , что  $\phi \circ u = \phi$ , здесь  $u$  автоматически действует без неподвижных точек. Если  $v' \in M'$ , то для любых двух  $v_1, v_2 \in \phi^{-1}(v')$  существует такой автоморфизм накрытия  $u$ , что  $u(v_1) = v_2$ .

Для заданной карты  $M$  ее *универсальной накрывающей* называют односвязную карту  $\widetilde{M}$  (единственную с точностью до изоморфизма) вместе с накрытием  $\phi: \widetilde{M} \rightarrow M$ . Карта  $\widetilde{M}$  конечна тогда и только тогда, когда  $M$  и  $\pi_1(M)$  конечны. Фундаментальная группа  $\pi_1(M)$  изоморфна группе автоморфизмов накрытия  $\phi$ . Если  $H$  — подгруппа группы  $G$ , то ее *нормализатор*, обозначаемый через  $N_G(H)$ , определяется так:

$$N_G(H) = \{x \in G: xhx^{-1} \in H \text{ для всех } h \in H\}.$$

Группа  $\text{Aut}(M)$  автоморфизмов  $M$  совпадает с фактор группой

$$N_{\text{Aut}(\widetilde{M})}(\pi_1(M))/\pi_1(M).$$

В простейшем и наиболее часто используемом случае  $M$  — замкнутая конечная карта на сфере. В этом случае  $\pi_1$  тривиальна, и мы можем хорошо изобразить карту на плоскости, выбрав внешнюю грань. На плоскости может быть изображена любая бесконечная локально конечная замкнутая односвязная карта. В этом случае внешней грани нет, и карта полностью заполняет плоскость.

Замкнутый тор  $M$  может быть представлен как 3-мерный объект, спроецированный на плоскость, но это не очень целесообразно. Мы представим его универсальную накрывающую  $\widetilde{M}$  как плоскость, имеющую два периодических направления, т. е. как некоторый *2-периодический плоский граф*. Группа  $\pi_1(M)$  изоморфна  $\mathbb{Z}^2$  и представлена на  $\widetilde{M}$  как группа симметрий-сдвигов.

Выбрав подгруппу  $H$  конечного индекса (т. е. такую, что существуют  $g_1, \dots, g_m \in G$ , для которых  $G = \cup_i g_i H$ ) в группе  $G$  автоморфизмов

накрытия и взяв фактор, мы можем получить больший тор; в группе автоморфизмов таких торов есть подгруппа параллельных переносов, изоморфная фактор-группе  $G/H$ .

С другой стороны, для заданного тора с нетривиальной подгруппой параллельных переносов в группе автоморфизмов существует единственный *минимальный тор* с той же универсальной накрывающей и тривиальной подгруппой параллельных переносов. Эти минимальные торы взаимно-однозначно соответствуют периодическим паркетам плоскости.

#### 1.2.4. Гомологии и характеристика Эйлера–Пуанкаре

Пусть дана карта  $M$ . Припишем каждому ее ребру некоторую ориентацию и образуем  $\mathbb{Z}$ -модуль  $C_1(M)$ , взяв это множество ориентированных ребер в качестве базиса. Через  $Z_1(M)$  обозначим  $\mathbb{Z}$ -подмодуль в  $C_1(M)$ , порожденный множеством замкнутых ориентированных циклов в  $M$ . Каждой грани из  $M$  поставим в соответствие множество инцидентных ей ребер, ориентированных по часовой стрелке; порожденный такими циклами  $\mathbb{Z}$ -модуль обозначается через  $B_1(M)$ . Легко видеть, что  $B_1(M)$  является подмодулем  $Z_1(M)$ .

*Группа гомологий*  $H_1(M)$  — это фактор-группа группы  $Z_1(M)$  по ее подгруппе  $B_1(M)$ . Здесь мы снова отсылаем читателя к учебникам по алгебраической топологии для получения более подробной информации. Если  $M$  является тором, то  $H_1(M)$  изоморфна  $\pi_1(M)$ .

Если  $M$  — это ориентируемая конечная замкнутая карта, то  $H_1(M)$  изоморфна  $\mathbb{Z}^{2g}$ , где  $g$  — род  $M$ . *Характеристика Эйлера–Пуанкаре* конечной карты  $M$  определяется как величина  $\chi(M) = v - e + f$ , где  $v$  — число вершин,  $e$  — число ребер и  $f$  — число граней карты  $M$ .

**Теорема 1.2.2.** *Для произвольной конечной замкнутой карты  $M$  рода  $g$  имеем:*

- (i) *если  $M$  ориентируема, то  $\chi(M) = 2 - 2g$ ,*
- (ii) *если  $M$  неориентируема, то  $\chi(M) = 2 - g$ .*

Именно благодаря этой теореме в размерности 2 можно использовать топологию для получения нетривиальных комбинаторных результатов.

**Теорема 1.2.3.** *Пусть  $G$  — некоторая  $k$ -валентная замкнутая карта на поверхности  $M$ . Тогда:*

(i) применима следующая формула Эйлера:

$$\sum_{j \geq 2} p_j(2k - j(k - 2)) = 2k\chi(M), \quad (1.1)$$

где  $p_i$  — это число  $i$ -угольных граней;

(ii) если в  $G$  нет 2-угольных граней, то  $k \leq 5$ , если  $M$  — сфера, и  $k \leq 6$ , если  $M$  — тор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Соотношение  $2e = kv$  позволяет нам переписать характеристику Эйлера–Пуанкаре в виде

$$\chi(M) = \left(\frac{2}{k} - 1\right) e + \sum_{i \geq 2} p_i.$$

Используя, что  $2e = \sum_{i \geq 2} i p_i$  в уравнении выше, получаем требуемый результат.

Если  $j \geq 3$ , то  $2k - j(k - 2) \leq 0$  для  $k \geq 6$ , и  $2k - j(k - 2) < 0$  для  $k \geq 7$ . Чтобы вывести утверждение (ii), остается заметить, что  $\chi = 2$  и 0 для сферы и тора соответственно. ■

### 1.3. Представление карт

Политоп  $P$  — это выпуклая оболочка конечного множества точек в  $\mathbb{R}^n$ ; его размерность определяется как размерность наименьшего аффинного пространства, его содержащего. Мы будем предполагать политопы полноразмерными. Линейное неравенство  $f(x) \geq 0$  называется *верным*, если оно справедливо для всех  $x \in P$ . Грань политопа  $P$  — это множество вида  $\{x \in P: f(x) = 0\}$ , где  $f \geq 0$  — верное неравенство.

Мы будем рассматривать только 3-мерные политопы; они называются *многогранниками*. Их 0-мерные грани называются *вершинами*, а 2-мерные грани — просто *гранями*. Две вершины называются *смежными*, если существует ребро (т.е. 1-мерная грань), содержащее обе эти вершины. *Остов многогранника*<sup>8</sup> — это граф, образованный на множестве всех его вершин так, что две вершины *смежны*, если имеют общее ребро. Этот граф 3-связен и допускает вложение в плоскость.

<sup>8</sup>В оригинальном тексте используется термин *skeleton* (скелет).



Для заданного многогранника  $P$  его остов  $skel(P)$  — это планарный граф. Более того, для каждой грани  $F$  многогранника  $P$  мы можем изобразить  $skel(P)$  на плоскости так, что  $F$  будет внешней гранью полученного плоского графа. Такие рисунки называются *диаграммами Шлегеля* (см., например, [Zie95]). Штейниц (см. [Ste22], [Zie95, Chapter 4] и [Grü03], где рассказывается история этой теоремы) доказал, что конечный граф представляет собой остов некоторого многогранника (и поэтому — бесконечно-го семейства многогранников с таким же остовом), если и только если он планарен и 3-связен.

*Риманова поверхность* — это 2-мерная компактная гладкая поверхность, вместе с инфинитизимальным элементом длины<sup>9</sup> (см. учебники по дифференциальной и римановой геометрии, например [Nak90, MiFo]). Кривизна  $K(x)$  в точке  $x$  — это коэффициент  $\alpha$  в следующем разложении объема диска:

$$Vol(D(x, r)) = \pi r^2 - \alpha r^4 + o(r^4),$$

где  $D(x, r)$  — диск, состоящий из элементов, отстоящих от  $x$  на расстояние, не превосходящее  $r$ . Кривизна римановой поверхности  $S$  удовлетворяет формуле Гаусса — Бонне:

$$\int_S K(x) dx = 2\pi(1 - g).$$

Все римановы поверхности, рассматриваемые в этом разделе, являются поверхностями постоянной кривизны. Если поверхность имеет постоянную кривизну, то для любых двух ее точек  $x$  и  $y$  существуют окрестности  $N_x$  и  $N_y$  и локальная изометрия  $\phi$ , отображающая  $x$  в  $y$  и  $N_x$  на  $N_y$ . Поэтому римановы поверхности постоянной кривизны не имеют локальных инвариантов, и все имеющиеся у них инварианты являются глобальными (см., например, [Jos06]). В случае нулевого рода интеграл от кривизны положителен. С точностью до изменения масштаба можно считать, что кривизна равна 1. Существует только одна такая риманова поверхность: сфера  $S^2$ . В случае рода 1 интеграл от кривизны равен 0, поэтому и кривизна равна 0. Пространство Тейхмюллера  $T_1$  имеет размерность 2, что означает, что римановы поверхности рода 1 могут быть параметризованы двумя действительными параметрами. Каждую такую поверхность очень просто изобразить: возьмем  $\mathbb{R}^2$  и профакторизуем по группе  $v_1\mathbb{Z} + v_2\mathbb{Z}$ . В случае более высокого рода ситуация гораздо более сложная.

<sup>9</sup>Т. е. с римановой метрикой.

Для заданной карты  $M$  ее представление в виде упаковки кругов (см. [Moh97]) — это такое множество дисков на римановой поверхности  $\Sigma$  постоянной кривизны, по одному диску  $D(v, r_v)$  для каждой вершины  $v$  из  $M$ , что выполнены следующие условия:

- 1) внутренности дисков попарно не пересекаются,
- 2) диски  $D(u, r_u)$  и  $D(v, r_v)$  касаются, если и только если  $uv$  — ребро карты  $M$ .

Совместные представления карты  $M$  и двойственной к ней  $M^*$  в виде упаковки кругов называются *прямо-двойственным представлением*  $M$ , если справедливо следующее:

- 1) Пусть  $e = (u, v)$  — ребро  $M$ , и  $u^*, v^*$  — соответствующие вершины в  $M^*$ . Тогда диски  $D(u, r_u)$  и  $D(v, r_v)$ , соответствующие  $e$ , касаются в той же точке, что и диски  $D(u^*, r_{u^*})$  и  $D(v^*, r_{v^*})$ .
- 2) Граничные окружности дисков  $D(u, r_u)$  и  $D(u^*, r_{u^*})$  пересекаются в этой точке под прямым углом.

На рис.1.2 приведена иллюстрация этих свойств, а также пример прямо-двойственного представления карты в виде упаковки кругов.

Карта  $M$  называется *приведенной* (см. [Moh97, раздел 3]), если ее универсальная накрывающая 3-связна и представляет собой полиэдральный комплекс. В [Moh97, следствие 5.4] показано, что приведенные карты допускают единственное прямо-двойственное представление в виде упаковки

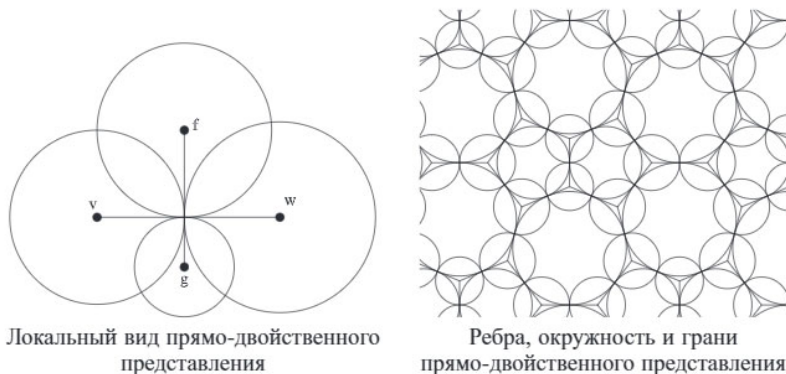


Рис. 1.2. Прямо-двойственные представления в виде упаковки кругов

кругов на римановой поверхности такого же рода; более того, имеется алгоритм полиномиальной сложности, позволяющий относительно легко найти координаты соответствующих точек. Это означает, что комбинаторика карты определяет структуру римановой поверхности.

Прямо-двойственное представление дает нам единственность при представлении карты. Но, на самом деле, для конечных плоских графов, т. е. для сфер, мы используем программу *CaGe* ([BDDH97]), которая не применяет прямо-двойственные представления. Программа *CaGe* рисует диаграмму Шлегеля (см. раздел 1.2.1); иногда, для того чтобы лучше показать симметрию, полезно поместить одну вершину или ребро графа на бесконечность (см., например, рис. 2.1, раздел 9.1, главу 10).

В случае торов мы берем их универсальные накрытия плоскостью и используем прямо-двойственные представления, которые строятся программой *TorusDraw* ([Dut04b]). В случае проективной плоскости  $\mathbb{P}^2$  мы берем ее универсальное накрытие, которое является сферой, и рисуем круглую рамку там, где расположены граничные точки, которые должны быть отождествлены (см. рис. 3.1). В случае бутылки Клейна  $\mathbb{K}^2$  мы рисуем прямоугольник на месте отождествляемых граничных точек (см. рис. 3.1).

## 1.4. Группы симметрии карт

Для конечных замкнутых карт на сфере имеется полная классификация возможных групп симметрии. В случае конечных замкнутых карт на торе можно описать возможные группы симметрии их универсальных накрывающих.

Напомним, что *автоморфизм* простого графа — это перестановка его вершин, сохраняющая отношение смежности между вершинами. В случае плоских графов мы также требуем, чтобы грани переходили в грани, но для 3-связных графов это условие излишне. Напомним, что  $Aut(G)$  обозначает группу автоморфизмов графа  $G$ .

Группа автоморфизмов  $Aut(P)$  многогранника  $P$  — это группа изометрий, сохраняющих  $P$ . Эта группа изометрий  $Aut(P)$  многогранника  $P$  является подгруппой группы симметрии  $Aut(G)$  плоского графа (остова) многогранника  $P$ . Мани [Man71] доказал, что любой 3-связный плоский граф  $G$  является остовом по меньшей мере одного такого многогранника  $P$ , что  $Aut(G) = Aut(P)$ . Поэтому можно отождествить многогранник и его остов, а также алгебраическую группу симметрии (перестановки вершин) и геометрическую группу симметрии (изометрии). В случае замкнутых карт на поверхностях рода  $g > 0$  для доказательства того, что группа симметрии

карты может быть реализована как группа изометрий поверхности, можно использовать прямо-двойственное представление из предыдущего раздела.

*Точечная группа* — это конечная подгруппа группы  $O(3)$  изометрий пространства  $\mathbb{R}^3$ , сохраняющих начало координат. Эти группы были давно классифицированы. Они описаны, например, в [FoMa95], [Dut04a] в обозначениях Шенфлиса, которые используются и нами (обозначения Херманна–Мауджина приведены в [ОКН96, глава 3], [Dut]). Каждая группа симметрии конечного плоского графа изоморфна некоторой точечной группе.

Список точечных групп разделяется на два класса: семь бесконечных семейств и семь отдельных случаев. Каждая точечная группа содержит нормальную подгруппу, образованную вращениями.

Приведем список бесконечных серий точечных групп.

- 1) Группа  $C_m$  — циклическая группа поворотов на угол  $\frac{2\pi}{m}k$ , где  $0 \leq k \leq m-1$ , вокруг фиксированной оси  $\Delta$ .
- 2) Группа  $C_{mh}$  порождена  $C_m$  и отражением относительно плоскости  $P$ , ортогональной прямой  $\Delta$ .
- 3) Группа  $C_{mv}$  порождена  $C_m$  и отражением относительно некоторой плоскости  $P$ , содержащей  $\Delta$ .
- 4) Группа  $D_m$  порождена  $C_m$  и вращением на угол  $\pi$  вокруг оси, ортогональной  $\Delta$ .
- 5) Группа  $D_{mh}$  порождена  $C_{mv}$  и вращением на угол  $\pi$  относительно оси, ортогональной  $\Delta$  и лежащей в плоскости отражения.
- 6) Группа  $D_{md}$  порождена  $C_{mv}$  и вращением на угол  $\pi$  относительно оси, ортогональной  $\Delta$  и проходящей между двумя плоскостями отражения.
- 7) Для четного натурального  $m$  группа  $S_m$  — циклическая группа, порожденная композицией поворота на угол  $\frac{2\pi}{m}$  вокруг оси  $\Delta$  и отражения относительно плоскости  $P$ , ортогональной  $\Delta$ .

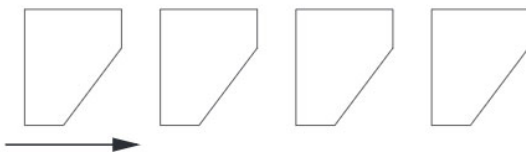
Частные случаи  $C_1$ ,  $C_s = C_{1h} = C_{1v}$  и  $C_i = S_2$  соответствуют *тривиальной группе, группе симметрии относительно плоскости и группе центральной симметрии* соответственно.

Точечные группы  $T_d$ ,  $O_h$  и  $I_h$  являются группами симметрии тетраэдра, куба и икосаэдра; точечные группы  $T$ ,  $O$  и  $I$  — соответствующие нормальные подгруппы вращений. Точечная группа  $T_h$  порождена  $T$  и центральной симметрией  $-Id$ .

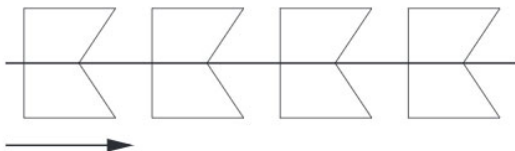


Теперь мы приведем список *ленточных групп* (также называемых *группами бордюра*<sup>10</sup>); здесь мы следуем [Cla, Dut]. В их представлении, данном ниже, прямые соответствуют осям симметрии, а пунктирные прямые — осям скользящей симметрии, т.е. композиции симметрии относительно этой оси и сдвига вдоль нее. Для  $n \geq 3$  центр вращений порядка  $n$  изображен правильным  $n$ -угольником, центры вращений порядка 2 изображены маленькими параллелограммами. Далее, чтобы задать трансляционные симметрии, мы указываем вектор сдвига. Имеется семь ленточных групп, так как каждая такая группа соответствует бесконечному семейству групп симметрии плоских графов (представим граф с группой симметрии  $C_m, \dots, S_m$  и устремим  $m$  к бесконечности, получим ленту-бордюр).

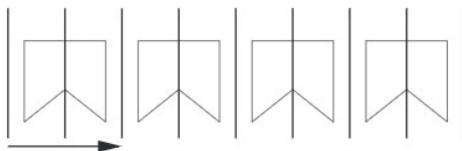
- 1)  $p111 (= C_\infty)$ ; содержит только трансляционную симметрию:



- 2)  $p1m1 (= C_{\infty h})$ ; содержит горизонтальную зеркальную симметрию:

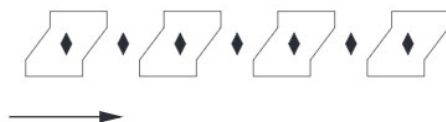


- 3)  $pm11 (= C_{\infty v})$ ; содержит вертикальную зеркальную симметрию:

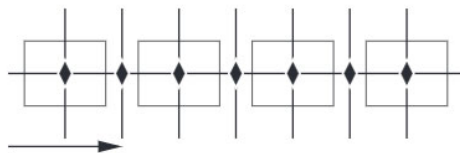


<sup>10</sup>frieze groups

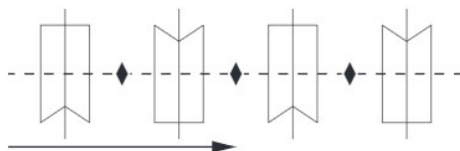
- 4)  $p112 (= D_\infty)$ ; содержит только вращения порядка 2, центры которых отстоят друг от друга на половину величины сдвига:



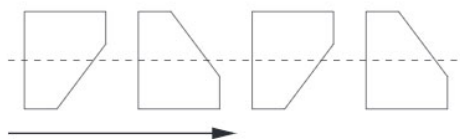
- 5)  $pm2 (= D_{\infty h})$ ; содержит вертикальную зеркальную симметрию, горизонтальную зеркальную симметрию и 2-кратные вращения с центрами в точках пересечения зеркал:



- 6)  $pm2 (= D_{\infty d})$ ; содержит скользящую симметрию и вертикальные зеркальные симметрии, чередующиеся с 2-кратными вращениями:



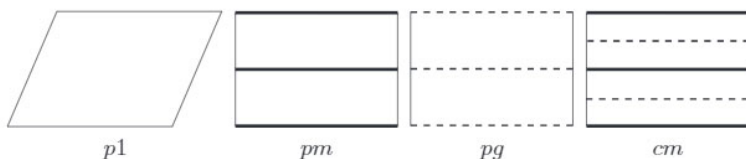
- 7)  $p1a1 (= S_\infty)$ ; содержит скользящую симметрию со сдвигом, равным половине длины трансляции:



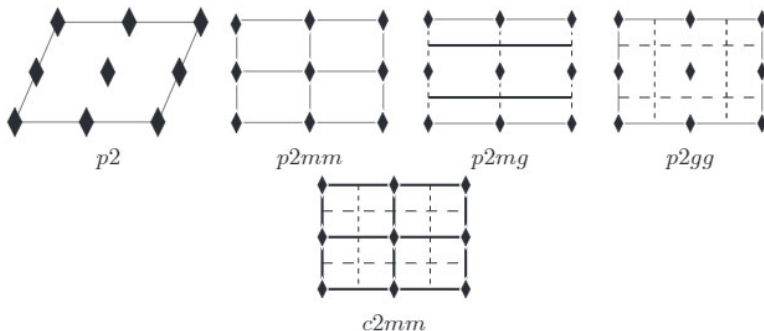


Для 2-периодических плоских карт существует 17 возможных групп симметрии, называемых *плоскими кристаллографическими группами*<sup>11</sup>; в этой части мы следуем [ОКН96, глава 1]. В приведенном ниже представлении мы задаем фундаментальную область как параллелограмм (или прямоугольник, или квадрат), который покрывает плоскость под действием сдвигов. Мы также указываем оси вращений, зеркальных симметрий и скользящих симметрий, используя те же соглашения, что и для ленточных групп.

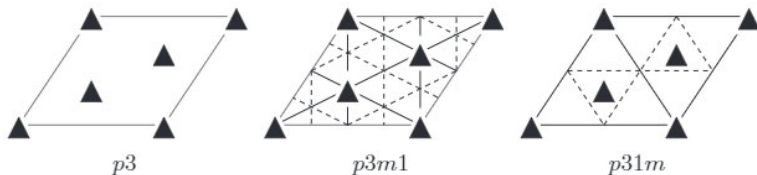
1) Плоские кристаллографические группы без вращений:



2) Плоские кристаллографические группы с вращениями порядка 2:

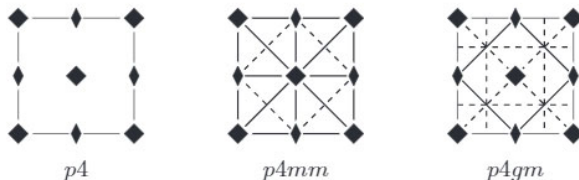


3) Плоские кристаллографические группы с вращениями порядка 3:

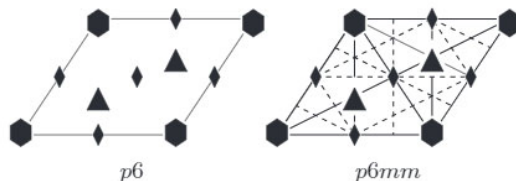


<sup>11</sup> Авторы здесь используют распространенный в англоязычной литературе термин «wallpaper group».

## 4) Плоские кристаллографические группы с вращениями порядка 4:



## 5) Плоские кристаллографические группы с вращениями порядка 6:



Рассмотрим теперь 2-мерные группы Кокстера (см., например, [Cox73, Num90]). Обозначим через  $T^*(l, m, n)$  треугольную группу Кокстера. Она может быть определена абстрактно как группа с образующими  $a, b, c$  и соотношениями

$$a^2 = b^2 = c^2 = 1 \quad \text{и} \quad (ab)^l = (ac)^m = (bc)^n = 1.$$

Величину  $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1$  обозначим через  $\alpha(l, m, n)$ .

Группа  $T^*(l, m, n)$  может быть реализована как группа изометрий односвязной поверхности  $X$  постоянной кривизны, где

- $X = \mathbb{S}^2$ , т.е. 2-мерная сфера, если  $\alpha(l, m, n) > 0$ ,
- $X = \mathbb{R}^2$ , т.е. евклидова плоскость, если  $\alpha(l, m, n) = 0$ ,
- $X = \mathbb{H}^2$ , т.е. гиперболическая плоскость, если  $\alpha(l, m, n) < 0$  (см. [Cox98]).

Для группы  $G$ , действующей на поверхности  $X$ , фундаментальная область определяется как замкнутое множество  $\mathcal{D}$ , орбита которого под действием группы  $G$  заманивает  $X$ , т.е. каждая точка принадлежит по меньшей мере одному образу  $\mathcal{D}$  под действием  $G$ , и пересечение любых двух

таких образов имеет пустую внутренность. Для группы  $T^*(l, m, n)$ , действующей на  $X$ , можно найти фундаментальную область, которая является таким треугольником  $ABC$ , что  $a$ ,  $b$  и  $c$  суть отражения относительно сторон  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$ . Углы при  $A$ ,  $B$  и  $C$  равны  $\frac{\pi}{n}$ ,  $\frac{\pi}{m}$  и  $\frac{\pi}{l}$  соответственно.

Интеграл от кривизны по треугольнику  $ABC$  равен  $\pi\alpha(l, m, n)$ . Если  $X = \mathbb{S}^2$  кривизны 1, то площадь треугольника равна  $\pi\alpha(l, m, n)$ . Если  $X = \mathbb{H}^2$  кривизны  $-1$ , то площадь треугольника равна  $-\pi\alpha(l, m, n)$ . Если  $X = \mathbb{R}^2$  кривизны 0, то площадь треугольника не определяется величиной  $\alpha(l, m, n)$ .

Если  $\alpha(l, m, n) > 0$  (эллиптический случай), то  $T^*(l, m, n)$  — конечная группа, действующая на сфере  $\mathbb{S}^2$ ; для  $(l, m, n)$  возможны только следующие значения:

- 1)  $(2, 2, n)$  для  $n \geq 2$ , здесь  $T^*(2, 2, n) \simeq D_{nh}$  — группа автоморфизмов правильного  $n$ -угольника,
- 2)  $(2, 3, 3)$ , здесь  $T^*(2, 3, 3) \simeq T_d$  — группа автоморфизмов тетраэдра,
- 3)  $(2, 3, 4)$ , здесь  $T^*(2, 3, 4) \simeq O_h$  — группа автоморфизмов октаэдра,
- 4)  $(2, 3, 5)$ , здесь  $T^*(2, 3, 5) \simeq I_h$  — группа автоморфизмов икосаэдра.

Если  $\alpha(l, m, n) = 0$  (параболический случай), то  $T^*(l, m, n)$  — это кристаллографическая группа, действующая на плоскости  $\mathbb{R}^2$ ; для  $(l, m, n)$  возможны только следующие значения:

- 1)  $(2, 4, 4)$ , здесь  $T^*(2, 4, 4) \simeq p4mm$  — группа автоморфизмов квадратного паркета  $\mathbb{Z}^2$  плоскости  $\mathbb{R}^2$ ,
- 2)  $(2, 3, 6)$ , здесь  $T^*(2, 3, 6) \simeq p6mm$  — группа автоморфизмов треугольного паркета плоскости  $\mathbb{R}^2$ .

Если  $\alpha(l, m, n) < 0$  (гиперболический случай), то существует бесконечное число возможных значений для  $(l, m, n)$ .

Через  $T(l, m, n)$  обозначим нормальную подгруппу индекса 2 в  $T^*(l, m, n)$ , образованную вращениями  $X$  (т.е. сохраняющими ориентацию элементами из  $T^*(l, m, n)$ ); см., например, [Mag74].

Существуют следующие соотношения между треугольными и ленточными группами:

$$T^*(2, 2, \infty) = pmm2 \text{ и } T(2, 2, \infty) = p112 \approx pm11 \approx pma2.$$

Заметим, что  $plm1$  также имеет индекс два в  $T^*(2, 2, \infty)$ , но она не изоморфна  $T(2, 2, \infty)$ . Напомним также, что  $T(2, 3, \infty) \approx PSL(2, Z)$  (модулярная группа), а  $T^*(2, 3, \infty) \approx SL(2, Z)$ . Группы  $T(l, m, n)$  содержат большое количество неизоморфных подгрупп конечного индекса, что лишает всякой надежды на существование классификации возможных групп симметрии карт на ориентируемых поверхностях рода  $g \geq 2$ . Однако во многих рассмотренных здесь случаях для наших целей достаточно групп  $T(l, m, n)$  и  $T^*(l, m, n)$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.4.1.** В главах 2, 4 и 7, мы будем называть пару  $(r, q)$  эллиптической, параболической или гиперболической, если  $rq < 2(r+q)$ ,  $rq = 2(r+q)$ ,  $rq > 2(r+q)$  соответственно. Это эквивалентно тому, что  $\alpha(2, r, q) > 0$ ,  $\alpha(2, r, q) = 0$ ,  $\alpha(2, r, q) < 0$  соответственно. В главе 4 эта связь будет указана явно, а именно, каждый  $(r, q)$ -полицикл имеет клеточный гомоморфизм в паркет  $\{r, q\}$  (см. раздел 1.5) с группой симметрии  $T^*(2, r, q)$ .

В главе 7 такой связи не будет; однако пары  $(r, q)$ , для которых существует счетное число элементарных  $(r, q)$  полициклов, — это в точности все эллиптические пары; см. теоремы 7.2.1, 7.4.1, 7.5.1, 7.6.1. Но у нас нет общего объяснения этого факта.

Если грани  $k$ -валентной сферы имеют или  $a$ , или  $b$  вершин, то она называется  $(\{a, b\}, k)$ -сферой (см. главу 2). Мы назовем параметры  $(\{a, b\}, k)$  эллиптическими, параболическими, гиперболическими, в зависимости от знака величины  $\alpha(2, b, k)$ . Этот знак влияет на конечность и скорость роста числа графов класса  $(\{a, b\}, k)$ -сфер. Здесь связь обеспечивается формулой Эйлера (1.1).

## 1.5. Типы регулярности карт

Здесь мы приведем некоторые классификационные результаты для карт на сфере или на плоскости.

Карта называется *флаг-регулярной*, если ее группа автоморфизмов действует *транзитивно* на флагах, т.е. если для любых двух флагов  $f$  и  $f'$  существует автоморфизм  $\phi$  такой, что  $\phi(f) = f'$ .

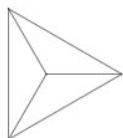
Теперь мы можем формально определить *правильный паркет*  $\{r, q\}$ .

**Определение 1.5.1.** Треугольная группа  $T^*(2, r, q)$  действует на  $X$  (где  $X = \mathbb{S}^2, \mathbb{R}^2, \mathbb{H}^2$ ), если  $\alpha(2, r, q) > 0, = 0, < 0$  соответственно. Фундаментальная область  $\mathcal{D}$  (треугольник  $ABC$ ) имеет углы  $\frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r}$  и  $\frac{\pi}{2}$  в вершинах  $A, B, C$  соответственно.

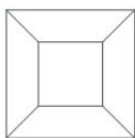
Любой точке  $B'$  из орбиты  $B$  под действием  $T^*(2, r, q)$  соответствует  $r$ -угольник, образованный всеми  $2r$  треугольниками, содержащими  $B'$ . Паркет  $\{r, q\}$  — это множество всех таких  $r$ -угольников. При этом:

- паркет  $\{r, q\}$  образует  $q$ -валентное замощение  $X$   $r$ -угольниками;
- группа  $T^*(2, r, q)$  действует регулярно на паркете  $\{r, q\}$ , т. е. любые два флага  $\{r, q\}$  эквивалентны относительно действия группы  $T^*(2, r, q)$ ;
- кривизна<sup>12</sup> этих  $r$ -угольников равна  $2r\alpha(2, r, q)$ .

Ниже приведены платоновы (правильные) многогранники  $P$  и их группы  $Aut(P)$ .



Тетраэдр  
 $\{3, 3\}, T_d$



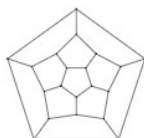
Куб  
 $\{4, 3\}, O_h$



Октаэдр  
 $\{3, 4\}, O_h$



Икосаэдр  
 $\{3, 5\}, I_h$



Додекаэдр  
 $\{5, 3\}, I_h$

Имеется следующая двойственность: куб = (октаэдр)\* и икосаэдр = (додекаэдр)\*, а тетраэдр — самодвойственный.

Обозначим через  $Bundle_m$ ,  $m \geq 2$ , плоский граф с двумя вершинами и  $m$  ребрами между ними (следовательно, имеющий  $m$  штук 2-угольных граней). Плоский граф  $Bundle_m$ , двойственный к  $m$ -угольнику, имеет группу симметрии  $D_{mh} = T^*(2, 2, m)$ . Он представляет собой флаг-регулярную карту, не являющуюся полиэдральным комплексом.

Существует ровно три правильных паркета плоскости  $\mathbb{R}^2$ :



Треугольный паркет  
 $\{3, 6\}, p6mm$



Квадратный паркет  
 $\{4, 4\}, p4mm$



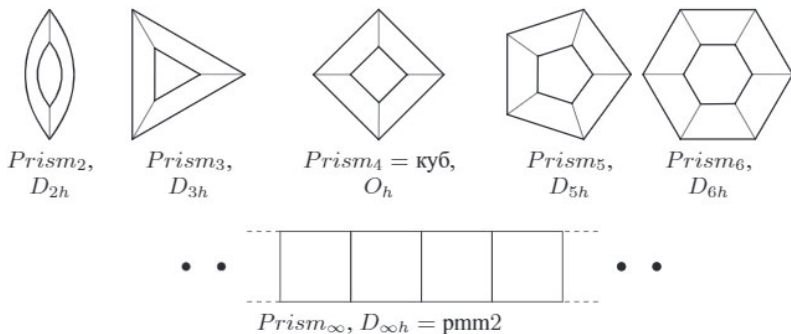
Шестиугольный паркет  
 $\{6, 3\}, p6mm$

Треугольный и шестиугольный паркет двойственны друг другу, тогда как квадратный — самодвойственный. Для других параметров  $(r, q)$  паркет  $\{r, q\}$  реализуется в гиперболическом пространстве  $\mathbb{H}^2$  (много иллюстраций есть в [Ерс00]), но нам он не понадобится.

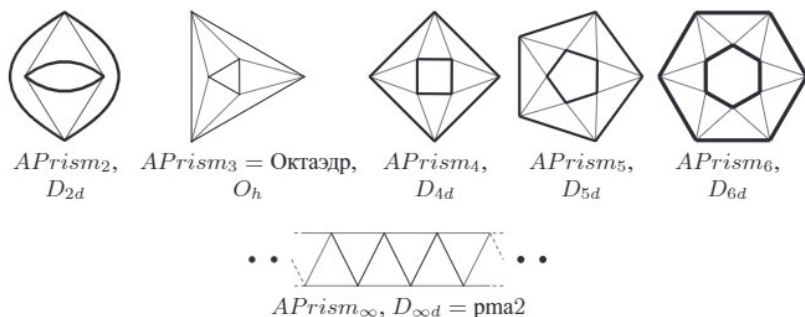
Для двух заданных циклов  $U = (u_1, \dots, u_m)$  и  $V = (v_1, \dots, v_m)$ , где  $2 \leq m \leq \infty$ , определим  $Prism_m$  ( $m$ -угольную призму) как 3-валентный плоский граф, в котором каждая  $u_i$  соединена ребром с  $v_i$ . Группа симметрии такого графа равна  $D_{mh}$ , если  $m \neq 4$ , и  $O_h$ , если  $m = 4$ .

<sup>12</sup>Видимо, имеется в виду полная кривизна, т. е. интеграл кривизны.

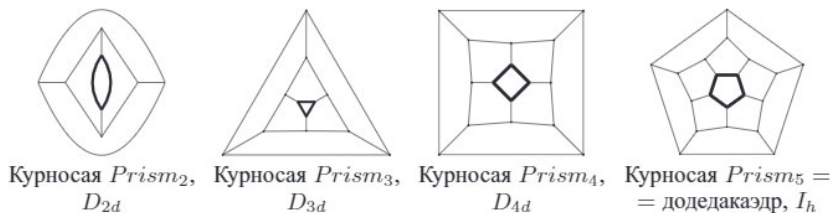




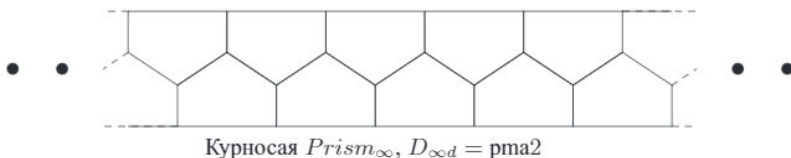
Для  $2 \leq m \leq \infty$  определим  $APrism_m$  ( $m$ -стороннюю антипризму) как 4-валентный плоский граф, полученный добавлением к циклам  $U$  и  $V$  цикла  $(u_1, v_2, u_2, v_3, \dots, v_m, u_m, v_1, u_1)$ . Ее группа симметрии равна  $D_{md}$ , если  $m \neq 3$ , и  $O_h$ , если  $m = 3$ .



Для  $2 \leq m \leq \infty$ , определим курносую  $Prism_m$  как 3-валентный плоский граф с двумя  $m$ -угольными гранями, разделенными двумя  $m$ -кольцами из 5-угольников. Ее группа симметрии равна  $D_{md}$ , если  $m \neq 5$ , и  $I_h$ , если  $m = 5$ .

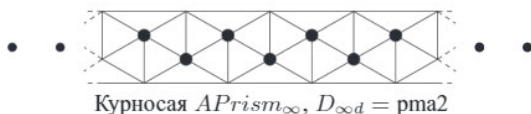
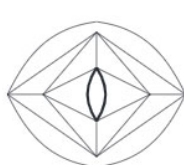






Курносую призму  $Prism_3$  также называют *октаэдром Дюрера* (она присутствует на картине Дюрера *Меланхолия I* 1514 года, где изображена Муза математики за работой); она может быть получена усечением куба по двум противоположным вершинам.

Для  $2 \leq m \leq \infty$  определим *курносую антипризму*  $APrism_m$  как 5-валентный плоский граф с двумя  $m$ -угольными гранями, разделенными  $6m$  треугольными гранями так, как показано в следующих примерах (см. формальное определение в [DGS04, с. 119]). Ее группа симметрии равна  $D_{md}$ , если  $m \neq 3$ , и  $I_h$ , если  $m = 3$ .



Курносая антипризма  $APrism_4$  — один из 92 *правильногранных*<sup>13</sup> многогранников, который называется *курносая квадратная антипризма* (см. [Joh66] и [Zal69]).

Карта называется *архимедовой*, если ее группа симметрии действует транзитивно на вершинах, но карта при этом не является флаг-регулярной. Любой архимедов многогранник относится или к одному из 13 отдельных примеров, или к одной из двух бесконечных серий  $Prism_m$  и  $APrism_m$  для  $m \geq 3$ . Как и платоновы тела, они известны с античности и были заново открыты в эпоху Возрождения; Кеплер [Кер1619] дал им их современные

<sup>13</sup><http://mathworld.wolfram.com/JohnsonSolid.html>

названия. Двойственные к ним многогранники называются *многогранниками Каталана*. Архимедовы паркеты плоскости также классифицированы. Существует восемь таких карт; двойственные к ним называются *паркетами Лавеса*.

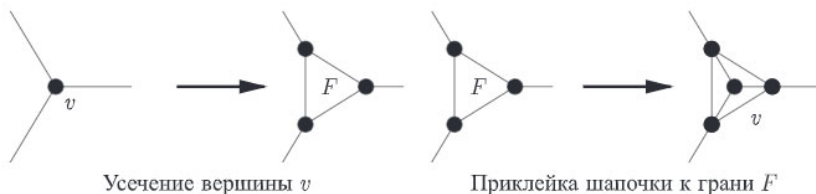
Все 92 многогранника с правильными гранями были открыты в работах разных специалистов, прежде всего Джонсона и Залгаллера (см., например, [Joh66, Zal69]). Те восемь из них, грани которых — правильные треугольники (а именно, тетраэдр, октаэдр, икосаэдр и многогранник, двойственный к  $Prism_3$ , а также четыре  $(\{4, 5\}, 3)$ -сферы, изображенные на рис. 2.1), называются *дельтаэдрами*. *Мозаикой* называется паркет евклидовой плоскости, состоящий из правильных многоугольников. Все мозаики (их оказывается 165) классифицированы в [Cha89].

## 1.6. Операции над картами

*Декорированным* паркетом  $\{r, q\}$  называется карта, полученная добавлением нескольких вершин и ребер к правильному паркету  $\{r, q\}$ ; в таблицах 9.1 и 9.3 приведено много таких декорированных карт.

Здесь мы перечислим некоторые операции, преобразующие карту  $M$  в некоторую другую карту  $M'$ .

**Усечение и приклейка шапочки.** *Усечение карты  $M$  в вершине  $v$*  степени  $m$  состоит в замене вершины  $v$  некоторой  $m$ -угольной гранью. *Приклейка шапочки* — это в некотором смысле двойственная к усечению операция. Она состоит в добавлении такой новой вершины  $v$  к грани  $F$  карты  $M$ , что  $v$  смежна со всеми вершинами  $F$ , т. е. приставление пирамиды к грани  $F$ .

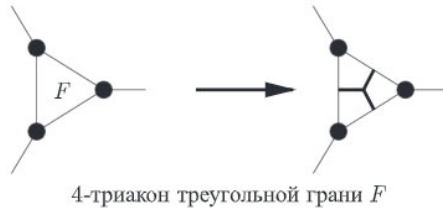


*Усечение карты  $M$  и приклейка шапочек к карте  $M$*  состоят в выполнении соответственно усечения или приклейки шапочки для всех вершин, соответственно, граней карты  $M$ . Приклейка шапочки к  $t$  различным граням карты  $M$  называется  *$t$ -заклейкой карты  $M$* . Наконец,  *$b$ -шапочка карты  $M$*  — это карта, полученная приклейкой шапочек ко всем  $b$ -угольным граням  $M$ .

**Вытягивание.** Пусть  $C$  — простой цикл из смежных вершин в карте  $M$ . Вытягивание карты  $M$  вдоль  $C$  состоит в замене цикла  $C$  кольцом из 4-угольников (см. похожее определение *центрального цикла* в главе 2). Вытягивание карты  $M$  вдоль цикла  $C$ , ограничивающего грань  $F$ , — это приставление призмы к грани  $F$ .

**$m$ -разделение.** Пусть  $m$  — некоторое четное число. Если для каждого  $m$ -угольника карты  $M$  добавить новое ребро, соединяющее середины некоторых двух его противоположных ребер, то полученная в результате карта называется  $m$ -разделением карты  $M$ .

**4-триакон.** Применение операции 4-триакон к некоторой треугольной грани  $F$  карты  $M$  разбивает  $F$  на три четырехугольника в соответствии со следующей схемой:



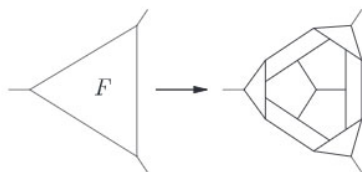
Примененный ко всей карте  $M$  4-триакон состоит в таком разбиении всех треугольных граней из  $M$ .

**Пентакон.** Пентакон 5-угольной грани  $F$  карты  $M$  состоит в разбиении  $F$  на шесть 5-угольников в соответствии со схемой ниже:



Если  $S$  — такое множество 5-угольников из  $M$ , что никакие два из них не являются соседними, то обозначим через  $P_S(M)$  пентакон карты  $M$  по  $S$ , т.е. результат применения операции пентакон ко всем 5-угольникам из  $S$ .

**5-триакон.** Операция 5-триакон некоторой треугольной грани  $F$  из карты  $M$  состоит в разбиении  $F$  на девять 5-угольников в соответствии со схемой ниже:

5-триако́н 3-угольной грани  $F$ 

В действительности, 3-угольники, к которым мы будем применять эту конструкцию, получаются в результате усечения некоторого множества вершин  $S$  карты  $M$ . Результат этой операции (5-триако́н новых 3-угольных граней, возникших в результате усечения) обозначается через  $T_S(M)$  и называется *5-триако́ном карты  $M$  по  $S$* .

Заметим, что последние две операции равносильны замене грани на  $(5, 3)$ -полициклы  $A_5$  и  $A_3$  соответственно (см. главу 7 и рис. 7.2).

## ГЛАВА 2

### Биполициклы

Будем называть *биполициклом*, или, более точно,  $(\{a, b\}, k)$ -*картой*, любую  $k$ -валентную карту, имеющую только  $a$ - и  $b$ -угольные грани (для данных целых  $2 \leq a < b$ ). Также мы будем использовать термины  $(\{a, b\}, k)$ -*сфера* (или даже  $(\{a, b\}, k)$ -*многогранник*, если карта 3-связна) и  $(\{a, b\}, k)$ -*тор* для карт на сфере  $S^2$  и торе  $\mathbb{R}^2$  соответственно. Будем называть  $(\{a, b\}, k)$ -*плоскостью* любой бесконечный  $k$ -валентный плоский граф, содержащий только  $a$ - и  $b$ -угольные грани и не имеющий внешних граней. Обобщение этих понятий: для  $R \subset \mathbb{N} - \{1\}$  будем называть  $(R, k)$ -*картой*  $k$ -валентную карту, грани которой имеют степени  $i \in R$ .

Изображая  $(\{a, b\}, k)$ -сферу, мы будем указывать число ее вершин и ее группу симметрии Шенфлиса (см. раздел 1.4). Выражение  $(v, p_a, p_b)$  под изображением минимального  $(\{a, b\}, k)$ -тора обозначает число вершин, число  $a$ - и  $b$ -угольных граней в нем; также мы указываем его группу симметрии (см. раздел 1.4).

*Короной* (грани) назовем циклическую последовательность, которая получится, если записать в порядке обхода вокруг данной грани степени соседних с ней граней. *Корона* вершины — это последовательность степеней содержащих ее граней. Напомним, что через  $v$ ,  $e$  и  $f$  мы обозначаем соответственно число вершин, ребер и граней данной конечной карты. Обозначим через  $p_i$  число ее  $i$ -угольных граней, а через  $e_{a-b}$ ,  $e_{a-a}$  — число  $(a-b)$ -ребер,  $(a-a)$ -ребер, т.е. ребер, разделяющих  $a$ - и  $b$ -угольные грани или, соответственно,  $a$ -угольные грани. Формула Эйлера (1.1) в случаях  $(\{a, b\}, k)$ -сферы и  $(\{a, b\}, k)$ -тора выглядит так:

$$\begin{aligned} p_a(2k - a(k - 2)) + p_b(2k - (k - 2)b) &= 4k, \\ p_a(2k - a(k - 2)) + p_b(2k - (k - 2)b) &= 0. \end{aligned}$$

Величину  $2k - b(k - 2)$  можно интерпретировать как кривизну граней степени  $b$ . Формула Эйлера представляет собой условие, что суммарная кривизна граней для всех  $k$ -валентных плоских графов одинакова и равна  $4k$ .



Эта кривизна имеет некоторую интерпретацию и приложения в вычислительной теории групп, см. [Par06] и [LySc77, глава 9].

Пара  $(R, k)$  называется *эллиптической*, *параболической*, *гиперболической*, если  $\frac{1}{r} + \frac{1}{k} > \frac{1}{2}$ ,  $= \frac{1}{2}$ ,  $< \frac{1}{2}$  соответственно, где  $r = \max_{i \in R} i$ .

В органической химии  $(\{5, 6\}, 3)$ -сферы называются *фуллеренами* и, наряду с другими биполициклами, представляют собой объемные модели молекул. Далее,  $(\{5, 7\}, 3)$ -сферы называются в химии *азуленоидами* (см. изображение *азулена* на рис. 7.1 и [BCC96]).

Список  $(\{a, b\}, k)$ -сфер с эллиптической тройкой  $(\{a, b\}, k)$ , т.е. с  $b(k-2) < 2k$ , приведен на рис. 2.1.


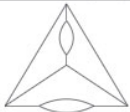
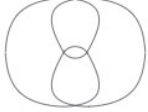
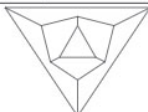

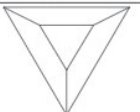





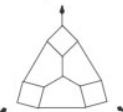

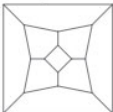
$(\{a, b\}, k)$	Плоские графы	$(\{a, b\}, k)$	Плоские графы
$(\{2, 3\}, 4)$	 3, $D_{3h}$	$(\{2, 5\}, 3)$	 4, $D_{2d}$
	 4, $D_{2d}$	$(\{3, 5\}, 3)$	 12, $D_{3d}$
$(\{2, 4\}, 3)$	 4, $D_{2h}$	$(\{3, 4\}, 3)$	 6, $D_{3h}$
$(\{2, 3\}, 5)$	 4, $D_{2d}$	$(\{4, 5\}, 3)$	 10, $D_{5h}$
	 6, $D_3$		 12, $D_{2d}$
	 8, $D_2$		 14, $D_{3h}$
	 4, $D_{2d}$		 16, $D_{4d}$

Рис. 2.1. Все  $(\{a, b\}, k)$ -сферы с эллиптической тройкой  $(\{a, b\}, k)$  и  $p_b \geq 1$



В основном в этой главе мы будем рассматривать  $(\{a, b\}, k)$ -сферы с параболической тройкой  $(\{a, b\}, k)$ , т. е. с  $2k = b(k - 2)$ ; для таких сфер число  $a$ -угольных граней, которое мы обозначаем через  $p_a$ , постоянно:

$$p_a = \frac{4k}{2k - a(k - 2)}.$$

Иначе говоря, каждая  $a$ -угольная грань карты  $G$  имеет положительную кривизну, а каждая  $b$ -угольная грань — нулевую кривизну.

Легко видеть, что имеется всего семь следующих решений:  $(\{a, b\}, k) = (\{2, 6\}, 3), (\{3, 6\}, 3), (\{4, 6\}, 3), (\{5, 6\}, 3), (\{2, 4\}, 4), (\{3, 4\}, 4)$  и  $(\{2, 3\}, 6)$ .<sup>1</sup>

При большом количестве вершин соответствующие плоские графы состоят из нескольких граней степени  $a$ , окруженных множеством граней степени  $b$ . Но имеется всего один способ построить  $k$ -валентный паркет на плоскости, состоящий только из граней степени  $b$ , — это регулярный 2-периодический паркет  $\{b, k\}$  на  $\mathbb{R}^2$ . При изучении уже одного только случая  $(\{5, 6\}, 3)$  фуллеренов возникла целая индустрия (см. [FoMa95]), первая работа — это [Gol35], в которой цитируется даже Киркман, изучавший в 1882 году 40-вершинные фуллерены.

В случае гиперболических классов  $(\{a, b\}, k)$ , т. е. при  $2k < b(k - 2)$ , (см. [BCC96]), ситуация гораздо более сложная. По всей видимости, число таких графов растет с более чем экспоненциальной скоростью при увеличении числа вершин  $v$  (скорость роста для них неизвестна, как и многое другое), и разнообразие их комбинаторики столь богато, что делает неразрешимой задачу их изучения методами, представленными в нашей книге. Однако Малькевич ([Mal70]) доказал, что 3-валентный многогранник, т. е.  $(\{a, b\}, 3)$ -многогранник с  $b \geq 7$ , существует, за конечным числом исключений, тогда и только тогда, когда  $(6 - a)p_a - (b - 6)p_b = 12$ , т. е. когда выполняется формула Эйлера (1.1). Более того, он обнаружил, что:

(i)  $b \in \{7, 8, 9, 10\}$ , если  $a = 3$ ,

(ii)  $p_b$  четно, если  $2a$  делится на  $b$  и  $a = 4, 5$ .

Если  $p_b = 0$ , то указанные выше семь классов  $(\{a, b\}, k)$ -сфер с параболической тройкой  $(\{a, b\}, k)$  дают соответственно  $Bundle_3$ , тетраэдр, куб, додекаэдр,  $Bundle_4$ , октаэдр и  $Bundle_6$  (см. определение  $Bundle_m$  в разделе 1.5).

<sup>1</sup>Раньше мы использовали для этих семи классов соответственно следующие названия и обозначения:  $2_v, 3_v, 4_v, 5_v$  (в [DeDu05]), 4-эдриты, октаэдриты (в [DeSt03, DDS03, DHL02]),  $(2, 3)_v$  (в [DeGr01]).

При  $p_b = 1$  таких сфер не существует.

Приведенная ниже теорема 2.2.1 показывает, что  $(\{2, 6\}, 3)$ -сфера с  $v$  вершинами существует тогда и только тогда, когда  $v = 2(k^2 + kl + l^2)$  для некоторых целых чисел  $0 \leq k \leq l$ .

Теорема 2 из [GrMo63] показывает, что  $(\{3, 6\}, 3)$ -многогранник с  $v$  вершинами существует только при любых  $v \geq 4$  таких, что  $v \equiv 0 \pmod{4}$ , за исключением  $v = 8$ . При  $v = 8$   $(\{3, 6\}, 3)$ -сфера существует, но это только лишь 2-связная сфера  $T_1$ ; см. предложение 2.0.2.

С точки зрения химии  $(\{4, 6\}, 3)$ -сферы рассматривались в [GaHe93]. Теорема 1 из [GrMo63] показывает, что  $(\{4, 6\}, 3)$ -сфера с  $v$  вершинами существует только для любых четных  $v \geq 8$ , за исключением  $v = 10$ .

Теорема 1 из [GrMo63] также показывает, что  $(\{5, 6\}, 3)$ -сфера с  $v$  вершинами существует только для любых четных  $v \geq 20$ , за исключением  $v = 22$ .

Далее,  $(\{2, 4\}, 4)$ -сфера с  $v$  вершинами существует для любых  $v \geq 2$  (см. [DeSt03]).

Факт существования  $(\{3, 4\}, 4)$ -сфер с  $v$  вершинами только для любых  $v \geq 6$ , кроме  $v = 7$ , установлен в [Grü67, с. 282].

Наконец,  $(\{2, 3\}, 6)$ -сферы с  $v$  вершинами существуют для любых  $v \geq 2$ , и доказательство этого факта (по духу такое же, как и для других параболических случаев) приводится ниже.

**Теорема 2.0.1.** *Для любого  $v \geq 2$  существует  $(\{2, 3\}, 6)$ -сфера с  $v$  вершинами.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим правильный паркет  $\{3, 6\}$  и возьмем бесконечную в обе стороны последовательность  $l$  вершин, лежащих на некоторой прямой в  $\{3, 6\}$ . Если взять еще одну прямую  $l'$ , параллельную  $l$  и находящуюся на расстоянии  $t$ , то  $l$  и  $l'$  ограничат некоторую область  $D_t$  в  $\{3, 6\}$ .

Пусть  $G$  — группа, порожденная параллельным переносом на длину трех ребер вдоль  $l$ , тогда фактор  $\tilde{D}_t$  области  $D_t$  по  $G$  состоит из  $t$  колец, каждое из которых составлено из шести 3-угольников. Область  $\tilde{D}_t$  имеет две грани, у которых вершины имеют степень 4. Для заклейки этих структур можно использовать две шапочки:



Незамкнутая структура



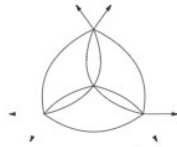
Шапочка № 1



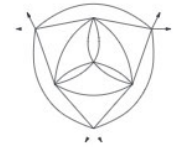
Шапочка № 2

Через  $23_1(t)$  обозначим  $(\{2, 3\}, 6)$ -сферу с  $3t + 3$  вершинами, которая образуется в результате заклеивания области  $\tilde{D}_t$  двумя шапочками № 1. Через  $23_2(t)$  обозначим  $(\{2, 3\}, 6)$ -сферу с  $3t + 4$  вершинами, которая образуется в результате заклеивания области  $\tilde{D}_t$  одной шапочкой № 1 и одной шапочкой № 2. Через  $23_3(t)$  обозначим  $(\{2, 3\}, 6)$ -сферу с  $3t + 5$  вершинами, которая образуется в результате заклеивания области  $\tilde{D}_t$  двумя шапочками № 2. См. ниже первые две из этих серий.


 3,  $D_{3h}$  ( $23_1(0)$ )

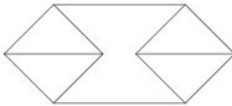
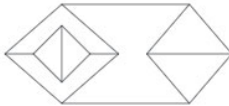
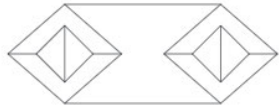
 4,  $T_d$  ( $23_2(0)$ )

 5,  $D_{3h}$  ( $23_3(0)$ )

 6,  $D_{3d}$  ( $23_3(1)$ )

 7,  $C_{3v}$  ( $23_2(1)$ )

 8,  $D_{3d}$  ( $23_1(1)$ )

Две вершины имеет сфера  $Bundle_6$ . ■

Через  $(T_n)_{n \geq 1}$  обозначим бесконечную серию  $(\{3, 6\}, 3)$ -сфер с  $4(n+1)$  вершинами, первые три представителя которой показаны ниже.


 $T_1, D_{2h}$ 

 $T_2, D_{2d}$ 

 $T_3, D_{2h}$ 

Группа симметрии  $T_n$  равна  $D_{2d}$  или  $D_{2h}$ , если  $n$  четно или нечетно, соответственно.

**Теорема 2.0.2.** ([DeDu05]) Пусть  $G$  — 3-валентный плоский граф, степени граней которого лежат в пределах от 3 до 6. Тогда:

- (i)  $G$  является 2-связным;
- (ii) если  $G$  не 3-связен, то он является  $(\{3, 6\}, 3)$ -сферой из бесконечной серии  $T_n$ .

В [DDS03] имеется аналогичная теорема для 4-валентных плоских графов с гранями степени 2, 3 или 4. Из этих теорем следует, что  $(\{3, 4\}, 4)$ -,  $(\{4, 6\}, 3)$ - и  $(\{5, 6\}, 3)$ -сферы являются многогранниками.

## 2.1. Конструкция Гольдберга–Коксетера

Конструкция Гольдберга–Коксетера строит по 3- или 4-валентному плоскому графу  $G_0$  и двум целым числам  $k$  и  $l$  новый 3- или 4-валентный плоский граф, обозначаемый через  $GC_{k,l}(G_0)$ . Эта конструкция встречается во множестве ситуаций, неполный список которых (для основного случая, когда  $G_0$  — додекаэдр) приведен ниже.

- 1) Каждый фуллерен  $(\{5, 6\}, 3)$  с группой симметрии  $I$  или  $I_h$  представляется в виде  $GC_{k,l}(\text{Dodecahedron})$  для некоторых  $k$  и  $l$ , т. е. такие фуллерены параметризуются парами целых чисел  $k, l \geq 0$ . Этот результат был доказан Гольдбергом в [Gol37]; см. некоторые другие доказательства в [Cox71] и теорему 2.2.2.
- 2) Широко известный фуллерен  $C_{60}(I_h)$  (его также называют *бакминстерфуллереном* или *футбольным мячом*) имеет остов  $GC_{1,1}(\text{Dodecahedron})$ . Изучение класса  $GC_{k,l}(\text{Dodecahedron})$  составляет особый раздел науки о фуллеренах (см. [FoMa95, Diu03]).
- 3) Для некоторого класса вирусов их *капсиды* (протениновые оболочки вирионов) имеют сферическую структуру, которая моделируется с помощью плоских графов, двойственных к  $GC_{k,l}(\text{Dodecahedron})$  (см. [CaKl62, Cox71, DDG98]).
- 4) Геодезические купола, разработанные по методу Бакминстера Фуллера, опираются снова на те же два параметра  $k$  и  $l$  (см. [Cox71]).
- 5) В вычислительной математике иногда требуются системы точек, расположенных на сфере в некотором смысле равномерно. Вершины сферы, двойственной к  $GC_{k,l}(\text{Dodecahedron})$ , образуют как раз такую систему точек (см. [ScSw95]).
- 6) Некоторые гипотетические решения ряда экстремальных задач на сфере, таких как задачи Томсона, Таммеса, Скимма и др. (точное решение этих задач практически невозможно), имеют комбинаторную структуру графа  $GC_{k,l}(\text{Dodecahedron})$  или двойственного к нему (см. [HaSl96]).



В вирусологии величина  $t(k, l) = k^2 + kl + l^2$  (используемая для икосаэдральных фуллеренов) называется *числом триангуляции*. В терминах Бакминстера Фуллера, величина  $k + l$  — это *частота*, случай  $l = 0$  называется *альтернат*, а случай  $l = k$  называется *триакон*. Кроме того, он называл конструкцию Гольдберга–Коксетера *разбивкой* исходного плоского графа  $G_0$ .

Решетка корней  $A_2$  определяется как  $A_2 = \{x \in \mathbb{Z}^3 : x_0 + x_1 + x_2 = 0\}$ . Квадратную решетку будем обозначать через  $\mathbb{Z}^2$ .

Кольцо  $\mathbb{Z}[\omega]$  чисел Эйзенштейна, где  $\omega = e^{\frac{2\pi}{3}i} = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ , состоит из комплексных чисел  $z = k + l\omega$ , где  $k, l \in \mathbb{Z}$ . Норма такого числа  $z$  есть  $N(z) = z\bar{z} = k^2 + kl + l^2$ , и мы будем использовать обозначение  $t(k, l) = k^2 + kl + l^2$ . Если отождествить точку  $x = (x_1, x_2, x_3) \in A_2$  с числом Эйзенштейна  $z = x_1 + x_2\omega$ , то имеет место равенство  $2N(z) = \|x\|^2$ .

Кольцо  $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}[i]$  состоит из комплексных чисел  $z = k + li$ , где  $k, l \in \mathbb{Z}$ . Здесь норма числа  $z$  есть  $N(z) = z\bar{z} = k^2 + l^2$ , и мы будем использовать обозначение  $t(k, l) = k^2 + l^2$ .

Конструкцию Гольдберга–Коксетера для 3- или 4-валентных плоских графов можно рассматривать в алгебраических терминах как умножение на комплексное число Эйзенштейна или Гаусса в параметрическом пространстве. Точнее,  $GC_{k,l}$  соответствует умножению на комплексное число  $k + l\omega$  или  $k + li$  соответственно в 3- или 4-валентном случае.

Перейдем к построению графа  $GC_{k,l}(G_0)$ . Сначала рассмотрим 3-валентный случай. Каждый 3-валентный плоский граф  $G_0$  может быть превращен в *триангуляцию*, т.е. плоский граф, все грани которого — 3-угольники (посредством взятия двойственного). Конструкция Гольдберга–Коксетера с параметрами  $k$  и  $l$  состоит в подразбиении каждого треугольника этой триангуляции на некоторый набор граней в соответствии с рис. 2.2. Схема этого разбиения называется *основным многоугольником* и определяется двумя целыми параметрами  $k, l$ . Те из полученных граней, которые не являются треугольниками, можно склеить с другими нетреугольными гранями (возникшими в результате подразбиения соседних треугольников), и получить треугольники. Таким образом, в конце концов получается новая триангуляция (см. рис. 2.3).

Треугольник на рис. 2.2 имеет площадь  $\mathcal{A}(k^2 + kl + l^2)$ , если принять за  $\mathcal{A}$  площадь маленького треугольника. Преобразовав каждый треугольник исходной триангуляции описанным способом и склеив их, мы получаем новую триангуляцию и ставим ей в соответствие (двойственный) 3-валентный плоский граф, обозначаемый через  $GC_{k,l}(G_0)$ . Число вершин



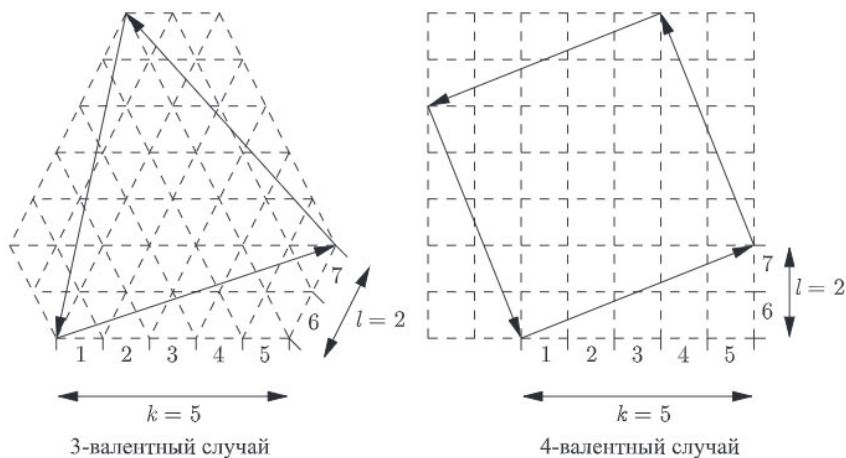


Рис. 2.2. Основной многоугольник в 3- и 4-валентном случае

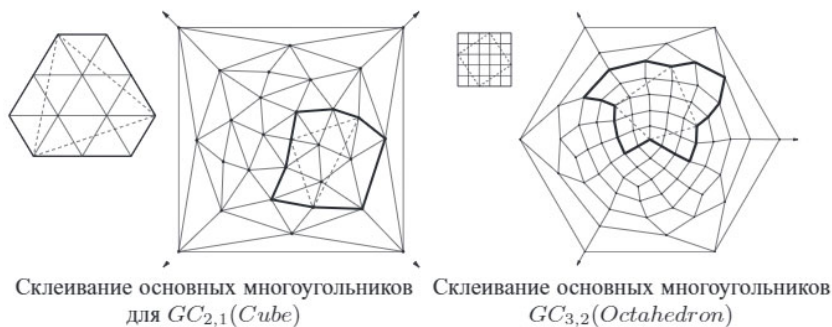


Рис. 2.3. Два примера склеивания основных многоугольников

в  $GC_{k,l}(G_0)$  равно  $vt(k,l)$ , где  $v$  — число вершин исходного графа  $G_0$ , а  $t(k,l) = k^2 + kl + l^2$ .

В 4-валентном случае граф, двойственный к плоскому графу  $G_0$ , имеет только четырехугольные грани, т.е. образует разбиение на 4-угольники, и это исходное разбиение подразбивается так, как показано на рис. 2.2. Эта операция также определяется двумя целыми параметрами  $k, l$ . После объединения получившихся нечетырехугольных граней, мы получаем новое разбиение на 4-угольники, и переход к двойственному графу дает 4-валент-

ный плоский граф  $GC_{k,l}(G_0)$  с  $n t(k, l)$  вершинами, где  $t(k, l) = k^2 + l^2$  (см. рис. 2.3).

Граням  $G_0$  соответствуют некоторые грани графа  $GC_{k,l}(G_0)$ . Если  $t(k, l) > 1$ , то среди этих граней нет соседних; каждая из них окружена 6-угольниками или 4-угольниками.

**Теорема 2.1.1.** ([DuDe03]) Пусть  $G_0$  — 3- или 4-валентный плоский граф. Будем обозначать граф  $GC_{k,l}(G_0)$  также и через  $GC_z(G_0)$ , где  $z = k + l\omega$  или  $z = k + li$  соответственно в 3- или 4-валентном случае. Тогда выполняется следующее.

- (i)  $GC_z(GC_{z'}(G_0)) = GC_{zz'}(G_0)$ .
- (ii) Если  $z' = z\alpha^u$ , где  $\alpha = \omega$  или  $i$ ,  $G_0$  — 3- или 4-валентный граф и  $u \in \mathbb{Z}$ , то  $GC_z(G_0) = GC_{z'}(G_0)$ .
- (iii)  $GC_{\bar{z}}(G_0) = GC_z(\overline{G_0})$ , где через  $\overline{G_0}$  обозначен плоский граф, отличающийся от  $G_0$  только на симметрию плоскости.

Заметим, что если плоский граф  $G_0$  имеет только поворотные симметрии, то граф  $GC_z(G_0)$  не изометричен графу  $GC_{\bar{z}}(G_0)$ . Для данной карты  $G$  ее медиальную карту  $Med(G)$  определим следующим образом. Вершины  $Med(G)$  — это ребра карты  $G$ , и две вершины в  $Med(G)$  смежны, если соответствующие ребра в  $G$  имеют общую вершину и принадлежат к одной и той же грани. Таким образом,  $Med(G) = Med(G^*)$ . Можно проверить, что  $Med(G) = GC_{1,1}(G)$ . Далее,  $Med(Tetrahedron) = Octahedron$  и  $Med(Cube) = Cuboctahedron$ . Если  $G$  — 3-валентная карта, то остов  $Med(G)$  является реберным графом остова карты  $G$ .

Пусть  $G$  — 3-валентная карта. Обозначим через  $leap(G)^2$  результат усеечения карты  $G^*$  (см. [FoMa95]). Имеем:  $leap(G) = GC_{1,1}(G)$ .

Если  $l = 0$ , то  $GC_{k,l}(G_0)$  называется  $k$ -вспениванием карты  $G_0$ . В случае  $k = 2$ ,  $l = 0$ , она называется шамферингом  $G_0$  (операция снятия фаски), так как Гольдберг назвал результат своего построения в случае  $(k, l) = (2, 0)$  на додекаэдре *chamfered Dodecahedron*. Если  $l = 0$  или  $l = k$ , то все симметрии  $G$  сохраняются при переходе к  $GC_{k,l}(G)$ , тогда как в случае  $0 < l < k$  сохраняются только поворотные симметрии. Конструкцию Гольдберга – Коксетера можно аналогичным образом определить для карт на ориентируемых поверхностях. Хотя понятия медиальной карты,  $leap(G)$  и  $k$ -вспенивания переносятся и на случай неориентируемых поверхностей,

<sup>2</sup> Авторы называют эту операцию *leapfrog* (чехарда).

конструкцию Гольдберга–Коксетера нельзя определить на неориентируемых поверхностях. Некоторые примеры использования конструкции Гольдберга–Коксетера можно найти в главе 9. Интересно исследовать свойства графа  $GC_{k,l}(G)$  для фиксированного  $G$ ; один пример такого исследования касается *зигзагов* и *центральных циклов*, см. [DuDe03].

Оказывается, что конструкцию Гольдберга–Коксетера можно применить и в 6-валентном случае, и это сделано в [DeDu11]. Метод заключается в том, чтобы для 6-валентного графа  $G_0$  рассмотреть его усечение  $Tr(G_0)$ , являющееся уже 3-валентным. Далее результат конструкции Гольдберга–Коксетера определяется как такие графы  $G$ , что  $Tr(G) = GC_{k,l}(Tr(G_0))$ ; таких графов может быть один или два, и большинство приведенных выше свойств обобщаются на этот случай. В частности,  $(\{2, 3\}, 6)$ -сферы с симметрией  $D_6$ ,  $D_{6h}$ ,  $T$ ,  $T_h$ ,  $T_d$  и  $(\{1, 3\}, 6)$ -сферы с симметрией  $C_3$ ,  $C_{3h}$ ,  $C_{3v}$  описываются с помощью этой конструкции.

## 2.2. Описание классов

Здесь мы приводим некоторые известные теоретические и компьютерные методы для построения  $(\{a, b\}, k)$ -сфер. Мы начинаем со случаев, для описания которых достаточно конструкции Гольдберга–Коксетера. Далее, в случаях  $(\{3, 6\}, 3)$ - и  $(\{2, 4\}, 4)$ -сфер простые комбинаторные конструкции дают полное описание классов. В оставшихся случаях наши возможности не столь велики, а число графов в классе с ростом числа вершин растет гораздо быстрее.

**Теорема 2.2.1.** *Каждый  $(\{2, 6\}, 3)$ -плоский граф представляется в виде  $GC_{k,l}(Bundle_3)$ ; его группа симметрии равна  $D_{3h}$ , если  $l \in \{0, k\}$ , и  $D_3$  в противном случае.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Описание таких сфер дано в [GrZa74], и, по сути, является конструкцией Гольдберга–Коксетера. ■

### Теорема 2.2.2.

- (i) *Каждая  $(\{3, 6\}, 3)$ -сфера с группой симметрии  $T$  или  $T_d$  — это  $GC_{k,l}(Tetrahedron)$ ,*
- (ii) *каждая  $(\{4, 6\}, 3)$ -сфера с группой симметрии  $O$  или  $O_h$  — это  $GC_{k,l}(Cube)$ ,*
- (iii) *каждая  $(\{4, 6\}, 3)$ -сфера с группой симметрии  $D_6$  или  $D_{6h}$  — это  $GC_{k,l}(Prism_6)$ ,*

- (iv) каждая  $(\{5, 6\}, 3)$ -сфера с группой симметрии  $I$  или  $I_h$  — это  $GC_{k,l}(Dodecahedron)$ ,
- (v) каждая  $(\{2, 4\}, 4)$ -сфера с группой симметрии  $D_4$  или  $D_{4h}$  — это  $GC_{k,l}(Bundle_4)$ ,
- (vi) каждая  $(\{3, 4\}, 4)$ -сфера с группой симметрии  $O$  или  $O_h$  — это  $GC_{k,l}(Octahedron)$ .
- (vii) Пусть  $\mathcal{GP}_m$  ( $m \neq 2, 4$ ) — множество 3-валентных плоских графов с двумя  $m$ -угольными,  $m$  четырехугольными и  $p_6$  шестиугольными гранями. Каждый такой граф, имеющий ось симметрии  $m$ -го порядка, представляется в виде  $GC_{k,l}(Prism_m)$  и имеет группу симметрии  $D_m$  или  $D_{mh}$ .
- (viii) Пусть  $\mathcal{GF}_m$  ( $m \neq 2, 3$ ) — множество 4-валентных плоских графов с двумя  $m$ -угольными,  $m$  двугульными и  $p_4$  четырехугольными гранями. Каждый такой граф, имеющий ось симметрии  $m$ -го порядка, представляется в виде  $GC_{k,l}(Foil_m)$  и имеет группу симметрии  $D_m$  или  $D_{mh}$ .

Перечисленные результаты доказаны в [Gol37, Cox71, DuDe03]. Мы докажем только пункт (ii), поскольку в остальных случаях рассуждения очень похожи. Рассмотрим  $(\{4, 6\}, 3)$ -сферу с группой симметрии  $O$  или  $O_h$ . Одна из осей симметрии 4-го порядка проходит через 4-угольник, назовем его  $F_1$ . Его окружают  $p$  колец из 6-угольников, а затем встречается 4-угольник, а следовательно, из соображений симметрии, четыре 4-угольника. Обозначим их через  $F'_1, F'_2, F'_3, F'_4$ . Положение 4-угольника  $F'_1$  относительно  $F_1$  определяет число Эйзенштейна  $z = k + lw$ . Граф может быть продолжен единственным образом, что и доказывает, что он равен  $GC_{k,l}(Cube)$ . Из доказательства видно, что нам потребовалось только существование оси симметрии 4-го порядка. Следовательно, группы  $C_4, D_4$  и т. д. не могут быть группами симметрии  $(\{4, 6\}, 3)$ -сфер, т. е. из существования таких симметрий следует существование более сильных симметрий.

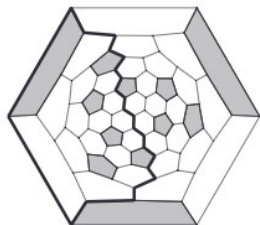
Приведем теперь общую конструкцию построения  $(\{3, 6\}, 3)$ -сфер, следуя [GrMo63] (также см. [DeDu05]). *Зигзаг* в плоском графе — это замкнутый путь, в котором каждые два последовательных ребра принадлежат одной грани, но никакие три последовательных ребра одной грани не принадлежат. Зигзаг называется *простым*, если он не имеет самопересечений (см., например, рис. 2.6). *Кольцевая дорога*<sup>3</sup> в 3-валентном плоском

<sup>3</sup> Авторы здесь используют термин «closed railroad» (кольцевая железная дорога). Ради краткости мы опускаем слово «железная».

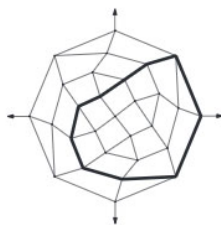


графе — это цикл из 6-угольников, в котором к каждому 6-угольнику соседние с ним 6-угольники прилегают по противоположным сторонам. Плоский 3-валентный граф называется *плотным*, если в нем нет кольцевых дорог. *Дорога* между двумя шестигугольными гранями  $F$  и  $F'$  — это последовательность 6-угольников, скажем  $F_1, \dots, F_l$ , такая, что при добавлении  $F_0 = F$  и  $F_{l+1} = F'$  любая грань  $F_i$ ,  $1 \leq i \leq l$ , граничит с гранями  $F_{i-1}$  и  $F_{i+1}$  по противоположным ребрам. В [GrMo63] доказано, что кольцевые дороги и дороги в  $(\{3, 6\}, 3)$ -сфере не имеют самопересечений, т. е. данный 6-угольник встречается лишь однажды. Возьмем некоторую  $(\{3, 6\}, 3)$ -сферу  $G$ , некоторую дорогу между двумя треугольниками  $T_1, T_2$  и обозначим через  $s$  количество 6-угольников в этой дороге. Вокруг этой конструкции можно добавить кольца из 6-угольников, оказывается, что эти кольца — кольцевые дороги. После добавления  $m$  таких колец появляется треугольник  $T_3$ . После этого структура полностью детерминирована, мы получаем дорогу между  $T_3$  и  $T_4$ , которая изоморфна дороге, соединяющей  $T_1$  и  $T_2$  (в качестве иллюстрации см. рис. 2.5). Прямое вычисление дает равенство  $p_6 = 2(sm + s + m)$  и  $v = 4(s + 1)(m + 1)$ , где  $p_6$  — число 6-угольников, а  $v$  — число вершин.

Покажем теперь, следуя [DeSt03], как описать все  $(\{2, 4\}, 4)$ -сферы. В эйлеровой карте (т. е. карте, все вершины которой имеют четную степень), *центральный цикл* — это последовательность ребер, в которой любые два соседние ребра не принадлежат общей грани (см. рис. 2.4). Центральный цикл называется *простым*, если он не имеет самопересечений. Центральный цикл однозначно определяется одним ребром, поэтому множество ребер разбивается на центральные циклы. *Дорога* — это цикл из 4-угольников, возможно, самопересекающийся, ограниченный двумя центральными циклами. 4-валентный плоский граф называется *плотным*,



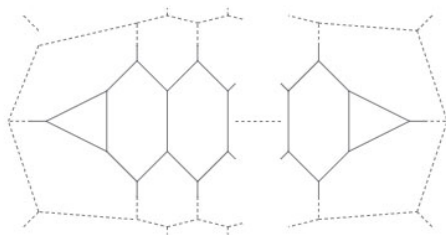
Простой зигзаг на  $(\{5, 6\}, 3)$ -сфере с 88 вершинами,  $T$



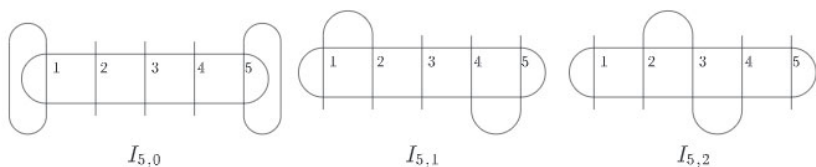
Простой центральный цикл на  $(\{3, 4\}, 4)$ -сфере с 30 вершинами,  $O$

Рис. 2.4. Примеры простого зигзага и центрального цикла; имеется одна орбита из 12 зигзагов и одна орбита из шести таких циклов



Рис. 2.5. Дорога и кольцевая дорога в  $(\{3, 6\}, 3)$ -сфере

если в нем нет дорог. Неплотные 4-валентные графы получаются из плотных в результате удваивания некоторых центральных циклов. Можно доказать, что центральные циклы в  $(\{2, 4\}, 4)$ -сфере не самопересекаются. Опишем все плотные  $(\{2, 4\}, 4)$ -сферы. Они имеют ровно два центральных цикла. Ниже мы показываем начало построения для  $v = 5$ :



Из этой схемы видно, что в каждом случае есть только один способ дополнить имеющуюся структуру до  $(\{2, 4\}, 4)$ -сферы, которую мы обозначаем через  $I_{v,i}$ . Кроме того, ясно, что  $I_{v,i}$  является плотной  $(\{2, 4\}, 4)$ -сферой, если и только если  $\text{НОД}(v, i) = 1$ . Все плотные  $(\{2, 4\}, 4)$ -сферы могут быть получены таким образом. Неплотные  $(\{2, 4\}, 4)$ -сферы получаются из плотных заменой некоторых центральных циклов дорогами, не имеющими самопересечений. Помимо приведенных здесь, возможны и другие описания  $(\{3, 6\}, 3)$ - и  $(\{2, 4\}, 4)$ -сфер. Можно рассматривать их как двойственные к скоплению треугольников и 4-угольников (см., например, [FoCr97]). Другой способ состоит в том, чтобы профакторизовать  $(6, 3)$ -тор по действию инволюции, оставляющей неподвижными четыре шестиугольные грани; см. [DGMŠ09, JoSa09], где это используется для определения собственных значений  $(\{3, 6\}, 3)$ -сфер.

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.2.3.** Число зигзагов в плотной  $(\{a, 6\}, 3)$ -сфере не больше, чем 3 при  $a = 2$ , равно 3 при  $a = 3$ , и, предположительно,  $\leq 8$ ,  $\leq 15$  при  $a = 4, 5$  (см. [DeDu05]). Число центральных циклов в плотной  $(\{a, 4\}, 4)$ -сфере равно 2 при  $a = 2$ ,  $\leq 6$  при  $a = 3$  (см. [DeSt03]). Число плотных  $(\{a, 6\}, 3)$ -сфер,

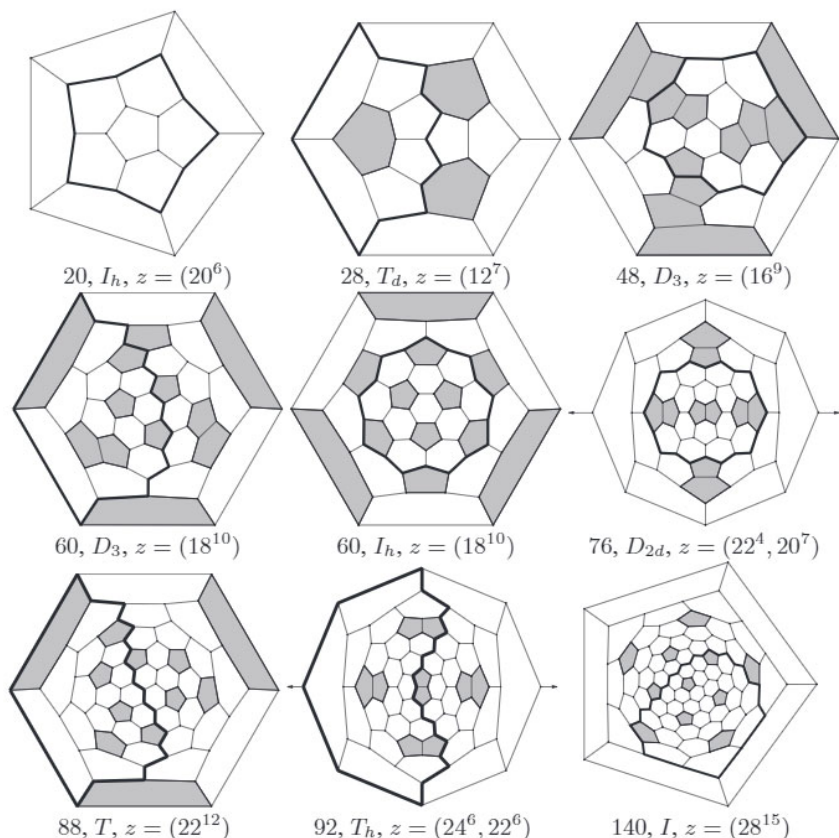


Рис. 2.6. Все известные плотные  $(\{5, 6\}, 3)$ -сферы, имеющие простые зигзаги;  $z$  — это список длин зигзагов

имеющих только простые зигзаги, равно  $0, \infty, 2$  при  $a = 2, 3, 4$  и, предположительно,  $9$  при  $a = 5$  (см. рис. 2.6 и [DeDu05]). Число плотных  $(\{a, 4\}, 4)$ -сфер, имеющих только простые центральные циклы равно  $\infty, 8$  при  $a = 2, 3$  (включая изображенную справа на рис. 2.4. Подробности см. в [DeSt03, DDS03]).

В [Thu98] рассматриваются многогранники, двойственные к 3-валентным графам, не имеющим  $b$ -угольных граней с  $b > 6$ ; такие многогранники называются там *триангуляциями неотрицательной кривизны*. Терстон развивает в этой работе глобальную теорию параметрических пространств

для триангуляций сферы со степенью вершин не более 6. Основная теорема 0.1 из этой работы описывает их как элементы  $L_+/G$ , где  $L$  — решетка комплексного лоренцева пространства  $C^{(1,9)}$ ,  $G$  — группа автоморфизмов и  $L_+$  — множество узлов решетки положительной квадратичной нормы. Ясно, что при  $a = 3, 4, 5$  наши  $(\{a, 6\}, 3)$ -сферы входят в число объектов, рассматривавшихся Терстоном. Обозначим через  $s$  число вершин, имеющих степень меньше, чем 6; такие вершины отвечают за положительность кривизны триангуляции сферы  $\mathbb{S}^2$ . Терстон построил параметрическое пространство с  $s - 2$  степенями свободы (комплексными). С помощью этой конструкции в теореме 3.4 из [Sah94] было выведено, что число  $(\{3, 6\}, 3)$ -,  $(\{4, 6\}, 3)$ -,  $(\{5, 6\}, 3)$ -сфер с  $v$  вершинами растет как  $O(v)$ ,  $O(v^3)$ ,  $O(v^9)$  (это было приложением предварительной версии работы [Thu98]). Мы полагаем, что ограничение на степень вершин (закрывающееся, в двойственных терминах, в том, что граф не имеет  $b$ -угольных граней при  $b > 6$ ) в работе [Thu98] не является необходимым для теории Терстона параметрических пространств. Кроме того, его теория, вероятно, может быть расширена на случай, в котором триангуляции заменены разбиениями на 4-угольники.

Графы, описываемые с помощью конструкции Гольдберга–Коксетера, можно воспринимать как параметризующиеся одним комплексным параметром. При работе с промежуточными группами симметрии (например,  $(\{5, 6\}, 3)$ -многогранники с группой симметрии  $D_5$ ), для описания можно обойтись небольшим числом комплексных параметров, и это фактически и использовалось в [Dut02] или [FCS88] для построения таких графов с большим числом вершин. Некоторые классификационные результаты, основанные на этих методах, см. также в [Gra05]. В общем случае, при рассмотрении классов графов без каких-либо предположений на симметрию, самое лучшее, это, вероятно, воспользоваться компьютерными программами CPF ([BDDH97]) или ENU ([Hei98]), генерирующими все 3- или 4-валентные графы с заданным заранее числом  $i$ -угольных граней.

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.2.4.** В случае  $(\{2, 3\}, 6)$ -сфер полезным как для компьютерных вычислений, так и для теоретических исследований оказывается следующее преобразование. Рассмотрим двойственный граф; он имеет шестиугольные грани и вершины степени 2 и 3; затем удалим 2-валентные вершины. Результат — это 3-валентная сфера со степенью граней не более чем 6. Таким образом можно построить большое количество  $(\{2, 3\}, 6)$ -сфер: достаточно взять 3-валентный плоский граф с не более чем шестиугольными гранями, добавить разумным образом несколько вершин на некоторые ребра, и перейти к двойственному графу.

Теперь мы приведем список имеющихся результатов о группах симметрии этих сфер.

**Теорема 2.2.5.** *Группы симметрий имеют следующий вид.*

- (i) ([GrZa74]) Для  $(\{2, 6\}, 3)$ -сфер — либо  $D_3$ , либо  $D_{3h}$ .
- (ii) ([FoCr97]) Для  $(\{3, 6\}, 3)$ -сфер возможны группы  $D_2$ ,  $D_{2h}$ ,  $D_{2d}$ ,  $T$ ,  $T_d$ .
- (iii) ([DeDu05]) Для  $(\{4, 6\}, 3)$ -сфер возможны 16 групп:  $C_1$ ,  $C_s$ ,  $C_2$ ,  $C_i$ ,  $C_{2v}$ ,  $C_{2h}$ ,  $D_2$ ,  $D_3$ ,  $D_{2d}$ ,  $D_{2h}$ ,  $D_{3d}$ ,  $D_{3h}$ ,  $D_6$ ,  $D_{6h}$ ,  $O$ ,  $O_h$ .
- (iv) ([FoMa95]) Для  $(\{5, 6\}, 3)$ -сфер — 28 групп:  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_i$ ,  $C_s$ ,  $C_3$ ,  $D_2$ ,  $S_4$ ,  $C_{2v}$ ,  $C_{2h}$ ,  $D_3$ ,  $S_6$ ,  $C_{3v}$ ,  $C_{3h}$ ,  $D_{2h}$ ,  $D_{2d}$ ,  $D_5$ ,  $D_6$ ,  $D_{3h}$ ,  $D_{3d}$ ,  $T$ ,  $D_{5h}$ ,  $D_{5d}$ ,  $D_{6h}$ ,  $D_{6d}$ ,  $T_d$ ,  $T_h$ ,  $I$ ,  $I_h$ .
- (v) ([DDS03]) Для  $(\{2, 4\}, 4)$ -сфер — группы  $D_{4h}$ ,  $D_4$ ,  $D_{2h}$ ,  $D_{2d}$ ,  $D_2$ .
- (vi) ([DDS03]) Для  $(\{3, 4\}, 4)$ -сфер — 18 групп:  $C_1$ ,  $C_s$ ,  $C_2$ ,  $C_{2v}$ ,  $C_i$ ,  $C_{2h}$ ,  $S_4$ ,  $D_2$ ,  $D_{2d}$ ,  $D_{2h}$ ,  $D_3$ ,  $D_{3d}$ ,  $D_{3h}$ ,  $D_4$ ,  $D_{4d}$ ,  $D_{4h}$ ,  $O$ ,  $O_h$ .
- (vii) ([DeDu11]) Для  $(\{2, 3\}, 6)$ -сфер — 22 группы:  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_{2h}$ ,  $C_{2v}$ ,  $C_3$ ,  $C_{3h}$ ,  $C_{3v}$ ,  $C_i$ ,  $C_s$ ,  $D_2$ ,  $D_{2d}$ ,  $D_{2h}$ ,  $D_3$ ,  $D_{3d}$ ,  $D_{3h}$ ,  $D_6$ ,  $D_{6h}$ ,  $S_4$ ,  $S_6$ ,  $T$ ,  $T_h$  и  $T_d$ .

См. также [DDF09, DuFo11].

В [Kar07] приведен общий метод определения групп симметрии для  $(\{5, b\}, 3)$ -сфер. Доказано, что если группа является группой симметрии некоторой  $(\{5, b\}, 3)$ -сферы, то она является группой симметрии бесконечного числа  $(\{5, b\}, 3)$ -сфер. Кроме того, доказано, что группа  $G$  служит группой симметрии для  $(\{5, b\}, 3)$ -сфер с  $b \geq 7$ , если и только если  $G$  есть подгруппа группы  $I_h$ . См. также [Ka07b, JeKa07, Ka10]

Еще один интересный класс сфер, который можно было бы рассматривать, состоит из самодвойственных сфер, у которых и вершины, и грани имеют степень 3 или 4. Медиальные карты (определенные в разделе 2.1) таких сфер являются  $(\{3, 4\}, 4)$ -сферами. В частности,  $p_3 + v_3 = 8$ , откуда вытекает  $p_3 = v_3 = 4$ . Более того, самодвойственность соответствует обычной симметрии  $(\{3, 4\}, 4)$ -сферы. Некоторые другие конструкции самодвойственных карт на сфере см. в [ArRi92, SeSe94, SeSe95, SeSe96].

С помощью этого нам удалось в [DuDe11] определить возможные симметрии таких карт и, применяя конструкцию, подобную конструкции Гольдберга–Коксетера, получить описание карт с симметрией  $T$ ,  $T_d$ .

Также см. [DeDu11c], где перечислены все 8 серий негиперболических  $(\{a, b\}, k)$ -сфер. Некоторые гиперболические  $(\{a, b\}, k)$ -сферы (прежде всего икосаэдриты, т. е.  $(\{3, 4\}, 5)$ -сферы) изучены в [DDS12].



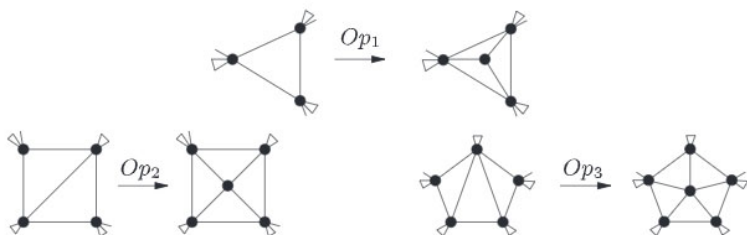
## 2.3. Компьютерные построения классов

Здесь мы представим общие идеи компьютерного построения рассматриваемых классов плоских графов. Основной прием в построении — это исчерпывающий перебор: мы строим плоский граф последовательно, грань за гранью, пока не построим его полностью. Основная проблема заключается в том, что обычно число вариантов, которые нужно рассмотреть, оказывается очень большим. Иногда удается доказать, что некоторая группа граней не может быть дополнена до искомого графа, что ускоряет процесс. Но на практике такой выигрыш, пусть даже и огромный, не изменяет суть проблемы. Типичные примеры этой схемы комбинаторного перечисления приведены в главах 5 и 10.

Основной недостаток состоит в том, что иногда требуются месяцы огромных вычислений для того, чтобы найти всего несколько графов. К счастью, для рассматривавшихся выше классов имеются некоторые другие способы, уменьшающие масштаб проблемы. Простой зигзаг или центральный цикл (см. примеры на рис. 2.4) разбивает сферу на две части, перечислить которые гораздо легче. Конечно, все это на практике не так уж и просто, поскольку чаще всего зигзаги и центральные циклы имеют самопересечения. Но все же именно в этом заключается основная идея (см. [ВНН03]), и она используется в следующих программах:

- 1) программа CPF ([BDDH97]) строит 3-валентные плоские графы с заданным  $p$ -вектором;
- 2) программа ENU ([ВНН03] и [Hei98]) делает то же самое для 4-валентных плоских графов;
- 3) программа CGF ([Har]) строит 3-валентные ориентируемые карты заданного рода с заданным  $p$ -вектором.

Если рассматривать более широкий класс, такой как триангуляции плоскости, то возможна другая стратегия. Известно (см. [Ebe1891]), что каждая триангуляция плоскости получается из тетраэдра некоторой последовательностью из следующих трех операций  $Op_i$ :





Разумеется, число триангуляций очень велико. Но время работы данного алгоритма приблизительно пропорционально числу найденных триангуляций, и он масштабируется почти со 100 % эффективностью в случае использования нескольких параллельных компьютеров. Отметим также, что этот алгоритм не требует больших дополнительных объемов памяти. Хотя для данной триангуляции плоскости  $T$  имеется много способов получить ее из тетраэдра с помощью операций  $Op_i$ , но каноническая схема добавления (см. [McK98]) строит единственную последовательность операций  $Op_i$ , превращающую тетраэдр в триангуляцию  $T$ , что позволяет избежать проблем с нехваткой памяти.

Перечисление триангуляций, триангуляций с минимальной степенью 4 или 5, эйлеровых триангуляций, разбиений на четырехугольники, 3-связных плоских графов, плоских графов, 3-связных плоских графов с минимальной степенью не менее 4 или 5 реализовано в программе `plantri` (см. [BrMK], [BrMK06] и [BGGMTW05]) с использованием элементарных операций такого рода. Нет никаких оснований надеяться, что подобные алгоритмы удастся применить к перечислению  $(\{a, b\}, k)$ -сфер, поскольку нет простых операций типа  $Op_i$ , которые сохраняли бы свойство быть  $(\{a, b\}, k)$ -сферой и порождали бы все такие сферы.

Во всех вычислениях использовалась система компьютерной алгебры GAP [GAP02] и пакет PlanGraph ([Dut02]), разработанный вторым автором данной книги; программы доступны по ссылке [Du07].

Большинство графов в этой книге было нарисовано с помощью программы `CaGe` ([BDDH97]).

## ГЛАВА 3

# Фуллерены как паркет на поверхностях

Открытие фуллереновых молекул и других углеродных форм, таких как нанотрубки, вызвало всплеск активности в химии, физике и науке о материалах, который подробно описан, например, в [DDE96] и [FoMa95].

Согласно «классическому» определению из химии, фуллерен — это чисто углеродная молекула, в которой атомы образуют карту на сфере, состоящую только из 5- и 6-угольников, и которая, следовательно, содержит ровно 12 5-угольников.

Здесь мы рассмотрим следующее обобщение: какими могут быть фуллерены, если считать, что фуллерен — это конечная 3-валентная карта, имеющая только 5- и 6-угольные грани и вложенная в произвольную поверхность? Это на первый взгляд значительно более общее понятие ведет всего лишь к трем расширениям класса сферических фуллеренов. Вложение возможно только в четыре поверхности: в сферу, тор, бутылку Клейна и проективную плоскость. В [DFRR00] исследуются спектральные свойства таких фуллеренов. Обычные сферические фуллерены имеют 12 5-угольников, проективные фуллерены — 6, а торические и фуллерены на бутылке Клейна не имеют 5-угольников. Фуллерены на бутылке Клейна и проективной плоскости получаются в результате естественной факторизации из центрально-симметричных торических и сферических фуллеренов соответственно. Мы наметим возможности для обобщения на случай бесконечных графов (плоские фуллерены, цилиндрические фуллерены). Тщательное изучение понятия обобщенного фуллерена и дальнейшие обобщения на многообразия более высоких размерностей приводятся в [DeSt99b].

### 3.1. Классификация конечных фуллеренов

Определим *3-фуллерен* как 3-валентную карту, вложенную в некоторую поверхность и состоящую только из пятиугольных и шестиугольных

граней. Про каждый такой объект мы будем говорить, что он имеет  $v$  вершин,  $e$  ребер и  $f$  граней, из которых  $p_5$  5-угольников и  $p_6$  6-угольников.

Из теоремы 1.2.3 мы знаем, что эйлерова характеристика  $\chi$  удовлетворяет равенству

$$p_5 = 6\chi.$$

Следовательно, поверхность, в которую может быть вложен конечный 3-фуллерен, имеет неотрицательную эйлерову характеристику  $\chi$ . Воспользуемся классификацией компактных поверхностей из теоремы 1.2.1 и вспомним выражение для  $\chi$  из теоремы 1.2.2:

$$\begin{aligned}\chi &= 2(1 - g) && \text{(для ориентируемой поверхности),} \\ &= 2 - g && \text{(для неориентируемой поверхности).}\end{aligned}$$

Таким образом, неотрицательным значениям  $\chi$  соответствуют ровно четыре случая. Следовательно, конечные 3-фуллерены могут присутствовать только на следующих поверхностях:  $S^2$  (сфера, ориентируемая поверхность рода  $g = 0$ ),  $T^2$  (тор, ориентируемая поверхность рода  $g = 1$ ),  $P^2$  (проективная плоскость, неориентируемая поверхность рода  $g = 1$ ) и  $K^2$  (бутылка Клейна, неориентируемая поверхность рода  $g = 2$ ). Все вложения являются 2-клеточными, т. е. каждая грань гомеоморфна открытому диску. Из формулы Эйлера немедленно следует, что фуллерены на  $S^2$ ,  $T^2$ ,  $K^2$  и  $P^2$  имеют соответственно ровно 12, 0, 0 и 6 5-угольников. Фуллерены на торе и бутылке Клейна могут также называться *полигексами* ([FYO95, Kir94, Kir97, KIZh97]), поскольку они не содержат 5-угольников.

На рис. 3.1 показаны самые маленькие фуллерены из этих четырех классов, изображенные в виде графа, карты и двойственной к ней триангуляции соответствующей поверхности. Заметим, что естественно возникающие здесь графы Петерсена и Хивуда являются на самом деле 5- и 6-клетками ( $k$ -клетка — это 3-валентный граф, имеющий наименьшее возможное число ребер при условии, что наименьший цикл имеет длину  $k$ ); двойственные к ним на  $P^2$  и  $T^2$  графы  $K_6$  и  $K_7$  реализуют *хроматическое число* (т. е. минимальное число цветов, в которые может быть раскрашена любая карта на поверхности так, что никакие две грани одного цвета не являются соседними; см., например, [GrTu87, глава 5]) этих поверхностей.

Сферическим и тороидальным фуллеренам посвящена обширная химическая литература, рассматривались также и полигексы на бутылке Клейна, например, в [Kir97, KIZh97].

Напомним, что существует как минимум один сферический фуллерен с данным числом вершин  $v$  для всех четных  $v \geq 20$ , за исключением случая  $v = 22$  ([GrMo63]).

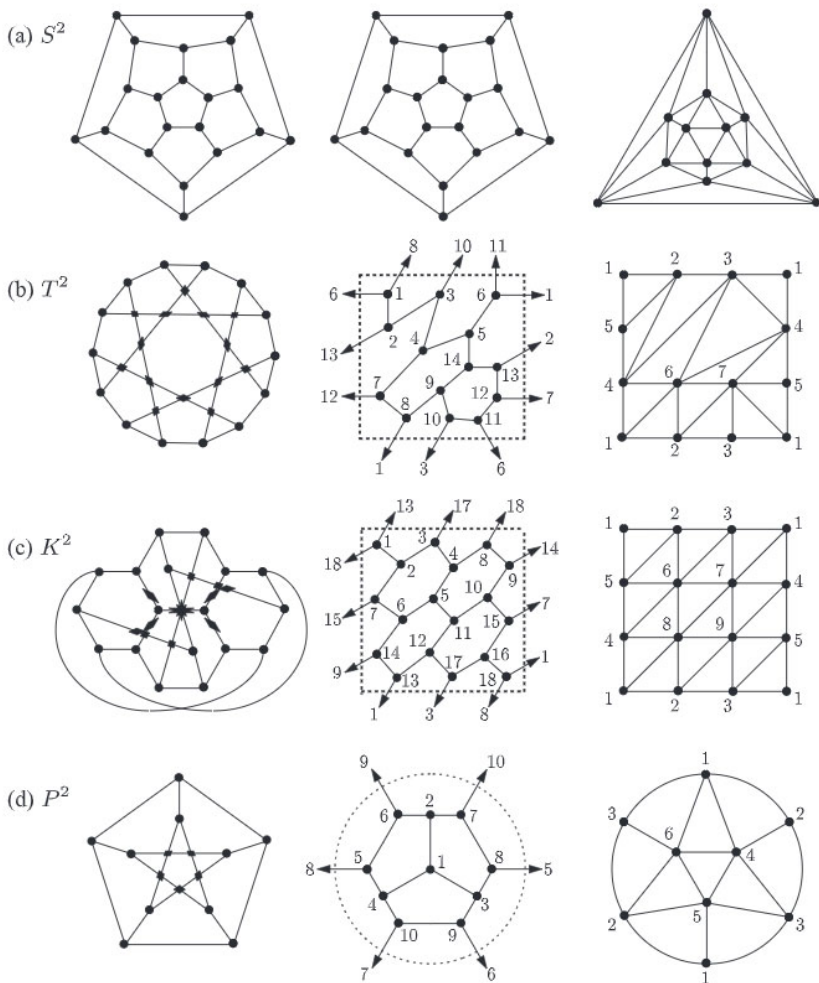


Рис. 3.1. Наименьшие сферические, торические фуллерены, фуллерены на бутылке Клейна и на проективной плоскости. В первой колонке приведены изображения графов на плоскости, во второй — карта на соответствующей поверхности, а в третьей — двойственная карта на той же поверхности. Примеры носят названия: (а) додекаэдр (двойственный — икосаэдр), (б) граф Хивуда (двойственный —  $K_7$ ), (с) наименьший полигекс на бутылке Клейна (двойственный —  $K_{3,3,3}$ ) и (д) граф Петерсена (двойственный —  $K_6$ )



### 3.2. Фуллерены на торе и бутылке Клейна

Оказывается,  $(6, 3)$ -торы и  $(6, 3)$ -бутылки Клейна напрямую связаны с паркетом  $\{6, 3\}$ . Соответствующие поверхности являются факторами евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$  по действию группы изометрий, порожденной двумя сдвигами (в случае  $\mathbb{T}^2$ ) и одним сдвигом и одной скользящей симметрией (в случае  $\mathbb{K}^2$ ). Каждая точка  $\mathbb{T}^2$  и  $\mathbb{K}^2$  соответствует орбите действия порождающей группы. Заметим, что группы, порожденные только одним сдвигом или только одной осевой симметрией, дают при факторизации соответственно цилиндр и перекрученный цилиндр (лист Мебиуса, см. рис. 1.1). Таким образом, построение и перечисление полигексов может проводиться с помощью следующего процесса: вырезаем параллелограмм из «графитовой плоскости»  $\{6, 3\}$  и склеиваем его ребра в соответствии с правилами, применявшимися на рис. 3.1.

В математической и химической литературе существует некоторое расхождение, связанное с тороидальными полигексами. Негами ([Neg85]), Альтшулер ([Alt73]) и другие специалисты в области топологической теории графов понимают под регулярными 3-валентными картами на торе двумерные вложенные клеточные структуры, все грани которых — 6-угольники, без дальнейших ограничений. Коксетер и другие, работающие в традициях теории групп, используют тот же термин в более узком смысле, требуя, чтобы группа автоморфизмов полигекса  $Aut(G)$  имела максимальный возможный ранг, другими словами, чтобы достигалось равенство в оценке  $|Aut(G)| \leq 4e(G) (= 6p_6$  для полигексов). Все регулярные в этом смысле карты составляют следующий список: (на  $\mathbb{S}^2$ ) пять платоновых многогранников, (на  $\mathbb{P}^2$ ) шесть графов, включая граф Петерсена и двойственный к нему, (на  $\mathbb{K}^2$ ) таких графов нет ([Nak96]), и (на  $\mathbb{T}^2$ ) полигексы, получающиеся с помощью конструкции Гольдберга–Коксетера из 6-угольника (см. раздел 2.1).

В конструкции Негами ([Neg85]) любому тороидальному полигексу (или, что эквивалентно, любой 6-регулярной триангуляции тора  $\mathbb{T}^2$ ) с помощью трехпараметрического кода ставится в соответствие некоторый паркет  $\{6, 3\}$ . Каждый плоский граф такого типа обозначается через  $T(p, q, r)$ , с целыми параметрами  $p$ ,  $q$  и  $r$ , где  $p$  — длина геодезического цикла из 6-угольников, в котором соседние 6-угольники имеют общее ребро,  $r$  — количество таких циклов и  $q$  — величина смещения<sup>1</sup>.

Как минимум один тороидальный полигекс, являющийся полиэдральным комплексом, существует с любым количеством вершин  $v \geq 14$ . Единст-

<sup>1</sup>См. также работы [IPT, Pti], где для плоских торов и бутылок Клейна получена классификация структур, с комбинаторной точки зрения являющихся полигексами.



венный тороидальный полигекс с  $v = 14$ , являющийся полиэдральным комплексом, — это реализация графа Хивуда. Он равен  $GC_{2,1}(\text{hexagon})$  в терминах конструкции Гольберга–Кокстера и двойственен к  $K_7$ , который, в свою очередь, реализует семицветную карту на торе. Эта карта и двойственная к ней изображены на рис. 3.1.

Описание полигексов на бутылке Клейна может быть проведено аналогичным образом ([Nak96]). Из каждого тороидального графа  $T(p, 0, r)$  можно получить две 6-регулярные триангуляции бутылки Клейна (и следовательно, при переходе к двойственным — два 3-фуллере́на) — типа *ручка* и типа *скрещенный колпак*,  $K_h(p, r)$  и  $K_c(p, r)$  соответственно. Тор разрезается по геодезической длине  $p$ . Потом при построении *ручки* противоположные стороны получившегося параллелограмма отождествляются с противоположными ориентациями. А при построении *скрещенного колпака* каждая из противоположных сторон превращается в скрещенный колпак (немного по-разному при четных и нечетных  $p$ ). Наименьший полигекс на бутылке Клейна (он единственен) имеет 18 вершин (9 шестиугольных граней) и двойственен к полному трехдольному графу  $K_{3,3,3}$ ; этот граф, карта и двойственная к ней показаны на рис. 3.1.

### 3.3. Проективные фуллерены

Проективная плоскость представляет собой фактор-пространство сферы под действием группы  $C_2$ . Для этого нужно отождествить противоположные точки на поверхности сферы (см. раздел 1.2.2). Проективная плоскость  $\mathbb{P}^2$  — это самая простая из компактных неориентируемых поверхностей в том смысле, что она может быть получена из сферы добавлением только одного скрещенного колпака.

Ясно, что эта конструкция может быть перенесена на карты: при антиподальной факторизации центрально-симметричной сферической карты получается карта, вершины, ребра и грани которой суть результат отождествления антиподальных вершин, ребер и граней. При этом число структурных компонентов каждого типа уменьшается вдвое. Например, при факторизации икосаэдра получается граф  $K_6$ , а в случае додекаэдра — граф Петерсена, который прославился как контрпример ко многим гипотезам (см., например, [HoSh93]). Граф Петерсена не планарен, но его называют *проективно-планарным* в том смысле, что он может быть вложен в проективную плоскость без пересечений ребер.

В этих терминах проективные фуллерены, по нашему определению, — это проективно-планарные 3-валентные карты, являющиеся клеточными

комплексами и имеющие только 5- и 6-угольные грани. Как отмечалось выше,  $p_5 = 6$  для таких карт. Следовательно, граф Петерсена — это наименьший проективный фуллерен. Вообще, проективные фуллерены — это в точности факторы центрально-симметричных сферических фуллеренов (при отождествлении противоположных точек).

Таким образом, задача перечисления и построения проективных фуллеренов сводится к аналогичной задаче для центрально-симметричных сферических фуллеренов. Центральная симметрия содержится в следующих группах симметрии:  $C_i$ ,  $C'_{mh}$  (при четных  $m$ ),  $D_{mh}$  (при четных  $m$ ),  $D_{md}$  (при нечетных  $m$ ),  $T_h$ ,  $O_h$  и  $I_h$ . Сферические фуллерены могут иметь одну из 28 групп симметрии ([FoMa95]), из которых 8 входят в предыдущий список:  $C_i$ ,  $C_{2h}$ ,  $D_{2h}$ ,  $D_{6h}$ ,  $D_{3d}$ ,  $D_{5d}$ ,  $T_h$  и  $I_h$ . Ясно, что фуллерен с  $v$  вершинами может быть центрально-симметричным, только если  $v$  делится на четыре, поскольку  $p_6$  должно быть четным. После минимального случая  $v = 20$  первые центрально-симметричные фуллерены имеют число вершин  $v = 32$  ( $D_{3d}$ ) и  $v = 36$  ( $D_{6h}$ ).

### 3.4. Плоские 3-фуллерены

Примером бесконечных 3-фуллеренов служат *плоские фуллерены*, т.е. 3-валентные разбиения плоскости на (комбинаторные) 6-угольники и 5-угольники (в количестве  $p_5$ ). В таких разбиениях  $p_5 \leq 6$  (см. в [DeSt02b] сведение доказательства к теории Александрова, разработанной в [Ale50], и [Ale48, глава VIII]). При  $p_5 = 0, 1$  существует только по одному такому 3-фуллерену; для каждого  $2 \leq p_5 \leq 6$  их существует бесконечное множество.

В [KlBa06] плоские фуллерены с  $1 \leq p_5 \leq 5$  называются *графитовыми наноконусами положительной кривизны* и они классифицированы (по одному классу для  $p_5 = 1, 5$  и по два класса для  $p_5 = 2, 3, 4$ ) с точностью до эквивалентности. Здесь два бесконечных плоских графа  $G = (V, E)$  и  $G' = (V', E')$  называются *эквивалентными*, если существуют конечные подмножества  $U \subset V$  и  $U' \subset V'$  такие, что подграф графа  $G$ , порожденный  $\bar{U}$ , и подграф графа  $G'$ , порожденный  $\bar{U}'$ , изоморфны. Плоские фуллерены с  $p_5 = 6$  соответствуют фуллереновым нанотрубкам.

*Пространственные фуллерены* — это 3-периодические разбиения  $\mathbb{R}^3$  на фуллерены, прилегающие друг к другу грань к грани; двойственные к ним хорошо изучены в кристаллохимии (см. [DDD10] и [DuDe12]).

## ГЛАВА 4

# Полициклы

### 4.1. $(r, q)$ -полициклы

$(r, q)$ -полициклом называется простой плоский двусвязный локально конечный граф, степени не более  $q$ , такой, что для него выполняются следующие свойства:

- (i) все его внутренние<sup>1</sup> вершины имеют степень  $q$ ;
- (ii) все его внутренние грани являются (комбинаторными)  $r$ -угольниками.

Напомним, что у любого конечного плоского графа есть ровно одна внешняя грань, в то время как у бесконечного плоского графа может быть произвольное количество внешних граней, включая ноль и бесконечность. Обозначим через  $p_r$  количество внутренних граней графа (например, у додекаэдра, вложенного в плоскость,  $p_5 = 11$ ).

На рис. 4.1 показаны примеры простых плоских графов, которые не являются  $(r, q)$ -полициклами.

Далее (в теореме 4.3.2) будет доказано, что все вершины, ребра и внутренние грани  $(r, q)$ -полицикла образуют полиэдральный комплекс (см. раздел 1.2.1).

*Остовом полицикла* называется вершинно-реберный граф, определенный им, т. е. мы забываем про грани. В силу теоремы 4.3.6, любой остов, за исключением пяти платоновых тел, имеет единственное *полициклическое представление*, т. е. единственный полицикл, для которого он является остовом.



Рис. 4.1. Некоторые плоские графы, не являющиеся  $(r, q)$ -полициклами

<sup>1</sup>Принадлежащие только внутренним граням.

Параметры  $(r, q)$  называются *эллиптическими*, если  $rq < 2(r + q)$ , *параболическими*, если  $rq = 2(r + q)$ , и *гиперболическими*, если  $rq > 2(r + q)$ ; см. замечание 1.4.1. Назовем полицикл *внешнепланарным*, если он не содержит внутренних вершин. Для параболических и гиперболических  $(r, q)$  паркет  $\{r, q\}$  является  $(r, q)$ -полициклом. Для эллиптических  $(r, q)$  паркет  $\{r, q\}$  с удаленной гранью является  $(r, q)$ -полициклом. Различные, но изоморфные друг другу, полициклические представления для тех пяти исключений происходят от различия в выборе этой удаляемой (внешней) грани.

Отметим, что  $(r, q)$ -полициклы  $\{r, q\}$  с параболическими и гиперболическими параметрами  $(r, q)$  не имеют границы.

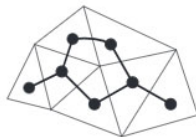
Напомним, что *изоморфизмом* между двумя плоскими графами  $G_1$  и  $G_2$  называется функция  $\phi$ , отображающая вершины, ребра и грани  $G_1$  в соответствующие объекты  $G_2$  и сохраняющая отношения инцидентности. Два  $(r, q)$ -полицикла *изоморфны*, если существует такой изоморфизм  $\phi$  их остовов, который сохраняет множество внутренних граней. Напомним также, что *группа автоморфизмов*  $\text{Aut}(G)$  плоского графа  $G$  — это группа всех его автоморфизмов, т.е. изоморфизмов  $G$  в  $G$ . *Группа автоморфизмов*  $\text{Aut}(P)$  полицикла  $P$  состоит из всех автоморфизмов плоского графа  $G$ , сохраняющих множество внутренних граней.

Понятие двойственности плоских графов имеет смысл и для  $(r, q)$ -полициклов, но оно не учитывает внешние грани, которые мы хотели бы оставить неизменными. Мы введем два понятия двойственности для  $(r, q)$ -полициклов и назовем их *внутренней двойственностью* (некоторые применения при классификации см. в [VCH02]) и *внешней двойственностью*. Они всегда определены, но получающийся плоский граф необязательно является  $(q, r)$ -полициклом.

Внутренне-двойственный граф  $\text{Inn}^*(P)$  для  $(r, q)$ -полицикла  $P$  — это граф, в качестве вершин которого взяты все внутренние грани, а ребра соединяют вершины, соответствующие соседним граням. Внутренне-двойственный граф  $\text{Inn}^*(P)$  необязательно является двусвязным графом, см. примеры на рисунке ниже.



(5, 3)-полицикл и внутренне-двойственный к нему граф



(3, 5)-полицикл и внутренне-двойственный к нему граф



Внешне-двойственный граф  $Out^*(P)$  для  $(r, q)$ -полицикла  $P$  — это граф, в качестве вершин которого взяты все внутренние грани и некоторые внешние вершины. Эти внешние вершины берутся около каждой граничной вершины полицикла  $P$  таким образом, что они соответствуют  $q$ -угольным граням  $Out^*(P)$ . При этом степень граничной вершины может оказаться больше  $r$ . Другое возможное препятствие к тому, чтобы  $Out^*(P)$  был  $(q, r)$ -полициклом, состоит в том, что  $Out^*(P)$  может не иметь внешней грани, например, для паркеты  $\{r, q\} = f$  при эллиптических  $(r, q)$ . См. два примера ниже.



(5, 3)-полицикл и внешне-двойственный к нему граф



(3, 5)-полицикл и внешне-двойственный к нему граф

Для любого  $(r, q)$ -полицикла имеет место равенство  $P = Inn^*(Out^*(P))$  и  $P = Out^*(Inn^*(P))$  при условии, что все графы, присутствующие в этом равенстве, являются  $(r, q)$ - или  $(q, r)$ -полициклами. Если все операции определены корректно и  $P$  является  $(r, q)$ -полициклом, то  $Inn^*(Inn^*(P))$  является  $(r, q)$ -полициклом  $P$  с удаленными у всех  $r$ -угольников граничными ребрами, тогда как  $Out^*(Out^*(P))$  — это  $(r, q)$ -полицикл  $P$ , в который добавлено кольцо  $r$ -угольников на внешнем слое таким образом, чтобы все граничные вершины стали внутренними.

Назовем полицикл *собственным*, если он является частичным подграфом в паркете  $\{r, q\}$ , и *гелиценом* в противном случае (выбор этого термина станет понятным после знакомства с теоремой 4.3.1). Назовем собственный  $(r, q)$ -полицикл *индуцированным* (к тому же *изометрическим*), если этот подграф также является индуцированным (к тому же *изометрическим*) подграфом в паркете  $\{r, q\}$ . Другое интересное свойство, которым могут обладать  $(r, q)$ -полициклы, — это свойство выпуклости в графе  $\{r, q\}$  (см. теорему 4.4).

При  $(r, q) = (3, 3), (4, 3), (3, 4)$  любой индуцированный  $(r, q)$ -полицикл является изометрическим, но, например, путь из трех 5-угольников является индуцированным неизометрическим  $(5, 3)$ -полициклом.

Рассмотрим теперь понятие взаимности, определенное для некоторых собственных полициклов. Пусть  $P$  — собственный ограниченный  $(r, q)$ -полицикл. Рассмотрим объединение всех  $r$ -угольных граней  $\{r, q\}$ , лежащих



вне  $P$ . Легко заметить, что это объединение будет  $(r, q)$ -полициклом; назовем его *полициклом, взаимным с  $P$*  в том случае, если  $P$  — эллиптический или если  $P$  — бесконечный и имеет связную границу. Назовем полицикл *самовзаимным*, если взаимный к нему существует и изоморфен исходному.

Перечислим все самовзаимные  $(r, q)$ -полициклы, для которых  $(r, q) = (3, 3), (4, 3), (3, 4), (5, 3)$ . Это  $\{3, 3\} - e, \{4, 3\} - v, P_2 \times P_4, \{3, 4\} - v, \{3, 4\} - C_3, Tr_4$  и 9 (из 11)  $(5, 3)$ -полициклов, для которых  $p_5 = 6$ , включая 6 хиральных. Примером самовзаимного  $(3, q)$ -полицикла для любого  $q \geq 3$  является  $(3, q)$ -полицикл, лежащий по одну сторону от *зигзага* (см. определение из раздела 2.2), разделяющего  $\{3, q\}$  на две изоморфные половины; такой вид имеют полициклы  $\{3, 3\} - e, \{3, 4\} - C_3$ . При  $q \geq 6$  такой полицикл бесконечен.

Общая теория полициклов излагается в [DeSt98, DeSt99a, DeSt02c, DeSt00a, DeSt00b, DeSt00c, DeSt01, DeSt02b, Sht99, Sht00].

## 4.2. Примеры

Назовем  $(r, q)$ -полицикл эллиптическим, параболическим или гиперболическим, если  $rq < 2(r+q)$ ,  $rq = 2(r+q)$  или  $rq > 2(r+q)$ . Эти случаи соответствуют тому, что  $\{r, q\}$  является правильным паркетом на  $S^2, \mathbb{R}^2$  и  $\mathbb{H}^2$  соответственно.

Имеется литература (см., например, [GrSh87a, раздел 9.4], [BGOR99], [BCH02] и [BCH03]) о собственных параболических полициклах (полигексах, полиамондах, полимино для  $\{6, 3\}, \{3, 6\}, \{4, 4\}$  соответственно); эти термины происходят от слов *гексагон*, *бриллиант*, *домино*, где последние два соответствуют случаю  $p_3, p_4 = 2$ .

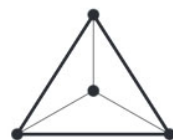
Полимино были определены Конвеем, Пенроузом и Голомбом как замощения (плоскости  $\mathbb{R}^2$  и не только; см., например, [CoLa90]) и использовались в теории игр; позже они были применены в физике и статистической механике.

Полигексы широко используются (см., например, [Dia88, Bal95]) в органической химии: они представляют собой полностью конденсированные ПАГ (полициклические ароматические гидрокарбонаты)  $C_nH_m$  с  $n$  вершинами (атомами углерода C), содержащие  $m$  вершин степени два, где присоединены атомы водорода H (см. рис. 7.1).

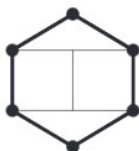
Все 39 собственных  $(5, 3)$ -полициклов были открыты в [CCBBZGT93] в химическом контексте, но уже в [Har90] были указаны все 3, 6, 9, 39, 263 собственных эллиптических  $(r, q)$ -полицикла для  $(r, q) = (3, 3), (4, 3), (3, 4), (5, 3), (3, 5)$  соответственно.

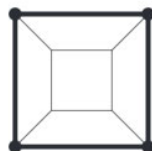
Теперь перечислим все  $(3, 3)$ -,  $(4, 3)$ -,  $(3, 4)$ -полициклы. Ясно, что все  $(3, 3)$ -полициклы это:


 $\{3, 3\} - e$  (не индуцированный)

 $\{3, 3\} - v$ 

 $\{3, 3\} - f$ 

Напомним, что  $P_n$  обозначает путь по  $n$  вершинам; обозначим через  $P_{\mathbb{N}}$ ,  $P_{\mathbb{Z}}$  бесконечные пути в одном или обоих направлениях. Все  $(4, 3)$ -полициклы это:


 $\{4, 3\} - e$ 

 $\{4, 3\} - v$ 

 $\{4, 3\} - f$ 

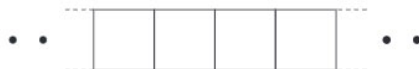
бесконечная серия  $P_2 \times P_n$  (для любого  $n \geq 2$ ; см. ниже примеры для  $n = 2, 3, 4$ )


 $P_2 \times P_2$ 

 $P_2 \times P_3$ 

 $P_2 \times P_4$ 

и два бесконечных полицикла:


 $P_2 \times P_{\mathbb{N}}$ 

 $P_2 \times P_{\mathbb{Z}} = Prism_{\infty}$ 

Только  $\{4, 3\}$ ,  $\{4, 3\} - v$ ,  $P_2 \times P_2$ ,  $P_2 \times P_3$ ,  $P_2 \times P_4$ ,  $\{4, 3\} - e$  являются собственными; среди них только последние два не являются индуцированными.

Количество  $(3, 4)$ -полициклов, включая два бесконечных, также является счетным (девять  $(3, 4)$ -полициклов являются собственными и 5 из них являются индуцированными).

А именно, вот все  $(3, 4)$ -полициклы:



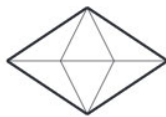
вершинно-разбитый  
паркет  $\{3, 4\}$



$\{3, 4\} - P_3$



$\{3, 4\} - C_3$



$\{3, 4\} - e$



$\{3, 4\} - v$



$\{3, 4\} - f$

бесконечная серия  $Tr_n$  (для любого  $n \geq 1$ ; см. ниже примеры при  $n = 1, 2, 3, 4$ )



$Tr_1$



$Tr_2$



$Tr_3$

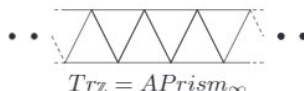


$Tr_4 = \{3, 4\} - P_4$

и два бесконечных полицикла:



$Tr_N$



$Tr_z = APrism_\infty$

Для всех остальных пар параметров  $(p, q)$  существует континуум  $(r, q)$ -полициклов, а количество конечных среди них является счетным.

*Вершинно-разбитый октаэдр* и *вершинно-разбитый икосаэдр* — это полициклы, получаемые соответственно из октаэдра и икосаэдра разбиением вершины на две и разделением ребер, бывших инцидентными ей, на две части. Вершинно-разбитый октаэдр изображен на рис. 4.2, и оба они изображены на рис. 8.3; эти два графа являются единственными, за исключением пяти платоновых тел  $\{r, q\} - f$ , нерасширяемыми конечными  $(r, q)$ -полициклами.

### 4.3. Клеточный гомоморфизм и структура $(r, q)$ -полициклов

Пусть даны две карты  $X$  и  $X'$ . Напомним, что *клеточным гомоморфизмом* называется такая функция  $\phi: X \rightarrow X'$ , которая переводит вершины,



Рис. 4.2. Некоторые простые гелицены

ребра и грани карты  $X$  в вершины, ребра и грани карты  $X'$  с сохранением отношения инцидентности. Напомним также, что *флаг*  $h$  карты  $X$  — это последовательность  $h = (v, e, f)$ , где  $v, e, f$  — вершина, ребро и грань карты  $X$  соответственно, и  $v \in e \subset f$ . В случае полициклов в определении флага  $h = (v, e, f)$  мы требуем, чтобы  $f$  была внутренней гранью.

**Теорема 4.3.1.** ([DeSt98, GHZ02, Gra03]) *Любой  $(r, q)$ -полицикл  $P$  допускает клеточный гомоморфизм в  $\{r, q\}$ , и этот гомоморфизм однозначно определяется по образу любого фиксированного флага.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $h = (v, e, f)$  — это флаг полицикла  $P$ . Напомним, что  $\sigma_0(h)$ ,  $\sigma_1(h)$  и  $\sigma_2(h)$  (см. раздел 1.2.2) — это флаги, которые отличаются от  $h$  на  $v$ ,  $e$  и  $f$  соответственно (эти флаги однозначно определены в тех случаях, когда они существуют). Пусть даны вершина  $v$  и ребро  $e$  такие, что  $v \in e$ . Тогда существует по крайней мере одна грань  $f$  полицикла  $P$  такая, что  $(v, e, f)$  является флагом.

Для фиксированной вершины  $v$  обозначим через  $\mathcal{F}_v$  множество флагов вида  $(v, e, f)$ . Если  $v$  является внутренней вершиной, то тогда очевидно, что любые два флага  $h, h' \in \mathcal{F}_v$  связаны последовательностью операций  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Если  $v$  принадлежит границе, то, поскольку удаление вершины  $v$  не может сделать граф несвязным, вершина  $v$  инцидентна только одной внешней грани. Поэтому и в этом случае любые два флага  $h, h' \in \mathcal{F}_v$  связаны операциями  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Рассматриваемый граф связан (так как является полициклом), поэтому любые два флага связаны последовательностью операций  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ .

Пусть дан клеточный гомоморфизм  $\phi$ ; тогда операции над флагами должны удовлетворять условию  $\phi(\sigma_i(h)) = \sigma_i(\phi(h))$  для  $i = 0, 1, 2$ . Будем считать, что  $h_0$  — флаг полицикла  $P$ ,  $k_0$  — флаг карты  $\{r, q\}$ . Любой другой флаг  $h$  из  $P$  связан с  $h_0$  последовательностью операций  $\sigma_i$ . Следовательно, если  $\phi(h_0) = k_0$ , то  $\phi(h)$  полностью определено. Таким образом, доказана единственность  $\phi$ . Но это также указывает на путь к доказательству суще-



ствования гомоморфизма  $\phi$  такого, что  $\phi(h_0) = h'_0$ . Действительно, положим  $\phi(h) = \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_t}(k_0)$ , где  $h = \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_t}(h_0)$  и  $0 \leq i_j \leq 2$ . Поскольку карта  $\{r, q\}$  не имеет границы, все грани в ней являются внутренними, и операции  $\sigma_i$  в  $\{r, q\}$  всегда определены.

Но, для того чтобы предложенная конструкция была применима, нужно доказать, что  $\phi(h)$  не зависит от последовательности  $\sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_t}$ , выбранной для выражения  $h$  через  $h_0$ . Пусть существуют два выражения для  $h$ :

$$h = \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_t}(h_0) = \sigma_{i'_1} \dots \sigma_{i'_t}(h_0).$$

Сопоставим им пути из флагов:

$$\begin{aligned} P'' &= (h_0, h_1, \dots, h_t = h), \quad \text{где } h_j = \sigma_{i_j}(h_{j-1}), \\ P' &= (h'_0 = h_0, h'_1, \dots, h'_t = h), \quad \text{где } h_j = \sigma_{i'_j}(h'_{j-1}). \end{aligned}$$

Эти последовательности соответствуют последовательностям вершин, т. е. пути в  $(r, q)$ -полицикле  $P$ . Локально проблемы в согласованности определения  $\phi(h)$  нет. Вблизи граничной вершины проблемы не возникает, а вблизи внутренней вершины условие того, что ее степень равна  $q$ , тоже обеспечивает согласованность. Также согласованность будет иметь место и при определении флагов вблизи грани  $f$ . Односвязность  $P$  позволяет превратить путь  $P''$  в путь  $P'$  изменениями вблизи граней и вершин. Значит, никакой неоднозначности не возникнет. ■

Все свойства, указанные в определении  $(r, q)$ -полициклов, были использованы при доказательстве теоремы 4.3.1. В частности,  $(r, q)$ -полициклы должны быть односвязными; см. некоторые примеры на рис. 4.4.

Очевидно, описанный выше клеточный гомоморфизм является изоморфизмом тогда и только тогда, когда  $P$  является собственным полициклом, т. е. не существует пары вершин или ребер, имеющих одинаковый образ. В свете теоремы 4.3.1 любой несобственный  $(r, q)$ -полицикл называется  $(r, q)$ -гелиценом (см. рис. 4.2). Несложно проверить, что  $(r, q)$ -гелицен существует, если и только если  $(r, q) \neq (3, 3)$  и  $p_r \geq (q - 2)(r - 1) + 1$ , причем равенство имеет место только для гелицена, являющегося кольцом из  $r$ -угольников, описанным вокруг  $r$ -угольника.

Естественным параметром  $(r, q)$ -гелицена является степень соответствующего гомоморфизма в  $\{r, q\}$  (по вершинам, ребрам и граням). При  $q \geq 4$  существуют гелицены, у которых одинаковый образ при гомоморфизме имеют только некоторые пары вершин, но не пары ребер. Вершинно-разбитый октаэдр является единственным таким максимальным гелиценом для  $(r, q) = (3, 4)$  (вершинами с одинаковым образом являются



две двухвалентные вершины; см. рис. 4.2). Для  $(r, q) = (3, 5)$  существует конечное число таких гелиценов; одним из них является вершинно-разбитый икосаэдр.

**Теорема 4.3.2.** ([DeSt05]) *Вершины, ребра и внутренние грани любого  $(r, q)$ -полицикла образуют полиэдральный комплекс.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Чтобы доказать, что это будет полиэдральный комплекс, необходимо доказать, что пересечение любых двух клеток (т.е. вершин, ребер или внутренних граней)  $(r, q)$ -полицикла  $P$  снова будет клеткой из  $P$  или  $\emptyset$ . Для пересечения вершин с ребрами или гранями этот факт очевиден. Для доказательства данного факта для пересечения ребер или граней воспользуемся клеточным гомоморфизмом  $\phi$  из  $P$  в  $\{r, q\}$ .

Если две внутренние грани  $F$  и  $F'$  данного  $(r, q)$ -полицикла  $P$  пересекаются по нескольким клеткам (например, по двум ребрам или двум вершинам), то их образы в  $\{r, q\}$  также пересекаются по нескольким клеткам. Несложно заметить, что этого не может быть в  $\{r, q\}$ . Значит,  $F$  и  $F'$  пересекаются по ребру, вершине или пустому множеству. Аналогичное доказательство применимо и для других пересечений клеток. ■

**Теорема 4.3.3.** *Если у конечного  $(r, q)$ -полицикла есть граничная вершина степени менее  $q$ , то таких вершин как минимум две.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $f$  — флаг в этом  $(r, q)$ -полицикле  $P$  и  $f'$  — флаг в  $\{r, q\}$ . Рассмотрим клеточный гомоморфизм из теоремы 4.3.1. Пусть  $v_1, \dots, v_k$  — все вершины границы  $B$  полицикла  $P$ . Образ этой границы в  $\{r, q\}$  будет циклом  $\phi(B)$ . Если  $v_i$  — вершина границы  $B$  степени  $q$ , тогда ребра  $e_i = v_{i-1}v_i$  и  $e_{i+1} = v_iv_{i+1}$  принадлежат общей грани  $F$ . Предположим теперь, что существует только одна вершина, имеющая степень меньше, чем  $q$ . Это означает, что все  $e_i$  инцидентны одной грани  $F$ . В частности, длина границы кратна  $r$ . Но при обходе грани  $F$  направление движения не меняется, т.е. все время остается движением по часовой стрелке или против часовой стрелки. Поэтому здесь не может быть ни одной вершины со степенью меньше  $q$ , — противоречие. ■

*Обхват графа* — это длина минимального реберного цикла в нем.

**Теорема 4.3.4.** *Для остова карты  $\{r, q\}$  выполняются следующие свойства:*

- (i) его обхват равен  $r$ ;
- (ii) минимальные реберные циклы являются границами граней  $\{r, q\}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Эти утверждения легко проверить для эллиптических пар  $(r, q)$ . Два ребра тетраэдра всегда лежат в одном треугольнике. Два смежных ребра одной грани октаэдра (или икосаэдра) входят в граничный треугольник этой грани, если же два смежных ребра не лежат в одной грани, тогда они входят в реберный цикл длины не менее 4. Три последовательных ребра куба (или додекаэдра), принадлежащие одной грани, входят в граничный 4-угольник (5-угольник) этой грани, а если три последовательных ребра не лежат в одной грани, тогда они входят в цикл длины по крайней мере 6.

В параболическом и гиперболическом случаях проведем следующее доказательство. Рассмотрим простой реберный цикл в паркете  $\{r, q\}$ . По теореме Жордана, этот цикл ограничивает конечную область на плоскости; в этой области содержится по крайней мере один двумерный  $r$ -угольник из  $\{r, q\}$ . Проведем лучи из центра этого  $r$ -угольника в вершины. Эти лучи разделяют центральный угол на  $r$  секторов, каждый из этих секторов имеет в качестве основания сторону  $r$ -угольника. Любой отрезок, соединяющий внешние точки граничных лучей сектора, будет длиннее соответствующей стороны  $r$ -угольника. Поэтому количество ребер в реберном цикле, содержащем  $r$ -угольник и не совпадающем с ним, больше  $r$ . Следовательно, обхват остова такого паркета равен  $r$ . Утверждение (ii) доказывается аналогично. ■

**Следствие 4.3.5.** *Для любого  $(r, q)$ -полицикла  $P$  выполняется:*

- (i) *обхват  $P$  равен  $r$ ; длина каждой компоненты его границы не менее  $r$ ;*
- (ii) *если длина некоторой компоненты границы полицикла  $P$  равна  $r$ , тогда либо  $P$  —  $r$ -угольник, либо  $(r, q)$  — эллиптическая пара и  $P$  — это  $\{r, q\} - f$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Утверждение (i) тривиально следует из теорем 4.3.4 и 4.3.1. Докажем теперь утверждение (ii). Если длина некоторой компоненты границы полицикла  $P$  равна  $r$ , тогда у  $P$  есть только одна компонента границы конечной длины, а значит  $P$  — конечный полицикл. Пусть  $\phi$  — отображение из  $P$  в  $\{r, q\}$ . Образом границы полицикла  $P$  будет грань в  $\{r, q\}$ . Если образ полицикла лежит внутри  $r$ -угольника, тогда  $P$  —  $r$ -угольник. В противном случае все граничные вершины полицикла  $P$  имеют степень  $q$ . Так как все вершины образа  $P$  в  $\{r, q\}$  имеют степень  $q$  в  $\{r, q\}$ , получаем, что  $\phi(P)$  покрывает всю карту  $\{r, q\}$ , кроме одной грани. Значит, параметры  $(r, q)$  являются эллиптическими, и  $P = \{r, q\} - f$ . ■

**Теорема 4.3.6.** Пусть  $G$  — граф, являющийся остовом некоторого  $(r, q)$ -полицикла, причем пусть этот граф не является остовом эллиптических паркетов  $\{r, q\}$  (таких паркетов всего пять). Тогда по  $G$  однозначно определяется его полициклическое представление.

**Доказательство.** В силу следствия 4.3.5 известно, что граница  $G$  имеет длину больше  $r$ . Каждая грань полициклического представления  $G$  дает цикл длины  $r$  в  $G$ . Возьмем полициклическое представление  $P$  графа  $G$  и пусть  $\phi$  — гомоморфизм из  $P$  в  $\{r, q\}$ . Каждый цикл длины  $r$  в  $G$  определяет при отображении  $\phi$  грань  $F$  в  $\{r, q\}$ . Так как любая граница имеет длину больше  $r$ , грани  $F$  соответствует внутренняя грань в  $P$ . Следовательно, существует взаимно однозначное соответствие между внутренними гранями полициклической реализации  $G$  и циклами длины  $r$  в  $G$ . Значит, граф  $G$  полностью определяет полициклическую реализацию. ■

Теорема 4.3.6 является аналогом теоремы Штейнница для трехсвязных плоских графов.

## 4.4. Углы и кривизна

Напомним, что правильные паркеты  $\{r, q\}$  реализуются на  $X = \mathbb{S}^2, \mathbb{R}^2$  или  $\mathbb{H}^2$ , если параметры  $(r, q)$  являются эллиптическими, параболическими или гиперболическими соответственно. При этом  $r$ -угольники являются правильными в  $X$ ; их кривизна равна  $2r\alpha(2, r, q)$ .

Множество  $D$  из  $X$  называется *выпуклым*, если для любых двух точек  $x, y \in D$  геодезическая (т.е. кратчайшая кривая), соединяющая  $x$  и  $y$ , содержится в  $D$ . (Заметим, что существуют и другие определения выпуклости в гиперболическом пространстве; см., например, [GaSo01].) Далее,  $(r, q)$ -полицикл называется *выпуклым*, если его образ в  $\{r, q\}$  — выпуклый. На рис. 4.3 изображен выпуклый  $(r, q)$ -полицикл, не являющийся собственным. Единственные выпуклые  $(r, 3)$ -полициклы — это  $r$ -угольник и паркет  $\{r, 3\}$ . Это следует из того, что если вершина  $v \in \{r, 3\}$  содержится в двух  $r$ -угольниках  $F_1$  и  $F_2$ , тогда существует пара вершин  $v_1 \in F_1$  и  $v_2 \in F_2$  такая, что геодезическая, соединяющая  $v_1$  и  $v_2$ , проходит через третий  $r$ -угольник.

**Теорема 4.4.1.** Пусть  $P$  — внешнепланарный  $(r, q)$ -полицикл. Тогда  $P$ , рассматриваемый как  $(r, 2q - 2)$ -полицикл, является выпуклым и собственным.

**Доказательство.** Рассмотрим грань  $F$  в  $P$ . Пусть  $\text{Dec}(P)_0 = F$ . Далее конечный  $(r, q)$ -полицикл  $\text{Dec}(P)_{n+1}$  получается путем добавления



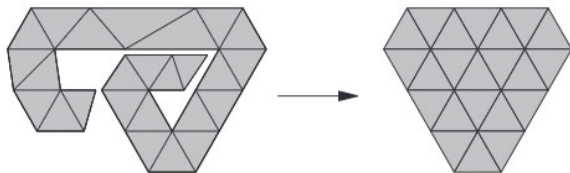


Рис. 4.3. Выпуклый несобственный  $(3, 6)$ -полицикл и его образ на паркете  $\{3, 6\}$

к полициклу  $Dec(P)_n$  всех граней полицикла  $P$ , имеющих общее ребро с  $Dec(P)_n$ . На каждом шаге  $Dec(P)_n$  и  $P$  являются внешнепланарными  $(r, q)$ -полициклами. Обозначим через  $\phi$  клеточный гомоморфизм из  $P$  в  $\{r, 2q - 2\}$ .

Каждая вершина полицикла  $Dec(P)_n$  содержится не более чем в  $(q - 1)$  его внутренней грани; следовательно, каждый внутренний угол в образе  $\phi(Dec(P)_n)$  не превосходит  $\pi$ . Это является необходимым и достаточным условием для того, чтобы образ  $\phi(Dec(P)_n)$  был выпуклым (см., например, [GaSo01, лемма 3.1]). Поэтому образ границы  $Dec(P)_n$  в  $\{r, 2q - 2\}$  — это несамопересекающаяся кривая, и  $Dec(P)_n$ , рассматриваемый как  $(r, 2q - 2)$ -полицикл, является собственным.

Пусть  $x$  и  $y$  — две точки из  $\phi(P)$ , тогда существует целое число  $n_0$  такое, что  $x, y \in \phi(Dec(P)_{n_0})$ . Геодезическая  $d$ , соединяющая  $x$  и  $y$ , содержится в  $Dec(P)_{n_0}$  и, следовательно, в  $\phi(P)$ . Если  $P$  не является собственным, тогда существуют две различные вершины  $v, v'$  (или ребра, или грани) в  $P$ , образы которых в  $\{r, q\}$  совпадают. Существует целое число  $n_0$  такое, что  $v, v' \in Dec(P)_{n_0}$ . Но  $Dec(P)_{n_0}$  является собственным; значит, их образы в  $\{r, q\}$  не совпадают. ■

В доказательстве последней теоремы мы используем конечные полициклы потому, что у бесконечных полициклов может быть бесконечное число границ.

**Теорема 4.4.2.** Пусть  $P$  — внешнепланарный  $(3, q)$ -полицикл; тогда  $P$  является собственным  $(3, q + 2)$ -полициклом.

**Доказательство.** Без ограничения общности можно предположить, что полицикл  $P$  — конечный (это видно из доказательства теоремы 4.4.1). Обозначим через  $\phi$  клеточный гомоморфизм в  $\{3, q + 2\}$  и предположим, что  $P$  не является собственным  $(3, q + 2)$ -полициклом. Тогда на границе  $P$  можно найти две вершины  $v$  и  $v'$  такие, что  $\phi(v) = \phi(v')$  и образ граничного пути  $\mathcal{P} = (v_0 = v, v_1, \dots, v_{p-1}, v_p = v')$  при отображении  $\phi$  не имеет самопересечений. Этот образ  $\phi(\mathcal{P})$  определяет конечный  $(3, q + 2)$ -поли-

цикл, обозначим его через  $P'$ . Так как  $P$  исходно был  $(3, q)$ -полициклом, граничные вершины  $P'$  имеют степень не менее 4, исключая, возможно, вершину  $\phi(v) = \phi(v')$ . Обозначим через  $v_i$  число граничных вершин полицикла  $P'$  степени  $i$ , отличных от  $\phi(v)$ , а через  $v_{int}$  — число внутренних вершин. Обозначим через  $p_3$  число 3-угольников в полицикле  $P'$ .

Число ребер  $e$  удовлетворяет следующему равенству:

$$2e = 1 + \sum_{i=4}^{q+2} v_i + 3p_3 = (\deg \phi(v)) + \sum_{i=4}^{q+2} i v_i + (q+2)v_{int},$$

откуда следует, что  $3p_3 - (q+2)v_{int} = (\deg \phi(v)) - 1 + \sum_{i=4}^{q+2} (i-1)v_i$ . Тогда по формуле Эйлера  $v - e + f = 2$ , где  $v = 1 + v_{int} + \sum_{i=1}^{q+2} v_i$  и  $f = 1 + p_3$ , имеем

$$p_3 = qv_{int} + \sum_{i=4}^{q+2} \left( \frac{i}{2} - 1 \right) v_i + \frac{\deg \phi(v)}{2}.$$

Исключая  $p_3$ , получаем

$$0 = (2q-2)v_{int} + \sum_{i=4}^{q+2} \left( \frac{i}{2} - 2 \right) v_i + \frac{\deg \phi(v)}{2} + 1 > 1,$$

что невозможно. ■

Заметим, что уже при  $p_3 = 7$  существуют внешнепланарные  $(3, 4)$ - и  $(3, 5)$ -полициклы, которые остаются гелиценами в  $\{3, 5\}$  и  $\{3, 6\}$  соответственно. *Веер* из  $(q-1)$ -го  $r$ -угольника с  $q$ -валентной общей (граничной) вершиной — это пример внешнепланарного  $(r, q)$ -полицикла, являющегося собственным невыпуклым  $(r, 2q-3)$ -полициклом.

Теперь мы посмотрим на  $(r, q)$ -полициклы с другой геометрической точки зрения. До сих пор кривизна была равномерно распределенной, и треугольники рассматривались вложенными в поверхность постоянной кривизны. Пусть теперь кривизна сосредоточена в общих вершинах  $r$ -угольников, а в самом треугольнике постоянна и равна нулю.

Теперь  $r$ -угольники являются правильными  $r$ -угольниками с углами при вершинах, равными  $\frac{r-2}{r}\pi$ . Рассмотрим точку  $A$ , в которой сходятся  $q$   $r$ -угольников. Кривизна точки  $A$  — это разность между  $2\pi$  и суммой углов  $r$ -угольников, т. е.  $2\pi - q\frac{r-2}{r}\pi$ . Полная кривизна  $(r, q)$ -полицикла тогда:

$$v_{int} \left( 2\pi - q\frac{r-2}{r}\pi \right) = v_{int} \frac{\pi}{r} (2(r+q) - rq).$$



Эта величина отличается от кривизны, полученной ранее в этом разделе, так как граничные вершины вносят различные вклады в эти две величины. Если параметры  $(p, q)$  — эллиптические, параболические, гиперболические, то кривизна вершин положительна, равна нулю, отрицательна соответственно.

Мы будем использовать такое понятие кривизны только для непродолжаемых полициклов в разделе 8.2 и она будет лишь аргументом для подсчета, т. е. комбинаторным аргументом. Однако, такой сосредоточенной в вершинах кривизне может быть придан геометрический смысл. Это является предметом теории А. Д. Александрова (см., например, [Ale50]).

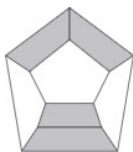
## 4.5. Полициклы на поверхностях

В данном разделе мы вводим обобщение понятия  $(r, q)$ -полицикла, связанное с картами на поверхностях. Пусть даны целые числа  $r, q \geq 3$ . Тогда  $(r, q)_{gen}$ -полицикл — это двумерная поверхность, склеенная из  $r$ -угольников таким образом, что степени всех внутренних вершин равны  $q$ , а степени граничных вершин лежат на отрезке  $[2, q]$ .

Формальное определение следующее:  $(r, q)_{gen}$ -полицикл — это непустая двусвязная карта на поверхности  $S$ , грани которой разделены на два непустых множества  $F_1$  и  $F_2$  таких, что выполняются следующие условия:

- (i) все элементы  $F_1$  (называемые *собственными гранями*) являются комбинаторными  $r$ -угольниками;
- (ii) все элементы  $F_2$  (называемые *дырками*) попарно не пересекаются, т. е. не имеют общих вершин;
- (iii) степени всех вершин принадлежат множеству  $\{2, \dots, q\}$ , причем все *внутренние* (т. е. не лежащие на границе никакой дырки) вершины  $q$ -валентны.

Здесь условие (ii) требуется для того, чтобы запретить вершинам или ребрам принадлежать более, чем одной дырке. Это условие необязательно требовать для  $(r, q)$ -полицикла, так как односвязность и двусвязность уже обеспечивают его выполнение. Ниже приведен пример карты, для которой это условие не выполняется.



Всякий односвязный  $(r, q)_{gen}$ -полицикл фактически является  $(r, q)$ -полициклом, т.е. может быть изображен на плоскости. Дырки при таком изображении становятся внешними гранями. Некоторые  $(r, q)_{gen}$ -полициклы могут быть изображены на плоскости, например, половина упоминаемых в теореме 4.5.1. Теория накрытий, изложенная в разделе 1.2, применима и к  $(r, q)_{gen}$ -полициклам. Универсальное накрытие  $(r, q)_{gen}$ -полицикла по определению односвязно, поэтому является  $(r, q)$ -полициклом.

**Теорема 4.5.1.** *Для  $r, q \leq 4$  список  $(r, q)_{gen}$ -полициклов, не являющихся  $(r, q)$ -полициклами, состоит из следующих четырех бесконечных серий:*

1.  $Prism_m$ ,  $m \geq 2$  (на  $\mathbb{S}^2$  — с двумя  $m$ -угольниками, считающимися дырками) и при четных  $m \geq 2$  — их неориентируемые факторы (на проективной плоскости, с одной дыркой),
2.  $APrism_m$ ,  $m \geq 2$  (на  $\mathbb{S}^2$  — с двумя  $m$ -угольниками, считающимися дырками) и при нечетных  $m \geq 2$  — их неориентируемые факторы (на проективной плоскости, с одной дыркой).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Универсальное накрытие такого полицикла является  $(r, q)$ -полициклом с нетривиальной группой автоморфизмов, не имеющих неподвижных точек. Список  $(r, q)$ -полициклов для  $r, q \leq 4$  известен (см. раздел 4.2). Анализ этого списка дает только два бесконечных полицикла:  $Prism_\infty = P_2 \times P_{\mathbb{Z}}$  и  $Aprism_\infty = Tr_{\mathbb{Z}}$ . У этих полициклов есть следующие ориентируемые факторы: бесконечная серия призм  $Prism_m$  ( $m \geq 2$ ) и бесконечная серия антипризм  $APrism_m$  ( $m \geq 2$ ). Кроме того, есть неориентируемые факторы, получающиеся при отождествлении центрально-симметричных точек у призмы  $Prism_m$ , если  $m$  — четно, и у антипризмы  $APrism_m$ , если  $m$  — нечетно. ■

Оба понятия двойственности (внутренней и внешней) переносятся и на случай  $(r, q)_{gen}$ -полициклов. Например, верны равенства:

$$\begin{aligned} Inn^*(snub Prism_m) &= APrism_m \quad \text{и} \\ Inn^*(snub APrism_m) &= snub Prism_m. \end{aligned}$$

В общем случае  $(r, q)_{gen}$ -полицикл необязательно допускает гомоморфизм в  $\{r, q\}$ , поскольку  $(r, q)_{gen}$ -полициклы могут быть неодносвязными. Но иногда такой гомоморфизм существует, см. рис. 4.4. Всякая  $(r, q)$ -карта является частным случаем  $(r, q)_{gen}$ -полицикла, в котором степень каждой вершины равняется  $q$ .

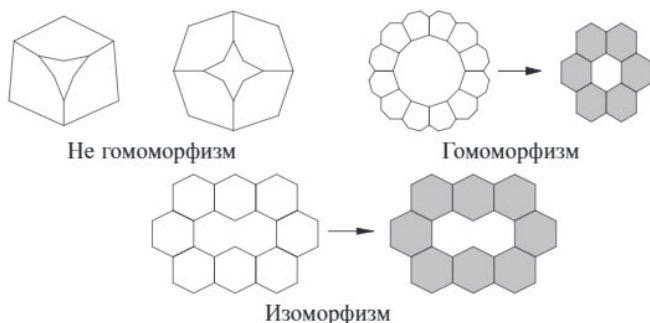


Рис. 4.4. Примеры  $(6, 3)_{gen}$ -полициклов и их гомоморфизмы в  $\{6, 3\}$ , в тех случаях, когда они существуют

В заключение упомянем две структуры, родственные конечным  $(r, q)$ -полициклам. В работе [АгРе90] и в цитируемых там работах (в основном за авторством Перкеля) изучаются *строго многоугольные* графы, т.е. графы с обхватом  $r \geq 3$  и степенью всех вершин  $q$  такие, что любой путь  $P_3$  (по двум ребрам) лежит в единственном  $r$ -цикле этого графа. В [BrWi93, сс. 546–547] рассматриваются эквивелярные<sup>2</sup> многогранники, т.е. многогранные вложения  $(r, q)$ -карты в  $\mathbb{R}^3$  с выпуклыми гранями. Таким образом, в обоих этих случаях графы  $q$ -валентны, имеют обхват  $r$ , характеристику Эйлера–Пуанкаре  $v - e + f = \frac{v(6 - r)}{2r}$  и совпадают с платоновыми телами в случае рода 0. Напомним, что для  $(r, q)$ -полицикла  $P$  любой неограниченный путь  $P_3$  принадлежит единственному  $r$ -циклу.

<sup>2</sup>Авторы используют термин «equivelar». Соответствующий русский термин найти не удалось.

## ГЛАВА 5

# Полициклы с заданной границей

Назовем  $(r, q)$ -граничным кодом конечного  $(r, q)$ -полицикла  $P$  последовательность  $b(P)$  степеней вершин, инцидентных внешней грани (в порядке ее обхода). Эта последовательность рассматривается с точностью до циклического сдвига и обращения. Более ранние применения этого (и других) кодов можно найти в [HeBr87, BCC92, HLZ96, DeGr99, CaHa98, DFG01].

Пусть дан  $(r, q)$ -граничный код  $b$ . Плоский граф  $P$  называется  $(r, q)$ -заполнением кода  $b$ , если  $P$  —  $(r, q)$ -полицикл и  $b = b(P)$ .

В этой главе мы изучим условия, при которых такие  $(r, q)$ -заполнения единственны, и алгоритмы, используемые для их получения.

### 5.1. Проблема единственности $(r, q)$ -заполнений

Если изучить список  $(r, q)$ -полициклов для  $(r, q) = (3, 3), (3, 4), (4, 3)$  из раздела 4.2, то можно заметить, что для таких значений параметров  $(r, q)$ -граничный код  $(r, q)$ -полицикла определяет его однозначно. Можно предположить, что для любой другой пары  $(r, q)$  это не будет выполняться.

Мы покажем, что значения  $r = 3, 4$  — единственные, для которых  $(r, 3)$ -граничный код всегда определяет  $(r, 3)$ -заполнение однозначно. Заметим, что  $(r, q)$ -полицикл, являющийся неединственным заполнением своего граничного кода, обязательно должен быть гелицеком. Некоторые примеры неединственности  $(r, 3)$ -заполнения соответствуют случаям, когда граница  $b$  допускает  $(r, 3)$ -заполнение  $P$  такое, что группа симметрии граничного кода  $b$  больше, чем группа симметрии полицикла  $P$ , что и приводит к существованию нескольких различных  $(r, 3)$ -заполнений. Однако с ростом длины границы число вариантов растет, см. [DeSt06].

**Теорема 5.1.1.** *Для любого  $r \geq 5$  существует  $(r, 3)$ -граничная последовательность  $b$  такая, что существуют  $(r, 3)$ -заполнения  $P$  и  $P'$ ,  $P \neq P'$  и  $b(P) = b(P') = b$ . Например:*



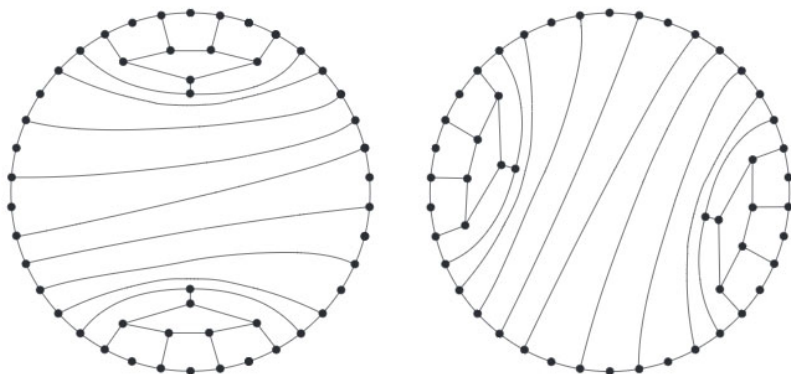


Рис. 5.1. Два различных (но изоморфных как карты)  $(5,3)$ -заполнения одной  $(5,3)$ -границы

- (i) если  $r = 5$ , тогда можно взять  $b_5 = u3u3^4u3u3^4$ , где  $u = 3232323$ ; данный граничный код имеет длину 38 (см. рис. 5.1);
- (ii) если  $r \geq 6$ , тогда можно положить

$$b_r = u3^{r-1}u2^{r-6}u3^{r-1}u2^{r-6}, \text{ где } u = (32^{r-4})^{r-1}3.$$

Данный граничный код имеет длину  $4r^2 - 12r + 2$ . Среди вершин этой границы,  $6r - 2$  вершины имеют степень 3, а оставшиеся имеют степень 2 (см. рис. 5.2).

$(r, 3)$ -граничный код  $b_r$  может быть заполнен  $4r$   $r$ -угольниками двумя способами, получаемыми друг из друга с помощью зеркальной симметрии.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для всех граничных кодов, указанных в теореме, группа симметрии — это группа  $C_{2\nu}$  из четырех элементов. Далее, заполнения на рис. 5.1 и 5.2 для  $p = 5, 6, 7$  имеют группу симметрии  $C_2$ , порядок которой равен 2. На самом деле, это верно для любого  $b_r$ , если  $r \geq 5$ . Таким образом, у  $(r, 3)$ -граничного кода  $b_r$  есть по крайней мере два заполнения, которые изоморфны как карты, но различны. Это доказывает, что  $(r, q)$ -граничный код  $b_r$  не определяет  $(r, 3)$ -заполнение однозначно. ■

Главную трудность в доказанной теореме составляет поиск последовательности  $b_r$ . Представляется вероятным, что наши примеры являются минимальными по числу  $r$ -угольников в соответствующих им заполнениях.

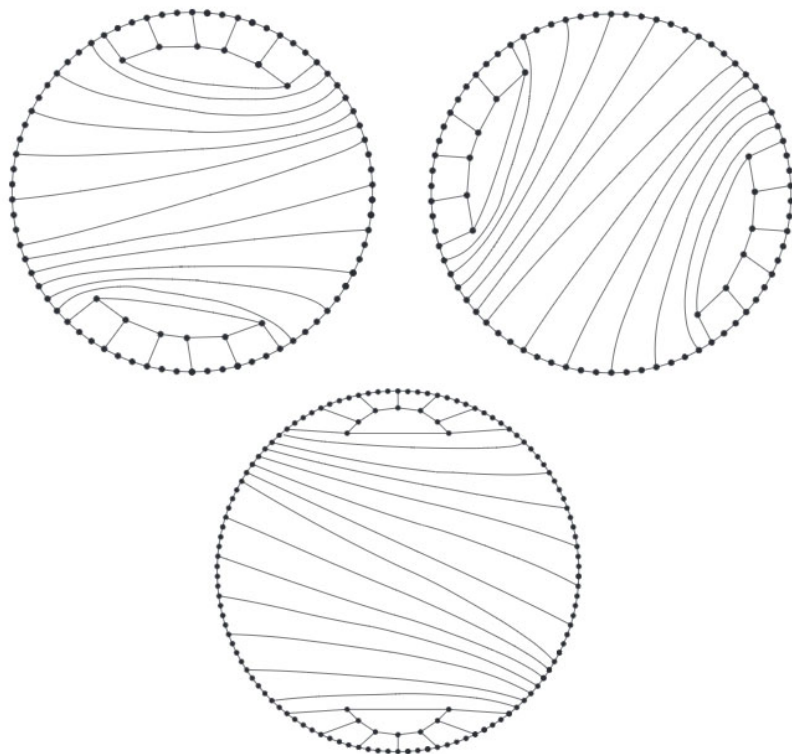


Рис. 5.2. Два различных (но изоморфных как карты)  $(6, 3)$ -заполнения одной  $(6, 3)$ -границы; левое и нижнее заполнения — первые примеры при  $r = 6, 7$  из бесконечной серии  $(r, 3)$ -заполнений, которые не определяются однозначно своей границей

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1.2.  $(3, 5)$ -граничный код  $(43445544345)^2$  допускает два различных  $(3, 5)$ -заполнения (с 36 3-угольниками и 30 вершинами), показанных на рис. 5.3. Эти заполнения изоморфны и обладают группой симметрии  $C_2$ , тогда как граница имеет группу симметрии  $C_{2\nu}$ , как и в теореме 5.1.1.

$(3, 5)$ -граничный код  $(34345)^2 5^2 (34345)^2 5^2$  допускает два различных  $(3, 5)$ -заполнения (с 34 3-угольниками и 30 вершинами), показанных на рис. 5.4. Эти заполнения неизоморфны и имеют ту же группу симметрии, что и граница, т.е.  $C_2$ . Эти  $(3, 5)$ -граничные последовательности, вероятно, минимальны по количеству 3-угольников.

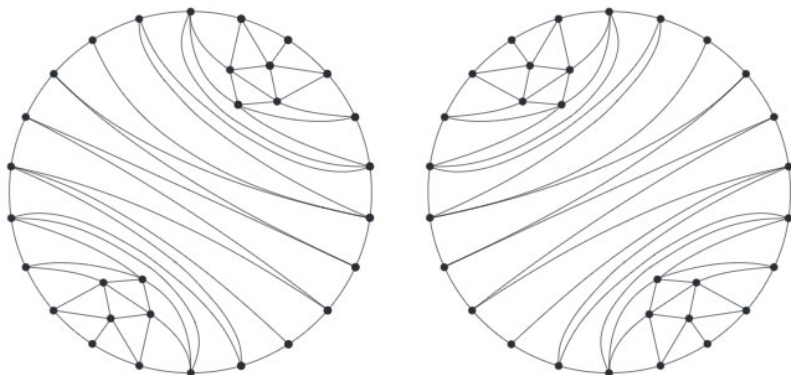


Рис. 5.3. Два различных (изоморфных как карты)  $(3, 5)$ -заполнения одной границы

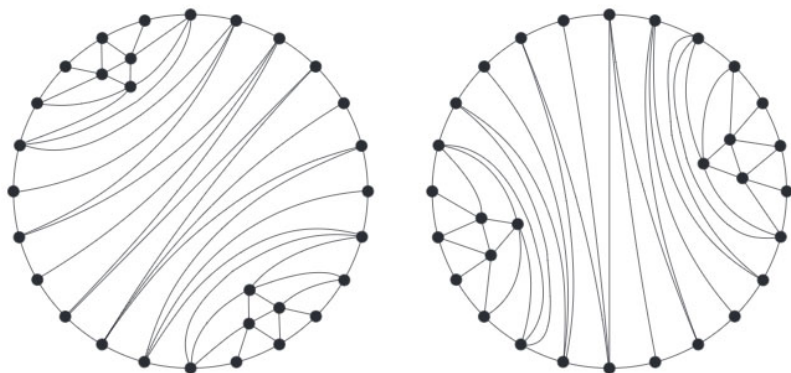


Рис. 5.4. Два различных неизомерфных  $(3, 5)$ -заполнения (с группой симметрии  $C_2$ ) одной границы с группой симметрии  $C_2$

В случае  $(5, 3)$ -полициклов для любого заданного числа мы можем привести пример  $(5, 3)$ -граничного кода, который допускает ровно такое число заполнений. Это утверждение и его доказательство используют элементарные полициклы, которые обсуждаются в главе 7 (а именно, полициклы  $E_1$ ,  $C_1$  и  $C_3$  из рис. 7.2).

### Теорема 5.1.3.

$(5, 3)$ -граничный код  $b(n) = 223^{5n+1}223^{5n+3}223^{5n+1}223^{5n+3}$  допускает ровно  $n + 1$  различные  $(5, 3)$ -заполнения. Каждое такое заполнение

соответствует некоторому числу  $k$ ,  $0 \leq k \leq n$ , где  $k$ -ое заполнение получается склейкой двух элементарных  $(5, 3)$ -полициклов  $E_1$  и добавлением к четырем открытым ребрам из  $E_1 + E_1$  цепей, состоящих соответственно из  $k$ ,  $n - k$ ,  $k$  и  $n - k$  элементарных полициклов  $C_1$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Нам достаточно доказать, что не существует заполнений, кроме  $n + 1$  упомянутых. Во-первых, поскольку все возможные подпоследовательности из двоек имеют вид 22, то единственные возможные элементарные полициклы — это  $E_1$ ,  $C_1$  или  $C_3$ . Во-вторых, так как рассматриваемый  $(5, 3)$ -граничный код содержит 4 подпоследовательности из двоек, общее количество  $(5, 3)$ -полициклов  $E_1$  и  $C_3$  равно 2.

Добавление  $(5, 3)$ -полицикла  $C_1$  к существующему  $(5, 3)$ -полициклу добавляет в граничный код символ  $3^5$  в двух местах. Три возможных случая  $E_1 + E_1$ ,  $E_1 + C_3$ ,  $C_3 + C_3$  соответствуют  $(5, 3)$ -граничным кодам  $223^1 223^3 223^1 223^3$ ,  $223^2 223^4 223^1 223^4$  и  $223^2 223^5 223^2 223^5$  соответственно. Сравнивая показатели по модулю 5, видим, что единственный подходящий вариант — это  $E_1 + E_1$ . Несложно понять, что полицикл  $C_1$  не может находиться между двумя полициклами  $E_1$  и что количество полициклов  $C_1$ , приклеенных к четырем открытым ребрам (т. е. ребрам, соединяющим вершины степени 2), равно  $k$ ,  $n - k$ ,  $k$  и  $n - k$ . ■

### Гипотеза 5.1.4.

- (i) Если количество  $r$ -угольников  $(r, 3)$ -полицикла строго меньше  $4r$ , то он однозначно определяется своим  $(r, 3)$ -граничным кодом. Это утверждение доказано при  $r = 6$  ([GHZ02]) и  $r = 5$  ([DeSt06]).
- (ii) Пусть  $b_r$  — граничный код из теоремы 5.1.1, тогда для него не существует ни  $(r', 3)$ -заполнения, где  $r' > r$ , ни  $(r, q)$ -заполнения при  $q > 3$ .

Назовем  $(r, q)$ -граничный код *неоднозначным*, если он допускает хотя бы два различных  $(r, q)$ -заполнения. Назовем неоднозначный граничный код *неприводимым*, если никакое его  $(r, q)$ -заполнение не содержит, как индуцированный полицикл,  $(r, q)$ -заполнений других неоднозначных  $(r, q)$ -граничных кодов.

Количество неприводимых неоднозначных  $(5, 3)$ -граничных кодов равно 0, 1, 3, 17 при  $p_5 < 20, 21, 22, 23$  соответственно (см. [DeSt06], где такие полициклы называются *эквиграничными полипентагонами*).

Неоднозначный  $(5, 3)$ -граничный код для  $p_5 = 20$  — это  $(2323233^5 2323233^2)^2$ . Неприводимые неоднозначные  $(5, 3)$ -граничные последовательности для  $p_5 = 21$  перечислены ниже в таблице.



$b$	$ b $	$Aut(b)$	Кол-во заполнений	Изоморф- ность
$3^2 232323^6 2323^4 2323^6 232323$	35	$C_8$	2	да
$3^2 232323^6 23^2 2^2 3^4 232323^6 232323$	39	$C_1$	2	нет
$3^2 232323^7 2^2 3^2 23^3 232323^6 232323$	39	$C_1$	2	нет

Здесь  $|b|$  — это длина кода,  $Aut(b)$  — группа автоморфизмов. Мы указываем, изоморфны ли полученные заполнения. На рис. 5.5 изображен  $(6, 3)$ -полицикл,  $(6, 3)$ -граничный код которого допускает восемь различных  $(6, 3)$ -заполнений. Обобщая примеры из теоремы 5.1.1, можно получить  $(r, 3)$ -границу, допускающую сколь угодно большое количество заполнений. Далее, добавляя один  $r$ -угольник к примеру из теоремы 5.1.1, можно получить  $(r, 3)$ -границы, допускающие два неизоморфных  $(r, 3)$ -заполнения.

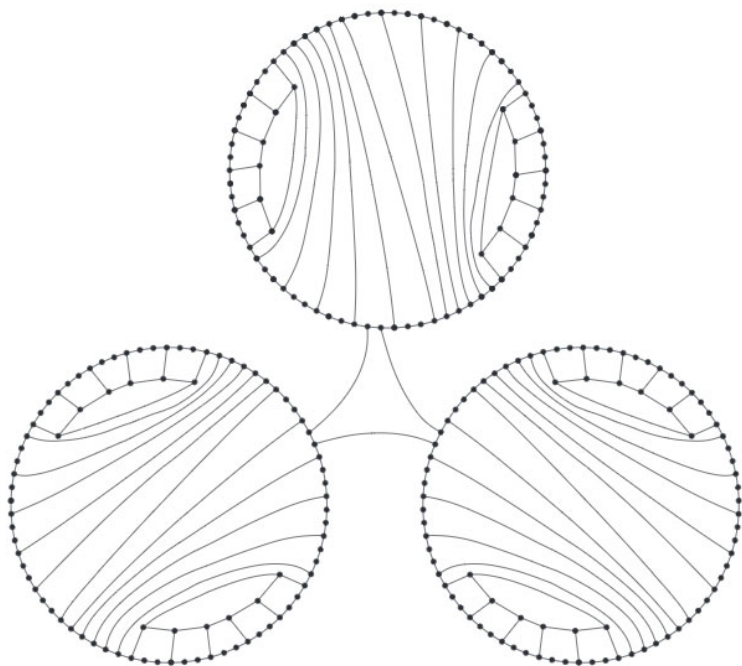


Рис. 5.5. Несколько неизоморфных  $(6, 3)$ -заполнений одной  $(6, 3)$ -границы

Заметим, что если два  $(r, q)$ -полицикл имеют одинаковую  $(r, q)$ -границу, тогда их образы при клеточном гомоморфизме в  $\{r, q\}$  совпадают. Более того, в [Gra03] доказывается, что если образ  $(6, 3)$ -полицикла не покрывает какую-либо точку трижды, то  $(6, 3)$ -граничный код определяет этот  $(6, 3)$ -полицикл однозначно.

## 5.2. Алгоритмы построения $(r, 3)$ -заполнения

Алгоритмическая задача, решаемая здесь, формулируется так: для данной  $(r, 3)$ -границы найти все ее  $(r, 3)$ -заполнения.

**Теорема 5.2.1.** Пусть  $P$  —  $(r, 3)$ -полицикл. Обозначим через  $x$  количество внутренних вершин полицикла  $P$ , а за  $p_r$  — количество его  $r$ -угольных граней. Обозначим через  $v_2, v_3$  число вершин на  $(r, 3)$ -границе степеней 2, 3 соответственно; тогда выполняется

$$\begin{cases} p_r - \frac{x}{2} = 1 + \frac{v_3}{2}, \\ rp_r - 3x = v_2 + 2v_3. \end{cases} \quad (5.1)$$

Более того, выполнено:

- (i) если  $r \neq 6$ , то  $x = \frac{2(v_2 - r) - (r - 4)v_3}{r - 6}$  и  $p_r = \frac{v_2 - v_3 + 5}{r - 6}$ ;
- (ii) если  $r = 6$ , то  $v_2 = v_3 + 6$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Количество ребер  $e$  удовлетворяет равенству  $2e = v_2 + v_3 + rp_r = 2v_2 + 3v_3 + 3x$ , откуда имеем  $rp_r - 3x = v_2 + 2v_3$ . Из формулы Эйлера  $v - e + f = 2$ , где  $v = v_2 + v_3 + x$  и  $f = 1 + p_r$ , следует, что  $p_r - \frac{x}{2} = 1 + \frac{v_3}{2}$ .

Система линейных уравнений (5.1) имеет единственное решение в случае  $r \neq 6$ , откуда получаем (i). Часть (ii) очевидна. ■

На самом деле, при  $r = 6$   $(r, 3)$ -граница тоже однозначно определяет количество  $r$ -угольников (см. [GHZ02, BDvN06]).

Основная идея алгоритма построения  $(r, 3)$ -заполнения состоит в следующем. Пусть  $b$  —  $(r, 3)$ -граница,  $x$  и  $y$  — две последовательные вершины степени 3 на ней. Рассмотрим всевозможные способы добавления  $r$ -угольной грани к этой паре вершин. При добавлении  $r$ -угольной грани возникают следующие два варианта (см. рис. 5.6):

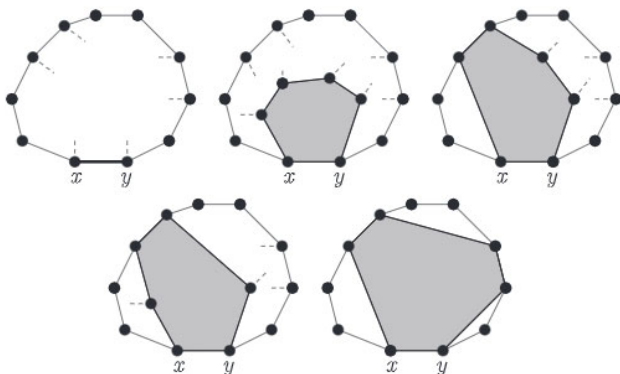


Рис. 5.6. Несколько возможных способов добавления 6-угольника между двумя вершинами  $x$  и  $y$  степени 3 на  $(6, 3)$ -границе

- либо новый  $r$ -угольник не делит  $(r, 3)$ -границу на различные компоненты;
- либо он делит  $(r, 3)$ -границу на две или более компоненты.

Выбрав вершины  $x$  и  $y$ , рассмотрим оба случая. Далее применим алгоритм для оставшихся частей границы до тех пор, пока не получим  $(r, 3)$ -полицикл.

Время, затрачиваемое на перебор случаев, зависит от порядка, в котором они рассматриваются. Мы выбираем пару  $x, y$  с наименьшим числом вариантов для перебора.

В частности, если  $(r, 3)$ -граничный код содержит выражение  $2^{r-1}$  или  $2^{r-2}$ , то существует единственный способ добавления ребра; таким образом, мы свели задачу к меньшей без перебора (см. рис. 5.7).

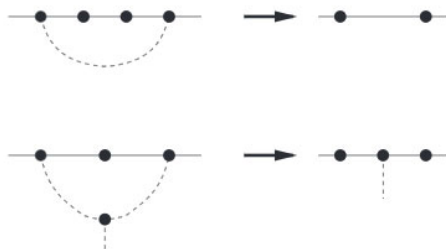


Рис. 5.7. Единственный способ добавления при  $r = 4$

Другой способ ускорения вычислений состоит в том, чтоб сразу отсекал случаи  $(r, 3)$ -границ  $b$ , заведомо не допускающих  $(r, 3)$ -заполнений. Здесь применимы два критерия.

- Использовать теорему 5.2.1, чтобы подсчитать количество внутренних вершин и граней. Если они оказываются отрицательными или нецелыми, тогда  $(r, 3)$ -граница непродолжима. Это — глобальный критерий.
- Если пара последовательных вершин степени 3 на  $(r, 3)$ -границе не допускает продолжения с помощью  $r$ -угольника, т. е. расстояние между ними менее  $r - 1$ , тогда  $(r, 3)$ -граница непродолжима. Это — локальный критерий.

Используя эти два метода, можно найти все  $(r, 3)$ -заполнения заданной  $(r, 3)$ -границы. Время работы алгоритма, скорее всего, будет неполиномиальным; если длина  $(r, 3)$ -границы увеличивается, число случаев, которые необходимо рассмотреть, быстро растет, и эффективность приведенных выше критериев ограничена. Тем не менее при  $r \neq 6$  этот алгоритм гарантированно завершится, так как известно, сколько должно получиться  $r$ -угольников. Проверить, соответствует ли  $(r, q)$ -граница собственному  $(r, q)$ -полициклу, еще проще. Всякая  $(r, q)$ -граничная последовательность определяет путь в  $\{r, q\}$ , и этот путь должен быть замкнут; это условие легко проверяется. Второе и достаточное условие состоит в том, что этот путь должен быть несамопересекающимся. Оба эти условия могут быть проверены за полиномиальное время.





## ГЛАВА 6

# Симметрии полициклов

Напомним, что группа  $Aut(P)$  автоморфизмов  $(r, q)$ -полицикла  $P$  — это группа автоморфизмов плоского графа, сохраняющих множество внутренних граней (см. раздел 4.1). Назовем полицикл  $P$  *изотоксальным*, *изогональным* или *изоэдральным*, если  $Aut(P)$  действует транзитивно на ребрах, вершинах или гранях соответственно. В данной главе мы сначала рассмотрим возможные группы автоморфизмов  $(r, q)$ -полицикла, а потом перечислим все изогональные и изоэдральные полициклы для эллиптических значений параметров  $(r, q)$  и приведем общий алгоритм для их перечисления. Также мы поставим задачу отыскания всех изогональных и изоэдральных  $(r, q)_{gen}$ -полициклов.

### 6.1. Группа автоморфизмов $(r, q)$ -полициклов

Если  $(r, q)$ -полицикл  $P$  конечен, то он имеет простую границу и  $Aut(P)$  содержит только повороты и отражения. Таким образом, порядок этой группы делит  $2r$ ,  $4$  или  $2q$ , в зависимости от того, что  $Aut(P)$  оставляет неподвижным: центр  $r$ -угольника, середину ребра или вершину.

Для всех  $(3, 3)$ -,  $(3, 4)$ -,  $(4, 3)$ -полициклов группа  $Aut(P)$  нетривиальна, но при любых других  $(r, q)$  она тривиальна почти для всех  $(r, q)$ -полициклов.

Количество *хиральных* (т. е. тех, для которых  $Aut(P)$  состоит только из поворотов и параллельных переносов) собственных  $(5, 3)$ - и  $(3, 5)$ -полициклов равно  $12$  и  $208$  (из  $39$  и  $263$ , соответственно).

Для данного  $(r, q)$ -полицикла  $P$  рассмотрим клеточный гомоморфизм  $\phi$  из  $P$  в  $\{r, q\}$ , описанный в разделе 4.3. Он отображает группу  $Aut(P)$  в группу  $Aut(\{r, q\}) = T^*(l, m, n)$ . Образ  $\phi(Aut(P))$  состоит из автоморфизмов  $\phi(P)$ . Если  $P$  — собственный полицикл, тогда  $Aut(P)$  совпадает с  $Aut(\phi(P))$ . В противном случае  $Aut(P)$  есть расширение  $Aut(\phi(P))$  при помощи ядра этого гомоморфизма.

Только  $t$ -угольники и неплатоновы паркеты плоскости  $\{r, q\}$  являются изотоксальными; соответствующие им группы автоморфизмов —  $C_{tv}$  и  $T^*(2, r, q)$ . В случае пяти платоновых тел группа  $Aut(\{r, q\} - f)$  равна  $C_{tv}$ ; никакие из полициклов  $\{r, q\} - f$  не являются изотоксальными, изогональными или изоэдрическими, за исключением  $(3, 3)$ -звезды  $\{3, 3\} - f$ , которая является изоэдрической.

Мы будем называть множество из  $q$  экземпляров  $t$ -угольников с общей вершиной  $(r, q)$ -звездой из  $t$ -угольников.

## 6.2. Изоэдральные и изогональные $(r, q)$ -полициклы

**Теорема 6.2.1.** Пусть  $P$  — изоэдральный  $(r, q)$ -полицикл; тогда выполняется следующее.

- (i) Все  $t$ -угольники в полицикле  $P$  имеют одно и то же число неграничных ребер (мы обозначаем это число через  $t$ ).
- (ii) При  $t = 0, r$  или  $1$  полицикл  $P$  является соответственно  $t$ -угольником, неэллиптическим паркетом  $\{r, q\}$  или парой смежных  $t$ -угольников (с  $Aut(P) = C_{2v}$ ).
- (iii) Если  $t = 2$ , то  $P$  — либо  $(r, q)$ -звезда, либо бесконечный внешнепланарный полицикл.
- (iv) Если  $t \geq 3$ , то  $P$  бесконечен.

### Теорема 6.2.2.

- (i) Пусть дана пара  $(r, q)$ . Тогда количество изоэдральных  $(r, q)$ -полициклов конечно. Более того, оно ограничено функцией, зависящей только от  $r$ .
- (ii) Если  $P$  — изогональный  $(r, q)$ -полицикл, то он является либо  $t$ -угольником, либо неэллиптическим паркетом  $\{r, q\}$ , либо бесконечным внешнепланарным полициклом, а внешне-двойственный к нему полицикл  $Out^*(P)$  (если рассматривать  $P$  как  $(r, q+1)$ -полицикл) является изоэдральным бесконечным  $(q+1, r)$ -полициклом.

**Доказательство.** Рассмотрим изоэдральный  $(r, q)$ -полицикл  $P$ , пусть  $F$  — некоторая его грань. Группа автоморфизмов  $t$ -угольника —

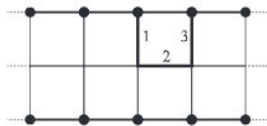
это группа диэдра  $C_{r\nu}$ ; стабилизатор  $Stab(F)$  грани  $F$  в  $P$  является подгруппой  $C_{r\nu}$ . Так как  $C_{r\nu}$  конечна, существует конечное число вариантов для  $Stab(F)$ . Грань  $F$  смежна в  $P$  с  $r$ -угольными гранями  $F_1, \dots, F_t$ . В силу изоэдральности для каждого  $i$  существует преобразование  $\phi_i$  полицикла  $P$ , отображающее  $F$  в  $F_i$ . Это преобразование единственно с точностью до элемента  $Stab(F)$ . Очевидно, что существуют не более  $2r$  возможных преобразований  $\phi_i$ . Действительно,  $\phi_i$  однозначно определяется по образу флага  $(v, e, F)$ , а этот образ может быть выбран  $2r$  способами. Таким образом, доказана конечность. Более того, количество возможных вариантов  $Stab(F)$  зависит только от  $r$ ; поэтому и количество изоэдральных  $(r, q)$ -полициклов ограничено функцией, зависящей только от  $r$ .

Если  $P$  — изогональный  $(r, q)$ -полицикл, то либо никакая вершина не лежит на границе (т. е. у  $P$  нет границы), либо каждая вершина принадлежит границе и  $P$  является внешнепланарным. Если  $P$  — внешнепланарный, то его можно рассматривать как  $(r, q+1)$ -полицикл и, таким образом, внешне-двойственный к нему полицикл определен и является изоэдральным. ■

Пусть дана пара  $(r, q)$ . Из доказанной теоремы мы знаем, что множество изоэдральных  $(r, q)$ -полициклов конечно, но данная теорема не дает точного способа их нахождения. Для этого может быть применен следующий метод. Пусть дан  $r$ -угольник  $F$  из  $P$ . Тогда мы находим преобразования, которые отображают грань  $F$  в смежные с ней  $r$ -угольники. После этого нужно проверить, согласованы ли эти преобразования. Односвязность гарантирует, что эти локальные условия будут на самом деле глобальными (см. доказательство в [Dre87]). Окончательный перебор выполняется на компьютере с использованием исчерпывающих схем подсчета (см. [Du07]).

**Теорема 6.2.3.** *Для любого  $r$  существует изоэдральный  $(r, 4)$ -полицикл, имеющий ровно одно граничное ребро в каждом  $r$ -угольнике.*

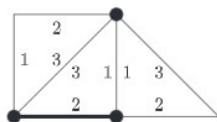
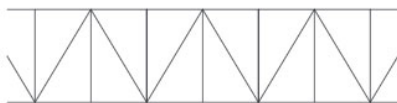
**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Возьмем  $r$ -угольник  $F$  и выберем в нем  $r-1$  ребро. Для каждого из этих ребер определим осевую симметрию, отражающую  $r$ -угольник относительно этого ребра; ниже изображены осевые симметрии относительно ребер 1, 2 и 3 в случае  $r=4$ .





У этого  $r$ -угольника ровно  $r - 2$  внутренних вершины и все указанные отображения согласованы вокруг этих вершин. Таким образом, они дают изоэдральный  $(r, 4)$ -полицикл. ■

Для неэллиптических значений параметров  $(p, q)$  изоэдральный  $(r, q)$ -полицикл трудно изобразить на рисунке, так как количество вершин на расстоянии  $r$  от данной растет очень быстро и нам нужно рисовать все меньшие и меньшие грани. Сжатое изображение (см. теоремы 6.2.5 и 6.2.6 ниже) имитирует компьютерное представление таких полициклов: оно состоит из одного  $r$ -угольника  $F$  и  $r$ -угольников  $F_i$ , смежных с ним. Граничные ребра и вершины выделены жирным. Ребра  $F$  пронумерованы по порядку, нумерация ребер смежных  $r$ -угольников  $F_i$  получается симметрией (в общем случае определенной неоднозначно), переводящей  $F$  в  $F_i$ . Стабилизатор  $Stab(F)$   $r$ -угольника  $F$  — это точечная группа симметрии, тип которых указан на рисунке ниже. Ниже изображен бесконечный  $(3, 5)$ -полицикл и соответствующий ему код:



Подобным образом можно изображать и изогональные  $(r, q)$ -полициклы.

Другой способ получить наглядное представление  $(r, q)$ -полицикла состоит в рассмотрении фактора  $\tilde{P}$   $(r, q)$ -полицикла  $P$  по подгруппе группы  $Aut(P)$ . Изобразить  $\tilde{P}$  оказывается проще, а полицикл  $P$  после этого получается как универсальное накрытие  $(r, q)_{gen}$ -полицикла  $\tilde{P}$ . См. на рис. 6.3 два примера такого представления.

С использованием алгоритма из теоремы 6.2.2 в [DeSt00b] были найдены все изоэдральные эллиптические полициклы (см. рис. 6.1): 11 конечных, 7 бесконечных, группы автоморфизмов для которых являются группами бордюра<sup>1</sup>, и  $(5, 3)$ -полицикл, для которого  $Aut(P) = T^*(2, 3, \infty)$ .

Существует 9 эллиптических изогональных  $(r, q)$ -полициклов: все три  $r$ -угольника (дающие пять полициклов),  $Prism_\infty$ ,  $APrism_\infty$  (дающая два полицикла) и изогональный  $(3, 5)$ -полицикл, изображенный на рис. 6.3.

Упомянем теперь некоторые результаты, касающиеся существования и классификации изоэдральных  $(r, q)$ -полициклов, полученные с использованием описанного выше формализма.

<sup>1</sup>См. раздел 1.4.

























$Aut(P) \backslash (r, q)$	$(3, 3)$	$(3, 4)$	$(4, 3)$	$(3, 5)$	$(5, 3)$
$C_{r\nu} \simeq T(2, 2, r)$	 3-угольник	 3-угольник	 4-угольник	 3-угольник	 5-угольник
$C_{2\nu} \simeq T(2, 2, 2)$					
$C_{q\nu} \simeq T(2, 2, q)$	 (3, 3)-звезда	 (3, 4)-звезда	 (4, 3)-звезда	 (3, 5)-звезда	 (5, 3)-звезда
$pm11 \simeq T(2, 2, \infty)$					
$pmm2 = T^*(2, 2, \infty)$			 $Prism_\infty$		
$pma2 = T(2, 2, \infty)$		 $APrism_\infty$		 $APrism_\infty$  $APrism_\infty$	   курносая $Prism_\infty$
$T^*(2, 3, \infty) \simeq SL(2, \mathbb{Z})$					

Рис. 6.1. Все 19 изоэдральных эллиптических  $(r, q)$ -полициклов; только  $r$ -угольники и  $Prism_\infty$ ,  $APrism_\infty$  являются изогональными (оставшийся девятый эллиптический изогональный полицикл изображен справа на рис. 6.3)

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2.4. Если  $(r, q)$ -полицикл является собственным, то можно рассматривать группу его комбинаторных преобразований как группу изометрий его образа в паркете  $\{r, q\}$ . Если же  $(r, q)$ -полицикл является гелиценом, то это невозможно; см., например, бесконечные эллиптические изоэдральные  $(r, q)$ -полициклы на рис. 6.1. К сожалению, мы не знаем никакого практического метода, позволяющего определить, является ли данный бесконечный  $(r, q)$ -полицикл собственным.

**Теорема 6.2.5.** Все изоэдральные  $(3, q)$ -полициклы при  $q \geq 3$  это:

- (i) 3-угольник (изогональный), паркет  $\{3, q\}$  (изогональный), пара смежных 3-угольников и  $(3, q)$ -звезда;
- (ii) при  $q \geq 4$  — антипризма  $APrism_\infty$  (изогональная); при  $q \geq 5$  — бесконечный неизогональный  $(3, 5)$ -полицикл, изображенный на рис. 6.1.

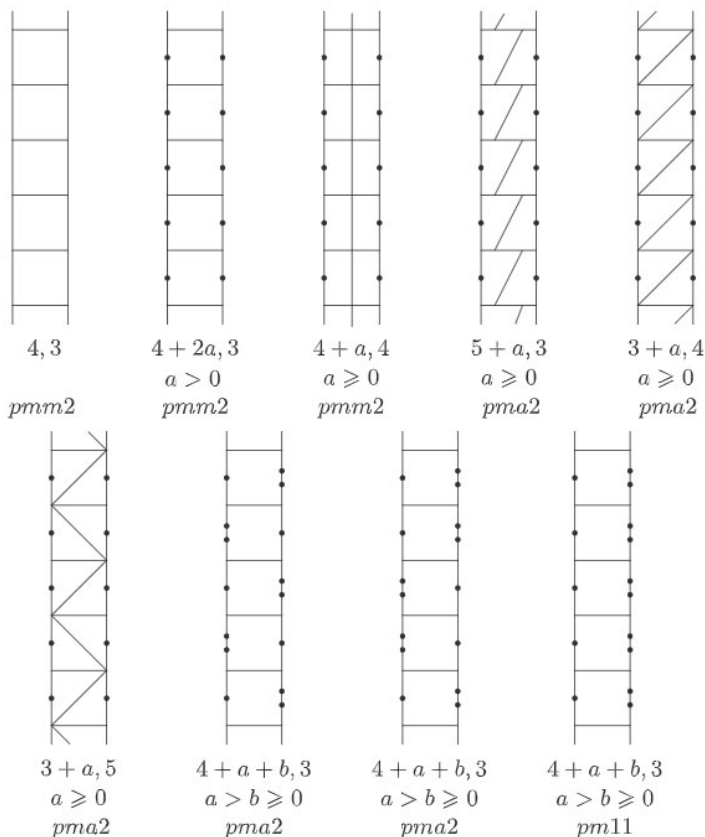
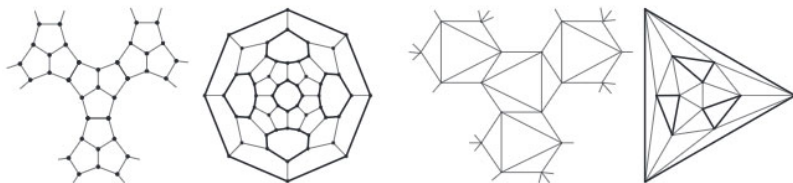


Рис. 6.2. Предположительно полный список из восьми семейств изоэдральных  $(r, q)$ -полициклов, группы симметрий которых являются группами бордюра, представленных как декорированные  $Prism_\infty$  (только первое и пятое семейства, при  $a = 0$ , являются изогональными)



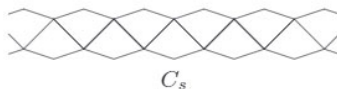
Изоэдральный  $(5, 3)$ -полицикл с группой симметрии  $T^*(2, 3, \infty)$

Изогональный  $(3, 5)$ -полицикл с группой симметрии  $T(2, 3, \infty)$

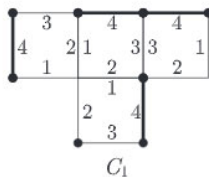
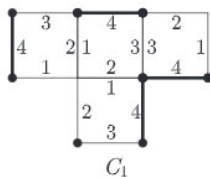
Рис. 6.3. Два примера бесконечных  $(r, q)$ -полициклов с  $(r, q)_{gen}$ -полициклом для каждого из них, полученным факторизацией (строгий регулярный № 58 и икосаэдр с выделенными жирным шестью и четырьмя дырками соответственно)

**Теорема 6.2.6.** Все изоэдральные  $(4, q)$ -полициклы при  $q \geq 3$  это:

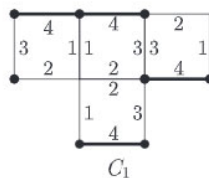
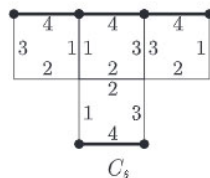
- (i) 4-угольник (изогональный), паркет  $\{4, q\}$  (изогональный), пара смежных 4-угольников и  $(4, q)$ -звезда;
- (ii) при  $q \geq 3$  и  $q \geq 4$  — следующие внешнепланарные  $(4, 3)$ -полицикл и  $(4, 4)$ -полицикл соответственно:



- (iii) при  $q \geq 4$  и  $q \geq 5$  — следующие  $(4, q)$ -полициклы соответственно:

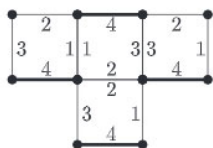
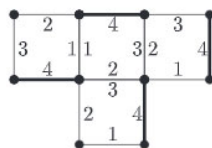


- (iv) при четных  $q \geq 4$  и  $q \geq 6$  — следующие  $(4, q)$ -полициклы соответственно:

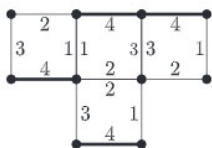
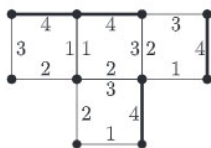




(v) при  $q \geq 5$  — следующие три внешнепланарные  $(4, 5)$ -полициклы:

 $C_1$  $C_s$ , изогональный $C_1$ , изогональный

(vi) при  $q \geq 7$  — следующие два внешнепланарные  $(4, 7)$ -полициклы:

 $C_1$  $C_1$ 

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Доказательство состоит в переборе всех возможных случаев. Это то же самое, что и исполнение компьютерной программы; так что мы ссылаемся на саму программу. ■

Очевидно, что  $y$  и  $z$ , введенные в таблице 6.1, являются неубывающими функциями  $q$  и  $z \leq \min(x, y)$ . Из теоремы 6.2.5 следует, что если  $r = 3$  и  $q \geq 4$ , то  $z = 1$ , и эта величина реализуется в случае антипризмы  $APrism_\infty$ , рассматриваемой как  $(3, q)$ -полицикл.

### Гипотеза 6.2.7.

- (i) Если  $r$  нечетно, то  $y = z = 0$  при  $3 \leq q \leq r$ ,  $y = z > 0$  при  $q = r + 1$  и  $y > z > 0$  в остальных случаях.
- (ii) Если  $r$  четно, то  $y > z > 0$  при  $q \geq 4$  и  $y = z = 1$  для  $q = 3$ ; этот случай реализуется  $(r, 3)$ -кактусом (бесконечным  $(r, 3)$ -полициклом, получаемым разрастанием из  $r$ -угольника, т. е. добавлением  $r$ -угольника к  $\frac{r}{2}$  попарно несмежным ребрам, см. два изображения  $(6, 3)$ -кактуса на рис. 6.3).

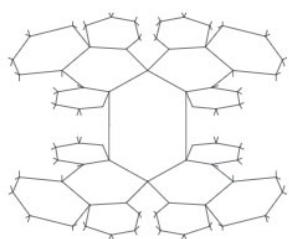
Подсчет количества изогдральных  $(r, q)$ -полициклов, приведенный в таблице 6.1, показывает, что полная их классификация очень трудна. Заметим, что данный алгоритм дает список изогдральных  $(r, q)$ -полициклов,

Таблица 6.1. Тройки  $(x, y, z)$  количества  $x$  изоэдральных,  $y$  изогональных,  $z$  изоэдральных и изогональных  $(r, q)$ -полициклов, отличающихся от  $r$ -угольника и паркета  $\{r, q\}$ , для  $r, q \leq 8$

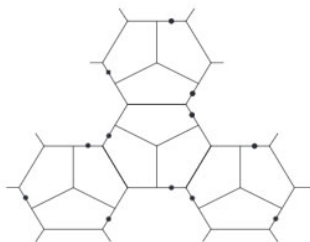
$r \downarrow q \rightarrow$	3	4	5	6	7	8
3	2, 0, 0	3, 1, 1	4, 2, 1	4, 3, 1	4, 6, 1	4, 11, 1
4	3, 1, 1	6, 3, 1	9, 8, 3	11, 21, 3	11, 53, 3	13, 137, 3
5	7, 0, 0	17, 0, 0	24, 0, 0	38, 5, 5	37, 13, 5	51, 19, 5
6	12, 1, 1	45, 4, 3	67, 11, 3	130, 24, 3	123, 87, 20	196, 234, 20
7	28, 0, 0	157, 0, 0	257, 0, 0	518, 0, 0	452, 0, 0	896, 60, 60
8	58, 1, 1	486, 3, 1	894, 11, 6	2095, 35, 6	1781, 119, 6	3823, 367, 6

но не их группы. С помощью компьютера возможно получить описание этих групп в виде набора образующих и соотношений. Но группы, описанные образующими и соотношениями заслужили дурную славу в теории групп, так как для них *неразрешимы* даже простейшие вопросы (т. е. не существует алгоритма, который может ответить на эти вопросы в общем случае, введение в эту тему см. в [Coo04]). Этот факт делает сравнение полученных групп с известными чем-то вроде искусства. На рис. 6.4 изображен изоэдральный  $(6, 3)$ -полицикл (полученный в [DeSt01] вместе со многими другими примерами), группа автоморфизмов которого  $\mathbb{Z}^3 \times T^*(\infty, \infty, \infty)$  не является группой Коксетера.

Также можно рассматривать  $k$ -изотоксальные,  $k$ -изогональные и  $k$ -изоэдральные  $(r, q)$ -полициклы, т. е.  $(r, q)$ -полициклы с  $k$  орбитами ребер, вершин и граней соответственно. Свойство конечности также сохраняется, и компьютерный перебор все еще будет возможен, но количество вариантов для перебора будет гораздо больше, и сложность вычислений неизвестна.



Изоэдральный изогональный  $(6, 4)$ -полицикл



Изоэдральный  $(6, 3)$ -полицикл с группой симметрии, не являющейся группой Коксетера

Рис. 6.4. Два изоэдральных  $(r, q)$ -полицикла

Восемь семейств изодральных  $(r, q)$ -полициклов, группы автоморфизмов которых являются группами бордюра, показаны на рис. 6.2; для всех них  $q = 3, 4$ . Точки на ребрах показывают вершины степени 2 изображенных полициклов, порождающие эти семейства. Мы предполагаем, что не существует никаких других изодральных  $(r, q)$ -полициклов с группой автоморфизмов, являющейся группой бордюра.

Для любого  $r \geq 5$  существует континуум квази-изодральных полициклов, т. е. неизодральных полициклов, все  $r$ -угольники которых имеют одинаковую корону, т. е. цикл смежных граней. Действительно, пусть  $T$  — бесконечный в обе стороны путь из правильных  $r$ -угольников такой, что для любого из  $r$ -угольников его ребра, смежные с соседними  $r$ -угольниками, находятся на расстоянии  $\left\lfloor \frac{r-3}{2} \right\rfloor$ , а последовательность (одного из двух возможных) выборов присоединения каждого нового  $r$ -угольника — непериодическая и не совпадает со своим обращением. Существует континуум таких путей  $T$  для любого  $r \geq 5$ . Любой  $T$  является квази-изодральным и его группа автоморфизмов тривиальна. Путь  $T$  является  $(r, 3)$ -гелиценом при  $r = 5, 6$  и изометрическим собственным полициклом при  $r \geq 7$ .

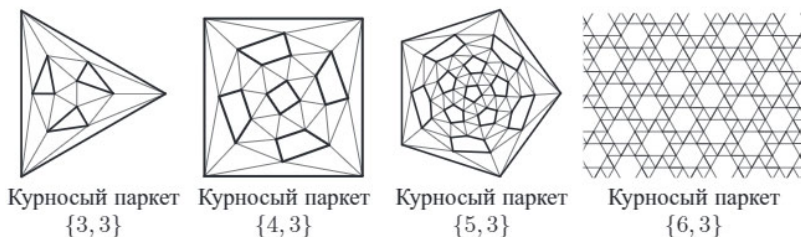
### 6.3. Изодральные и изогональные $(r, q)_{gen}$ -полициклы

Предположение односвязности  $(r, q)$ -полицикла радикально упрощает перечисление изодральных и изогональных полициклов.

Если дан  $(r, q)_{gen}$ -полицикл, являющийся изодральным или изогональным, его универсальное накрытие также будет изодральным или изогональным соответственно. Данный факт позволяет получить способ классификации изодральных и изогональных  $(r, q)_{gen}$ -полициклов: сначала классифицировать односвязные (т. е.  $(r, q)$ -полициклы), а потом взять их факторы по подходящим группам.

Для примера рассмотрим классификацию изогональных  $(3, 5)_{gen}$ -полициклов. Существует три изогональных  $(3, 5)$ -полицикла: 3-угольник, антипризма  $APrism_\infty$  и изогональный  $(3, 5)$ -полицикл, изображенный на рис. 6.3, обозначим его через  $P_{3,5}$ . В случае 3-угольника факторизация невозможна, а факторы  $APrism_\infty$  перечислены в разделе 4.5. Группа автоморфизмов  $Aut(P_{3,5})$  полицикла  $P_{3,5}$  изоморфна модулярной группе  $PSL(2, \mathbb{Z}) \simeq T(2, 3, \infty)$ , а стабилизатор любой его вершины тривиален.

Пусть  $G$  — некоторая группа автоморфизмов  $P_{3,5}$  без неподвижной точки, причем фактор-карта  $P_{3,5}/G$  изогональна. Так как группа автоморфизмов  $P_{3,5}/G$  изоморфна нормализатору  $N_{Aut(P_{3,5})}(G)/G$ , то выполняется  $N_{Aut(P_{3,5})}(G) = Aut(P_{3,5})$ , поскольку стабилизатор любой

Рис. 6.5. Курносый паркет  $\{b, 3\}$  при  $b = 3, 4, 5, 6$ 

вершины тривиален. Таким образом,  $G$  должна быть нормальной подгруппой  $Aut(P_{3,5})$ , чтобы фактор был изогонален. Существует большое количество нормальных подгрупп  $PSL(2, \mathbb{Z})$  без неподвижных точек (см. [New72]) и, таким образом, большое количество изогональных  $(3, 5)_{gen}$ -полициклов.

Один из классов таких полициклов, назовем его *курносый* паркетом  $\{b, 3\}$ , получается из правильного паркета  $\{b, 3\}$  заменой каждой вершины на 3-угольник, а каждого ребра — на два 3-угольника. Курносый паркет  $\{b, 3\}$  — это  $(\{3, b\}, 5)$ -карта (см. главу 2). Курносые паркеты  $\{b, 3\}$  при  $3 \leq b \leq 6$  изображены на рис. 6.5, они представляют собой  $(3, 5)_{gen}$ -полициклы с  $b$ -угольными дырками. Их вершины имеют корону  $3^4.b$ ; таким образом, их остовы являются икосаэдром, курносый кубом, курносый додекаэдром и архимедовым паркетом плоскости  $(3^4.6)$  соответственно.

На практике для получения нормальных подгрупп заданного конечного индекса, может быть использована компьютерная программа MAGMA ([Mag07]), использующая алгоритмы, приведенные в [CoDo05]. Этот метод был использован в [CoDo02] для нахождения маленьких симметричных 3-валентных карт и маленьких регулярных карт на ориентируемых поверхностях.





## ГЛАВА 7

# Элементарные полициклы

В разделе 4.5 мы получили полную классификацию  $(3, 3)_{gen}$ -,  $(3, 4)_{gen}$ - и  $(4, 3)_{gen}$ -полициклов. Мы также показали, что для любых других  $(r, q)$  существует континуум  $(r, q)$ -полициклов. В данной главе мы введем разложение полициклов на элементарные компоненты аналогично тому, как молекулы распадаются на атомы. Этот метод окажется очень эффективным, но только в эллиптическом случае, так как для других случаев мы покажем, что существует континуум таких элементарных компонент (см. теорему 7.2.1). Первое упоминание этого метода встречается в [DeSt02b], последующие — в [DDS05b] и [DDS09].

### 7.1. Разложение полициклов

Пусть дано целое число  $q \geq 3$  и множество  $R \subset \mathbb{N} - \{1\}$  (таким образом, в данной главе 2-угольники разрешаются). Тогда  $(R, q)_{gen}$ -полицикл — это непустая двусвязная карта на поверхности  $S$ , множество граней которой разбито на два непустых подмножества  $F_1$  и  $F_2$  такие, что:

- (i) все элементы из  $F_1$  (называемые *собственными гранями*) являются комбинаторными  $i$ -угольниками, где  $i \in R$ ;
- (ii) все элементы из  $F_2$  (называемые *дырками*, внешняя грань(и) отнесены к  $F_2$ ) попарно не пересекаются, т. е. не имеют общих вершин;
- (iii) все степени вершин принадлежат множеству  $\{2, \dots, q\}$ , а все *внутренние* (т. е. не лежащие на границе какой-либо дырки) вершины являются  $q$ -валентными.

Карта может быть конечной или бесконечной, и некоторые дырки могут быть  $i$ -угольниками, где  $i \in R$ . Если  $R = \{r\}$ , тогда данное определение соответствует  $(r, q)_{gen}$ -полициклам. Если  $(R, q)_{gen}$ -полицикл является односвязным, то назовем его  $(R, q)$ -полициклом; такие полициклы могут

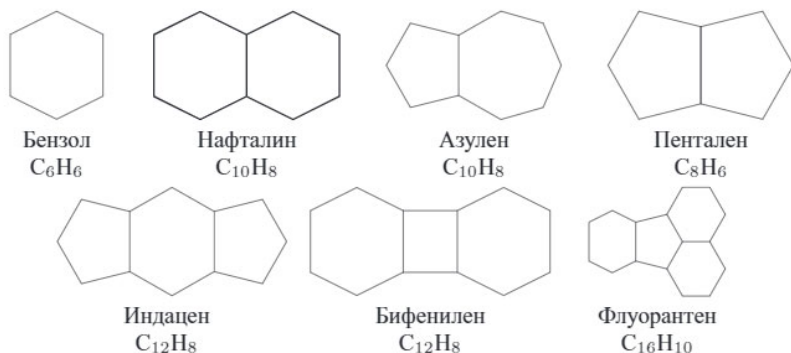
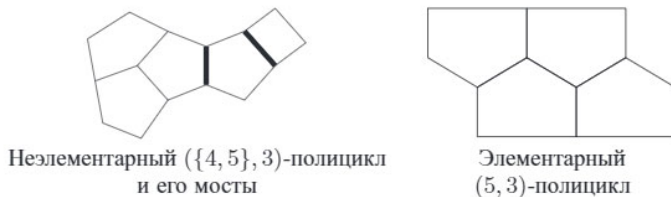


Рис. 7.1. Некоторые небольшие полициклические гидрокарбонатные молекулы; здесь  $C_nH_m$  означает  $n$  вершин (атомов углерода), включая  $m$  2-валентных, где атомы водорода могут быть присоединены (двойные связи для простоты опущены)

быть изображены на плоскости так, что дырки будут внешними гранями.  $(R, q)$ -полициклы, для которых  $R = \{r\}$ , являются в точности  $(r, q)$ -полициклами, определенными в главах 4–6. Одна из мотиваций к разрешению различных размеров внутренних граней состоит в том, что полициклические гидрокарбонаты в химии имеют молекулярную формулу, которая может быть смоделирована с помощью таких полициклов (см. рис. 7.1). Определение  $(R, q)$ -полициклов, данное здесь, является комбинаторным; клеточный гомоморфизм в  $\{r, q\}$  больше не существует. Далее мы определим понятия эллиптических, параболических и гиперболических  $(R, q)$ -полициклов, но данное определение не будет напрямую зависеть от знака кривизны  $\{r, q\}$ .

*Граница*  $(R, q)_{gen}$ -полицикла  $P$  — это граница любой из его дырок.

*Мост* в  $(R, q)_{gen}$ -полицикле — это ребро, не лежащее на границе и идущее из дырки в дырку (возможно, ту же самую).  $(R, q)_{gen}$ -полицикл называется *элементарным*, если в нем нет мостов. См. ниже иллюстрации этих понятий.

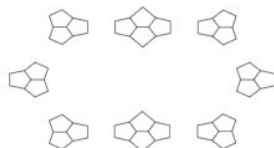


*Открытое ребро*  $(R, q)_{gen}$ -полицикла — это такое ребро границы, что каждая из его конечных вершин имеет степень меньше  $q$ . Ниже изображены открытые ребра некоторых  $(R, q)$ -полициклов.

Открытые ребра  $(5, 3)$ -полициклаОткрытое ребро  $(\{2, 3\}, 5)$ -полицикла

**Теорема 7.1.1.** *Каждый  $(R, q)_{gen}$ -полицикл может быть единственным образом сформирован склеиванием элементарных  $(R, q)_{gen}$ -полициклов по открытым ребрам или, другими словами, может быть единственным образом разрезан по мостам на элементарные  $(R, q)_{gen}$ -полициклы.*

См. ниже пример такого разложения  $(5, 3)_{gen}$ -полицикла на плоскости.

 $(5, 3)_{gen}$ -полицикл, мосты  
выделены жирнымЭлементарные компоненты  
данного полицикла

Теорема 7.1.1, вместе с определением эллиптического элементарного  $(r, q)_{gen}$ -полицикла, используется в главах 5, 8, 12, 13, 14, 18 для классификации.

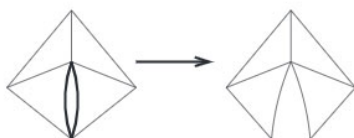
Теорема 7.1.1 дает простой способ описания  $(r, q)$ -полицикла: написать названия элементарных полициклов и использовать символ  $+$ . Но во многих случаях такое представление неоднозначно, т.е. одну и ту же элементарную компоненту можно использовать для того, чтобы сформировать  $(r, q)$ -полицикл разными способами, так же как и формула молекулы, указывающая только количество атомов, не определяет ее однозначно в общем случае. Например, если  $D$  есть  $(5, 3)$ -полицикл, полученный из 5-угольника,  $D + D + D$  однозначно соответствует следующему  $(5, 3)$ -полициклу:



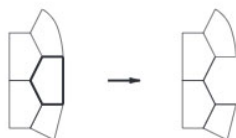
Существует другой  $(5, 3)$ -полицикл, полученный из трех 5-угольников, имеющих общую вершину; он является элементарным и обозначен через  $E_1$

на рис. 7.2. Но запись  $D + D + D + D$  является неоднозначной, так как существует два  $(5, 3)$ -полицикла, имеющих четыре элементарных компонента  $D$ .

Пусть дан  $(R, q)_{gen}$ -полицикл  $P$ , тогда можно получить другой  $(R, q)_{gen}$ -полицикл  $P'$  удалением грани  $f$  из  $F_1$ , т. е. считая ее дыркой. Если  $f$  не имеет общих вершин с другими гранями из  $F_1$ , тогда ее удаление сохраняет неизменным плоский граф  $G$  и только изменяет пару  $(F_1, F_2)$ . Если  $f$  имеет общие ребра с дыркой, тогда удалим их. Если у  $f$  есть общая с дыркой вершина  $v$  и  $v$  не принадлежит их общему ребру, то разобьем  $v$  на две вершины. См. ниже два примера такой операции.



Удаление 2-угольника,  
имеющего граничную вершину



Удаление 5-угольника,  
имеющего граничное ребро

Обратной операцией будет *добавление* грани.  $(R, q)_{gen}$ -полицикл называется *продолжаемым*, если существует другой  $(R, q)_{gen}$ -полицикл  $P'$  такой, что удаление из  $P'$  грани дает  $P$ , т. е. если к  $P$  можно добавить грань.

На всех рисунках ниже мы указываем под  $(R, q)$ -полициклом  $P$  его группу симметрии  $Aut(P)$  и делаем пометку *непрод.* для непродолжаемых  $P$  (см. в разделе 8.2 подробности об этом понятии). Кроме того, в круглых скобках указана группа  $Aut(G)$  плоского графа  $G$  для  $P$ , если  $Aut(G) \neq Aut(P)$  и не существует никаких других полициклов с тем же плоским графом. Постановка вопроса здесь более общая, чем в главе 4: плоский граф больше не определяет полициклическое представление. Действительно, один и тот же плоский граф  $G$  может допускать несколько представлений как  $(R, q)$ -полицикл; см. примеры в приложениях 1 и 2.

Естественно поставить вопрос о том, можно ли дальше расширять класс полициклов.

Лишь некоторые технические трудности препятствуют попытке получить список элементарных  $(R, Q)$ -полициклов, т. е. обобщения  $(R, q)$ -полициклов, в котором  $Q$  является множеством степеней внутренних вершин. Такие полициклы называются *эллиптическими*, *параболическими* или *гиперболическими*, если  $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} - \frac{1}{2}$  (где  $r = \max_{i \in R} i$ ,  $q = \max_{i \in Q} i$ ) положительно, равно нулю или отрицательно соответственно. Разложение и другие основные понятия могут быть определены по аналогии с определениями, данными выше.

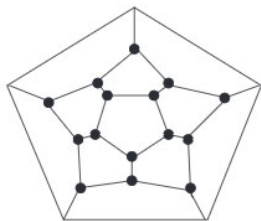
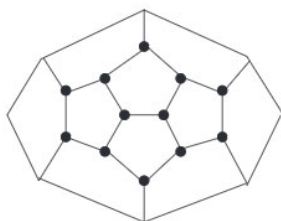
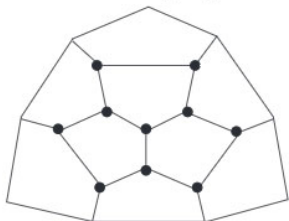
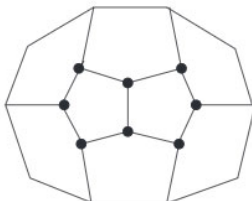
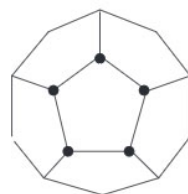
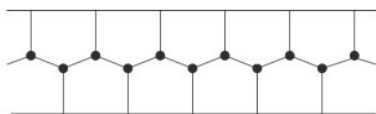
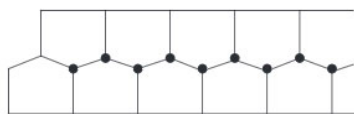
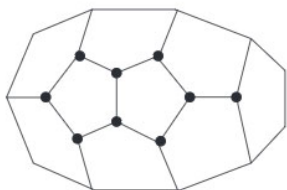
 $A_1$  11, 15 $A_2$  10, 12 $A_3$  9, 10 $A_4$  8, 8 $A_5$  6, 5 $E_Z$   $|Z|$ ,  $|Z|$  $E_N$   $|N|$ ,  $|N|$  $B_2$  9, 9 $B_3$  7, 6 $C_1$  10, 10 $C_2$  8, 7 $C_3$  6, 4

Рис. 7.2. Элементарные (5, 3)-полициклы и их ядра



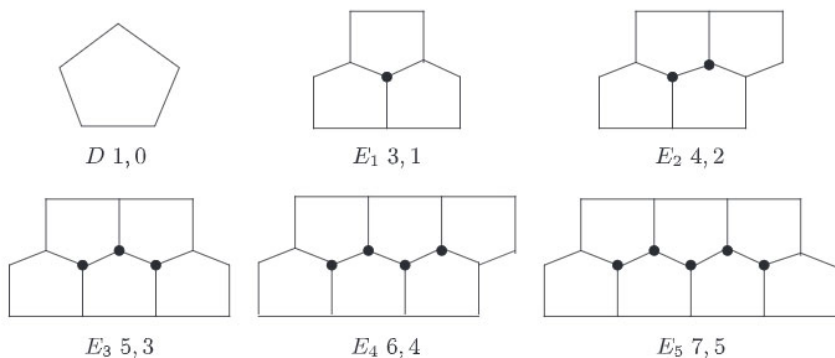


Рис. 7.2. (продолжение). Элементарные  $(5, 3)$ -полициклы и их ядра

Мы требовали двусвязность полициклов и отсутствие общих вершин у дырок. Если убрать эти два предположения, то появится целый ряд других графов.

Опущенные случаи  $(R, q) = (2, q)$  не являются интересными. Действительно, рассмотрим бесконечную последовательность  $(2, 6)$ -полициклов, представляющих собой утроенные  $m$ -угольники (т.е.  $m$ -угольники, каждое ребро которых имеет кратность 3). Центральное ребро является мостом для этих полициклов, для обоих 2-угольников из утроенных ребер. Но если удалить эти два 2-угольника, у получившегося плоского графа будут две дырки, имеющие общую грань, т.е. нарушается ключевой пункт (ii) определения  $(R, q)$ -полицикла. Для четных  $m$  каждое четное ребро (для какого-то их порядка  $1, \dots, m$ ) может быть продублировано  $t$  раз (для фиксированного  $t$ ,  $1 \leq t \leq 5$ ), а каждое нечетное ребро может быть продублировано  $6 - t$  раз; таким образом, степени всех вершин будут по-прежнему равняться 6. С другой стороны, две дырки ( $m$ -угольники внутри и снаружи утроенного  $m$ -угольника) имеют общие вершины; таким образом, это снова не будет полициклом в нашем понимании.

## 7.2. Параболические и гиперболические элементарные $(R, q)_{gen}$ -полициклы

Интересной задачей является классификация, если она возможна, элементарных  $(R, q)_{gen}$ -полициклов. Назовем  $(R, q)_{gen}$ -полицикл *эллиптическим*, *параболическим* или *гиперболическим*, если число  $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2}$

(где  $r = \max_{i \in R}$ ) положительно, равно нулю или отрицательно соответственно. В теореме 7.2.1 мы увидим, что количество элементарных  $(r, q)$ -полициклов несчетно для любой гиперболической или параболической пары  $(r, q)$ . Однако в [DeSt01] и [DeSt02b] были найдены все элементарные эллиптические  $(r, q)$ -полициклы. На рис. 7.2 и 7.3 приведен список элементарных  $(5, 3)$ - и  $(3, 5)$ -полициклов, который понадобится нам в дальнейшем. Полная классификация  $(3, 3)$ -,  $(3, 4)$ - и  $(4, 3)$ -полициклов приводится в главе 4. Здесь мы рассмотрим случай  $R = \{i: 2 \leq i \leq r\}$ , покрывающий все эллиптические случаи  $(r, q)$ :  $(\{2, 3, 4, 5\}, 3)$ -,  $(\{2, 3\}, 4)$ - и  $(\{2, 3\}, 5)$ -полициклы в разделах 7.4, 7.5 и 7.6 соответственно. Назовем *ядром* полицикла полиэдральный комплекс, состоящий из вершин, ребер и граней, не инцидентных границе полицикла.

**Теорема 7.2.1.** *Если параметры  $(r, q)$  — параболические или гиперболические, то существует континуум неизоморфных элементарных  $(r, q)$ -полициклов.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим полубесконечную (вправо) цепь 4-угольников, которая заполняет полосу между двумя параллельными лучами. Для каждого четырехугольника отметим  $r - 5$  новых вершин на одной из его горизонтальных сторон и 1 вершину — на другой горизонтальной стороне, таким образом, получим  $r$ -угольник вместо 4-угольника. Существует два варианта: либо  $r - 5$  новых вершин помещены на верхней стороне, а еще одна — на нижней, либо, наоборот, одна вершина расположена на верхней стороне, а остальные  $r - 5$  — на нижней. Этот выбор делается независимо для каждого 4-угольника, пока мы двигаемся вправо по цепи. Поэтому существует континуум различных (неизоморфных) цепей такого типа. Все они являются цепями в паркете  $\{r, q\}$  при  $r \geq 7$  и  $q \geq 3$ , а также при  $r = 5$  и  $q \geq 4$ . Также очевидно, что этот  $(r, q)$ -полицикл является ядром элементарного  $(r, q)$ -полицикла, состоящего из этого полицикла, дополненного всеми  $r$ -угольниками, инцидентными ему в паркете  $\{r, q\}$ .

Теперь рассмотрим случай параболических параметров  $(r, q)$ , т.е.  $(r, q) = (6, 3), (4, 4)$  и  $(3, 6)$ . В квадратной сетке, т.е. в регулярном паркете  $\{4, 4\}$  евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$ , построим полубесконечную цепь 4-угольников в направлении вправо вверх. На каждом шагу этого построения есть два варианта выбора следующего 4-угольника: можно выбрать смежный 4-угольник либо справа на том же уровне, либо на уровень выше. Очевидно, что существует континуум различных (неизоморфных) цепей такого типа в паркете  $\{4, 4\}$ , и каждая из этих цепей является ядром некоторого элементарного  $(4, 4)$ -полицикла. Бесконечные цепи шестиугольников в паркете  $\{6, 3\}$  строятся аналогично. В случае паркета  $\{3, 6\}$

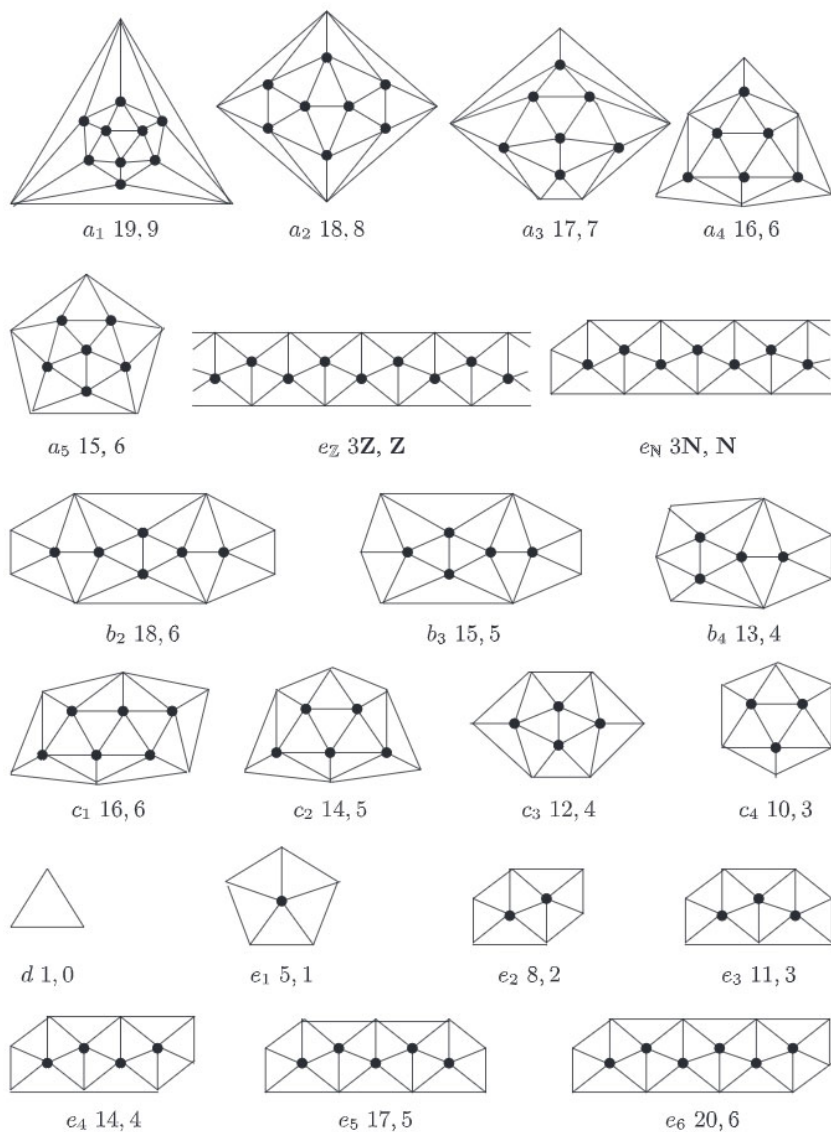


Рис. 7.3. Элементарные (3, 5)-полициклы и их ядра

объединение двух смежных 3-угольников в ромб превращает весь паркет  $\{3, 6\}$  в ромбическую сетку, комбинаторно эквивалентную паркету  $\{4, 4\}$ , и к ней можно применить те же рассуждения, что и в случае квадратной сетки. Ядра этих параболических полициклов являются внешнепланарными. Их можно рассматривать как ядра гиперболических полициклов (при увеличении значения параметра  $q$ ). ■

### 7.3. Ядерно-элементарные полициклы

Назовем  $(r, q)$ -полицикл *ядерно-элементарным*, если он является  $r$ -угольником или имеет непустое связное ядро такое, что удаление любой грани полицикла приводит к уменьшению его ядра (т.е. любая грань полицикла инцидентна его ядру).

#### Теорема 7.3.1.

- (i) Если  $(r, q)$ -полицикл является ядерно-элементарным, то он является элементарным.
- (ii) Если параметры  $(r, q)$  — эллиптические, то любой элементарный  $(r, q)$ -полицикл является также и ядерно-элементарным.

**Доказательство.** (i) Пусть  $P$  — ядерно-элементарный  $(r, q)$ -полицикл; можно считать, что он не является  $r$ -угольником. Пусть  $P_1, \dots, P_r$  — элементарные компоненты этого полицикла. Из условия связности ядра следует, что все  $P_i$ , кроме одного, являются  $r$ -угольниками. Но удаление  $r$ -угольного  $P_i$  не меняет ядро; значит,  $r = 1$  и  $P$  — элементарный.

(ii) Рассмотрим две вершины  $r$ -угольника эллиптического  $(r, q)$ -полицикла, принадлежащие ядру полицикла. Кратчайший реберный путь между этими вершинами лежит в объединении двух звезд из  $r$ -угольников с центрами в этих двух вершинах; этот результат можно легко проверить в каждом частном случае для любых эллиптических параметров  $(3, 3)$ ,  $(3, 4)$ ,  $(3, 5)$ ,  $(4, 3)$  и  $(5, 3)$ . Следовательно, каждый  $r$ -угольник эллиптического  $(r, q)$ -полицикла инцидентен одной связной компоненте ядра. Все  $r$ -угольники, инцидентные одной и той же непустой связной компоненте ядра, образуют нетривиальную элементарную составляющую. Так как полицикл — элементарный, то эта элементарная составляющая совпадает со всем полициклом, а значит, ядро является связным. ■

В [DeSt02b] понятие ядерной элементарности названо *элементарностью*. См. ниже пример элементарного, но не ядерно-элементарного  $(6, 3)$ -полицикла (так как ядро не является связным).





Теорема 7.1.1 о разложении  $(r, q)$ -полициклов на элементарные полициклы — основная причина, из-за которой мы предпочитаем свойство элементарности свойству ядерной элементарности. Другая причина в том, что если  $(r, q)_{gen}$ -полицикл является элементарным, то его универсальная накрывающая также будет элементарной. Однако понятие ядерной элементарности будет полезно при классификации бесконечных элементарных  $(\{3, 4, 5\}, 3)$ - и  $(\{2, 3\}, 5)$ -полициклов.

На рис. 7.2 и 7.3 каждый элементарный полицикл обозначен определенной буквой с нижним индексом; два числа обозначают значения параметров  $p_r$  (число внутренних граней) и  $v_{int}$  (число внутренних вершин). В случае бесконечных серий  $E_s$  и  $e_s$  данные параметры равны  $(p_r, v_{int}) = (s + 2, s)$  и  $(3s + 2, s)$  соответственно; мы изобразили их члены при  $s \leq 5$  и  $s \leq 6$  соответственно.

**Теорема 7.3.2.** Список элементарных  $(5, 3)$ -полициклов (см. рис. 7.2) состоит из:

- (i) 11 отдельных конечных  $(5, 3)$ -полициклов,
- (ii) бесконечной серии  $E_n$ , где  $n \geq 1$ ,
- (iii) двух бесконечных полициклов  $E_{\mathbb{N}}$  и  $E_{\mathbb{Z}}$  (курносая призма  $Prism_{\infty}$ ).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим элементарный  $(5, 3)$ -полицикл  $P$ , в силу теоремы 7.3.1, он является ядерно-элементарным. Если его ядро пусто, тогда  $P$  — это просто  $D$ . Если ядро является одиночной вершиной, тогда  $P$  — это просто  $E_1$ . Если в каждом 5-угольнике  $(5, 3)$ -полицикла не более 3 вершин, принадлежащих ядру и расположенных по периметру 5-угольника подряд, тогда ядро не содержит 5-угольников и имеет форму геодезической (см. элементарные  $(5, 3)$ -полициклы  $E_i$ ,  $i \geq 1$ ,  $E_{\mathbb{N}}$  и  $E_{\mathbb{Z}}$ ) или пропеллера (см. элементарный  $(5, 3)$ -полицикл  $C_3$ ). Если хотя бы один 5-угольник элементарного  $(5, 3)$ -полицикла содержит три вершины ядра, которые расположены по периметру не подряд, тогда весь 5-угольник лежит в ядре. Только в случае одного или двух 5-угольников ядро может дополнительно содержать одно или два висячих ребра (см.  $(5, 3)$ -полициклы  $A_5$ ,  $B_3$ ,  $C_2$  и  $A_4$ ,  $B_2$ ,  $C_1$ ). Если в ядре содержится более двух 5-угольников, то суммарное число этих 5-угольников может быть только 3, 4 или 6 (см.  $A_3$ ,  $A_2$  и  $A_1$ ). ■



**Теорема 7.3.3.** Список элементарных  $(3, 5)$ -полициклов (см. рис. 7.3) состоит из:

- (i) 13 отдельных конечных  $(3, 5)$ -полициклов,
- (ii) бесконечной серии  $e_n$ ,  $n \geq 1$ ,
- (iii) двух бесконечных полициклов  $e_{\mathbb{N}}$  и  $e_{\mathbb{Z}}$  (курносая антипризма  $A\text{Prism}_{\infty}$ ).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим элементарный  $(3, 5)$ -полицикл  $P$ , по предложению 7.3.1, он является ядерно-элементарным. Если его ядро пусто, то  $P$  совпадает с  $d$ . Если ядро состоит из единственной вершины, тогда  $P$  совпадает с  $e_1$ . Если в каждом 3-угольнике не более двух вершин принадлежит ядру, то ядро не содержит 3-угольников и имеет вид *геодезической* (см.  $e_i$ ,  $i \geq 1$ , а также  $e_{\mathbb{N}}$  и  $e_{\mathbb{Z}}$ ). Если ядро содержит один 3-угольник, то оно может иметь только одно висящее ребро (см.  $c_4$  и  $b_4$ ). Если ядро содержит два 3-угольника, то оно может иметь одно или два висящих ребра (см.  $c_3$ ,  $b_3$ , и  $b_2$ ). Если же ядро содержит более двух 3-угольников, то их общее число может равняться только 3, 4, 5, 6, 8 или 10 (см.  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $a_4$ ,  $a_5$ ,  $c_1$  и  $c_2$ ). ■

Заметим, что ядра всех  $(5, 3)$ -полициклов  $A_i$ ,  $1 \leq i \leq 5$ , изображенных на рис. 7.2, являются нетривиальными изометрическими подграфами  $(5, 3)$ -полициклов; кроме того, все они являются описанными  $(5, 3)$ -полициклами, т. е. по периметру можно добавить  $r$ -угольники так, что они образуют простой цикл. (Они были найдены в [CCBBZGT93]; такие  $(5, 3)$ -полициклы используются в органической химии.) Все описанные  $(3, 5)$ -полициклы — это ядра полициклов  $a_i$ ,  $1 \leq i \leq 5$ , и  $c_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , изображенных на рис. 7.3. Оказывается, что все полициклы  $P$ , изображенные на одном из рисунков 7.2 и 7.3, для которых существует внутренне-двойственный полицикл  $\text{Inn}^*(P)$  на другом из рисунков, — это следующие полициклы:

$\text{Inn}^*(A_1) = a_5$	$\text{Inn}^*(A_2) = c_3$	$\text{Inn}^*(A_3) = c_4$	$\text{Inn}^*(A_4) = e_2$
$\text{Inn}^*(A_5) = e_1$	$\text{Inn}^*(E_1) = d$	$\text{Inn}^*(a_1) = A_3$	$\text{Inn}^*(a_2) = A_4$
$\text{Inn}^*(a_4) = C_3$	$\text{Inn}^*(a_5) = A_5$	$\text{Inn}^*(c_1) = E_4$	$\text{Inn}^*(c_2) = E_3$
$\text{Inn}^*(c_3) = E_2$	$\text{Inn}^*(c_4) = E_1$	$\text{Inn}^*(e_1) = D$	

Полицикл  $E_{\mathbb{Z}}$ =курносая  $\text{Prism}_{\infty}$  встречается также на рис. 6.1; внутренне-двойственный к ней  $(3, 4)$ -полицикл — это бесконечная антипризма  $A\text{Prism}_{\infty}$ .

**Теорема 7.3.4.** *Все элементарные  $(5, 3)_{gen}$ -полициклы, не являющиеся  $(5, 3)$ -полициклами, это:*

- (i) *плоские графы курносых призм  $Prism_m$  с двумя дырками (обе  $m$ -угольные грани удалены), при любом  $m \geq 2$ ,*
- (ii) *факторы курносых призм  $Prism_m$  (неориентируемые, на листе Мебиуса) по центральной симметрии, для любого нечетного  $m$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим такой полицикл. Его универсальная накрывающая является  $(5, 3)$ -полициклом, группа автоморфизмов которого содержит некоторое преобразование без неподвижной точки. Изучение списка элементарных  $(5, 3)$ -полициклов на рис. 7.2 позволяет понять, что  $E_{\mathbb{Z}} =$  курносая  $Prism_{\infty}$  является единственным полициклом, удовлетворяющим этим требованиям. Курносая  $Prism_m$  получается при факторизации по переносу на  $m$  граней, ее неориентируемые факторы получаются при факторизации курносой  $Prism_{\infty}$  по композиции переноса и отражения. ■

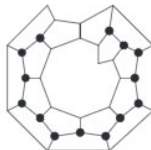
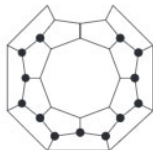
**Теорема 7.3.5.** *Все элементарные  $(3, 5)_{gen}$ -полициклы, не являющиеся  $(3, 5)$ -полициклами, это:*

- (i) *плоские графы курносых антипризм  $APrism_m$  с двумя дырками (обе  $m$ -угольные грани удалены), при любом  $m \geq 2$ ,*
- (ii) *факторы курносых антипризм  $APrism_m$  (неориентируемые, на листе Мебиуса) по центральной симметрии, для любого нечетного  $m$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим такой полицикл. Его универсальная накрывающая является  $(3, 5)$ -полициклом, группа автоморфизмов которого содержит некоторое преобразование без неподвижной точки. Изучение списка элементарных  $(3, 5)$ -полициклов на рис. 7.3 позволяет понять, что  $e_{\mathbb{Z}} =$  курносая антипризма  $APrism_{\infty}$  является единственным полициклом, удовлетворяющим этим требованиям. Доказательство завершается точно так же, как и в предыдущей теореме. ■

Теперь мы можем классифицировать все  $(r, q)_{gen}$ -полициклы, полученные в [DDS05b]. Каждый такой полицикл либо является элементарным, либо получается самосклеивкой из элементарного  $(r, q)$ -полицикла. Таким образом, получаем полный список.

- 1) Все ядерно-элементарные  $(5, 3)_{gen}$ -полициклы, полученные самосклеивкой из элементарных  $(5, 3)$ -полициклов, — это  $E_{n,or}^*$ ,  $E_{n,nor}^*$ ,  $C_{1,or}^*$ ,  $C_{1,nor}^*$ ,  $C_{2,or}^*$ ,  $C_{2,nor}^*$ ,  $C_{3,or}^*$ ,  $C_{3,nor}^*$ . Символ  $*$  обозначает самосклеивку, и нижние индексы  $or$ ,  $nor$  используются, если полученный полицикл является ориентируемым или неориентируемым соответственно. См. ниже  $E_{13,or}^*$  и  $E_{14,or}^*$ .



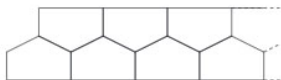
- 2) Ядерно-элементарные  $(5, 3)_{gen}$ -полициклы, полученные самосклеивкой элементарных  $(5, 3)$ -полициклов, — это  $e_{n,or}^*$ ,  $e_{n,nor}^*$ ,  $b_{2,or}^*$ ,  $b_{2,nor}^*$ . Символы  $*$ ,  $or$ ,  $nor$  обозначают то же, что и в предыдущем пункте. Ниже изображены  $e_{15,or}^*$  и  $e_{16,or}^*$ .



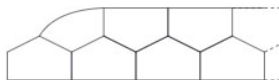
## 7.4. Классификация элементарных $(\{2, 3, 4, 5\}, 3)_{gen}$ -полициклов

**Теорема 7.4.1.** Список элементарных  $(\{2, 3, 4, 5\}, 3)_{gen}$ -полициклов состоит из:

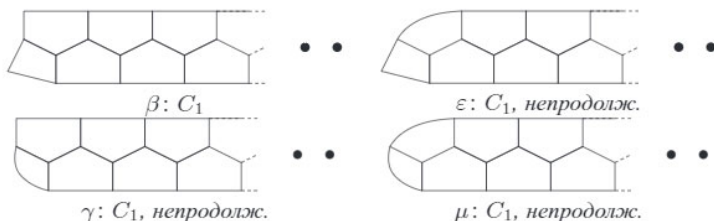
- (i) 204 отдельных  $(\{2, 3, 4, 5\}, 3)$ -полициклов, приведенных в приложении 1,
- (ii) шести  $(\{3, 4, 5\}, 3)$ -полициклов, бесконечных в одном направлении.


 $\alpha: C_1$ 

• •


 $\delta: C_1$ 

• •



- (iii)  $21 = \binom{6+1}{2}$  бесконечных серий, полученных последовательным соединением двух концов бесконечных полициклов из пункта (ii).

К примеру, соединение  $\alpha$  с самим собой дает бесконечную серию элементарных  $(5, 3)$ -полициклов, обозначенных на рис. 7.2 через  $E_n$ ,  $0 \leq n \leq \infty$ . См. на рис. 7.4 первые три члена (начиная с 6 граней) двух таких серий:  $\alpha\alpha$  и  $\beta\epsilon$ ;

- (iv) бесконечной серии курносых призм  $\text{Prism}_m$ ,  $2 \leq m \leq \infty$ , и их неориентируемых факторов при нечетном  $m$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Первый шаг состоит в нахождении всех элементарных  $(\{2, 3, 4, 5\}, 3)$ -полициклов, содержащих 2-угольник. Это сделано в лемме 7.4.2. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только  $(\{3, 4, 5\}, 3)$ -полициклы.

$(R, 3)$ -полицикл называется *вполне элементарным*, если он является элементарным и при удалении любой грани, смежной с дыркой, становится неэлементарным  $(R, 3)$ -полициклом. Таким образом, элементарный  $(R, 3)$ -полицикл является вполне элементарным тогда и только тогда, когда он не представим как результат продолжения некоторого элементарного  $(R, 3)$ -полицикла. См. ниже пояснение этого понятия.



Вполне элементарный  
 $(\{4, 5\}, 3)$ -полицикл



Не вполне элементарный  
 $(5, 3)$ -полицикл

Все вполне элементарные  $(\{3, 4, 5\}, 3)$ -полициклы перечислены в лемме 7.4.3. Сейчас мы классифицируем все конечные элементарные  $(\{3, 4, 5\}, 3)$ -полициклы с одной дыркой. Такой полицикл с  $N$  внутренними гранями либо является вполне элементарным, либо он получен из другого такого полицикла с  $N - 1$  внутренней гранью путем добавления грани.



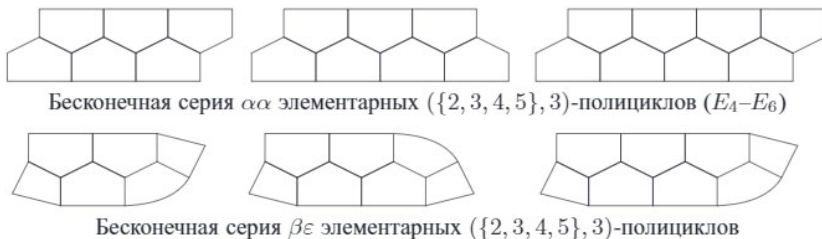


Рис. 7.4. Первые три члена (начиная с 6 граней) двух бесконечных серий из 21 серии  $(\{2, 3, 4, 5\}, 3)$ -полициклов, упоминающихся в теореме 7.4.1 (v)

Не существует элементарных  $(\{3, 4, 5\}, 3)$ -полициклов с двумя внутренними гранями; таким образом, все элементарные  $(\{3, 4, 5\}, 3)$ -полициклы с тремя внутренними гранями являются вполне элементарными и мы знаем их полный список из леммы 7.4.3. Также, согласно лемме 7.4.3, не существует конечных вполне элементарных  $(\{3, 4, 5\}, 3)$ -полициклов с более чем тремя внутренними гранями. Мы повторяем следующую процедуру, начиная с  $N = 3$ .

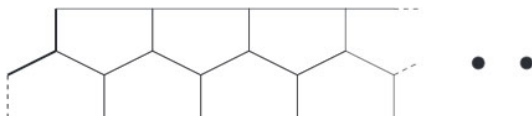
- 1) Возьмем список конечных элементарных  $(\{3, 4, 5\}, 3)$ -полициклов с  $N$  внутренними гранями и добавим грань всеми возможными способами так, чтобы полученный  $(\{3, 4, 5\}, 3)$ -полицикл также был элементарным.
- 2) Удалим из полученного списка изоморфные полициклы и получим список элементарных  $(\{3, 4, 5\}, 3)$ -полициклов с  $N + 1$  внутренней гранью.

Таким образом, для любого заданного  $N$ , можно получить список элементарных  $(\{3, 4, 5\}, 3)$ -полициклов с  $N$  внутренними гранями. Классификация проводится следующим образом: запустим программу, выполняющую указанную процедуру вплоть до  $N = 13$  и получим отдельные элементарные  $(\{3, 4, 5\}, 3)$ -полициклы и некоторые члены бесконечных серий. Потом проведем операцию добавления грани и удаление изоморфных полициклов вручную; получим только 21 бесконечную серию при всех  $N \geq 13$ . Это завершает классификацию конечных элементарных  $(\{3, 4, 5\}, 3)$ -полициклов.

Рассмотрим теперь бесконечный элементарный  $(\{3, 4, 5\}, 3)$ -полицикл  $P$ . Удалим все его 3- и 4-угольные грани. Получившийся граф  $P'$  не обязательно является связным, но его связные компоненты являются  $(5, 3)_{gen}$ -полициклами, хотя и не обязательно элементарными. Теперь мы используем классификацию элементарных  $(5, 3)_{gen}$ -полициклов (возможно,



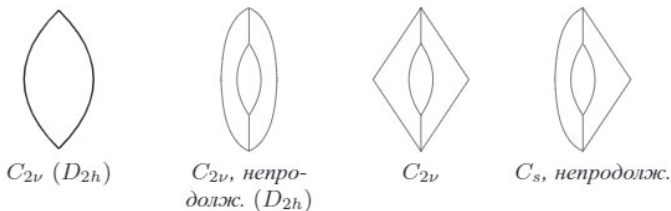
бесконечных), полученную в теореме 7.3.2. Если бесконечный  $(5, 3)$ -полицикл курносыя призма  $Prism_\infty$  участвует в разложении, тогда, очевидно,  $P$  совпадает с ним. Если бесконечный полицикл  $\alpha = E_N$  участвует в разложении, то есть два варианта его расширения, показанные ниже.



Если 3- или 4-угольная грань смежна пунктирной линии, то существует другая грань на выделенных жирным ребрах. Поэтому в любом случае существует грань, смежная с жирными ребрами, и мы можем считать, что она является 3- или 4-угольной. Тогда рассмотрение всех вариантов ее расширения дает  $\beta, \dots, \mu$ . Предположим теперь, что  $P'$  не содержит бесконечных  $(5, 3)_{gen}$ -полициклов. Тогда мы можем найти бесконечный путь  $f_0, \dots, f_i, \dots$  из различных граней  $P$  в  $F_1$ , т.е. множество собственных граней таких, что  $f_i$  смежна с  $f_{i+1}$  и  $f_{i-1}$  не смежна с  $f_{i+1}$ . Из условий на  $P$  следует, что бесконечное число граней является 3- или 4-угольниками, но условие несмежности  $f_{i-1}$  и  $f_{i+1}$  запрещает 3-угольники. Выберем теперь 4-угольник  $f_i$  и предположим, что  $f_{i-1}$  и  $f_{i+1}$  являются 5-угольниками. Рассмотрев все способы расширения вокруг этой грани, видим, что все они невозможны. Если какие-то из  $f_{i-1}$  или  $f_{i+1}$  являются 4-угольниками, то получается путь из 4-угольников, а этот случай еще проще.

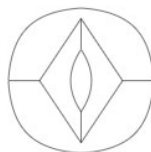
Найдем теперь все элементарные  $(\{2, 3, 4, 5\}, 3)_{gen}$ -полициклы. Универсальная накрывающая  $\tilde{P}$  такого полицикла  $P$  — это элементарный  $(\{2, 3, 4, 5\}, 3)$ -полицикл, который имеет нетривиальную группу автоморфизмов без неподвижной точки в  $Aut(\tilde{P})$ . Рассмотрев все перечисленные выше списки полициклов, видим, что курносыя призма  $Prism_\infty$  является единственным подходящим полициклом. После обратной факторизации получаем курносые призмы  $Prism_m$  и их неориентируемые факторы. ■

**Лемма 7.4.2.** Все элементарные  $(\{2, 3, 4, 5\}, 3)$ -полициклы, содержащие 2-угольник — это следующие восемь:




 $C_s$ , непро-  
долж.  $(C_{2v})$ 

 $C_s$ , непро-  
долж.  $(C_{2v})$ 

 $C_s (C_{2v})$ 

 $C_{2v}$ , непро-  
долж.  $(D_{2d})$ 

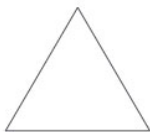
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $P$  — такой полицикл. В случае, если количество собственных граней  $|F_1|$  равно 1, получаем только 2-угольник. Если  $|F_1| = 2$ , то полицикл не будет элементарным. Если  $|F_1| \geq 3$ , то 2-угольник находится внутри структуры. Таким образом,  $P$  должен содержать как подграф один из трех следующих графов:

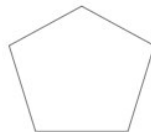


Поэтому  $P$  совпадает с одним из восьми перечисленных полициклов. ■

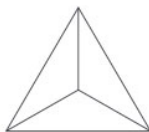
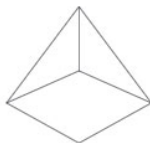
**Лемма 7.4.3.** Список элементарных  $(\{3, 4, 5\}, 3)$ -полициклов состоит из:

- (i) трех изолированных  $i$ -угольников,  $i \in \{3, 4, 5\}$ ;

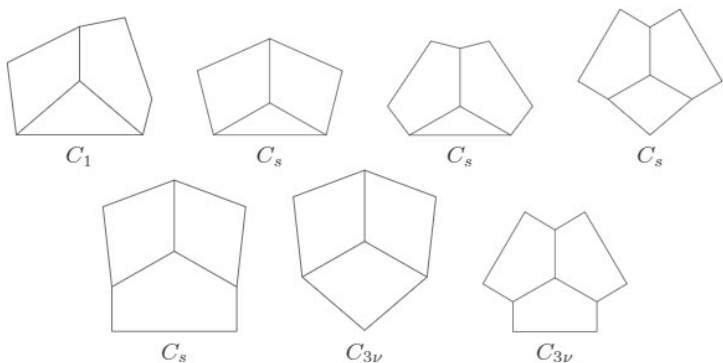

 $C_{3v}$ 

 $C_{4v}$ 

 $C_{5v}$ 

- (ii) десяти троек  $i$ -угольников,  $i \in \{3, 4, 5\}$ ;


 $C_{3v}$ 

 $C_s$ 

 $C_s$

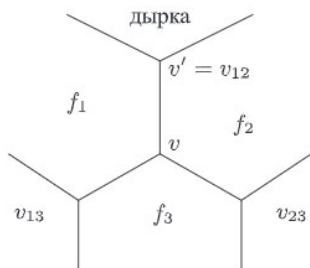


(iii) *куросой призмы*  $Prism_{\infty}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вполне элементарный  $(\{3, 4, 5\}, 3)$ -полицикл  $P$ . Если  $|F_1| = 1$ , то  $P$ , очевидно, является вполне элементарным; поэтому предполагаем, что  $|F_1| \geq 2$ . Если  $|F_1| = 2$ , то полицикл не является элементарным; таким образом, считаем, что  $|F_1| \geq 3$ .

Очевидно,  $P$  имеет хотя бы одну внутреннюю вершину; пусть  $v$  — одна из них. Далее, можно считать, что у  $v$  есть соседняя вершина  $v'$ , инцидентная дырке.

Вершина  $v$  инцидентна трем граням  $f_1, f_2, f_3$ . Обозначим через  $v_{ij}$  единственную вершину, инцидентную  $f_i, f_j$  и соседнюю с  $v$ . Без ограничения общности можно считать, что  $v'$  инцидентна граням  $f_1$  и  $f_2$ , т. е. что  $v' = v_{12}$ .



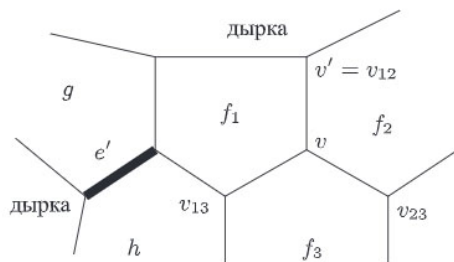
При удалении грани  $f_1$  получим неэлементарный полицикл; поэтому существует хотя бы один мост, разделяющий  $P - f_1$  на две части. Одна из вершин моста должна быть инцидентна  $f_1$ , аналогичное рассуждение верно и для  $f_2$ . Доказательство состоит в переборе нескольких случаев.

**Первый случай.** Если  $e_1 = \{v, v_{23}\}$  и  $e_2 = \{v, v_{13}\}$  являются мостами в  $P - f_1$ ,  $P - f_2$  соответственно, то из условия, что грани  $f_i$  являются  $p$ -угольниками, где  $p \leq 5$ , следует, что каждая из граней  $f_i$  смежна в  $P$  не более чем еще одной грани. Далее, если  $f_i$  смежна другой грани, то их общее ребро является мостом, что невозможно. Поэтому  $F_1 = \{f_1, f_2, f_3\}$ .

**Второй случай.** Предположим теперь, что  $e_1 = \{v, v_{23}\}$  является мостом в  $P - f_1$ , но  $e_2 = \{v, v_{13}\}$  не является мостом в  $P - f_2$ . Тогда, так как  $f_2$  — это  $p$ -угольник и  $p \leq 5$ , он смежен не более чем еще одной грани. Более того, он может быть смежен ей только вдоль моста, а это невозможно. Таким образом,  $f_2$  смежна только  $f_1$  и  $f_3$ , поэтому из того, что  $e_2$  не является мостом в  $P - f_2$ , получаем, что  $P - f_2$  является элементарным, что противоречит предположению.

**Третий случай.** Предположим, что ни  $e_1$ , ни  $e_2$  не являются мостами в  $P - f_1$  и  $P - f_2$  соответственно. Из рассмотрения двух предыдущих случаев видно, что если вершина  $v$  является соседней с граничной вершиной, то возможен только этот третий случай.

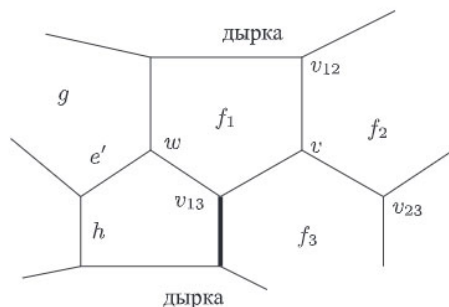
Первый подслучай, который возможен только если  $f_1$  является 5-угольником, состоит в том, что выделенное жирным на рисунке ниже ребро  $e'$  является мостом.



Грань  $g$  смежна граням  $h$ ,  $f_1$  и, возможно, другой грани  $g'$ . Но  $g$  может быть смежна такой грани  $g'$  только вдоль моста в  $P$ ; значит,  $g$  смежна только  $h$  и  $f_1$ . Поэтому полицикл  $P - g$  — элементарный, но это невозможно.

Таким образом, ребро  $e'$  не является мостом, откуда следует, что грань  $h$  — это 5-угольник. Значит, вершина  $v_{13}$  находится в положении, аналогичном положению вершины  $v$ , изображенному на рисунке ниже.

Значит, можно повторить данное построение. Если в какой-то момент  $e_1$  оказывается мостом, то построение прекращается, иначе мы можем продолжать бесконечно и получить курносую призму  $Prism_\infty$ . ■

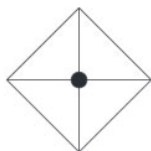


## 7.5. Классификация элементарных $(\{2, 3\}, 4)_{gen}$ -полициклов

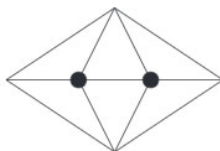
**Теорема 7.5.1.** Любой элементарный  $(\{2, 3\}, 4)_{gen}$ -полицикл совпадает с одним из следующих восьми:



$C_{3v} (D_{3h})$



$C_{4v}$



$C_{2v}$



$C_{3v}$ , непродолж. ( $O_h$ )



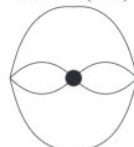
$C_{2v} (D_{2h})$



$C_s$



$C_{2v}$ , непродолж. ( $D_{2d}$ )

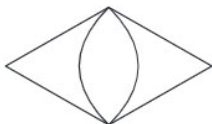


$C_{2v}$ , непродолж. ( $D_{3h}$ )

**Доказательство.** Все элементарные  $(3, 4)$ -полициклы упоминаются в списке в разделе 4.2, это дает первые 4 графа. Пусть  $P$  —  $(\{2, 3\}, 4)$ -полицикл, содержащий 2-угольник. Если  $|F_1| = 1$ , то полицикл совпадает с этим 2-угольником. Очевидно, невозможен случай, в котором два 2-угольника имеют общее ребро. Предположим, что  $P$  содержит два 2-угольника,



имеющих общую вершину. Тогда мы должны добавить 3-угольники с обеих сторон, таким образом, получим восьмой из приведенных полициклов. Если полицикл содержит 2-угольник, не имеющий общих вершин с другим 2-угольниками, то  $P$  содержит следующий фрагмент:



Таким образом,  $P$  совпадает с шестым или седьмым из приведенных выше полициклов. ■

Отметим, что четвертый и седьмой полициклы из теоремы 7.5.1 — это соответственно  $APrism_2$  and  $APrism_3$ ; здесь единственная дырка — это внешняя грань.

## 7.6. Классификация элементарных $(\{2, 3\}, 5)_{gen}$ -полициклов

Рассмотрим элементарный  $(\{2, 3\}, 5)$ -полицикл  $P$ . Предположим, что  $P$  не является  $i$ -угольником и содержит 2-угольную грань  $f$ . Если  $f$  смежна с дыркой, полицикл не может быть элементарным. Таким образом, дырки смежны только с 3-угольниками. Если удалить некий такой 3-угольник  $t$ , тогда третья вершина  $v$  грани  $t$ , бывшая внутренней в  $P$ , станет невнутренней в  $P - t$ . Полицикл  $P - t$  не обязательно будет элементарным. Обозначим через  $e_1, \dots, e_5$  ребра, инцидентные  $v$ , будем считать, что  $e_1, e_2$  — ребра, инцидентные  $t$ . Граница полицикла смежна только с 3-угольниками. Мостами в  $P - t$  могут быть ребра  $e_3, e_4$  и  $e_5$ . Разберем все пять возможных случаев.

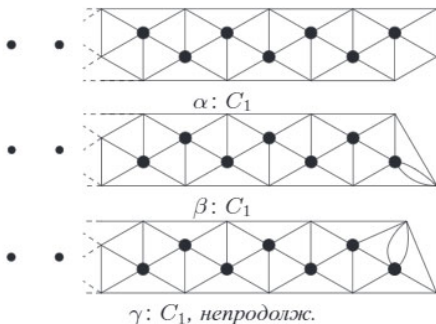
- Если ни одно из ребер  $e_k$  не является мостом, то  $P - t$  — элементарный.
- Если только ребро  $e_4$  является мостом, то оно разбивает полицикл  $P$  на две компоненты. Это означает, что  $P$  получается склейкой из двух элементарных  $(\{2, 3\}, 5)$ -полициклов.
- Если ровно одно из ребер  $e_3$  и  $e_5$  является мостом, то  $P - t$  получается склейкой из элементарного  $(\{2, 3\}, 5)$ -полицикла и  $i$ -угольника, где  $i = 2$  или  $3$ .

- Если  $e_4$  и одно из ребер  $e_3$  и  $e_5$  являются мостами, тогда  $P - t$  получается склейкой из элементарного  $(\{2, 3\}, 5)$ -полицикла и двух  $i$ -угольников, где  $i = 2$  или  $3$ .
- Если все ребра  $e_k$  являются мостами, то  $P$  имеет всего одну внутреннюю вершину.

Назовем *граничным кодом* дыры в  $(R, q)$ -полицикле последовательность степеней вершин на границе этой дыры (в порядке обхода). Это небольшое обобщение понятия из главы 5, где мы рассматривали полициклы, имеющие только одну внешнюю грань.

**Теорема 7.6.1.** *Список элементарных  $(\{2, 3\}, 5)$ -полициклов состоит из:*

- (i) 57 отдельных конечных  $(\{2, 3\}, 5)$ -полициклов, приведенных в приложении 2,
- (ii) следующих трех бесконечных  $(\{2, 3\}, 5)$ -полициклов:



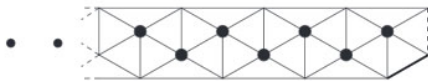
- (iii) шести бесконечных серий  $(\{2, 3\}, 5)$ -полициклов с одной дыркой (они получаются соединением полициклов, приведенных в (ii); см. на рис. 7.5 изображения первых членов этих серий),
- (iv) бесконечной серии курносых антипризм  $APrism_m$ , при  $2 \leq m \leq \infty$ , и их неориентируемых факторов при нечетных  $m$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим некоторый конечный  $(\{2, 3\}, 5)$ -полицикл. Тогда, после удаления 3-угольника, смежного с границей, получим описанную выше ситуацию. Отсюда получаем следующий алгоритм нахождения всех конечных элементарных  $(\{2, 3\}, 5)$ -полициклов.

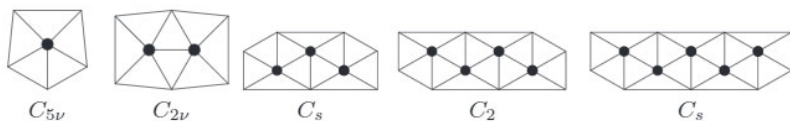
- 1) Начинаем с изолированных  $i$ -угольников, где  $i = 2$  или  $3$ .
- 2) Для каждой вершины  $v$  элементарного полицикла с  $n$  внутренними вершинами рассмотрим все возможные способы добавления 2- и 3-угольников, инцидентных  $v$ , такие, что получившийся полицикл является элементарным и  $v$  — внутренняя вершина в нем.
- 3) Уберем из получившегося списка изоморфные полициклы.

Приведенный алгоритм сначала находит некоторые отдельные элементарные  $(\{2, 3\}, 5)$ -полициклы и первые члены бесконечных серий, а далее получаются только члены бесконечных серий. Для того чтобы доказать, что таким образом мы действительно получим все конечные элементарные  $(\{2, 3\}, 5)$ -полициклы, необходимо рассмотреть случай, в котором  $e_4$  является единственным мостом, идущим от дырки к этой же самой дырке. Т.е. нужно рассмотреть все случаи, в которых после добавления двух элементарных  $(\{2, 3\}, 5)$ -полициклов и одного 3-угольника мы получим больший элементарный  $(\{2, 3\}, 5)$ -полицикл. Если дана последовательность  $a_1, \dots, a_n$ , назовем  $b_1, \dots, b_p$ , где  $p < n$ , *шаблоном* этой последовательности, если для некоторого  $n_0$  выполняется  $a_{n_0+j-1} = b_j$  и  $a_{n_0+1-j} = b_j$ , где сложения выполняются по модулю  $n$ . Граничный код всех  $(\{2, 3\}, 5)$ -полициклов, используемых в описанном построении, должен иметь шаблон  $3, 3, x$ , где  $x \leq 4$ . Только полициклы, принадлежащие шести бесконечным сериям, удовлетворяют этому условию, и легко видеть, что результатом применения данного построения к ним снова будет представитель одной из шести бесконечных серий. Таким образом, любой конечный  $(\{2, 3\}, 5)$ -полицикл совпадает с одним из приведенных в условии теоремы.

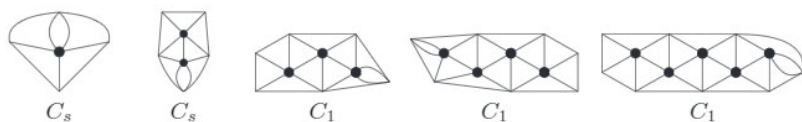
Рассмотрим теперь элементарный бесконечный  $(\{2, 3\}, 5)$ -полицикл  $P$ . Удалим все 2-угольные грани  $P$  и получим другой  $(3, 5)$ -полицикл  $P'$ , необязательно являющийся элементарным. Разложим  $P'$  на элементарные компоненты, перечисленные в разделе 7.3. Если в разложение входит курносая антипризма  $APrism_\infty$ , то  $P = P'$  и совпадает с курносой антипризмой  $APrism_\infty$ . Если  $\alpha$  является одной из компонент, тогда имеется два ребра, вдоль которых полицикл может быть продолжен (см. рис. ниже).



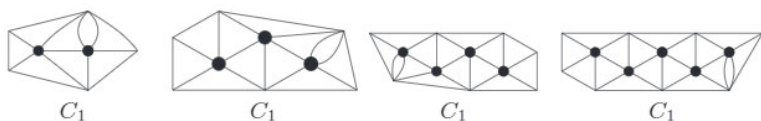
Очевидно, если продолжить полицикл только вдоль одного из этих ребер, то полученный полицикл не будет элементарным. Рассмотрение всех возможных случаев дает  $\beta$  и  $\gamma$ . Предположим теперь, что  $P'$  не содержит бесконечных компонент. Тогда  $P$  содержит хотя бы один бесконечный



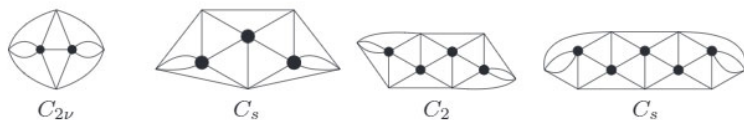
Бесконечная серия  $\alpha\alpha$  элементарных  $(\{2, 3\}, 5)$ -полициклов ( $e_1$ - $e_6$ )



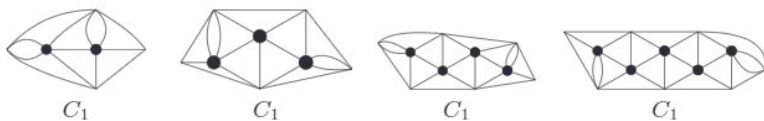
Бесконечная серия  $\alpha\beta$  элементарных  $(\{2, 3\}, 5)$ -полициклов



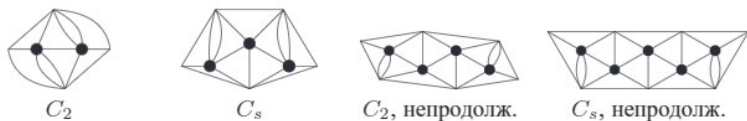
Бесконечная серия  $\alpha\gamma$  элементарных  $(\{2, 3\}, 5)$ -полициклов



Бесконечная серия  $\beta\beta$  элементарных  $(\{2, 3\}, 5)$ -полициклов



Бесконечная серия  $\beta\gamma$  элементарных  $(\{2, 3\}, 5)$ -полициклов



Бесконечная серия  $\gamma\gamma$  элементарных  $(\{2, 3\}, 5)$ -полициклов

Рис. 7.5. Первые 5 членов шести бесконечных серий  $(\{2, 3\}, 5)$ -полициклов

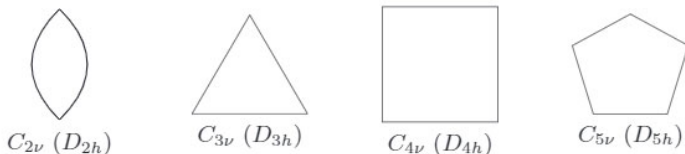
путь  $f_0, \dots, f_i, \dots$  такой, что грань  $f_i$  смежна с  $f_{i+1}$ , но  $f_{i-1}$  не смежна с  $f_{i+1}$ . Рассуждая аналогично 3-валентному случаю, получаем требуемый результат.

Если  $P$  — элементарный  $(\{2, 3\}, 5)_{gen}$ -полицикл, не являющийся  $(\{2, 3\}, 5)$ -полициклом, то его универсальная накрывающая  $\tilde{P}$  является элементарным  $(\{2, 3\}, 5)$ -полициклом, имеющим группу автоморфизмов без неподвижной точки, содержащуюся в  $Aut(\tilde{P})$ . Очевидно, этому условию удовлетворяет только курносая антипризма  $APrism_\infty$ , которая при факторизации дает бесконечную серию курносых антипризм  $APrism_m$  и их неориентируемых факторов. ■

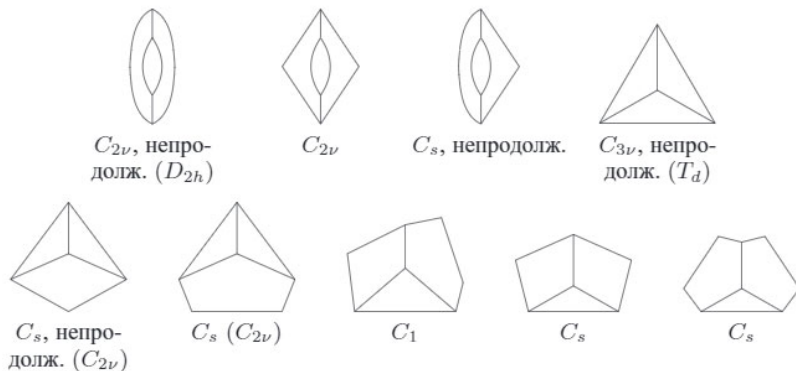
## 7.7. Приложение 1: 204 отдельных $(\{2, 3, 4, 5\}, 3)$ -полицикла

Нижне, в 11 случаях, когда несколько различных  $(\{2, 3, 4, 5\}, 3)$ -полициклов соответствуют одному и тому же плоскому графу, мы пишем под рисунком жирным шрифтом число  $x$  таких полициклов, где  $1 \leq x \leq 11$ .

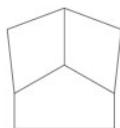
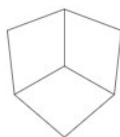
Список из четырех отдельных элементарных  $(\{2, 3, 4, 5\}, 3)$ -полициклов с 1 собственной гранью:



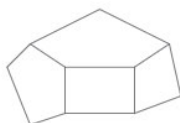
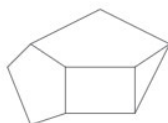
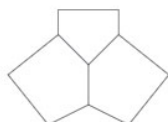
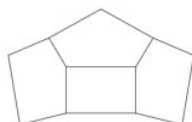
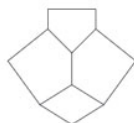
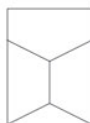
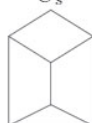
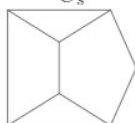
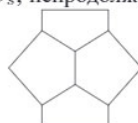
Список из 13 отдельных элементарных  $(\{2, 3, 4, 5\}, 3)$ -полициклов с 3 собственными гранями:

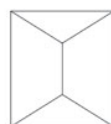
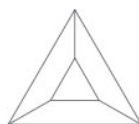




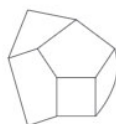
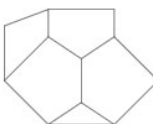
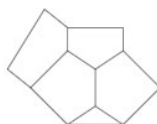
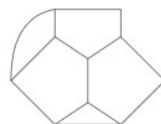
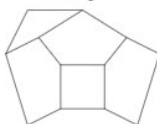
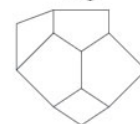
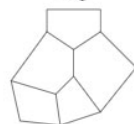
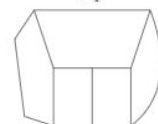
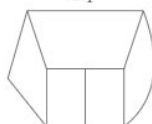
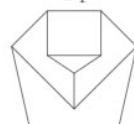
 $C_s$  $C_s$  $C_{3v}$  $C_{3v}$ 

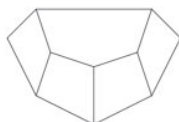
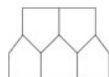
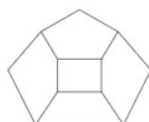
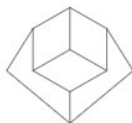
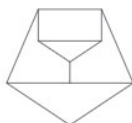
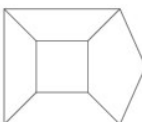
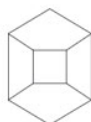
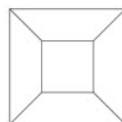
Список из 26 отдельных элементарных  $(\{2, 3, 4, 5\}, 3)$ -полициклов с 4 собственными гранями:

 $C_{2v}$ , непродолж. 1 $C_s$ , непродолж.  $(C_{2v})$  1 $C_s$ , непродолж.  $(C_{2v})$  $C_s (C_{2v})$  $C_1$  $C_1$  $C_1$  $C_s$  $C_s$  $C_s$  $C_s$  $C_s$  $C_s$  $C_s$  $C_s$  $C_s$ , непродолж. 2 $C_s$ , непродолж. 2 $C_s$ , непродолж.  $(C_{2v})$  $C_{2v}$  $C_{2v}$

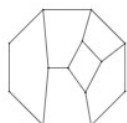
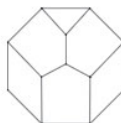
 $C_{2v}$  $C_{2v}$  $C_{2v}$  $C_{2v}$ , непродолж. 3 $C_{3v}$ , непродолж. 3 $C_{3v}$ 

Список из 36 отдельных элементарных  $(\{2, 3, 4, 5\}, 3)$ -полициклов с 5 собственными гранями:

 $C_{2v}$ , непродолж. ( $D_{2d}$ ) $C_1$  $C_1$  $C_1$  $C_1$  $C_1$  $C_1$  $C_1$  $C_1$  $C_1$  $C_1$  $C_1$  $C_1$  $C_1$  $C_1$  $C_1$  $C_1$ , непродолж. $C_1$ , непродолж. $C_s$  $C_s$

 $C_s$  $C_s$  $C_s$  $C_s$  $C_s$  $C_s$  $C_s$ , непродолж. 4 $C_s$ , непродолж. 4 $C_s$ , непродолж. 4 $C_s$ , непродолж. 5 $C_s$ , непродолж. 5 $C_s$ , непродолж. ( $C_{2v}$ ) $C_s$ , непродолж. ( $C_{2v}$ ) $C_{2v}$  $C_{4v}$  $C_{4v}$ , непродолж. ( $O_h$ )

Список из 34 отдельных элементарных ( $\{2, 3, 4, 5\}, 3$ )-полициклов с 6 собственными гранями:

 $C_1$  $C_1$  $C_1$  $C_1$ , непродолж.  $C_1$ , непродолж. $C_s$  $C_s$  $C_s$  $C_s$  $C_s$



$C_s$



$C_s$



$C_s$



$C_s$



$C_s$



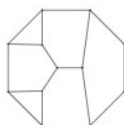
$C_s$



$C_s$



$C_s$



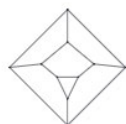
$C_s$



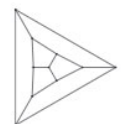
$C_s$



$C_s$ ,  
непродолж. 6



$C_s$ ,  
непродолж. 6



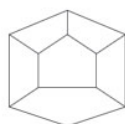
$C_{3v}$ ,  
непродолж. 6



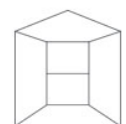
$C_s$ , непродолж. 7



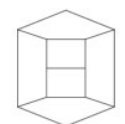
$C_s$ , непродолж. 7



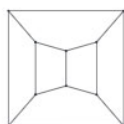
$C_s$ , непродолж.



$C_s$ , непродолж. ( $C_{2v}$ )



$C_{2v}$



$C_{2v}$ ,  
непродолж. 7



$C_{5v}$ ,  
непродолж. 7



$C_{3v}$



$C_{3v}$



$C_{3v}$ ,  
непродолж.



$C_{5v}$

Список из 36 отдельных элементарных  $(\{2, 3, 4, 5\}, 3)$ -полициклов с 7 собственными гранями:



$C_1$



$C_1$



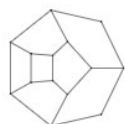
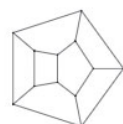
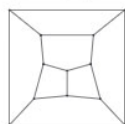
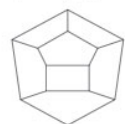
$C_1$



$C_1$

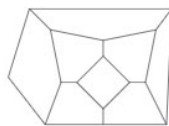
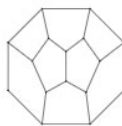
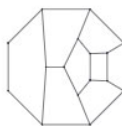


$C_1$

 $C_1$  $C_1$ , непродолж. $C_1$ , непродолж. $C_s$  $C_s$  $C_s$  $C_s$  $C_s$  $C_s$  $C_s$  $C_s$  $C_s$  $C_s$  $C_s$  $C_s$  $C_s$  $C_s$  $C_s$ , непродолж. $C_s$ ,  
непродолж. 8 $C_{3v}$ ,  
непродолж. 8 $C_s$ , непродолж. $C_s$ , непродолж. $C_s$ , непродолж. $C_s$ , непродолж. $C_s$ , непродолж. 9 $C_s$ ,  
непродолж. 9 $C_s$ , непродолж. $C_s$ , непродолж. ( $C_{2v}$ ) $C_{2v}$  $C_{2v}$  $C_{2v}$ , непродолж.



Список из 29 отдельных элементарных  $(\{2, 3, 4, 5\}, 3)$ -полициклов с 8 собственными гранями:

 $C_1$  $C_1$  $C_1$  $C_1$  $C_1$  $C_1$  $C_1$ , непродолж. $C_1$ , непродолж. $C_1$ , непродолж. $C_s$  $C_s$  $C_s$  $C_s$  $C_s$  $C_s$  $C_s$  $C_s$  $C_s$  $C_s$  $C_s$ , непродолж. $C_s$ , непродолж. $C_s$ , непродолж. $C_s$ , непродолж. $C_s$ , непродолж. $C_s$ , непродолж.

непродолж. 10

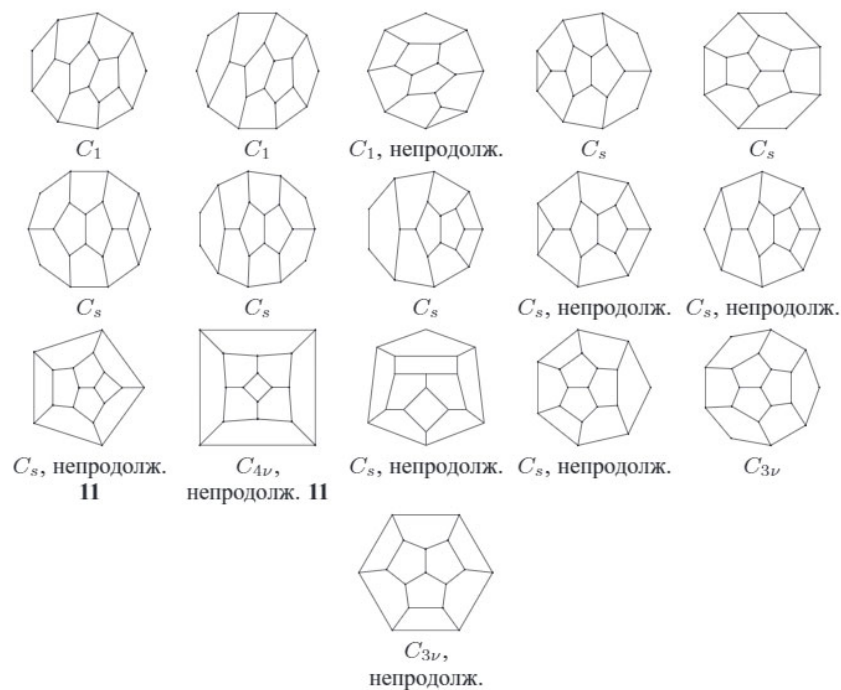
 $C_{2v}$ ,

непродолж. 10

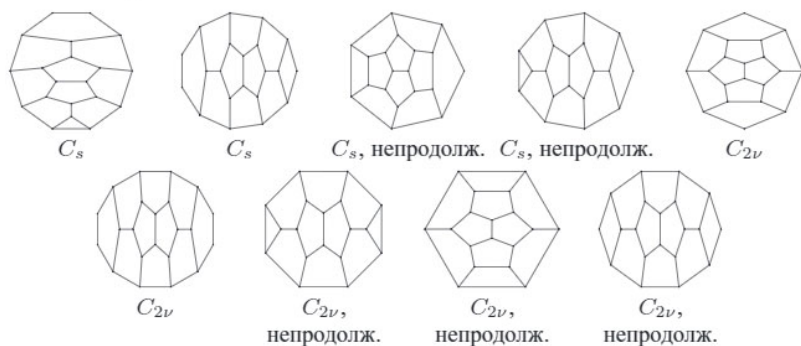
 $C_2$  $C_{2v}$  $C_{2v}$ ,

непродолж.

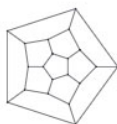
Список из 16 отдельных элементарных  $(\{2, 3, 4, 5\}, 3)$ -полициклов с 9 собственными гранями:



Список из 9 отдельных элементарных  $(\{2, 3, 4, 5\}, 3)$ -полициклов с 10 собственными гранями:



Единственный отдельный элементарный  $(\{2, 3, 4, 5\}, 3)$ -полицикл, имеющий хотя бы 11 собственных граней:


 $C_{5\nu}$ , непродолж. ( $I_h$ )

## 7.8. Приложение 2: 57 отдельных элементарных $(\{2, 3\}, 5)$ -полициклов

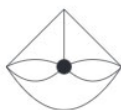
Ниже, в трех случаях, когда несколько  $(\{2, 3\}, 5)$ -полициклов соответствуют одному и тому же плоскому графу, мы добавляем символ **A**, **B** или **C**.

Список из 2 отдельных элементарных  $(\{2, 3\}, 5)$ -полициклов без внутренних вершин:


 $C_{3\nu}$  ( $D_{3h}$ )

 $C_{2\nu}$  ( $D_{2h}$ )

Список из 3 отдельных элементарных  $(\{2, 3\}, 5)$ -полициклов с 1 внутренней вершиной:


 $C_s$ 

 $C_s$  ( $C_{2\nu}$ )

 $C_s$ , непродолж. ( $C_{2\nu}$ )

Список из 6 отдельных элементарных  $(\{2, 3\}, 5)$ -полициклов с 2 внутренними вершинами:


 $C_{2\nu}$ 

 $C_1$  ( $C_s$ )

 $C_s$ 

 $C_{2\nu}$ ,

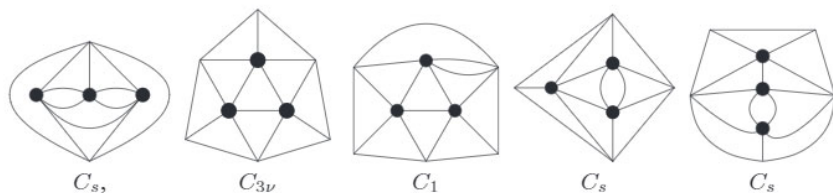
непродолж.


 $C_{2\nu}$ , непродолж. ( $D_{2d}$ )

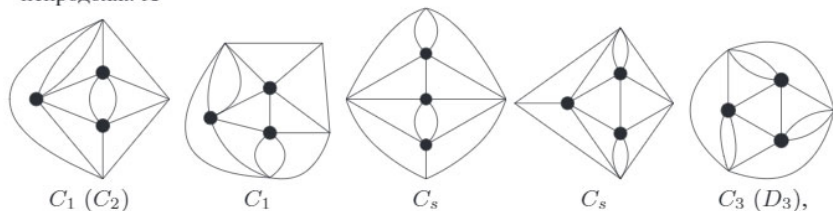
 $C_s$ ,

 непродолж. **A**

Список из 10 отдельных элементарных  $(\{2, 3\}, 5)$ -полициклов с 3 внутренними вершинами:

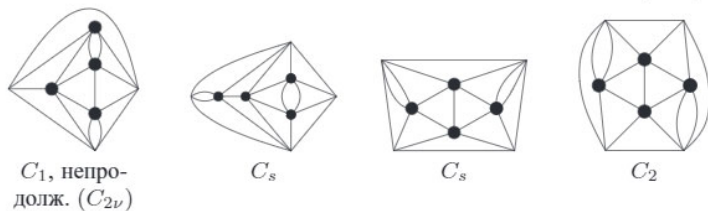
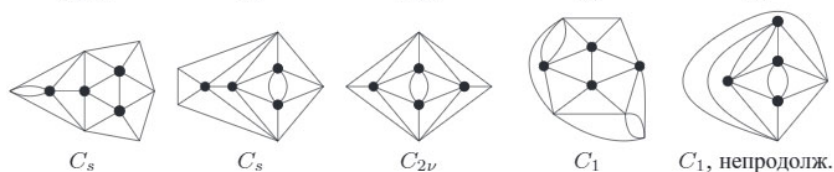
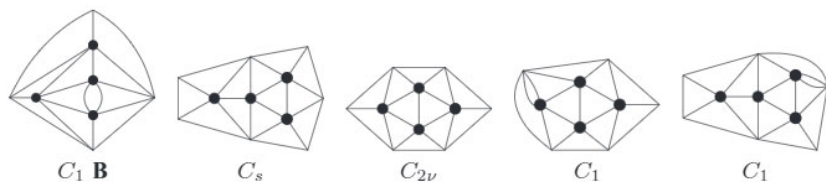


непродолж. А

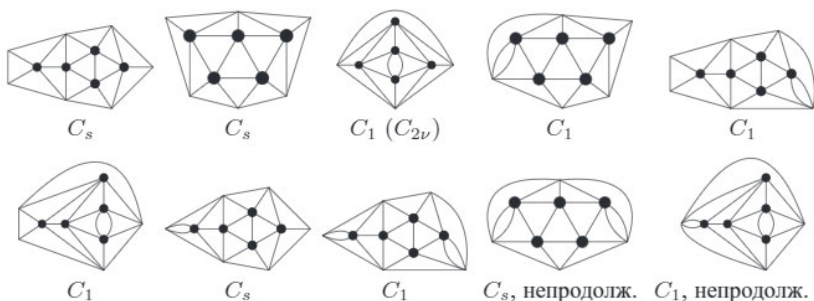


непродолж. В

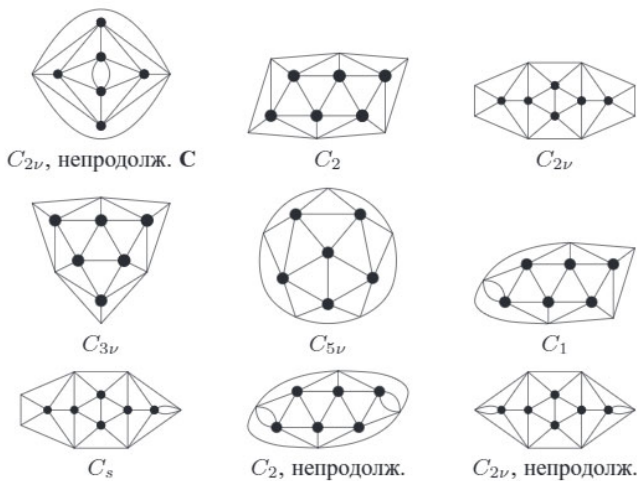
Список из 14 отдельных элементарных  $(\{2, 3\}, 5)$ -полициклов с 4 внутренними вершинами:



Список из 10 отдельных элементарных  $(\{2, 3\}, 5)$ -полициклов с 5 внутренними вершинами:



Список из 9 отдельных элементарных  $(\{2, 3\}, 5)$ -полициклов с 6 внутренними вершинами:



Единственный отдельный элементарный  $(\{2, 3\}, 5)$ -полицикл с 7 внутренними вершинами:





Единственный отдельный элементарный  $(\{2, 3\}, 5)$ -полицикл с 8 внутренними вершинами:


 $C_{2\nu}$ 

Единственный отдельный элементарный  $(\{2, 3\}, 5)$ -полицикл с хотя бы 9 внутренними вершинами:


 $C_{3\nu}$ , непродолж.  $(I_h)$

## ГЛАВА 8

# Применения разложения на элементарные $(r, q)$ -полициклы

В данном разделе мы продемонстрируем применение разложения на элементарные полициклы (в частности, списков на рис. 7.2 и 7.3) к трем задачам.

- 1) Нахождение  $(r, q)$ -полициклов, имеющих максимальное число внутренних вершин при фиксированном числе внутренних граней. В эллиптическом случае будет дан полный ответ на этот вопрос.
- 2) Нахождение всех *непродолжаемых*  $(r, q)$ -полициклов, т. е. таких, которые невозможно увеличить путем добавления  $r$ -угольника. В частности, мы докажем, что, за исключением 5 платоновых тел и 2 отдельных эллиптических полициклов, все непродолжаемые полициклы являются бесконечными.
- 3) Нахождение всех *2-вложимых*  $(r, q)$ -полициклов, т. е.  $(r, q)$ -полициклов, остов которых может быть вложен в гиперкуб с масштабом 1 или 2. Будет доказано, что все параболические и гиперболические  $(r, q)$ -полициклы 2-вложимы, и будет дан критерий того, что эллиптический  $(r, q)$ -полицикл является 2-вложимым (в терминах индуцированных подграфов).

Ни одно из этих приложений не касается других классов полициклов, таких как  $(R, q)$ -полициклы и  $(r, q)_{gen}$ -полициклы. Четвертое основное приложение, к регулярным картам, будет рассмотрено в главах 12, 13, 14, 18.

Пусть дан  $(r, q)_{gen}$ -полицикл  $P$ . Будем называть его *главным остовом* (и обозначать через  $May(P)$ ) плоский граф, образованный его элементарными компонентами, в котором две компоненты считаются смежными, если в полицикле они имеют общее открытое ребро. Напомним, что связный граф без циклов называется *деревом*.

**Теорема 8.0.1.**  $(r, q)_{\text{ген}}$ -полицикл  $P$  является односвязным (т. е. является  $(r, q)$ -полициклом) тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- (i) его элементарные компоненты односвязны,
- (ii) его главный остов  $\text{Maj}(P)$  — дерево.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предположим, условия (i) и (ii) выполнены. Рассмотрим произвольный циклический путь  $c$  в  $P$ . Множество элементарных компонент, через которые проходит  $c$ , является конечным связным подграфом  $\text{Maj}_c(P)$  графа  $\text{Maj}(P)$ , поэтому также является деревом. Если  $c$  проходит ровно через одну элементарную компоненту, тогда, с учетом условия (i), все доказано. Предположим, что  $c$  проходит более чем одну элементарную компоненту, тогда хотя бы одна вершина  $\text{Maj}_c(P)$  имеет степень 1. Обозначим через  $e$  открытое ребро, соединяющее соответствующую элементарную компоненту с оставшейся частью  $\text{Maj}_c(P)$ . По условию (i) путь  $c$  гомотопен пути  $c'$ , который проходит только через  $e$ , т. е. мы можем уменьшить количество вершин в  $\text{Maj}_c(P)$  на одну. Повторяя данную операцию, придем к уже разобранным случаю, в котором  $\text{Maj}_c(P)$  состоит из единственной вершины.

Необходимость условия (i) очевидна. Если условие (ii) не выполнено, то главный остов  $\text{Maj}(P)$  содержит цикл. Этот цикл соответствует циклу в  $P$ , который, очевидно, не гомотопен 0. ■

## 8.1. Экстремальные полициклы

Обозначим через  $p_r(P)$  и  $v_{\text{int}}(P)$  (или просто  $p_r$  и  $v_{\text{int}}$ ) число внутренних граней и внутренних вершин  $(r, q)$ -полицикла  $P$ . Будем обозначать через  $\text{dens}(P)$  и называть *плотностью* конечного  $(r, q)$ -полицикла  $P$  отношение  $\text{dens}(P) = \frac{v_{\text{int}}(P)}{p_r(P)}$ . Обозначим через  $N_{r,q}(x)$  максимум величин  $v_{\text{int}}(P)$  по всем  $(r, q)$ -полициклам  $P$ , для которых  $p_r(P) = x$ ; назовем *экстремальным* любой  $(r, q)$ -полицикл  $P$ , для которого  $v_{\text{int}}(P) = N_{r,q}(x)$ . Таким образом, экстремальные полициклы противоположны внешнепланарным в классе всех полициклов с заданным  $p_r$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 8.1.1.** При рассмотрении  $(r, q)$ -полициклов с заданным  $p_r$  следующие утверждения эквивалентны:

- 1)  $v_{\text{int}}$  максимально,

- 2)  $e_{int}$  (т. е. число неграничных ребер) максимально,
- 3) *периметр*  $Per$  (число граничных ребер) минимален,
- 4) число вершин  $v$  минимально,
- 5) число ребер  $e$  минимально.

Это напрямую следует из формулы Эйлера  $(v_{int} + Per) - (e_{int} + Per) + (p_r + 1) = 2$  и равенства  $rp_r = 2e_{int} + Per$ .

В случае  $(5, 3)$ -полициклов при  $x \leq 11$  величина  $N_{5,3}(x)$  была найдена в [CCBBZGT93]; все такие экстремальные  $(5, 3)$ -полициклы оказываются собственными и единственными. Более того,  $(5, 3)$ -полициклы, взаимные (см. раздел 4.1) к любому из таких экстремальных полициклов, также являются экстремальными. В [CCBBZGT93] ставится вопрос о нахождении  $N_{5,3}(x)$  при  $x \geq 12$ ; в этом разделе мы дадим ответ на этот вопрос при всех  $x$  и для всех эллиптических значений параметров  $(p, q)$ .

Несмотря на отрицательный результат теоремы 7.2.1, можно получить следующую общую оценку плотности.

### Теорема 8.1.2.

- (i) Для любого конечного  $(r, q)$ -полицикла  $P$  выполнено неравенство

$$dens(P) < \frac{r}{q}.$$

- (ii) Для параболических значений параметров  $(r, q)$  существует последовательность  $(r, q)$ -полициклов  $P_R$  таких, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} dens(P_R) = \frac{r}{q}.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** (i) Рассмотрим произвольный  $(r, q)$ -полицикл  $P$ . Разобьем каждый  $r$ -угольник на 4-угольники, соединив его центр с серединами сторон. Тогда число 4-угольников в каждом  $r$ -угольнике равно  $r$ , а число 4-угольников, инцидентных каждой внутренней вершине, равно  $q$ . Тогда число 4-угольников, инцидентных только внутренним вершинам полицикла  $P$ , равно  $v_{int}q$ , а общее число 4-угольников — это  $rp_r$ . Отсюда  $v_{int}q < rp_r$ .

(ii) Рассмотрим на евклидовой плоскости  $\{r, q\}$  круг  $C(0, R)$  с центром в 0 и радиусом  $R$ . В качестве полицикла  $P_R$  возьмем  $(r, q)$ -полицикл, образованный всеми  $r$ -угольниками паркета  $\{r, q\}$ , содержащимися в круге  $C(0, R)$ . Легко видеть, что тогда  $\lim_{R \rightarrow \infty} dens(P_R) = \frac{r}{q}$ . ■

Все  $(3, 3)$ -,  $(4, 3)$ - и  $(3, 4)$ -полициклы были найдены в [Har90] (собственные) и [DeSt98] (несобственные). В случае  $(r, q) = (3, 3)$  получаем, что  $(p_r, v_{int})$  равняется  $(1, 0)$ ,  $(2, 0)$  или  $(3, 1)$ ; в случае  $(r, q) = (4, 3)$  возможные значения  $(p_r, v_{int})$  — это  $(m, 0)$  при  $m \geq 1$ ,  $(|\mathbb{N}|, 0)$  и  $(|\mathbb{Z}|, 0)$ ,  $(3, 1)$ ,  $(4, 2)$  и  $(5, 4)$ ; в случае  $(r, q) = (3, 4)$  возможные значения  $(p_r, v_{int})$  — это  $(m, 0)$  при любом  $m \geq 1$ ,  $(|\mathbb{N}|, 0)$  и  $(|\mathbb{Z}|, 0)$ ,  $(4, 1)$ ,  $(5, 1)$ ,  $(6, 1)$ ,  $(6, 2)$  и  $(7, 3)$ . Среди этих пар те, для которых  $v_{int} \geq 1$ , исключая пару  $(p_r, v_{int}) = (6, 1)$ , реализуются только собственными полициклами; для всех несобственных полициклов, исключая  $(p_r, v_{int}) = (6, 1)$ ,  $v_{int} = 0$ ; т.е. они являются внешнепланарными.

**Теорема 8.1.3.** *Если  $(r, q)$ -полицикл  $P$  раскладывается на элементарные  $(r, q)$ -полициклы  $(EP_i)_{i \in I}$ , встречающиеся по  $x_i$  раз, то выполнено следующее равенство:*

$$\begin{cases} v_{int}(P) = \sum_{i \in I} x_i v_{int}(EP_i), \\ p_r(P) = \sum_{i \in I} x_i p_r(EP_i). \end{cases}$$

Если мы решим задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned} &\text{найти максимум} \quad \sum_{i \in I} x_i v_{int}(EP_i) \\ &\text{при условиях} \quad x = \sum_{i \in I} x_i p_r(EP_i) \quad \text{и} \quad x_i \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

и если окажется, что значения  $(x_i)_{i \in I}$ , на которых достигается максимум, могут быть реализованы как  $(r, q)$ -полицикл, то  $N_{r,q}(x)$  равно найденному значению целевой функции.

В противном случае требуется дополнительное изучение.

### 8.1.1. Экстремальные $(5, 3)$ -полициклы

#### Теорема 8.1.4.

- (i) Для  $x \leq 12$  значение  $N_{5,3}(x)$  изображено на рис. 8.1 вместе со всеми  $(5, 3)$ -полициклами, реализующими экстремум.

<sup>1</sup>Здесь мы различаем два случая, формально обозначенные как  $(|\mathbb{N}|, 0)$  и  $(|\mathbb{Z}|, 0)$  в зависимости от того, является ли полицикл, рассматриваемый как цепь, бесконечным в одну или обе стороны.



(ii) Для всех  $x \geq 12$  выполнено следующее:

$N_{5,3}(x) = x$ , если  $x \equiv 0, 8, 9 \pmod{10}$ , максимум достигается на следующем единственном экстремальном  $(5, 3)$ -полицикле:

– если  $x \equiv 0 \pmod{10}$ , то это полицикл  $\frac{x}{10} C_1$ :



– если  $x \equiv 9 \pmod{10}$ , то это полицикл  $\frac{x-9}{10} C_1 + B_2$ :



– если  $x \equiv 8 \pmod{10}$ , то это полицикл  $B_2 + \frac{x-18}{10} C_1 + B_2$ :



$N_{5,3}(x) = x-1$ , если  $x \equiv 6, 7 \pmod{10}$ , максимум достигается на следующем (вообще говоря, не единственном) экстремальном  $(5, 3)$ -полицикле:

– если  $x \equiv 7 \pmod{10}$ , то это полицикл  $\frac{x-7}{10} C_1 + B_3$ :



– если  $x \equiv 6 \pmod{10}$ , то это полицикл  $B_2 + \frac{x-16}{10} C_1 + B_3$ :



$N_{5,3}(x) = x-2$ , если  $x \equiv 1, 2, 3, 4, 5 \pmod{10}$ , и максимум достигается на полицикле  $E_{x+2}$  (вообще говоря, не единственном).

- (iii) Во всех случаях, кроме  $p_5 = 9, 10, 11$ , все возможные значения плотности  $(5, 3)$ -полицикла — это рациональные числа, лежащие на отрезке  $[0, 1]$ . Все возможные значения плотности полицикла, любая грань которого содержит внутреннюю вершину, — это рациональные числа на отрезке  $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Доказательство утверждений (i) и (ii) использует разложение  $(5, 3)$ -полицикла на элементарные и классификацию элементарных  $(5, 3)$ -полициклов. Например, при  $p_5 \equiv 0 \pmod{10}$  экстремальный полицикл получается склеиванием копий полицикла  $C_1$ , при  $p_5 \equiv 9 \pmod{10}$  или  $p_5 \equiv 8 \pmod{10}$  необходимо склеить вместе несколько копий полицикла  $C_1$  и одну или две копии полицикла  $B_2$  (всегда по краям). Элементарный полицикл  $E_{x-2}$  является экстремальным при  $n(x) = x - 2 \geq 10$ ; в тоже время, даже при  $x = 12$ , существует три других экстремальных  $(5, 3)$ -полицикла.

Элементарные  $(5, 3)$ -полициклы  $E_1, C_1$  имеют плотности  $\frac{1}{3}, 1$  соответственно. Далее, если  $P$  является  $(5, 3)$ -полициклом вида  $mE_1 + nC_1$ , то его плотность равна

$$\text{dens}(P) = \frac{m + 10n}{3m + 10n}.$$

Легко видеть, что можно подобрать  $n, m \in \mathbb{N}$ , реализующие все рациональные плотности на отрезке  $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ . Если каждый 5-угольник инцидентен внутренней вершине, то  $E_1$  не входит в разложение  $P$  на элементарные компоненты. Если  $p_5 \geq 12$ , то  $A_i$  не может быть элементарной компонентой  $P$ . Плотности всех остальных элементарных компонент лежат между  $\frac{1}{3}$  и 1, откуда следует, что при  $p_5 \notin \{9, 10, 11\}$  плотность полицикла лежит на отрезке  $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ . Если в разложении на элементарные компоненты допускается  $D$ , то могут быть реализованы все рациональные плотности из отрезка  $[0, 1]$ . ■

С ростом  $x$  число экстремальных полициклов (в тех случаях, когда они не единственны) также растет. К примеру, при  $x = 13, 14$  и  $15$  полициклы  $C_1 + E_1$ ,  $C_1 + E_2$  и  $C_1 + E_3$  также являются экстремальными. Было бы интересно обобщить понятие плотности на бесконечные  $(r, q)$ -полициклы, но это возможно не во всех случаях (см. гиперболический случай в [FeKuKu98, FeKu93]).




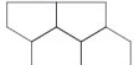







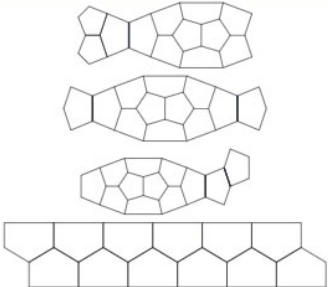
$x$	$N_{5,3}(x)$	Экстремальные полициклы	Элементарные компоненты
1	0		$D$
2	0		$2D$
3	1		$E_1$
4	2		$E_2$
5	3		$E_3$
6	5		$A_5$
7	6		$B_3$
8	8		$A_4$
9	10		$A_3$
10	12		$A_2$
11	15		$A_1$
12	10		$E_1 + B_2$ $D + C_1 + D$ $C_1 + D + D$ $E_{10}$

Рис. 8.1. Экстремальные (5, 3)-полициклы с не более чем 12 гранями

8.1.2. Экстремальные  $(3, 5)$ -полициклы**Теорема 8.1.5.**

- (i) Если  $x \leq 19$ , то значения  $N_{3,5}(x)$  приведены на рис. 8.2 вместе со всеми  $(3, 5)$ -полициклами, на которых реализуется экстремум.
- (ii) Для любого  $x \geq 20$  выполнено:

$x \equiv a \pmod{18}$	$N_{3,5}(x)$	Пример экстремального полицикла	Единственность
$a = 0$	$\frac{x}{3}$	$\frac{x}{18}b_2$	нет
$a = 1$	$\frac{x-1}{3}$	$d + \frac{x-1}{18}b_2$	нет
$a = 10$	$\frac{x-1}{3}$	$b_3 + \frac{x-28}{18}b_2 + b_4$ $\frac{x-10}{18}(c_1 + 2d) + c_4$	нет
$a = 12$	$\frac{x}{3}$	$b_3 + \frac{x-30}{18}b_2 + b_3$ $\frac{x-12}{18}(c_1 + 2d) + c_3$	нет
$a = 13$	$\frac{x-1}{3}$	$b_4 + \frac{x-13}{18}b_2$	да
$a = 14$	$\frac{x+1}{3}$	$\frac{x-14}{18}(c_1 + 2d) + c_2$	нет
$a = 15$	$\frac{x}{3}$	$b_3 + \frac{x-15}{18}b_2$	да
$a = 16$	$\frac{x+2}{3}$	$\frac{x-16}{18}(c_1 + 2d) + c_1$	да
$a = 17$	$\frac{x+1}{3}$	$\frac{x-17}{18}(c_1 + 2d) + c_1 + d$	да

и если  $x$  не соответствует ни одному из перечисленных пунктов, то выполнено следующее.

$x \equiv a \pmod{3}$	$N_{3,5}(x)$	Пример экстремального полицикла	Единственность
$a = 2$	$\frac{x-2}{3}$	$e_{N_{3,5}(x)}$	нет
$a = 0$	$\frac{x-3}{3}$	$d + e_{N_{3,5}(x)}$	нет
$a = 1$	$\frac{x-4}{3}$	$2d + e_{N_{3,5}(x)}$	нет

- (iii) Во всех случаях, кроме  $x \in \{14, \dots, 19\}$ , все возможные значения плотности  $(3, 5)$ -полицикла — это рациональные числа, лежащие на отрезке  $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ .

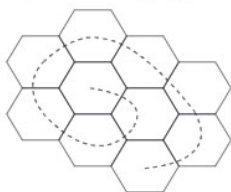
**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для доказательства теоремы 8.1.5 применяется тот же метод, что и для теоремы 8.1.4. Отличие состоит в том, что теперь нам нужно рассмотреть больше случаев (см. на рис. 7.3 список элементарных  $(3, 5)$ -полициклов и их ядер).

При  $x \leq 19$  перечисление было сделано вручную, так как оно включает несколько особых случаев. Для других значений  $x$  мы прежде всего замечаем, что  $a_i$  и  $b_1$  не могут быть элементарными компонентами экстремальных полициклов. Далее следует полный перебор всех возможных случаев. ■

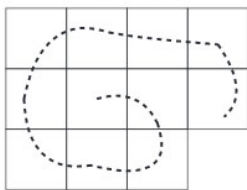
### 8.1.3. Параболические и гиперболические экстремальные $(r, q)$ -полициклы

Представленные в этом разделе результаты являются весьма частными, но мы полагаем, что нет серьезных препятствий к их обобщению.

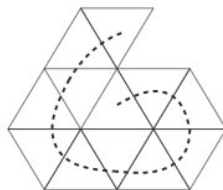
Для параболических или гиперболических параметров  $(r, q)$  назовем *спиралью*  $Sp_{r,q}(n)$  собственный  $(r, q)$ -полицикл, состоящий из  $n$   $r$ -угольников, полученный из одного  $r$ -угольника добавлением  $r$ -угольников в последовательности, всегда поворачивающейся в одном направлении. Написать формальное определение достаточно трудно (см. [HaHa76, Gre01]); поэтому мы продемонстрируем несколько примеров.



$Sp_{6,3}(10)$





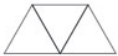



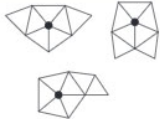

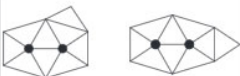

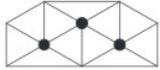

$Sp_{4,4}(11)$



$Sp_{3,6}(12)$

В [HaHa76] было доказано, что для параболических  $(r, q)$  спираль  $Sp_{r,q}(n)$  (называемая там «extremal animal») является  $(r, q)$ -полициклом с наименьшим периметром среди всех собственных  $(r, q)$ -полициклов. Более того, в [BBG03, Gre01] было доказано, что спираль  $Sp_{6,3}(n)$  имеет наименьший периметр среди всех  $(6, 3)$ -полициклов. Напомним (см. предыдущий раздел), что минимизация периметра при фиксированном числе  $r$ -угольников эквивалентна максимизации числа внутренних вершин.



$x$	$N_{3,5}(x)$	Экстр. полицикл	Комп.
1	0		$d$
2	0		$2d$
3	0		$3d$
4	0		$4d$
5	1		$e_1$
6	1		$e_1 + d$
7	1		$d + e_1 + d$
8	2		$e_2$
9	2		$e_2 + d$
10	3		$c_4$
11	3	 	$e_3$ $c_4 + d$












$x$	$N_{3,5}(x)$	Экстр. полицикл	Комп.
12	4		$c_3$
13	4	 	$b_4$ $b_4$
14	5		$c_2$
15	6		$a_5$
16	6	  	$c_1$ $a_4$ $a_5 + d$
17	7		$a_3$
18	8		$a_2$
19	9		$a_1$

Рис. 8.2. Экстремальные  $(3, 5)$ -полициклы с не более чем 20 гранями

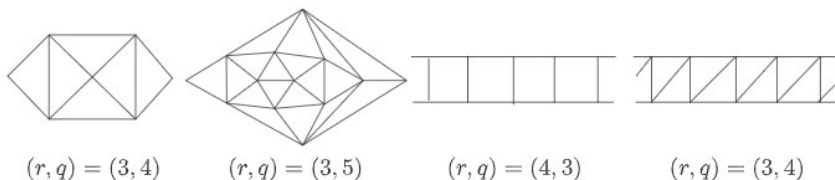
Поэтому можно выдвинуть гипотезу, что для любых параболических или гиперболических  $(r, q)$  и любого  $n \geq 1$  спираль  $Sp_{r,q}(n)$  является экстремальным  $(r, q)$ -полициклом. Более слабая гипотеза состоит в том, что в неэллиптическом случае все экстремальные полициклы являются собственными. Более того, похоже, что для гиперболических  $(r, q)$  выполняется неравенство  $\frac{N_{r,q}(x)}{x} < C_{r,q}$  для некоторой константы  $C_{r,q} < \frac{r}{q}$ ; параболический случай разобран в теореме 8.1.2. Причина этого состоит в том, что в гиперболическом пространстве граница не является пренебрежимо малой по сравнению с гранями, не содержащими граничных ребер. Эта точка зрения хорошо освещена в [Mor97]. См. также работу [PaPi11], где, в частности, дана оценка на число вершин для некоторых гиперболических  $(r, q)$ -полициклов. Эффект, проявляющийся при  $(r, q) = (5, 3)$  или  $(3, 5)$ , когда существует маленький  $(r, q)$ -полицикл с большей плотностью  $\frac{N_{r,q}(x)}{x}$ , чем у любого другого  $(r, q)$ -полицикла (к примеру,  $\frac{N_{5,3}(9)}{9} > \frac{N_{5,3}(x)}{x}$  при любом  $x \geq 12$ ), не имеет места при параболических и гиперболических  $(r, q)$ . Дело в том, что при параболических и гиперболических значениях  $(r, q)$  любые два  $(r, q)$ -полицикла могут быть соединены в больший  $(r, q)$ -полицикл.

Более того, все это может быть обобщено на случай некоторых  $(R, q)$ -полициклов. Например, существует задача нахождения  $(\{3, 4, 5, 6\}, 3)$ -полициклов (см. главу 7) с наименьшим периметром при фиксированном  $p$ -векторе. В [Egg05] доказано, что если  $3p_3 + 2p_4 + p_5 \leq 6$ , то таким полициклом оказывается обобщенная спираль; в более ранней работе Грениуса [BBG03, Gre01] разобран случай  $(\{5, 6\}, 3)$ -полициклов.

## 8.2. Непродолжаемые полициклы

Рассмотрим теперь другое естественное понятие максимальности полицикла. Будем называть  $(r, q)$ -полицикл *непродолжаемым*, если он не является частичным подграфом никакого другого  $(r, q)$ -полицикла, т. е. перестает быть  $(r, q)$ -полициклом при добавлении любого нового  $r$ -угольника. Очевидно, что любой паркет  $\{r, q\}$  ( $\{r, q\} - f$  в эллиптическом случае) является непродолжаемым, в то время как все остальные непродолжаемые полициклы являются гелиценами. Также очевидно, что любой 3-связный  $(r, 3)$ -полицикл непродолжаем.

На рис. 8.3 изображены четыре особых непродолжаемых полицикла: вершинно-разбитый октаэдр, вершинно-разбитый икосаэдр и два бесконечных:  $P_2 \times P_{\mathbb{Z}} = Prism_{\infty}$  и  $Tr_{\mathbb{Z}} = APrism_{\infty}$  (см. раздел 4.2).

Рис. 8.3. Особые эллиптические непродолжаемые  $(r, q)$ -полициклы

**Теорема 8.2.1.** ([DeSt02b]) *Все непродолжаемые  $(r, q)$ -полициклы это:*

- паркеты  $\{r, q\}$ ,  $(\{r, q\} - f$  в эллиптическом случае),
- четыре особых эллиптических полицикла, изображенные на рис. 8.3,
- континуум бесконечных полициклов при  $(r, q) \neq (3, 3), (3, 4), (4, 3)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В случае  $(r, q) = (3, 3), (3, 4), (4, 3)$  доказательство немедленно следует из полного списка таких полициклов, приведенного в главе 4. Очевидно, что бесконечные в обе стороны и непериодические (хотя бы в одном направлении) последовательности склеенных копий элементарных полициклов  $b_2$  и  $e_6$  (см. рис. 7.3) дают континуум бесконечных непродолжаемых  $(3, 5)$ -полициклов. С помощью склейки элементарных  $(5, 3)$ -полициклов  $C_2$  (см. рис. 7.2) и  $C'_2$  (полученного из  $C_2$  поворотом на угол  $\pi$ ), можно получить континуум бесконечных непродолжаемых  $(5, 3)$ -полициклов. В лемме 8.2.4 мы построим континуум бесконечных непродолжаемых  $(r, q)$ -полициклов для неэллиптических  $(r, q)$ .

Для случаев  $(r, q) = (3, 5)$  или  $(5, 3)$  мы докажем в лемме 8.2.3, что вершинно-разбитый икосаэдр является единственным таким конечным полициклом. ■

**Лемма 8.2.2.** *Любой конечный непродолжаемый  $(r, q)$ -полицикл является эллиптическим.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Доказательство основывается на оценке кривизны. По сути это подсчет инцидентностей вида вершина-грань и применение формулы Эйлера. Но мы используем подход с точки зрения кривизны (см. раздел 4.4), так как он наилучшим образом описывает эллиптичность.

Угол правильного  $r$ -угольника равен  $\frac{r-2}{r}\pi$ , каждая внутренняя вершина полицикла  $P$  инцидентна  $q$  правильным  $r$ -угольникам, отсюда

кривизна любой внутренней вершины равняется

$$\omega = 2\pi - \frac{r-2}{r} q\pi.$$

Поэтому полная кривизна  $P$  равна

$$\Omega = v_{int} \frac{2(r+q) - rq}{r} \pi.$$

Если  $v_{int} = 0$ , т.е. если  $(r, q)$ -полицикл  $P$  является внешнепланарным, тогда кривизна  $\Omega$  равна нулю при любых параметрах  $(r, q)$ . Если  $v_{int} > 0$ , то кривизна  $\Omega$  положительна, равна нулю или отрицательна в зависимости от того, являются ли параметры  $(r, q)$  эллиптическими, параболическими или гиперболическими соответственно.

Любое внутреннее ребро полицикла  $P$  принадлежит ровно двум  $r$ -угольникам, в то время как каждое граничное ребро принадлежит ровно одному  $r$ -угольнику. Поэтому верно следующее равенство:

$$rp_r = 2e_{int} + k,$$

где снова  $e_{int}$  — число неграничных ребер полицикла  $P$  и  $k$  — число граничных ребер. С другой стороны, число граничных вершин и число граничных ребер равно одному и тому же числу  $k$  (периметру полицикла). Поэтому соответствующие слагаемые в формуле Эйлера сокращаются, и оставшееся равенство выглядит так:

$$v_{int} - e_{int} + p_r = 1.$$

Из последних двух формул получаем

$$(r-2)p_r = 2v_{int} + (k-2).$$

Теперь вычислим сумму плоских углов полицикла  $P$ . Мы можем найти ее двумя способами: (i) вычислить сумму углов в каждом  $r$ -угольнике и просуммировать по всем  $r$ -угольникам или (ii) вычислить сумму углов в каждой вершине и просуммировать по всем вершинам (и внешним, и внутренним). В результате получим следующее равенство:

$$p_r(r-2)\pi = \sum_{i=1}^k \varphi_i + v_{int} \frac{r-2}{r} q\pi,$$

где через  $\varphi_i$  обозначен полный угол  $i$ -й граничной вершины  $P$ . Совмещая эту формулу с предыдущей, получаем

$$v_{int} \left( 2\pi - \frac{r-2}{r} q\pi \right) = \sum_{i=1}^k \varphi_i - (k-2)\pi. \quad (8.1)$$

Эта формула называется формулой Гаусса–Бонне (см. [Ale50]). Другими словами, формула Эйлера  $v - e + f = 2$  верна для плоских графов без границы, но может быть обобщена на плоские графы с границей.

Пусть  $k_j$  — число вершин степени  $j$  (где  $j = 2, 3, \dots, q-1, q$ ) на границе  $P$  и  $k$  — общее число вершин на границе полицикла  $P$ , т. е. его периметр. Тогда выполнено

$$k = k_2 + k_3 + \dots + k_{q-1} + k_q. \quad (8.2)$$

Вычислим сумму  $\sum_{i=1}^k \varphi_i - (k-2)\pi$ , стоящую в правой части равенства (8.1) для конечного полицикла  $P$ , рассматриваемого как геодезический  $k$ -угольник. Имеем:

$$\sum_{i=1}^k \varphi_i = (1k_2 + 2k_3 + \dots + (q-2)k_{q-1} + (q-1)k_q) \frac{r-2}{r} \pi,$$

с учетом формулы (8.2), получаем следующее равенство:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \varphi_i - (k-2)\pi = & \left( \left( 1 \frac{r-2}{r} - 1 \right) k_2 + \left( 2 \frac{r-2}{r} - 1 \right) k_3 + \dots + \right. \\ & \left. + \left( (q-2) \frac{r-2}{r} - 1 \right) k_{q-1} + \left( (q-1) \frac{r-2}{r} - 1 \right) k_q \right) \pi + 2\pi. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Рассмотрим частный случай конечного полицикла  $P$ , каждая вершина которого имеет степень  $q$ . В этом случае  $2e = qn$ , где  $n$  — общее число вершин и  $e$  — общее число ребер полицикла  $P$ ; с учетом равенства  $2e = rp_r + k$  мы можем записать формулу Эйлера  $n - e + p_r = 1$  в следующем виде:

$$n \frac{2(q+r) - qr}{2r} = 1 + \frac{k}{r}.$$

Отсюда  $2(q+r) - qr > 0$ , т. е. параметры  $(r, q)$  являются эллиптическими. Для любой из пяти эллиптических пар  $(r, q) = (3, 3), (3, 4), (3, 5),$



(4, 3), (5, 3) мы можем непосредственно проверить, что выполнено равенство  $k = r$ , и поэтому  $P$  действительно является поверхностью платонова тела без одной грани.

Предположим теперь, что существует вершина со степенью, отличной от  $q$ . По теореме 4.3.3, существуют хотя бы две таких вершины.

Предположим, что параметры  $(r, q)$  являются параболическими или гиперболическими, т. е. выполнено неравенство  $qr - 2(q + r) \geq 0$ . Тогда верна следующая оценка для коэффициента, стоящего перед  $k_q$  в равенстве (8.3):

$$(q - 1) \frac{r - 2}{r} - 1 = \frac{qr - 2(q + r)}{r} + \frac{2}{r} \geq \frac{2}{r}.$$

По следствию 4.3.5, общее число вершин на границе должно быть больше  $r$ . Любые две вершины степени меньшей  $q$  должны быть разделены хотя бы  $r - 1$  вершиной степени  $q$ ; в противном случае полицикл  $P$  будет продолжаемым.

Из вышесказанного и условия  $r \geq 3$  получаем

$$k_q \geq (r - 1) \sum_{j=2}^{q-1} k_j \geq 2 \sum_{j=2}^{q-1} k_j.$$

Отсюда из 8.3 получаем, что величина  $\sum_{i=1}^k \varphi_i - (k - 2)\pi$ , вычисленная для полицикла  $P$ , удовлетворяет оценке:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \varphi_i - (k - 2)\pi &\geq \left( \left( 1 \frac{r - 2}{r} - 1 + 2 \frac{2}{r} \right) k_2 + \right. \\ &\left. + \left( 2 \frac{r - 2}{r} - 1 + 2 \frac{2}{r} \right) k_3 + \dots + \left( (q - 2) \frac{r - 2}{r} - 1 + 2 \frac{2}{r} \right) k_{q-1} \right) \pi + 2\pi. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Коэффициент при  $k_j$  в правой части неравенства (8.4) увеличивается с ростом индекса  $j$ . Так как наименьший коэффициент (при  $k_2$ ) положителен, все остальные коэффициенты при  $k_j$  также положительны. Значения самих  $k_j$  неотрицательны (более того, существует положительное  $k_j$ , так как  $P$  содержит вершины степени меньше  $q$ ). Отсюда следует неравенство:

$$\sum_{i=1}^k \varphi_i - (k - 2)\pi \geq 2\pi.$$

Из положительности правой части неравенства (8.4) следует положительность левой. Поэтому с учетом равенства (8.1) кривизна  $\Omega$  геодезического  $k$ -угольника положительна. Полученное неравенство  $2(r + q) - qr > 0$  противоречит сделанным предположениям. Значит, поскольку конечный непродолжаемый полицикл не может иметь параболические или гиперболические параметры  $(r, q)$ , эти параметры для него являются эллиптическими. ■

**Лемма 8.2.3.** ([DSS06]) *Все возможные конечные эллиптические непродолжаемые  $(r, q)$ -полициклы — это вершинно-разбитые октаэдр и икосаэдр (см. рис. 8.3) и пять платоновых тел  $\{r, q\}$  (с удаленной гранью).*

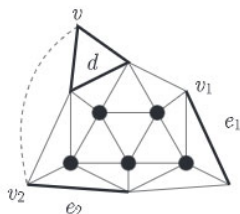
**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В случае  $(3, 3)$ -,  $(3, 4)$ - и  $(4, 3)$ -полициклов доказательство осуществляется с помощью классификации таких полициклов, приведенной в разделе 4.2. Рассмотрим теперь  $(r, q)$ -полицикл  $P$ , для которого  $(r, q) = (3, 5)$  или  $(5, 3)$ . Тогда мы можем использовать классификацию элементарных  $(r, q)$ -полициклов, приведенную на рис. 7.2 и 7.3. Рассмотрим элементарные компоненты полицикла  $P$  и его главный остов  $Maj(P)$ , образованный из них (две компоненты считаются смежными тогда и только тогда, когда они имеют общее открытое ребро). Очевидно,  $Maj(P)$  — это плоский граф. Но, по теореме 8.0.1, он также является деревом. Таким образом, либо  $Maj(P)$  состоит из одной точки, либо  $Maj(P)$  содержит вершину степени 1.

Рассмотрим случай  $(r, q) = (5, 3)$ . Легко видеть, что единственный непродолжаемый конечный элементарный  $(5, 3)$ -полицикл — это  $A_1 = \{5, 3\} - f$ . Предположим, что граф  $Maj(P)$  содержит вершину степени 1. Тогда элементарный полицикл, соответствующий этой вершине, отличается от  $A_i$ . Легко видеть, что в случае любого другого конечного элементарного  $(5, 3)$ -полицикла мы можем продолжить полицикл  $P$ , т. е. добавить одну грань.

Рассмотрим случай  $(r, q) = (3, 5)$ ; пусть  $P$  — непродолжаемый  $(3, 5)$ -полицикл. Единственный непродолжаемый конечный элементарный  $(3, 5)$ -полицикл — это  $a_1 = \{3, 5\} - f$ . Предположим, что  $P$  отличается от  $a_1$ . Тогда он содержит более одной элементарной компоненты, поэтому главный остов  $Maj(P)$  содержит хотя бы одну вершину степени 1.

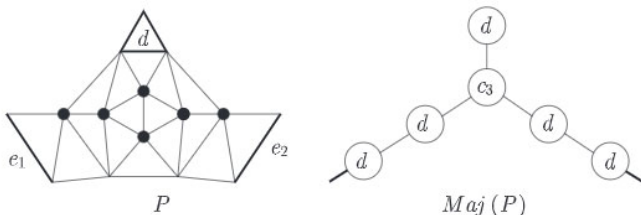
Легко видеть, что  $e_i$ ,  $b_i$  и  $c_i$  не могут быть вершинами степени 1 в  $Maj(P)$ , так как в противном случае всегда существует открытое ребро, на которое можно добавить 3-угольник. Поэтому вершинами степени 1 в  $Maj(P)$  могут быть только  $d$  и  $a_3$ . Если в разложении на элементарные компоненты встречается  $a_3$ , тогда  $P$  совпадает с  $d + a_3$ . В оставшемся

случае  $d$  является вершиной степени 1. Если полицикл  $d$  смежен с некоторым элементарным полициклом  $P_{el}$ , то обе вершины открытого ребра, которому  $d$  инцидентен, должны иметь степень 4, иначе к  $d$  можно добавить 3-угольник. Единственные элементарные  $(3, 5)$ -полициклы, содержащие две соседние вершины степени 4, — это  $a_3$ ,  $c_2$  и  $c_3$ . Случай, когда в разложении встречается  $a_3$ , уже разобран. Следующий рисунок показывает (с точностью до симметрии), почему  $c_2$  невозможен:



Можно добавить полицикл к ребру  $e_1$  и тем самым запретить продолжение с помощью ребра  $(v, v_1)$ . Но невозможно добавить полицикл к  $e_2$ ; поэтому мы всегда сможем добавить ребро  $(v, v_2)$ , и  $P$  всегда будет протягиваемым.

Если в разложении на элементарные компоненты встречается  $c_3$ , получаем следующую диаграмму:



Поскольку полицикл  $P$  — непротягиваемый, то существуют полициклы, инцидентные ребрам  $e_1$  и  $e_2$ . Таким образом, мы имеем два пути, начинающихся в  $d$ . Выберем один из них. Главный остов  $Maj(P)$  — это конечное дерево, поэтому выбранный путь завершится в вершине степени 1, которая, с учетом вышесказанного, также должна быть копией  $d$ . Более того, предшествующий ей элементарный  $(3, 5)$ -полицикл должен совпадать с  $c_3$ . Таким образом, у нас снова есть два пути, один из которых — новый. Мы можем продолжать эти рассуждения дальше. Мы не встретимся с циклом в  $Maj(P)$ , так как это дерево, таким образом, мы доказали бесконечность  $P$ . Это невозможно по предположению, поэтому единственным возможным случаем является  $d + a_3$ . ■

**Лемма 8.2.4.** *Для неэллиптических параметров  $(r, q)$  существует континуум непродолжаемых  $(r, q)$ -полициклов.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Мы рассмотрим бесконечные непродолжаемые полициклы, получаемые из паркета  $\{r, q\}$  удалением некоторых попарно несмежных  $r$ -угольников и последующим переходом к универсальной накрывающей. Если мы удалим счетное число  $r$ -угольников непериодическим образом, то (из-за того что на каждом шаге мы можем выбрать удаляемый  $r$ -угольник большим числом способов) получим континуум различных полициклов. Рассмотрим две неконгруэнтные последовательности  $S_1$  и  $S_2$  из  $r$ -угольников в паркете  $\{r, q\}$ , тогда  $(r, q)_{gen}$ -полициклы  $P_1 = \{r, q\} - S_1$  и  $P_2 = \{r, q\} - S_2$  не изоморфны, их универсальные накрывающие  $\tilde{P}_1$  и  $\tilde{P}_2$  являются непродолжаемыми  $(r, q)$ -полициклами, образы которых в  $\{r, q\}$  под действием клеточного гомоморфизма (см. теорему 4.3.1) равны  $P_1$  и  $P_2$ . Поэтому  $\tilde{P}_1$  и  $\tilde{P}_2$  не изоморфны. ■

Наконец, рассмотрим  $(r, q)$ -полициклы такие, что любая внутренняя точка любой внутренней грани имеет степень 1 при клеточном гомоморфизме на  $\{r, q\}$ . Число таких полициклов, которые нельзя продолжить без потери этого свойства, равно 0 при  $(p, q) = (3, 3), (3, 4)$  и равно 1 при  $(p, q) = (4, 3)$  (это  $P_2 \times P_5$ ). Это число конечно при  $(p, q) = (5, 3), (3, 5)$  и бесконечно в остальных случаях. Конечность в случаях  $(r, q) = (5, 3)$  и  $(3, 5)$  следует из того, что количества 5-угольников и 3-угольников должны быть не больше 12 и 20 соответственно.

### 8.3. 2-вложимые полициклы

Мы кратко обсудим 2-вложения полициклов, чтобы показать, как здесь применяются элементарные полициклы. Вопросы, касающиеся 2-вложений графов, — это главная тема книги [DGS04]. Мы лишь упомянем недавно полученную классификацию 2-вложимых  $(\{a, 6\}, 3)$ -сфер ( $a = 3, 4, 5$ ). Существует соответственно 1, 5, 5 таких графов при  $a = 3, 4, 5$  (см. [DDS05, MaSh07]).

Пусть дано множество  $S$ , тогда *расстоянием Хэмминга* на  $|S|$ -гиперкубе  $\{0, 1\}^{|S|}$  называется величина  $d(x, y) = |\{i \in S: x_i \neq y_i\}|$ . Если даны две вершины  $u, v$  графа  $G$ , то *расстояние по графу*  $d_G(u, v)$  равно минимальному количеству ребер, которое необходимо для соединения  $u$  и  $v$ .

Граф  $G$  называется *2-вложимым*, если существует множество  $S$  и отображение

$$\begin{aligned} \psi: V(G) &\rightarrow \{0, 1\}^{|S|} \\ v &\mapsto \psi(v) \end{aligned}$$



такое, что для любых вершин  $v, v'$  графа  $G$  выполнено равенство  $d(\psi(v), \psi(v')) = 2d_G(v, v')$ , где  $d_G$  — расстояние по графу  $G$ . Другими словами, граф является 2-вложимым тогда и только тогда, когда он является изометрическим подграфом *полукуба*.

Более подробная информация по данной теме содержится в [DeLa97, DGS04] и цитируемых там работах. Для конечных графов в [DeSh96] приведен эффективный полиномиальный алгоритм, определяющий, является ли плоский граф 2-вложимым (см. реализацию в [Dut03]).

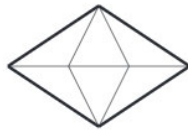
Для данного плоского графа  $G$  назовем *альтернирующей зоной* последовательность  $(e_i)$  ребер такую, что  $e_i$  и  $e_{i+1}$  принадлежат одной грани  $F_i$ . Если  $F_i$  имеет четное число вершин, то мы требуем, чтобы ребро  $e_i$  было противоположным к ребру  $e_{i+1}$  в многоугольнике  $F_i$ . Если же  $F_i$  имеет нечетное число вершин, то  $e_i$  и  $e_{i+1}$  также должны быть противоположными, но в данном случае есть два варианта, обозначаемых «+» и «-» (с точностью до поворота плоскости). Мы требуем, чтобы варианты «+» и «-» чередовались. Концевые ребра зоны (инцидентные внешним границам) называются *концами* зоны.

Если зона не самопересекается, то после удаления ребер зоны получим два графа  $G_1$  и  $G_2$ . Если каждый кратчайший путь в  $G$  между двумя вершинами подграфа  $G_i$  для фиксированного  $i = 1, 2$  состоит только из ребер этого подграфа  $G_i$ , будем говорить, что зона осуществляет *выпуклый разрез* данного  $(r, q)$ -полицикла. Если каждая альтернирующая зона осуществляет выпуклый разрез, то граф является 2-вложимым (см. доказательство в [CDG97]).

Назовем  $(r, q)$ -*графом* плоский граф, у которого все внутренние грани имеют не менее  $r$  ребер и все внутренние вершины имеют степень хотя бы  $q$ . В [PSC90] доказано, что все  $(4, 4)$ -графы 2-вложимы, а в [CDV06] доказано, что и все  $(6, 3)$ - и  $(3, 6)$ -графы 2-вложимы. Отсюда следует, что все  $(r, q)$ -полициклы с параболическими и гиперболическими параметрами  $(r, q)$  являются 2-вложимыми.

Из этого и из результатов раздела 4.2 для эллиптических  $(r, q)$  вытекает теорема 8.3.1.

**Теорема 8.3.1.** При  $(r, q) \neq (5, 3), (3, 5)$  только три конечных  $(r, q)$ -полицикла не являются 2-вложимыми:

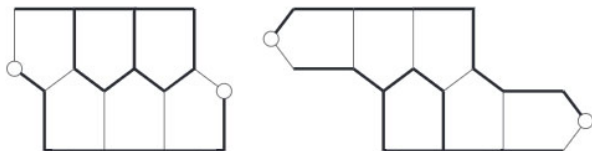




Таким образом, остается решить вопрос о 2-вложимости только для  $(r, q) = (3, 5)$  и  $(5, 3)$ . Если элементарный полицикл  $P$  участвует в разложении полицикла  $P'$ , то  $P$  является изометрическим подграфом  $P'$ .

**Теорема 8.3.2.** ([DeSt00b]) *Произвольный  $(5, 3)$ -полицикл, отличный от додекаэдра  $\{5, 3\}$ , является 2-вложимым тогда и только тогда, когда он не содержит ни один из  $(5, 3)$ -полициклов  $E_4$  и  $D + E_2 + D$  (см. рис. 8.4) в качестве индуцированного подграфа.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Сначала отметим, что  $(5, 3)$ -полициклы  $E_4$  и  $D + E_2 + D$  не являются 2-вложимыми. Значит, некоторые их альтернирующие зоны не определяют выпуклый разрез.



Полицикл  $A_1$  является 2-вложимым. Элементарные  $(5, 3)$ -полициклы  $A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 = E_{\mathbb{Z}}, B_1 = E_{\mathbb{N}}, B_2, B_3, C_1, C_2$  содержат  $E_4$  в качестве индуцированного подграфа, поэтому не являются 2-вложимыми.

Рассмотрим теперь  $(5, 3)$ -полицикл, отличный от  $A_1$  и не содержащий  $E_4$  и  $D + E_2 + D$  в качестве частичных подграфов. Из вышесказанного мы знаем, что его элементарными компонентами могут быть только  $D, E_2, E_3, C_3$ . Рассмотрим альтернирующую зону  $Z$ , проходящую через элементарные компоненты  $\dots, EP_i, \dots$ . Мы знаем, что  $E_2$  может встречаться только на конце последовательности, так как полицикл  $D + E_2 + D$  невозможен. Далее, рассматривая саму зону, видим, что  $E_3$  и  $C_3$  тоже должны быть на концах. Таким образом, только  $D$  может находиться не с краю последовательности  $EP_i$ . Но  $D$  может быть склеен только с двумя другими элементарными  $(r, q)$ -полициклами. Далее необходимо проверить, что альтернирующие зоны выпуклы (это длинная и громоздкая часть). ■

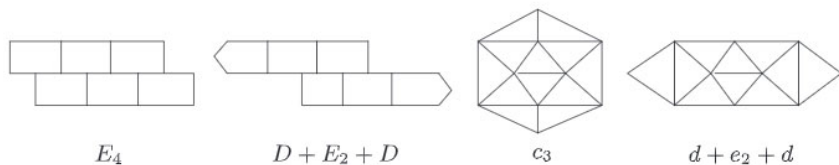
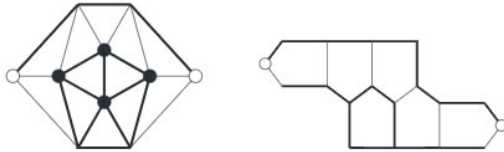


Рис. 8.4. Запрещенные для 2-вложимых  $(5, 3)$ - и  $(3, 5)$ -полициклов подграфы

**Теорема 8.3.3.** ([DeSt02a]) *Произвольный  $(3, 5)$ -полицикл, отличный от икосаэдра  $\{3, 5\}$  и от икосаэдра с удаленной вершиной  $\{3, 5\} - v$ , является 2-вложимым тогда и только тогда, когда он не содержит в качестве индуцированного подграфа ни один из  $(3, 5)$ -полициклов  $c_3$  и  $d + e_2 + d$ , изображенных на рис. 8.4.*

**Доказательство.** Поскольку  $(3, 5)$ -полициклы  $c_3$  и  $d + e_2 + d$  не являются 2-вложимыми, то некоторые их альтернирующие зоны не осуществляют выпуклый разрез.



Ребра индуцированных графов  $G_i$ , определенных в начале этого раздела, выделены жирным. Между двумя белыми вершинами существует два кратчайших пути, один из которых лежит вне подграфа. Два полицикла  $a_1 = \{3, 5\} - f$  и  $a_5 = \{3, 5\} - v$  являются 2-вложимыми. С другой стороны, два полицикла  $a_5 + d$  и  $d + a_5 + d$ , содержащие  $d + e_2 + d$ , не являются 2-вложимыми. Не существует других  $(3, 5)$ -полициклов, содержащих  $a_5$  в качестве элементарного слагаемого. Полициклы  $a_2, a_3, a_4, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$  содержат как минимум один не 2-вложимый полицикл  $c_3$  среди своих изометрических подполициклов. Полициклы  $e_i, i \geq 4, b_1$  и  $a_6$  содержат изометрический не 2-вложимый подполицикл  $d + e_2 + d$ . Отсюда имеем, что любой  $(3, 5)$ -полицикл, содержащий какой-то из этих полициклов в качестве элементарного слагаемого, не является 2-вложимым.

Остается исследовать  $(3, 5)$ -полициклы, чьими элементарными слагаемыми являются только  $c_4, d, e_1, e_2, e_3$ . Мы предположим, что  $c_3$  и  $d + e_2 + d$  не встречаются в качестве подполициклов и докажем, что их альтернирующие зоны определяют выпуклые разрезы.

Рассмотрим альтернирующую зону. Боковые стороны 3-угольников лежат внутри зоны; только самая левая и самая правая из них — это концы зоны; основание 3-угольника лежит на границе зоны. Предположим, что основание 3-угольника принадлежит ядру. Тогда полицикл  $e_2$ , ядро которого равно этому основанию, является подполициклом рассматриваемого  $(3, 5)$ -полицикла. Существует всего одно ребро  $e_2$ , оба конца которого имеют степень 3, к которому может быть добавлен 3-угольник  $d$  (полицикл  $d + e_2 + d$  невозможен); всякое другое такое ребро  $e_2$  является концом зоны. Если граница зоны не содержит двух последовательных оснований,

принадлежащих ядру, то другое такое основание может оказаться только на другом конце зоны. Из всех вершин на границе зоны, не принадлежащих основаниям, входящим в ребро, как минимум каждая вторая лежит на границе окружающего ее  $(3, 5)$ -полицикла. Отсюда получаем, что зона осуществляет выпуклый разрез. Но если два последовательных основания на границе зоны принадлежат ядру, то зона содержит всего восемь ребер; оба ее конца являются ребрами элементарного полицикла  $e_3$  с концами степени 3. Они определяют выпуклый разрез. ■

До сих пор мы рассматривали 2-вложение в  $\{0, 1\}^{|S|}$ . Если граф  $G$  конечен, то  $S$  также конечно. Если  $G$  бесконечен, можно рассматривать 2-вложения  $G$  в  $\mathbb{Z}^{|S|}$  с метрикой  $d(x, y) = \sum_{i \in S} |x_i - y_i|$ . Любое 2-вложение в  $\mathbb{Z}^{|S|}$  дает 2-вложение в  $\{0, 1\}^{|T|}$  для некоторого  $T$ . Но вложение в  $\mathbb{Z}^{|S|}$  с конечным  $S$  может существовать и для некоторых бесконечных графов  $G$ . Например, это верно для параболических паркетов  $\{4, 4\} = \mathbb{Z}^2$ ,  $\{3, 6\}$ ,  $\{6, 3\}$  (оба 2-вложимы в  $\mathbb{Z}^3$ ) и для бесконечных  $(4, 4)$ -,  $(3, 6)$ -,  $(6, 3)$ -графов, но неверно для гиперболических паркетов. Также существуют бесконечные параболические  $(r, q)$ -полициклы, которые 2-вложимы в  $\mathbb{Z}^{|S|}$  только при бесконечных  $S$ .

## ГЛАВА 9

# Строго регулярные сферы и торы

Будем говорить, что  $(\{a, b\}, k)$ -карта обладает свойством  $aR_i$ , если каждая ее  $a$ -угольная грань граничит с  $a$ -угольными гранями ровно по  $i$  ребрам. Будем говорить, что карта обладает свойством  $bR_j$ , если каждая ее  $b$ -угольная грань граничит с  $b$ -угольными гранями ровно по  $j$  ребрам. Если карта является полиэдральным комплексом, то введенные величины  $i$  и  $j$  — это просто число  $a$ - и  $b$ -угольных соседей.

Будем называть  $(\{a, b\}, k)$ -карту *строго регулярной*, если она обладает свойством  $aR_i$  и свойством  $bR_j$  для некоторых  $i$  и  $j$ . Мы называем карту *слабо регулярной*, если она обладает свойством  $aR_i$  и/или  $bR_j$ . В этой главе мы классифицируем все строго регулярные карты на сфере и на плоскости. Подобная классификация на поверхностях более высокого рода очень сложна, поскольку в этом случае реализуется бесконечное число карт.

Обозначим через  $p_a$  и  $p_b$  количество  $a$ - и  $b$ -угольных граней некоторой регулярной карты с конечным числом вершин  $v$ . Обозначим через  $e_{a-b}$  количество  $a-b$  ребер, т. е. ребер, по которым  $a$ -угольники граничат с  $b$ -угольниками. Предположим, что карта  $k$ -валентна и ориентируема, тогда формулу Эйлера  $v - e + f = 2(1 - g)$ , где  $g$  — род поверхности, можно переписать в следующем виде (см. теорему 1.2.3):

$$p_a(2k - a(k - 2)) + p_b(2k - b(k - 2)) = 4k(1 - g).$$

С другой стороны, ясно, что  $e_{a-b} = (a - i)p_a = (b - j)p_b$ . Следовательно, получаем

$$e_{a-b} \left( \frac{2k - a(k - 2)}{a - i} + \frac{2k - b(k - 2)}{b - j} \right) = 4k(1 - g). \quad (9.1)$$

Введем обозначение  $\alpha(k, a, b, i, j) = \frac{2k - a(k - 2)}{a - i} + \frac{2k - b(k - 2)}{b - j}$ . Тогда:

- 1) если  $\alpha(k, a, b, i, j) > 0$ , то  $g = 0$ , карта реализуется только на сфере и число вершин зависит только от  $\alpha(k, a, b, i, j)$ ;



- 2) если  $\alpha(k, a, b, i, j) = 0$ , то  $g = 1$  и карта реализуется только на торе;
- 3) если  $\alpha(k, a, b, i, j) < 0$ , то  $g > 1$ , карта реализуется на поверхностях более высокого рода  $g$ , а число вершин определяется родом и величиной  $\alpha(k, a, b, i, j)$ .

Мы получим классификацию только для строго регулярных сфер и строго регулярных нормальных сбалансированных плоскостей. Случай тора является подслучаем рассматриваемого плоского случая. Вообще говоря, в случае плоскости формула Эйлера не выполняется, но условие нормальности, которое мы обсудим позже, позволяет нам использовать некоторую версию формулы Эйлера и получить важные результаты. Снова повторим, что отсутствие классификации при  $g > 1$  неудивительно; например, классификация регулярных замощений римановых поверхностей при  $g > 1$  тоже отсутствует.

Наша классификация аналогична следующим классификационным задачам.

- 1) Классифицировать карты, группа симметрии которых транзитивна на вершинах, т. е. архимедовы карты. Ответ известен для сферы и для плоскости.
- 2) Классифицировать карты, группа симметрии которых, действуя на гранях, имеет две орбиты. Ответ снова известен только для сферы и плоскости.
- 3) Классифицировать паркеты из правильных  $r$ -угольников. В случае сферы это сделано Джонсоном (см. [Joh66, Zal69]), а в случае плоскости — в работе [Cha89].
- 4) Классифицировать карты, имеющие ровно два типа ребер (см. [Jen90, GrSh87b]).

Список всех строго регулярных сферических биполициклов (завершающий неполный список, приведенный в [BrDe99]) был найден в [Dez02]. Здесь мы приводим список всех строго регулярных плоскостей (завершающий неполный список из [Dez02]) и сравниваем его со списком из тридцати девяти 2-гомеоэдральных типов таких паркетов из [GLST85]; он включает 33 варианта значений параметров, среди которых 21 варианту соответствует континуум регулярных паркетов. Эти результаты в случае многогранников представлены в виде таблицы 9.1 (с рисунками многогранников), а в случае плоских паркетов — в виде таблицы 9.3.



## 9.1. Строго регулярные сферы

Список всех строго регулярных сфер включает в себя 68 отдельных случаев и 3 бесконечных семейства: призмы  $Prism_b$  ( $b \geq 5$ ), антипризмы  $APrism_b$  ( $b \geq 4$ ) и курносые призмы  $Prism_b$  ( $b \geq 6$ ).

Сфера называется 2-изоздральной, если ее группа симметрии, действуя на гранях, имеет две орбиты. Всего существует сорок один 2-изоздральный биполицикл-многогранник (они входят в упомянутый выше список из 71 многогранника), все эти многогранники описаны. Для каждого из них мы указываем его группу симметрии и способ построения.

Три бесконечные серии включены в таблицу 9.1 под номерами 15, 44 и 61, в соответствии с номерами их наименьших представителей. Случаи № 2 и № 18 из таблицы 9.1 можно рассматривать как курносые призмы  $Prism_3$  и  $Prism_4$ . Далее, призма  $Prism_4$ , антипризма  $APrism_3$  и курносая  $Prism_5$  представляют собой платоновы тела. Призма  $Prism_3$  выделена в отдельный случай под № 1 и не включена как подслучай в № 15, поскольку для нее  $a \neq 4$ .

**Теорема 9.1.1.** *Все строго регулярные 3-связные  $(\{a, b\}, k)$ -сферы, обладающие свойствами  $aR_i$  и  $bR_j$ , образуют список, приведенный в таблице 9.1.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Имеет место соотношение

$$(2k - a(k - 2))(b - j) + (2k - b(k - 2))(a - i) > 0. \quad (9.2)$$

Все эллиптические  $(\{a, b\}, k)$ -сферы (т.е. те, для которых  $2k > b(k - 2)$ ) были перечислены в главе 2, поэтому достаточно перенести сюда этот список. Все те пять сфер из этого списка, которые не содержат 2-угольников, являются строго регулярными. Все параболические  $(\{a, b\}, k)$ -сферы (т.е. те, для которых  $2k = b(k - 2)$ ), обладающие свойством  $bR_j$ , перечислены в главе 10; таким образом, в дальнейшем будем предполагать, что параметры  $(\{a, b\}, k)$  — гиперболические, т.е.  $2k < b(k - 2)$ .

Сначала рассмотрим случай  $k = 3$ . Если  $a = 3$ , то  $i = 0$ . Если заменить все треугольные грани на вершины, то получится некоторая  $(j, 3)$ -сфера  $G$ , которая обязана быть картой  $Bundle_3$  (3-связность необязательно сохраняется), тетраэдром, кубом или додекаэдром. Эти 3-угольники определяют некоторое подмножество  $Y$  вершин карты  $G$  такое, что каждая грань  $G$  инцидентна  $b - j$  вершинам из  $Y$ . Если карта  $G$  — это  $Bundle_3$ , то множество  $Y$  состоит из двух вершин  $G$  и исходная сфера — это  $Prism_3$ . Если  $G$  — тетраэдр, то  $Y$  состоит из всех его четырех вершин, а исходная

сфера — это усеченный тетраэдр. В случае, если  $G$  — куб, множество  $Y$  может состоять из 2, 4, 6 или 8 элементов. Соответствующие сферы перечислены в таблице 9.1. В случае, если  $G$  — додекаэдр, множество  $Y$  может состоять из 4, 8, 12, 16 или 20 элементов, соответствующие сферы перечислены в таблице 9.1. В дальнейшем будем предполагать, что  $a = 4$  или 5.

Если  $i = 0$ , то  $b$ -угольники могут граничить не более чем с  $\frac{b}{2}$   $a$ -угольниками, и, следовательно, имеет место соотношение  $2(b - j) \leq b$ . Единственный вариант  $(aR_0, bR_j)$ , подходящий под эти условия, это  $(4R_0, 7R_4)$ . Существуют две такие сферы (№ 30 и № 31, они найдены в результате перебора на компьютере).

Далее, предположим, что  $i = 1$ . Каждый  $b$ -угольник граничит с  $(b - j)$   $a$ -угольниками. Для каждого  $b$ -угольника  $F$  обозначим через  $n_1(F)$  число участков вида  $bab$ , а через  $n_2(F)$  — число участков вида  $baab$  в его короне. Выполнено следующее:

$$n_1(F) + 2n_2(F) = b - j \text{ и } 2n_1(F) + 3n_2(F) \leq b.$$

Если  $a = 4$ , то суммированием по всем  $b$ -угольникам получаем  $\sum n_1(F) = \sum n_2(F)$ , откуда вытекает неравенство  $5\frac{b-j}{3} \leq b$ , т.е.  $2b \leq 5j$ .

Этим условиям удовлетворяют только следующие значения параметров:  $(4R_1, 7R_3)$ ,  $(4R_1, 7R_4)$ ,  $(4R_1, 7R_5)$ ,  $(4R_1, 8R_4)$ ,  $(4R_1, 9R_4)$ . Формула (9.1) исключает случай  $(4R_1, 7R_3)$ , так как число вершин в такой карте было бы нецелым. Случаи  $(4R_1, 7R_5)$ ,  $(4R_1, 9R_4)$  и  $(4R_1, 8R_4)$  также невозможны, что доказано при помощи компьютера. Если  $a = 5$ , то суммированием по всем  $b$ -угольникам получаем  $\sum n_1(F) = 2\sum n_2(F)$ , откуда вытекает неравенство  $7\frac{b-j}{4} \leq b$ , т.е.  $3b \leq 7j$ , и здесь нет случаев, которые нужно было бы рассматривать.

Если  $i = 2$  и  $a = 4$ , то либо 4-угольники образуют кольцо, и тогда это призма  $Prism_b$ , либо они образуют тройки. В этом случае мы можем заменить их на 3-угольники и перейти к некоторой строго регулярной  $(\{3, b'\}, 3)$ -сфере; этот переход есть взаимно-однозначное соответствие, которое ясно видно в таблице 9.1. Если  $i = 2$  и  $a = 5$ , то возможны случаи  $b = 7$  при  $0 \leq j \leq 3$  и  $b = 8$  при  $j = 0$  или 1. Случай  $b = 7$  рассмотрен в главе 15 — в нем реализуется одна сфера. Если  $b = 8$ , то либо имеются отдельные 8-угольники, либо пары соседних 8-угольников. Эти 8-угольники содержат в своей короне участок вида 55. Обозначим через  $F$  единственный 8-угольник, граничащий с этими двумя 5-угольниками и отличный от исходного; легко видеть, что тогда  $F$  граничит как минимум с двумя другими 8-угольниками, что невозможно.

Таблица 9.1: Все строго регулярные  $(\{a, b\}, k)$ -многогранники, обладающие свойствами  $aR_i$  и  $bR_j$ 

№	$k$	$a, b$	$v$	$i, j$	Aut	2-изо- эдраль- ный	Описание
1	3	3, 4	6	0, 2	$D_{3h}$	+	$Prism_3$
2	3	3, 5	12	0, 4	$D_{3d}$	+	курносая $Prism_3$
3	3	3, 6	12	0, 3	$T_d$	+	усеченный тетраэдр = $GC_{1,1}(Tetrahedron)$
4	3	3, 6	16	0, 4	$T_d$	+	4-усеченный куб = $GC_{2,0}(Tetrahedron)$
5	3	3, 6	16	0, 4	$D_{2h}$	—	перекрученный № 4
6	3	3, 6	28	0, 5	$T$	+	4-усеченный додек. = $G_{2,1}(Tetrahedron)$
7	3	3, 7	20	0, 4	$D_{3d}$	+	6-усеченный куб
8	3	3, 7	36	0, 5	$T_h$	+	8-усеченный додекаэдр
9	3	3, 7	36	0, 5	$D_3$	—	перекрученный № 8
10	3	3, 8	24	0, 4	$O_h$	+	усеченный куб
11	3	3, 8	44	0, 5	$T_h$	—	12-усеченный додекаэдр
12	3	3, 8	44	0, 5	$D_3$	—	перекрученный № 11
13	3	3, 9	52	0, 5	$T$	—	16-усеченный додекаэдр
14	3	3, 10	60	0, 5	$I_h$	+	усеченный додекаэдр
15	3	4, b	2b	2, 0	$D_{bd}$	+	серия $Prism_b$ , $b \geq 5$
16	3	4, 5	12	1, 2	$D_{2d}$	+	декорированный куб
17	3	4, 5	14	0, 3	$D_{3h}$	+	(b-шапочка $Prism_3$ )*
18	3	4, 5	16	0, 4	$D_{4d}$	+	(b-шапочка $APrism_4$ )* = курносая $Prism_4$
19	3	4, 6	14	2, 2	$D_{3h}$	+	4-триагон № 1
20	3	4, 6	20	2, 4	$D_{3d}$	+	4-триагон № 2
21	3	4, 6	20	1, 3	$D_3$	+	4-halved № 17
22	3	4, 6	24	0, 3	$O_h$	+	усеченный октаэдр = $GC_{1,1}(Cube)$
23	3	4, 6	26	1, 4	$D_{3h}$	—	декорированный № 17
24	3	4, 6	32	0, 4	$O_h$	+	$GC_{2,0}(Cube)$
25	3	4, 6	32	0, 4	$D_{3h}$	—	перекрученный $GC_{2,0}(Cube)$
26	3	4, 6	56	0, 5	$O$	+	$GC_{2,1}(Cube)$
27	3	4, 7	44	1, 4	$T_h$	+	4-разделение № 24
28	3	4, 7	44	1, 4	$D_3$	—	4-разделение № 25
29	3	4, 7	44	2, 5	$T$	+	4-триагон № 6
30	3	4, 7	80	0, 4	$O_h$	—	(b-шапочка ромбокубооктаэдра)*
31	3	4, 7	80	0, 4	$D_{4d}$	—	(b-шапочка перекр. ромбокубооктаэдра)*
32	3	4, 8	32	2, 4	$T_d$	+	4-триагон № 4
33	3	4, 8	32	2, 4	$D_{2h}$	—	4-триагон № 5
34	3	4, 8	80	1, 4	$D_3$	—	декорированный № 20
35	3	4, 9	28	2, 3	$T_d$	+	4-триагон № 3

Продолжение

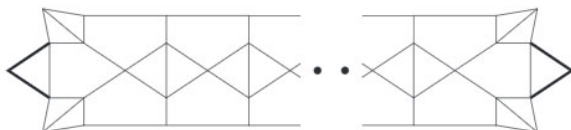
№	$k$	$a, b$	$v$	$i, j$	Aut	2-изо- эдраль- ный	Описание
36	3	4, 9	68	2, 5	$T_h$	—	4-триакон № 8
37	3	4, 9	68	2, 5	$D_3$	—	4-триакон № 9
38	3	4, 10	44	2, 4	$D_{3d}$	—	4-триакон № 7
39	3	4, 11	92	2, 5	$T_h$	—	4-триакон № 11
40	3	4, 11	92	2, 5	$D_3$	—	4-триакон № 12
41	3	4, 12	56	2, 4	$O_h$	+	4-триакон № 10
42	3	4, 13	116	2, 5	$T$	—	4-триакон № 13
43	3	4, 15	140	2, 5	$I_h$	—	4-триакон № 14
44	3	5, b	4b	4, 0	$D_{bd}$	+	серия курносых $Prism_b$ , $b \geq 6$
45	3	5, 6	28	3, 0	$T_d$	+	(b-шапочка усеченного тетраэдра)*
46	3	5, 6	32	3, 2	$D_{3h}$	—	декорированный № 23
47	3	5, 6	38	2, 2	$C_{3v}$	—	декорированная курносая $Prism_6$
48	3	5, 6	44	2, 3	$T$	+	декорированный № 45
49	3	5, 6	52	1, 3	$T$	—	декорированный № 48
50	3	5, 6	56	2, 4	$T_d$	—	декорированный № 22
51	3	5, 6	60	0, 3	$I_h$	+	усеченный икосаэдр = $GC_{1,1}(Dodecahedron)$
52	3	5, 6	68	1, 4	$T_d$	—	декорированный № 50
53	3	5, 6	80	0, 4	$I_h$	+	(b-шапочка икосододекаэдра)*
54	3	5, 6	80	0, 4	$D_{5h}$	—	$GC_{2,0}(Dodecahedron)$
55	3	5, 6	140	0, 5	$I$	+	$GC_{2,1}(Dodecahedron)$
56	3	5, 7	44	3, 1	$D_{3h}$	—	6-разделение № 46
57	3	5, 7	92	2, 2	$C_{3v}$	—	декорированный № 47
58	3	5, 8	56	3, 0	$O_h$	+	декорированный № 22
59	3	5, 8	92	3, 2	$T_d$	—	декорированный усеченный октаэдр
60	3	5, 10	140	3, 0	$I_h$	+	(b-шапочка усеченного додекаэдра)*
61	4	3, b	2b	2, 0	$D_{bd}$	+	серия $APrism_b$ , $b \geq 4$
62	4	3, 4	10	2, 2	$D_{4h}$	+	шапочка 1-усеч. октаэдра
63	4	3, 4	12	0, 0	$O_h$	+	кубооктаэдр
64	4	3, 4	14	1, 2	$D_{4h}$	+	декорированный ( $Cuboctahedron$ )*
65	4	3, 4	14	1, 2	$D_{2d}$	—	декорированный (cuboct.)*
66	4	3, 4	14	2, 3	$D_{4h}$	+	шапочка 2-усеч. октаэдра
67	4	3, 4	22	1, 3	$D_{2d}$	—	декорированный усеч. тетраэдр
68	4	3, 4	30	0, 3	$O$	+	$GC_{2,1}(Octahedron)$
69	4	3, 5	22	2, 3	$D_{4h}$	+	4-шапочка 4-усеч. октаэдра
70	4	3, 5	30	0, 0	$I_h$	+	икосододекаэдр
71	4	3, 6	30	2, 3	$O_h$	+	4-шапочка усеч. октаэдра



Если  $i = 3$ , то  $a = 5$ . Тогда  $7 \leq b \leq 11$  и  $12 - j - b > 0$ . С помощью компьютерного перебора мы определяем, какие из этих случаев реализуются (см. также лемму 12.5.5, теорему 12.5.11, теорему 12.5.12 и лемму 12.5.4).

Если  $k = 4$ , то  $a = 3$ , а случай  $(\{3, 4\}, 4)$ -сфер мы уже рассматривали. Если  $i = 0$ , то  $b = 5$  и  $j = 0$  или 1. Напомним, что *коронной* вершины мы называем последовательность степеней граней, которым эта вершина принадлежит. Легко видеть, что в нашем случае корона вершины обязательно имеет вид 3535, откуда вытекает, что  $j = 0$  и что сфера является икосаэдром (№ 70).

Если  $i = 1$ , то вершина, принадлежащая общему ребру двух 3-угольников, имеет корону 33bb. Отсюда вытекает, что случай  $j = 0$  невозможен. С учетом неравенства  $8 - j - b > 0$  получаем, что  $(b, j) = (5, 1)$ ,  $(5, 2)$  или  $(6, 1)$ . Если  $j = 1$ , то вершины 3-угольников, не принадлежащие общему ребру двух 3-угольников, имеют корону вида 3b3b. Видно, что  $b$ -угольники, окружающие эти вершины, граничат как минимум с двумя другими  $b$ -угольниками, откуда получаем противоречие. Если  $(b, j) = (5, 2)$ , то 5-угольники образуют попарно не пересекающиеся кольца на сфере. Как минимум одно из таких колец с одной стороны содержит только 3-угольники. Получаем следующую конфигурацию:

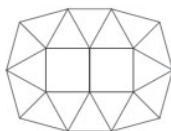


По ребрам, выделенным жирным, нельзя подклеить 3-угольники, не нарушив условие  $3R_1$ . Это показывает, что рассматриваемый случай невозможен.

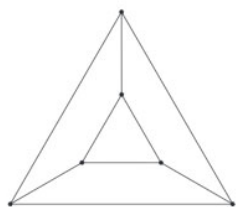
Если  $i = 2$ , то либо 3-угольники образуют один цикл, и тогда это антипризма  $APrism_b$ , либо они сгруппированы в четверки. В этом случае мы можем заменить каждую четверку на вершину и перейти к некоторой  $(b', 4)$ -сфере  $G$ . Эта сфера  $G$  может быть только октаэдром. Четверки соответствуют вершинам из некоторого множества  $Y$  вершин карты  $G$ . Все подходящие множества  $Y$  легко перечислить. В результате получается две сферы (№ 67 и № 69).

Если  $k = 5$ , то  $a = 3$ . Соотношение 9.2 в этом случае имеет вид  $(b - j) + (10 - 3b)(3 - i) > 0$ . Учитывая условие  $b \geq 4$ , видим, что случаи  $i = 0$  и  $i = 1$  невозможны. Если  $i = 2$ , то  $b = 4$  и  $j = 0$  или 1. Тогда короны 4-угольника, или, соответственно, пары 4-угольников, выглядят следующим образом:

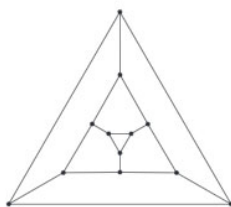




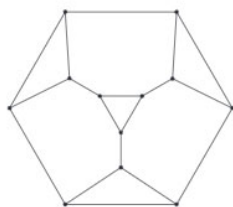
следовательно, мы вынуждены добавить кольцо из 4-угольников, но это невозможно. ■



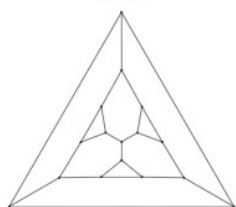
№ 1



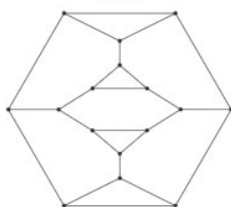
№ 2



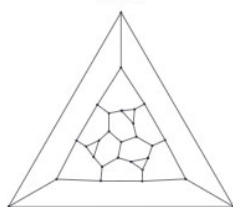
№ 3



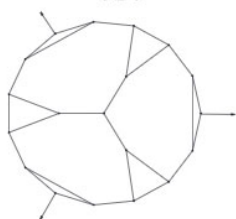
№ 4



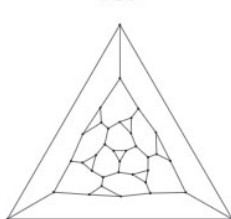
№ 5



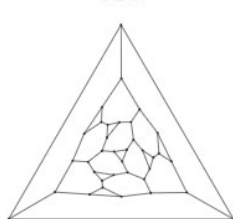
№ 6



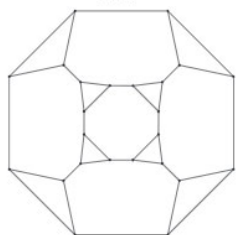
№ 7



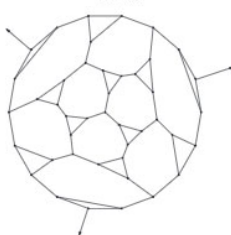
№ 8



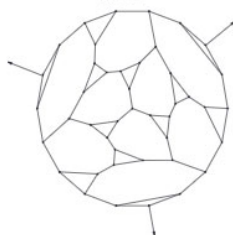
№ 9



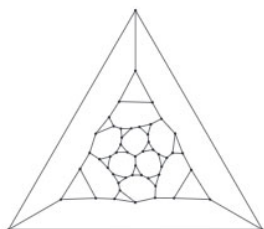
№ 10



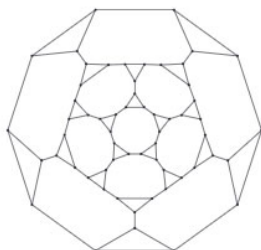
№ 11



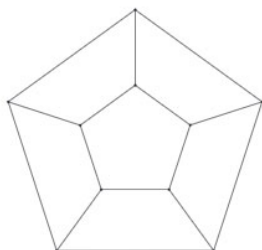
№ 12



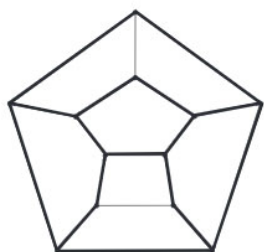
№ 13



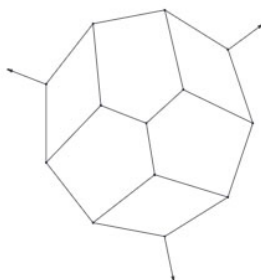
№ 14



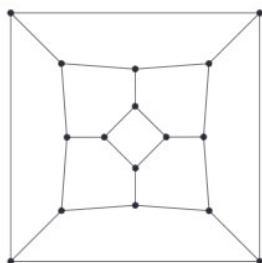
№ 15



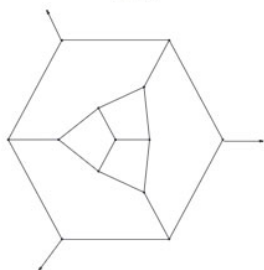
№ 16



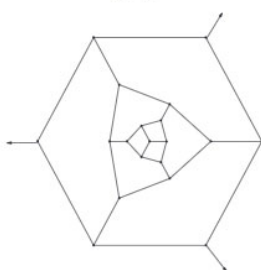
№ 17



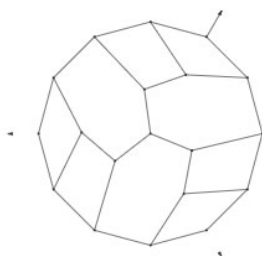
№ 18



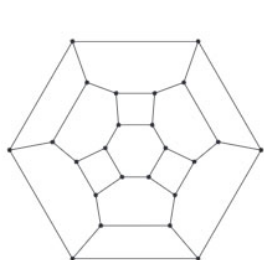
№ 19



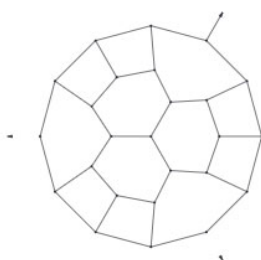
№ 20



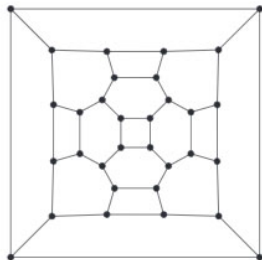
№ 21



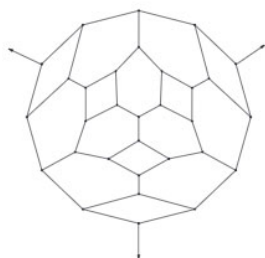
№ 22



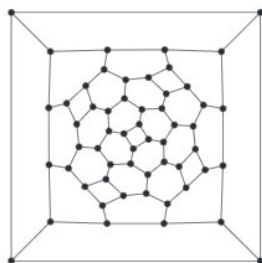
№ 23



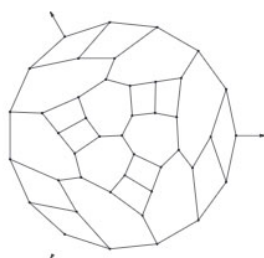
№ 24



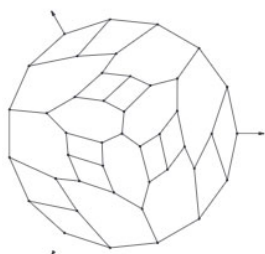
№ 25



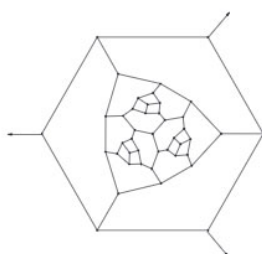
№ 26



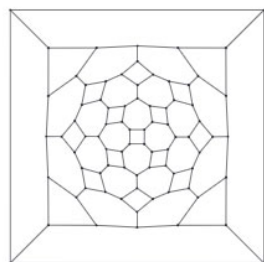
№ 27



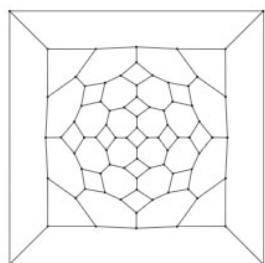
№ 28



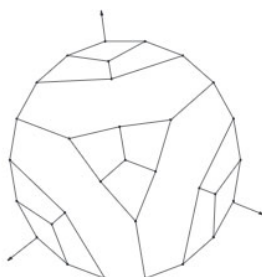
№ 29



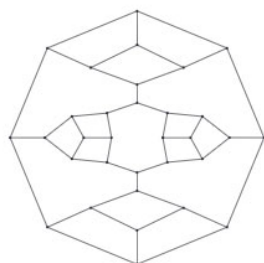
№ 30



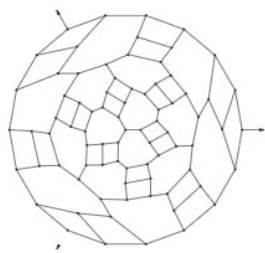
№ 31



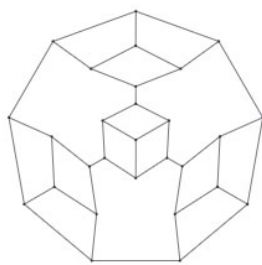
№ 32



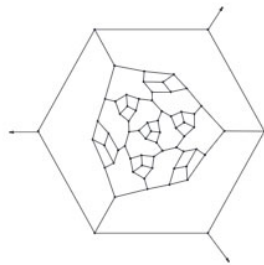
№ 33



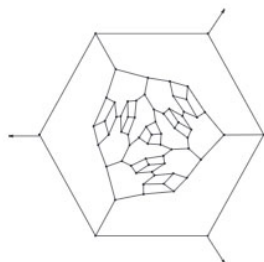
№ 34



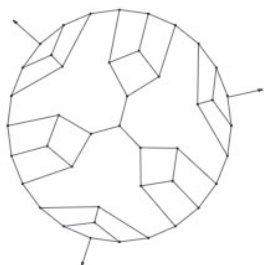
№ 35



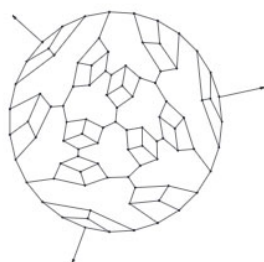
№ 36



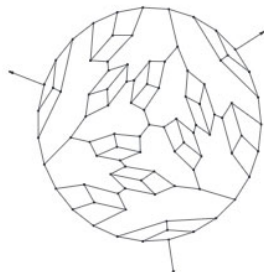
№ 37



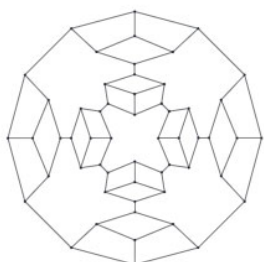
№ 38



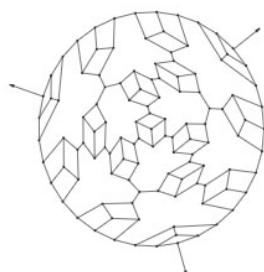
№ 39



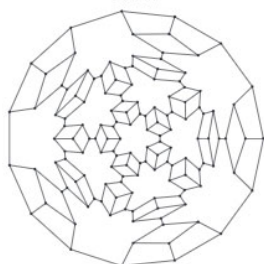
№ 40



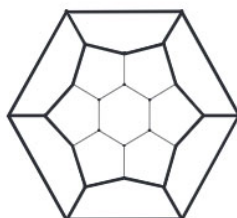
№ 41



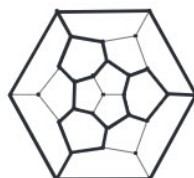
№ 42



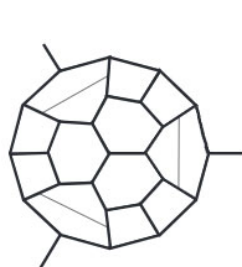
№ 43



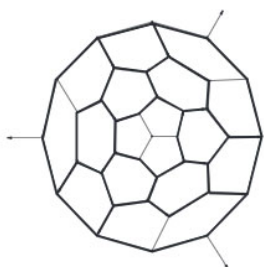
№ 44



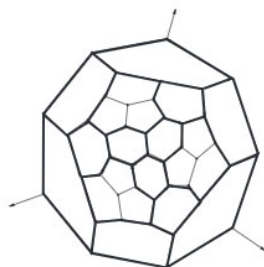
№ 45



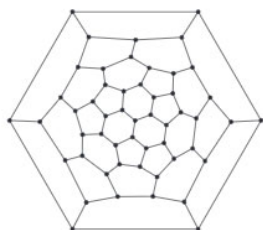
№ 46



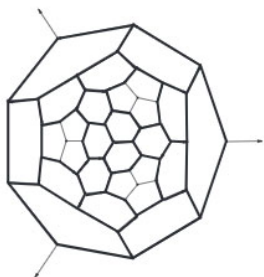
№ 47



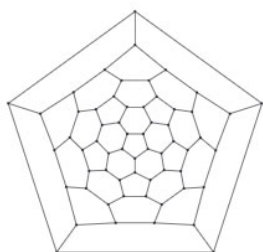
№ 48



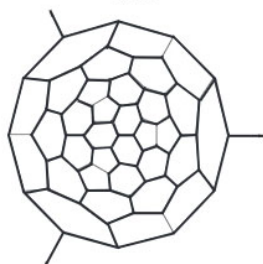
№ 49



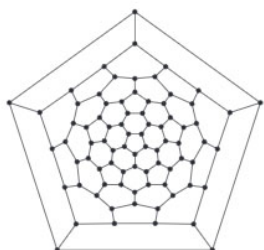
№ 50



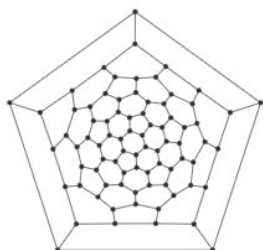
№ 51



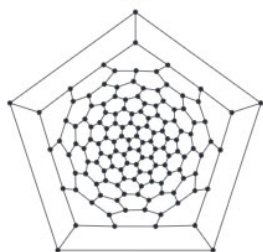
№ 52



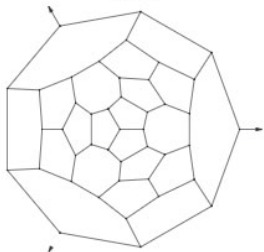
№ 53



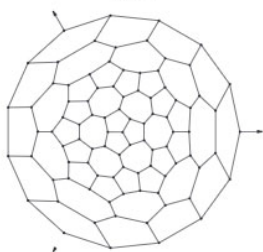
№ 54



№ 55



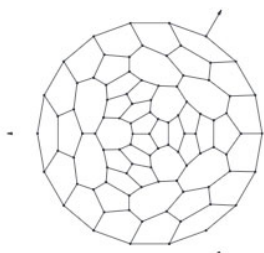
№ 56



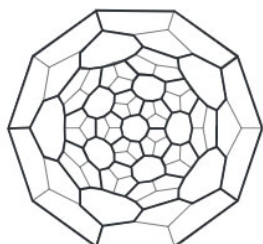
№ 57



№ 58

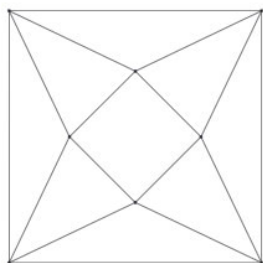


№ 59

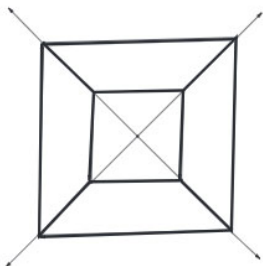


№ 60

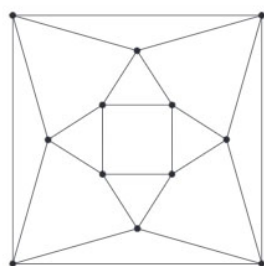




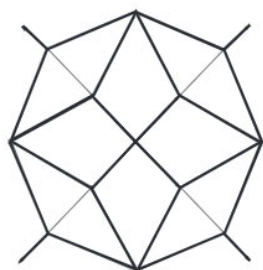
№ 61



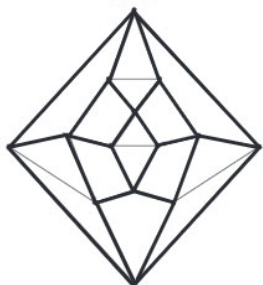
№ 62



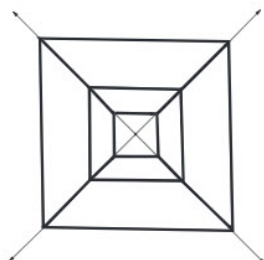
№ 63



№ 64



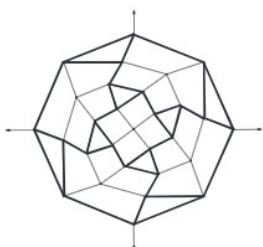
№ 65



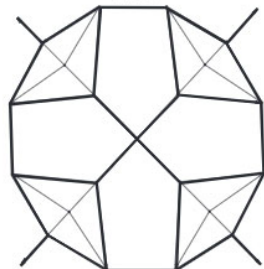
№ 66



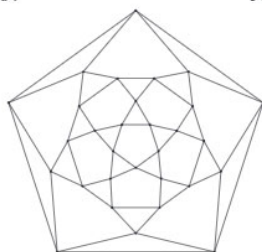
№ 67



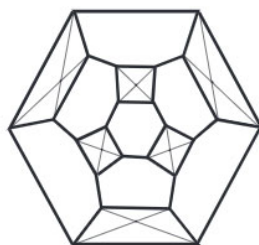
№ 68



№ 69



№ 70



№ 71

## 9.2. Строго регулярные $(\{a, b\}, k)$ -сферы, не являющиеся многогранниками

Здесь мы приведем список 2-связных  $(\{a, b\}, k)$ -сфер, не являющихся многогранниками. Анализ доказательства теоремы 9.1.1 показывает, что предположение 3-связности используется только для исключения случая  $a = 2$  и, при  $k = 3$ , для исключения случая  $a = 3, i = 1$ . Мы рассмотрим здесь все эти случаи; в частности, теперь степень вершин  $k$  может быть больше 5.

Одинарным кольцом назовем карту, состоящую из одного ребра, двух граней и нуля вершин (просто окружность на сфере).

**Теорема 9.2.1.** *Все  $(\{a, b\}, 3)$ -сферы, обладающие свойствами  $aR_i$  и  $bR_j$  и не являющиеся многогранниками, могут быть получены следующим образом:*

- пусть  $G$  — это  $(a, 3)$ -сфера или одинарное кольцо; фиксируем некоторое целое число  $C$ ;
- припишем каждому ребру  $e$  карты  $G$  целочисленный параметр  $x_e$  таким образом, что для каждой грани  $F$  карты  $G$  выполнено

$$\sum_{e \in F} x_e = C; \quad (9.3)$$

- вставив  $x_e$  экземпляров 2-угольников на каждое ребро  $e$ , получим  $(\{2, a + 2C\}, 3)$ -сферу, обладающую свойствами  $2R_0$  и  $(a + 2C)R_{a+C}$ ;
- вставив  $x_e$  экземпляров  $(3, 3)$ -полициклов  $\{3, 3\}$  —  $e$  на каждое ребро  $e$  (вместо 2-угольников), получим  $(\{3, a + 3C\}, 3)$ -сферу, обладающую свойствами  $3R_1$  и  $(a + 3C)R_{a+C}$ .

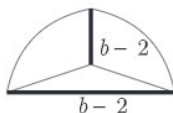
**Доказательство.** Как уже говорилось выше, строго регулярная  $(\{a, b\}, 3)$ -сфера, являющаяся 2-связной, но не 3-связной, может иметь только параметры  $(a, i) = (2, 0)$  или  $(3, 1)$ . Если  $G'$  — это  $(\{3, b\}, 3)$ -сфера со свойствами  $3R_1$  и  $bR_j$ , то мы заменим каждую пару 3-угольников на 2-угольник и получим  $\left(\left\{2, b_1 = \frac{b+j}{2}\right\}, 3\right)$ -сферу со свойствами  $2R_0$  и  $b_1R_j$ .

Далее, удалив каждый 2-угольник (и обе его вершины), мы получим паркет  $\{a, 3\}$ , где  $a = b_1 - (b - j) = \frac{3j - b}{2}$  и  $a \leq 5$ , или одинарное кольцо. Обратные операции — это вставка  $x_e$  2-угольников или  $(3, 3)$ -полициклов  $\{3, 3\} - e$  на каждое ребро паркета  $\{a, 3\}$ . ■

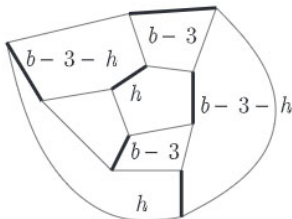
Например, из одинарного кольца можно получить сферу, состоящую из  $C$  2-угольников и двух  $2C$ -угольников, и сферу, состоящую из  $2C$  3-угольников и двух  $3C$ -угольников. Другие подобные сферы можно получить из карты  $Bundle_3$ , тетраэдра, куба, додекаэдра, перебирая целочисленные решения уравнений (9.3). Решению подобных задач посвящена обширная теория; см., например, [BeSi07].

**Теорема 9.2.2.** *Все  $(\{a, b\}, 4)$ -сферы, не являющиеся многогранниками, принадлежат следующему списку.*

- (i) Сдвоенные  $b$ -угольники (со свойствами  $2R_0$  и  $bR_0$ ), т. е. имеющие удвоенные ребра.
- (ii)  $(\{2, b\}, 4)$ -сфера со свойствами  $2R_0$  и  $bR_2$ , полученная в результате вставки  $b - 2$  2-угольников на выделенные жирным ребра приведенной ниже диаграммы.

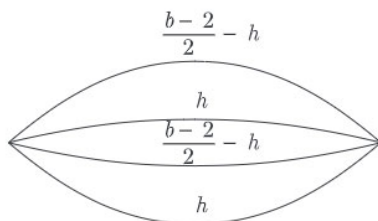


- (iii) Для каждого целого  $0 \leq h \leq b-3$ :  $(\{2, b\}, 4)$ -сфера со свойствами  $2R_0$  и  $bR_3$ , полученная в результате вставки  $h$ ,  $b-3$  или  $b-3-h$  2-угольников на выделенные жирным ребра приведенной ниже диаграммы.



- (iv) При четных  $b$ : все наполовину утроенные  $b$ -угольники (со свойствами  $2R_1$  и  $bR_b$ ), т. е. многоугольники, у которых половина ребер утроена.

- (v) При нечетных  $b$ : сферы, полученные в результате вставки  $h$  карт  $Bundle_3$  на половину ребер и  $\frac{b-2}{2} - h$  ребер на другую половину (см. ниже) для некоторых  $0 \leq h \leq \frac{b-2}{2}$ .

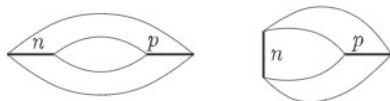


- (vi) При  $b \equiv 3 \pmod{2}$ : сферы, полученные в результате вставки  $x_e$  карт  $Bundle_3$  на каждое ребро  $e$  октаэдра таким образом, что для каждой грани октаэдра  $F$  выполняется

$$\sum_{e \in F} x_e = \frac{b-3}{2}.$$

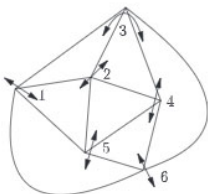
**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Как уже обсуждалось в начале этого раздела, можно считать, что  $a = 2$ . Если  $G$  — это  $(\{2, b\}, 4)$ -сфера со свойствами  $2R_0$  и  $bR_j$ , то можно стянуть каждый 2-угольник карты  $G$  в вершину и получить некоторую 4-валентную сферу  $G'$  с  $j$ -угольными гранями.

Если  $j = 0$ , то карта  $G'$  — это всего одна точка, а карта  $G$  — это сфера, получающаяся из  $b$ -угольника удвоением каждого ребра. Если  $j = 2$ , то карта  $G'$  — это  $Bundle_4$  и, с точностью до изоморфизма, у нас есть два способа добавить 2-угольники (ребра, на которые они добавляются, выделены жирным).



Возможен только второй случай, причем должно выполняться условие  $n = p$ . Если  $j = 3$ , то  $G'$  — октаэдр. В каждой вершине октаэдра мы можем добавить 2-угольники двумя способами. Эти способы можно обозначать парой 3-угольников, имеющих ровно одно общее ребро. Поскольку вершин шесть, всего имеется 64 способа, а с точностью до изоморфизма —

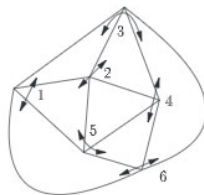
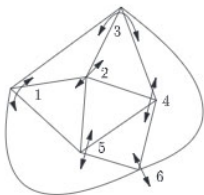
7 способов. Ясно, что каждый 3-угольник должен входить хотя бы в одну пару. Из-за этого остается только три варианта. Первый из них показан ниже; вершины пронумерованы.



Обозначим через  $n_i$  число 2-угольников, которые добавляются на место  $i$ -ой вершины. После того, как эти 2-угольники будут добавлены, грани будут иметь следующие степени:

грань	степень	грань	степень	грань	степень	грань	степень
123	$3 + n_1 + n_2$	234	$3 + n_3$	245	$3 + n_2 + n_4$	125	$3 + n_5$
456	$3 + n_5$	156	$3 + n_1 + n_6$	346	$3 + n_4 + n_6$	136	$3 + n_3$

Нам нужно, чтобы все грани имели степень  $b$ ; следовательно,  $n_4 = n_1$ ,  $n_6 = n_2$ ,  $n_3 = n_5 = n_1 + n_2$ . Ниже изображены второй и третий варианты нашей конфигурации.



Можно проверить, что во втором случае  $n_1 = n_4 = 0$ , поэтому этот случай сводится к первому. В третьем случае  $n_i = 0$ .

Если  $G$  является  $(\{2, 3\}, 4)$ -сферой со свойствами  $2R_1$  и  $bR_j$ , то можно стянуть 2-угольники и получить некоторую 4-валентную сферу  $G'$  с  $j$ -угольными гранями. Дальнейшее доказательство аналогично доказательству теоремы 9.2.1. ■

**Теорема 9.2.3.** Все 2-связные строго регулярные  $(\{a, b\}, k)$ -сферы с  $k \geq 5$ , не являющиеся многогранниками, образуют список, приведенный в таблице 9.2 и на рис. 9.1 и 9.2.



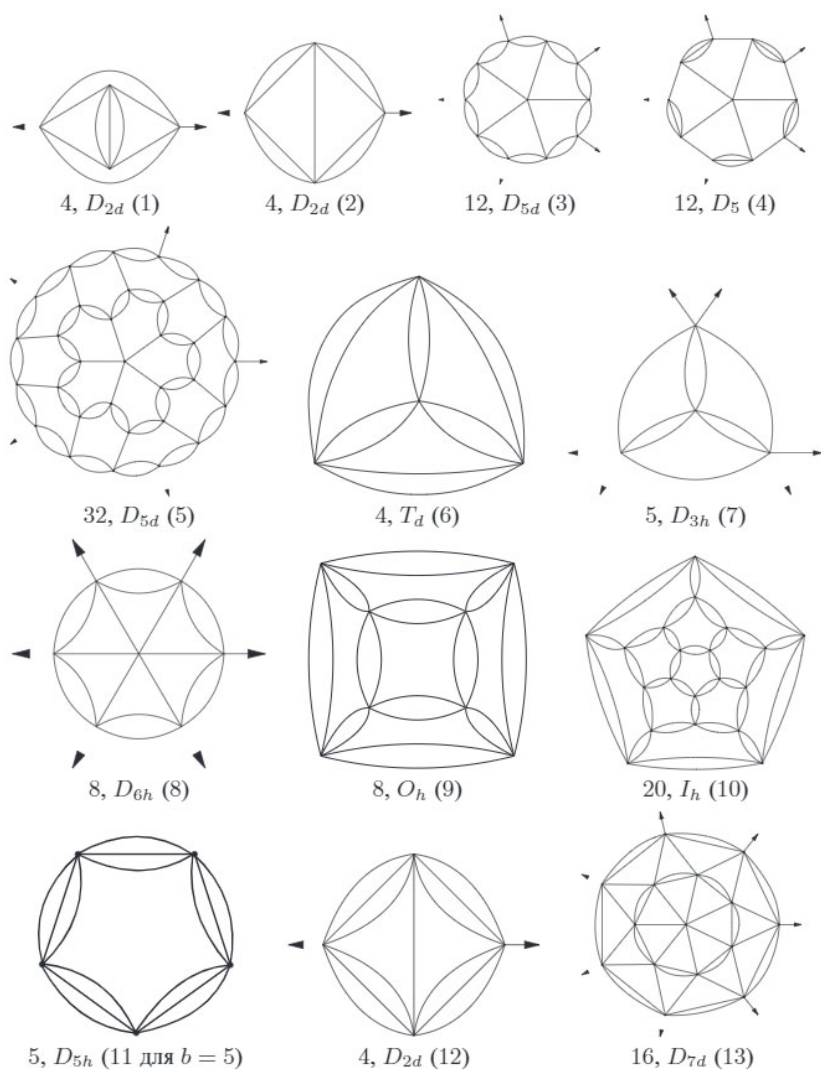


Рис. 9.1. Все строго регулярные  $(\{a, b\}, k)$ -сферы, не являющиеся многогранниками, описанные в теореме 9.2.3 (первая часть)

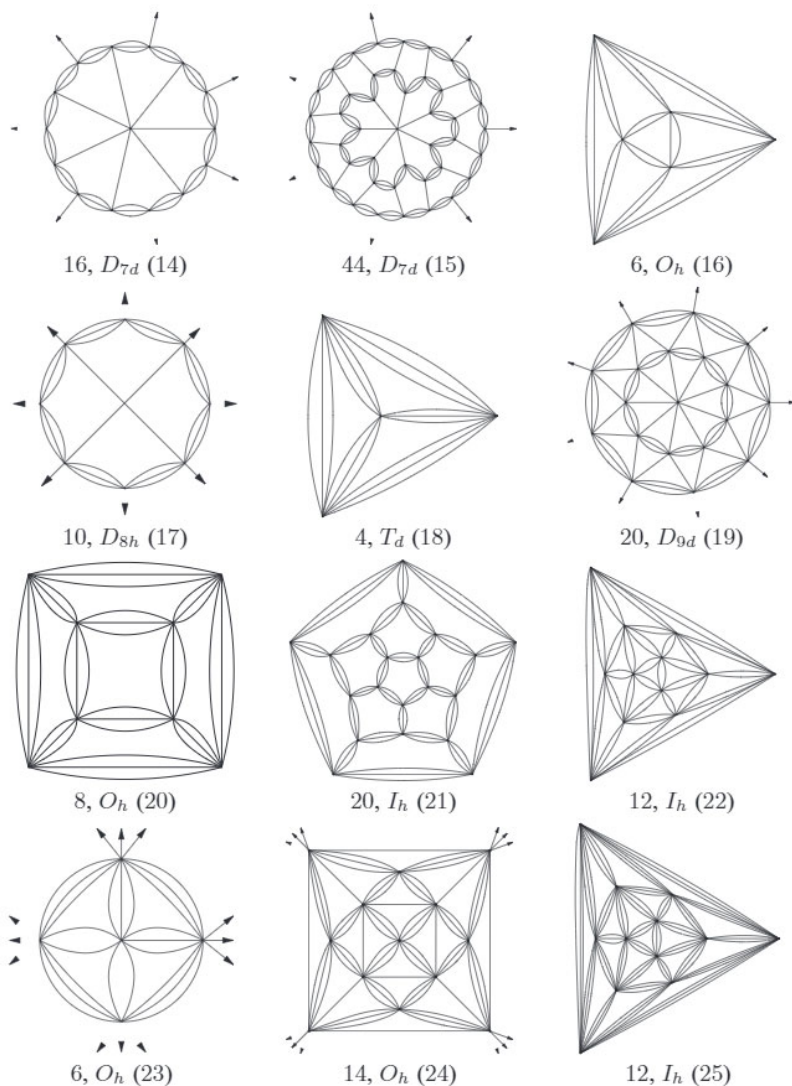


Рис. 9.2. Все строго регулярные  $(\{a, b\}, k)$ -сферы, не являющиеся многогранниками, описанные в теореме 9.2.3 (вторая часть)

Таблица 9.2. Все строго регулярные  $(\{a, b\}, k)$ -сферы со свойствами  $aR_i$  и  $bR_j$  при  $k \geq 5$ , не являющиеся многогранниками

№	$k$	$a, b$	$v$	$i, j$	$Aut$	2-изо- эдраль- ный	Описание
1	5	2, 3	4	1, 1	$D_{2d}$	+	декорированный тетраэдр
2	5	2, 3	4	0, 1	$D_{2d}$	+	декорированный тетраэдр
3	5	2, 4	12	0, 2	$D_{5d}$	+	декорированная ( $APrism_5$ )*
4	5	2, 4	12	1, 3	$D_5$	+	декорированная ( $APrism_5$ )*
5	5	2, 5	32	0, 2	$D_{5d}$	—	декорированная (курносая $APrism_5$ )*
6	6	2, 3	4	0, 0	$T_d$	+	двойной тетраэдр
7	6	2, 3	5	0, 1	$D_{3h}$	+	декорированная ( $Prism_3$ )*
8	6	2, 3	8	0, 2	$D_{6h}$	+	декорированная ( $Prism_6$ )*
9	6	2, 4	8	0, 0	$O_h$	+	двойной куб
10	6	2, 5	20	0, 0	$I_h$	+	двойной додекаэдр
11	6	2, b	b	1, 0	$D_{bh}$	+	тройной b-угольник
12	7	2, 3	4	1, 1	$D_{2d}$	+	декорированный тетраэдр
13	7	2, 3	16	0, 2	$D_{7d}$	—	декорированная (курносая $Prism_7$ )*
14	7	2, 4	16	1, 2	$D_{7d}$	+	декорированная ( $APrism_7$ )*
15	7	2, 5	44	1, 2	$D_{7d}$	—	декорированная (курносая $APrism_7$ )*
16	8	2, 3	6	0, 0	$O_h$	+	двойной октаэдр
17	8	2, 3	10	1, 2	$D_{8h}$	+	декорированная ( $Prism_8$ )*
18	9	2, 3	4	1, 0	$T_d$	+	тройной тетраэдр
19	9	2, 3	20	1, 2	$D_{9d}$	—	декорированная (курносая $Prism_9$ )*
20	9	2, 4	8	1, 0	$O_h$	+	тройной куб
21	9	2, 5	20	1, 0	$I_h$	+	тройной додекаэдр
22	10	2, 3	12	0, 0	$I_h$	+	двойной икосаэдр
23	12	2, 3	6	1, 0	$O_h$	+	тройной октаэдр
24	12	2, 3	14	1, 1	$O_h$	+	декорированный (усеченный октаэдр)*
25	15	2, 3	12	1, 0	$I_h$	+	тройной икосаэдр

**Доказательство.** Из того условия, что наша сфера не является многогранником, вытекает, что  $a = 2$ . Если  $i = 0, 1$ , то по формуле (9.2) получаем, что  $k \leq 12$ ,  $k \leq 18$  соответственно.

Если  $k = 5$  и  $i = 1$ , то мы можем стянуть пару соседних 2-угольников в точку и получить вершину степени 4. Если проделать это для всех вершин, то получится некоторая сфера  $G'$ , вершины которой имеют степени 4 и 5, а грани являются  $j$ -угольниками, т.е. эта сфера двойственна к некоторой  $(\{4, 5\}, j)$ -сфере. Из формулы Эйлера (1.1) несложно вывести, что

возможны только случаи  $j = 2$  или  $3$ . Если  $j = 2$ , то  $G'$  представляет собой 4-угольник и получается сфера 1, изображенная на рис. 9.1. Если  $j = 3$ , то нужно рассмотреть двойственные к  $(\{4, 5\}, 3)$ -сферам из списка главы 2 и рис. 2.1. После перебора всех вариантов остается только сфера 4, изображенная на рис. 9.1.

Доказательство завершает перебор, использующий формулу (9.2) и исчерпывающий анализ локальных конфигураций. ■

### 9.3. Строго регулярные $(\{a, b\}, k)$ -плоскости

Теперь мы переходим к классификации строго регулярных  $(\{a, b\}, k)$ -плоскостей.

Следуя работам [GLST85, GrSh87a], будем называть паркет *2-гомеоэдральным*, если группа *комбинаторных* преобразований евклидовой плоскости, переводящих паркет в себя, имеет на гранях две орбиты. Если рассматриваемая плоскость 2-периодична, то она универсально накрывает тор, и все симметрии можно реализовать как изометрии плоскости, используя прямо-двойственное представление (см. раздел 1.3). Но для произвольных плоскостей такой прием не работает, и может случиться, что некоторые комбинаторные симметрии не реализуются как изометрии.

Список всех тридцати девяти 2-гомеоэдральных типов  $k$ -валентных паркетов приведен в [GLST85, с. 135–136] и в [GrSh87a, рис. 4.6.3]; см. также первую работу на эту тему [Löc68]. (Паркеты, имеющие ровно две орбиты *ребер* рассматривались в [GrSh83]; каждый такой паркет имеет не более трех орбит вершин и не более трех орбит граней.) Каждый 2-гомеоэдральный тип  $k$ -валентной плоскости соответствует строго регулярной  $(\{a, b\}, k)$ -плоскости. Таким образом, все эти 39 типов встретятся в этом разделе.

Среди всех строго регулярных плоских паркетов с двумя типами граней только №№ 6, 14, 30, 32, 33 (см. последний рисунок в этом разделе), т. е. архимедовы плоские паркетные короны вершин  $(3.12^2)$ ,  $(4.8^2)$ ,  $(3.6.3.6)$ ,  $(3^2.4.3.4)$ ,  $(3^3.4^2)$  (и группами симметрии  $p6m$ ,  $p4m$ ,  $p6m$ ,  $p4g$ ,  $3mm$  соответственно; единственный оставшийся архимедов паркет с двумя типами граней, имеющий корону  $(3^4.6)$ , обладает свойством  $6R_0$ , но не имеет свойства  $3R_i$ ), являются *мозаиками*, т. е. замощениями  $\mathbb{R}^2$  правильными многоугольниками.

В таблице 9.3 мы перечислим все 33 варианта значений параметров, для которых реализуются строго регулярные  $(\{a, b\}, k)$ -плоскости: 21 континуальный случай и 12 отдельных случаев (в которых имеется единствен-

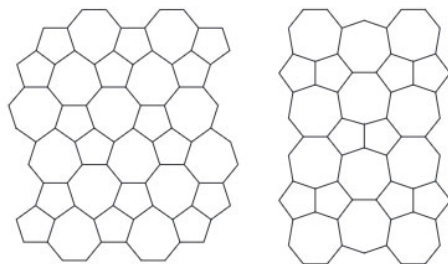


Рис. 9.3. Две химические azulеноидные структуры ([ОКНУ96]):  $\text{YCrB}_4$  (слева) и  $\text{ThMoB}_4$  (справа); это строго регулярные  $(5,7)$ -плоскости со свойствами  $5R_1$  и  $7R_3$  (случай 17)

ный паркет). Появление континуума при описании дискретных структур не ново.

- 1) Кельвин рассматривал переходные структуры между кубическими замкнутыми упаковками и гексагональными замкнутыми упаковками.
- 2) Упаковки трехмерных сфер максимальной плотности также описываются многослойной структурой (см., например, [ОКНУ96]).
- 3) В [DeSt00c] рассматриваются четыре случая, в которых возникает континуум вариантов (разбиения 31–34 в таблице 4). Один такой пример — это разбиение  $\mathbb{R}^3$  на правильные тетраэдры и октаэдры.

С точки зрения химии регулярные сферы и торы представляют интерес как способ моделирования молекулярных структур, см. рис. 9.3.

Строго регулярные  $(\{a, b, c\}, k)$ -многогранники и торы с тремя типами граней также интересны для изучения; на рис. 9.4 изображен пример, возникающий в химии. Для описания таких структур нужна матрица  $t_{ij}$ , элемент которой равен числу  $j$ -угольных соседей у каждой  $i$ -угольной грани. Первые исследования на эту тему были сделаны в [BrDe99].

Мы уже говорили о том, что классификация регулярных карт на поверхностях рода больше, чем 1, очень трудна. Однако такие карты представляют интерес в физике. Минимальная поверхность (нулевой средней кривизны) — это поверхность, минимизирующая поверхностное натяжение (в [Oss69]<sup>1</sup> можно найти определения и рассказ о связи с мыльными пленками). Бесконечные 3-периодические минимальные поверхности в  $\mathbb{R}^3$  представляют интерес для кристаллографии (см., например, [KoFi87, KoFi96]).

<sup>1</sup> См. также [MiFo, Fom, TuzFom].



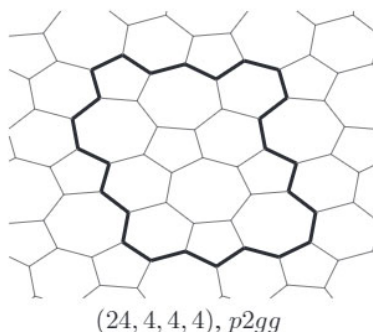


Рис. 9.4. Структура  $Y_2ReB_6$  ([ОКНу96]) представляет собой строго регулярную карту с тремя типами граней (где  $t_{5j} = 0, 2, 3$ ,  $t_{6j} = 2, 1, 3$ ,  $t_{7j} = 3, 3, 1$  для  $j = 5, 6, 7$ ) с ограниченной фундаментальной областью

Поверхности, получающиеся в результате их факторизации по действию группы параллельных переносов, имеют род не меньше, чем 3. Шварццита<sup>2</sup>, т.е.  $(\{6, 7, 8\}, 3)$ -карты на поверхностях рода 3, использовались для моделирования 3-периодических минимальных поверхностей (см. [Ки00]).

### 9.3.1. Перечисление возможных случаев

Мы вводим здесь понятия нормальности и сбалансированности, следуя [GLST85].

*Нормальный паркет*  $T$  — это замощение плоскости с помощью некоторого множества плиток  $T = \{T_1, T_2, \dots\}$  со следующими нижеприведенными свойствами.

- 1) Каждая плитка гомеоморфна замкнутому диску.
- 2) Плитки покрывают всю плоскость.
- 3) Пересечение любых двух плиток  $T_i \cap T_j$  — связное множество меры 0.
- 4) Плитки *равномерно ограничены*, т.е. существуют положительные параметры  $u$  и  $U$  такие, что каждая плитка  $T_i$  содержит некоторый замкнутый круг радиуса  $u$  и содержится в некотором замкнутом круге радиуса  $U$ .

<sup>2</sup>Авторы используют термин «schwarzits», видимо, имея в виду ассоциацию с поверхностью Шварца, см., например, [TuzFom].

Основное предположение в этом определении — последнее. Оно исключает гиперболические плоские паркеты, подобные изображенным в работах Эшера (они планарны, но их нельзя реализовать на плоскости при указанных выше метрических ограничениях).

Будем обозначать через  $D(\rho, P)$  круг на плоскости с центром в точке  $P$  и радиусом  $\rho$ . Пусть  $\mathcal{A}(\rho, P)$  — множество плиток, содержащее все плитки паркета  $T$ , имеющие непустое пересечение с  $D(\rho, P)$ , и еще минимально возможное число плиток такое, что объединение всех плиток из  $\mathcal{A}(\rho, P)$  топологически является диском (т. е. односвязно). Будем использовать запись  $p(\rho, P)$ ,  $e(\rho, P)$  и  $v(\rho, P)$  для числа плиток, ребер и вершин в  $\mathcal{A}(\rho, P)$ . В работе [GrSh87a, §3.2] доказывается, что для любого фиксированного числа  $\sigma$  имеет место равенство

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{p(\rho + \sigma, P) - p(\rho, P)}{p(\rho, P)} = 0. \quad (9.4)$$

Это отражает тот факт, что множество  $\mathcal{A}(\rho, P)$  очень близко к шару. Если, кроме того, пределы

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{e(\rho, P)}{p(\rho, P)} \quad \text{и} \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{v(\rho, P)}{p(\rho, P)} \quad (9.5)$$

существуют и конечны, то паркет  $T$  называется *сбалансированным*. Обозначим значения пределов из (9.5) через  $e(T)$  и  $v(T)$  соответственно. Имеет место следующая *формула Эйлера для плоских паркетов* ([GrSh87a, §3.1]):

$$v(T) - e(T) + 1 = 0.$$

**Теорема 9.3.1.** *Всякая нормальная сбалансированная  $(\{a, b\}, k)$ -плоскость, обладающая свойствами  $aR_i$  и  $bR_j$ , удовлетворяет уравнению*

$$(2k - a(k - 2))(b - j) + (2k - b(k - 2))(a - i) = 0. \quad (9.6)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для  $x = a, b$  обозначим через  $p_x(\rho, P)$  число  $x$ -угольных граней в множестве  $\mathcal{A}(\rho, P)$ . Конечно,  $p_a(\rho, P) + p_b(\rho, P) = p(\rho, P)$ . Нам хотелось бы, чтобы выполнялось равенство  $p_a(\rho, P)(a - i) = p_b(\rho, P)(b - j)$ , но оно в общем случае неверно, так как область  $\mathcal{A}(\rho, P)$  незамкнута, т. е. имеет граничные ребра. Можно утверждать только следующее:

$$|p_a(\rho, P)(a - i) - p_b(\rho, P)(b - j)| \leq \{e(\rho + U, P) - e(\rho - U, P)\},$$

т.е. все ребра, составляющие разницу между двумя частями соотношения, приведенного выше, входят в разницу между двумя границами. Из соотношений (9.4) и (9.5) мы знаем, что

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{e(\rho + U, P)}{p(\rho, P)} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{e(\rho - U, P)}{p(\rho, P)} = e(T),$$

откуда вытекает равенство

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{p_a(\rho, P)}{p(\rho, P)} (a - i) - \frac{p_b(\rho, P)}{p(\rho, P)} (b - j) = 0.$$

Учитывая точное равенство  $\frac{p_a(\rho, P)}{p(\rho, P)} + \frac{p_b(\rho, P)}{p(\rho, P)} = 1$ , получаем, что пределы

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{p_a(\rho, P)}{p(\rho, P)} \quad \text{и} \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{p_b(\rho, P)}{p(\rho, P)}$$

существуют и равны  $p_a(T) = \frac{b-j}{a+b-i-j}$  и  $p_b(T) = \frac{a-i}{a+b-i-j}$  соответственно. Таким же образом можно вывести равенства  $kv(T) = 2e(T)$  и  $2e(T) = ap_a(T) + bp_b(T)$  (которые так же, как и предыдущие, выполняются на участке  $\mathcal{A}(\rho, P)$  лишь приближенно). Наконец,

$$0 = (2k - a(k-2))p_a(T) + (2k - b(k-2))p_b(T),$$

откуда следует доказываемое соотношение. ■

Теперь перейдем к определению возможных значений параметров. Перед этим стоит сделать несколько замечаний. Уравнение (9.6) позволяет получать соотношения только между  $k$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $i$  и  $j$ . Трудность заключается в том, что из уравнения вроде  $p_a(T) = 0$  не следует, что  $p_a(\rho, P) = 0$ , поскольку строго положительная функция может иметь нулевой предел. Глобальное условие (9.6) не дает информации локального характера. В локальных рассуждениях нам остается использовать только соображения, основанные на переборе возможных корон граней.

**Теорема 9.3.2.** *Все возможные значения параметров  $(k, a, b, i, j)$  для 3-связной нормальной сбалансированной  $(\{a, b\}, k)$ -плоскости со свойствами  $aR_i$  и  $bR_j$  образуют список, приведенный в таблице 9.3.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Будем последовательно рассматривать возможные случаи.

Таблица 9.3. Все строго регулярные  $(\{a, b\}, k)$ -плоскости со свойствами  $aR_i$  и  $bR_j$ 

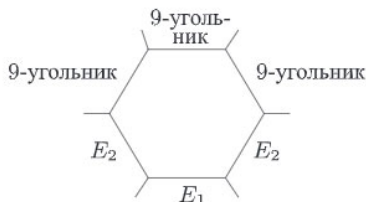
№	$k$	$a, b$	$i, j$	Количество	Кол-во 2-гомеоздральных	Описание
1	3	3, 7	0, 6	$\infty$	1	$\frac{1}{6}$ -усеченные $\{6, 3\}$
2	3	3, 8	0, 6	$\infty$	1	$\frac{1}{3}$ -усеченные $\{6, 3\}$
3	3	3, 9	0, 6	$\infty$	3	$\frac{1}{2}$ -усеченные $\{6, 3\}$
4	3	3, 10	0, 6	$\infty$	0	$\frac{2}{3}$ -усеченные $\{6, 3\}$
5	3	3, 11	0, 6	$\infty$	0	$\frac{5}{6}$ -усеченные $\{6, 3\}$
6	3	3, 12	0, 6	1	1	усеч. $\{6, 3\} = (3.12^2)$
7	3	4, 8	2, 6	$\infty$	1	4-триакон № 1
8	3	4, 10	2, 6	$\infty$	1	4-триакон № 2
9	3	4, 12	2, 6	$\infty$	1	4-триакон № 3
10	3	4, 14	2, 6	$\infty$	0	4-триакон № 4
11	3	4, 16	2, 6	$\infty$	0	4-триакон № 5
12	3	4, 18	2, 6	1	1	4-триакон № 6
13	3	4, 7	0, 5	$\infty$	2	8-разделение $(4.8^2)$
14	3	4, 8	0, 4	1	1	усеч. $\{4, 4\} = (4.8^2)$
15	3	4, 8	1, 5	$\infty$	3	4-разделение № 13
16	3	4, 10	1, 4	$\infty$	2	4-разделение $(4.8^2)$
17	3	5, 7	1, 3	$\infty$	2	6-разделение $\{6, 3\}$
18	3	5, 7	2, 4	$\infty + 1$	2	декорированные $\{6, 3\}$
19	3	5, 8	2, 2	$\infty + 2$	2	6-разделение $\{6, 3\}$
20	3	5, 8	3, 4	1	0	декорированный $\{6, 3\}$
21	3	5, 10	3, 2	1	0	декорированный $\{6, 3\}$
22	3	5, 11	3, 1	1	0	декорированный $\{6, 3\}$
23	3	5, 12	3, 0	1	1	декорированный $\{6, 3\}$
24	4	3, 5	2, 4	$\infty$	2	декорированные $\{4, 4\}$
25	4	3, 6	2, 4	$\infty$	2	декорированные $\{4, 4\}$
26	4	3, 7	2, 4	$\infty$	0	декорированные $\{4, 4\}$
27	4	3, 8	2, 4	1	1	4-шапочка $(4.8^2)$
28	4	3, 5	0, 2	1	1	декорированный $\{4, 4\}$
29	4	3, 5	1, 3	$\infty$	3	декорированные $\{4, 4\}, (4.8^2)$
30	4	3, 6	0, 0	1	1	архимедов (3.6.3.6)
31	4	3, 6	1, 2	1	1	декорированный $\{4, 4\}$
32	5	3, 4	1, 0	1	1	архимедов $(3^2.4.3.4)$
33	5	3, 4	2, 2	$\infty + 2$	2	декорированные $\{4, 4\}$

Если  $k = 3$ , то выполняется соотношение  $(6 - a)(b - j) + (6 - b)(a - i) = 0$ .

Если  $a = 3$ , то  $i = 0$  (иначе плоскость не будет 3-связной), и наше соотношение упрощается до равенства  $j = 6$ . Поскольку в короне не может встречаться участок  $b33b$ , то каждый  $b$ -угольник граничит максимум с шестью 3-угольниками, а потому  $7 \leq b \leq 12$ .

Если  $a = 4$ , то  $0 \leq i \leq 2$ . Если  $i = 0$ , то основное соотношение сводится к уравнению  $12 = b + j$  с решениями  $(b, j) = (7, 5)$  и  $(8, 4)$ . Оба эти решения реализуются. Если  $i = 1$ , то соотношение имеет вид  $18 = b + 2j$ , откуда  $(b, j) = (18, 0)$ ,  $(16, 1)$ ,  $(14, 2)$ ,  $(12, 3)$ ,  $(10, 4)$ ,  $(8, 5)$ . В короне  $b$ -угольников содержатся участки  $b44b$  и  $b4b$ , поэтому  $j \geq b - 2j$  и остается только решения  $(b, j) = (10, 4)$  и  $(8, 5)$ , оба они реализуются. Если  $i = 2$ , то 4-угольники должны разбиваться на тройки и паркет можно представить как 4-триакон некоторой  $(\{3, b'\}, 3)$ -плоскости со свойствами  $3R_0$  и  $b'R_6$ .

Если  $a = 5$ , то  $0 \leq i \leq 3$ . Если  $i = 0$ , то получаем уравнение  $30 = j + 4b$ , имеющее единственное решение  $(b, j) = (7, 2)$ . Это решение не реализуется, поскольку при таких значениях параметров 5-угольники должны были бы иметь корону  $7^5$ , а входящие в нее 7-угольники — корону  $7575555$ , т.е. 5-угольники оказываются неизолрованными. Если  $i = 1$ , то  $24 = j + 3b$ , откуда  $(b, j) = (7, 3)$  или  $(8, 0)$ . Пара  $(8, 0)$  не реализуется, поскольку 8-угольники должны были бы иметь корону  $5^8$  и тогда были бы 5-угольники, граничащие как минимум с двумя другими 5-угольниками. Если  $i = 2$ , то уравнение принимает вид  $18 = j + 2b$  и имеет решения  $(7, 4)$ ,  $(8, 2)$ ,  $(9, 0)$ . Решение  $(9, 0)$  не реализуется, поскольку 9-угольники должны были бы иметь корону  $5^9$ , а входящие в нее 5-угольники — корону  $59599$ , т.е. нашлась бы пара смежных 9-угольников. Если  $i = 3$ , то  $12 = b + j$ , откуда  $(b, j) = (7, 5)$ ,  $(8, 4)$ ,  $(9, 3)$ ,  $(10, 2)$ ,  $(11, 1)$ ,  $(12, 0)$ . Пара  $(7, 5)$  не реализуется, что можно доказать, рассмотрев три возможных варианта короны из леммы 12.5.5 и заметив, что ни одна из них не содержит ровно пять 7-угольников. Случай  $(9, 3)$  требует более детального анализа. Свойство  $5R_3$  означает, что 5-угольники на нашей плоскости образуют  $(5, 3)$ -полициклы  $E_1$  и  $E_2$ . Отсюда можно понять, что граница каждого 9-угольника должна иметь следующий вид (см. ниже).





Далее, ясно, что последовательность полициклов  $E_1$  и  $E_2$  продолжается, и в конце концов получается цикл  $(E_1, E_2)^9$ . Этот цикл ограничен девятью 9-угольниками, и в центре этой конфигурации должен быть еще один 9-угольник, который будет граничить с девятью 9-угольниками, а не с тремя, как требуется. Получаем противоречие. Все остальные решения реализуются.

Если  $k = 4$ , то наше соотношение принимает вид  $(4 - a)(b - j) + (4 - b)(a - i) = 0$ . Параметр  $a$  должен быть равен 3. Если  $i = 0$ , получаем уравнение  $12 = 2b + j$ , имеющее решения  $(b, j) = (5, 2)$  и  $(6, 0)$ ; оба они реализуются. Если  $i = 1$ , то  $8 = b + j$ , откуда  $(b, j) = (5, 3)$ ,  $(6, 2)$ ,  $(7, 1)$  и  $(8, 0)$ . Если бы реализовались случаи  $(7, 1)$  или  $(8, 0)$ , то в короне некоторого  $b$ -угольника встретился бы участок  $3^3$ . Центральный на этом участке 3-угольник  $T$  граничит с некоторым другим 3-угольником  $T'$ . Вне зависимости от сделанного выбора, 3-угольник  $T'$  будет граничить как минимум с двумя 3-угольниками, что запрещено. Если  $i = 2$ , то  $j = 4$ . Тогда 3-угольники образуют четверки, а короны 3-угольников не содержат участков вида  $b33b$ . Таким образом,  $b$ -угольники граничат максимум с четырьмя 3-угольниками и  $5 \leq b \leq 8$ .

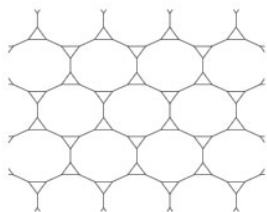
Если  $k = 5$ , то  $(10 - 3a)(b - j) + (10 - 3b)(a - i) = 0$  и  $a$  должно равняться 3. Если  $i = 0$ , то получаем уравнение  $30 = j + 8b$ , не имеющее решений при  $b \geq 4$ . Если  $i = 1$ , то получается уравнение  $20 = j + 5b$ , имеющее единственное (реализующееся) решение  $(b, j) = (4, 0)$ . Если  $i = 2$ , то  $10 = j + 2b$ , откуда  $(b, j) = (4, 2)$  или  $(5, 0)$ . В случае  $(5, 0)$  у всех 5-угольников должна быть корона следующего вида:



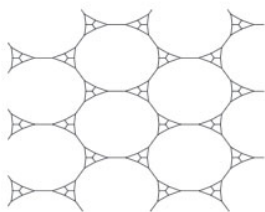
Все ребра на выделенной жирным границе должны быть инцидентны 5-угольникам, что, очевидно, невозможно. ■

Отметим, что в следующем разделе мы классифицируем все плоскости для каждого из найденных случаев, уже не используя предположения нормальности и сбалансированности. Оказывается, что во всех случаях, кроме, возможно, случая 29, все получающиеся плоскости сбалансированы и нормальны, но *a priori* этого нельзя гарантировать. Если бы мы не ограничивались рассмотрением нормальных сбалансированных плоскостей, то мы получили бы гиперболические плоские паркеты, которые, как известно, не поддаются простой классификации.

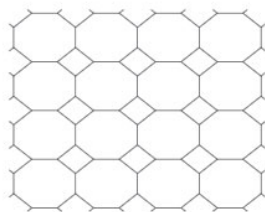
В случаях 6, 12, 14, 20–23 (3-валентные) и 27, 28, 30–32 плоскости единственны; эти отдельные случаи изображены на рис. 9.5 и 9.12 соответственно. Под каждым рисунком плоскости мы указываем тройку чисел  $(v, p_a, p_b)$ , обозначающих число вершин, число  $a$ -угольников и число  $b$ -угольников в наименьшем торе, который можно получить из этой плоскости.



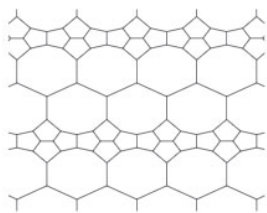
Случай 6,  $(6, 2, 1)$ ,  $pbtt$   
(2-гомеоэдральный)  
архимедов  $(3.12^2)$



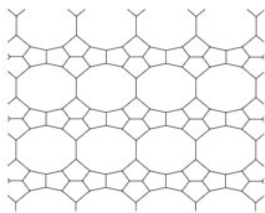
Случай 12,  $(14, 6, 1)$ ,  
 $pbtt$  (2-гомеоэдральный)



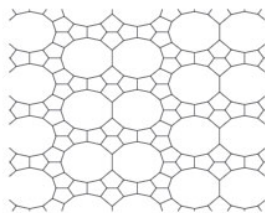
Случай 14,  $(4, 1, 1)$ ,  $p4tt$   
(2-гомеоэдральный)  
архимедов  $(4.8^2)$



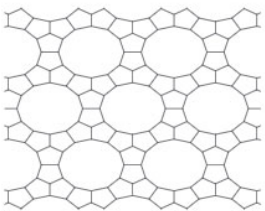
Случай 20,  $(12, 4, 2)$ ,  
 $c2tt$



Случай 21,  $(10, 4, 1)$ ,  
 $p2tt$



Случай 22,  $(24, 10, 2)$ ,  
 $c2tt$



Случай 23,  $(14, 6, 1)$ ,  
 $pbtt$  (2-гомеоэдральный)

Рис. 9.5. 3-валентные строго регулярные плоскости: отдельные случаи

### 9.3.2. Доказательство и описание 33 случаев

**Случай 1–6.** Возьмем  $(\{3, b\}, 3)$ -плоскость со свойствами  $3R_0$  и  $bR_6$ . Содержащиеся в ней 3-угольники изолированы; следовательно, можно стянуть каждый из них в отдельную вершину. Получается паркет  $\{6, 3\}$ , т.е. 3-валентное замощение плоскости 6-угольниками. Значит,  $(\{3, b\}, 3)$ -плоскости, обладающие свойствами  $3R_0$  и  $bR_6$ , соответствуют множествам  $Y_b$  (где  $7 \leq b \leq 12$ ) вершин паркета  $\{6, 3\}$  таким, что каждая грань содержит ровно  $b - 6$  вершин из  $Y_b$ . После усечения по всем вершинам из  $Y_b$  мы получаем некоторую  $(\{3, b\}, 3)$ -плоскость со свойствами  $3R_0$  и  $bR_6$ . Разумеется, при переходе к дополнению к множеству  $Y_b$ , мы получим некоторое множество  $Y_{18-b}$ , тем самым устанавливая взаимно-однозначное соответствие между классами 1 и 5, ровно как и между классами 2 и 4. Кроме того, так как существует всего одно множество  $Y_6$ , то и  $(\{3, 12\}, 3)$ -плоскость со свойствами  $3R_0$  и  $12R_6$  единственна. Но при каждом  $7 \leq b \leq 11$  существует бесконечно много множеств  $Y_b$ . Некоторые примеры  $(\{3, b\}, 3)$ -плоскостей со свойствами  $3R_0$  и  $bR_6$  при  $b = 7, 8, 9$  см. на рис. 9.6, 9.7 и 9.8 соответственно.

**Случай 7–12,** т.е.  $(\{4, b\}, 3)$ -плоскости со свойствами  $4R_2$  и  $bR_6$ , получаются из плоскостей случаев 1–6 соответственно применением операции *4-триакон*, т.е. заменой каждого 3-угольника на тройку смежных 4-угольников. Возникающие в этих случаях 2-гомеоэдральные плоскости изображены на рис. 9.9.

**Случай 13,** т.е.  $(\{4, 7\}, 3)$ -плоскости со свойствами  $4R_0$  и  $7R_5$ . Пусть дана  $(\{4, 8\}, 3)$ -плоскость  $G$ , обладающая свойствами  $4R_1$  и  $8R_5$ . Удалим центральные ребра, разделяющие пары смежных 4-угольников. Получится некоторая  $(\{4, 7\}, 3)$ -плоскость со свойствами  $4R_0$  и  $7R_5$ . Ясно, что опера-

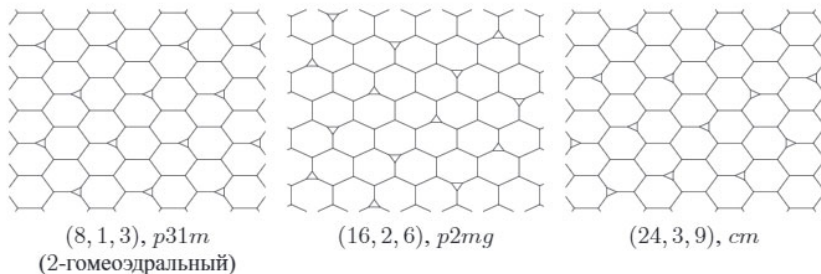
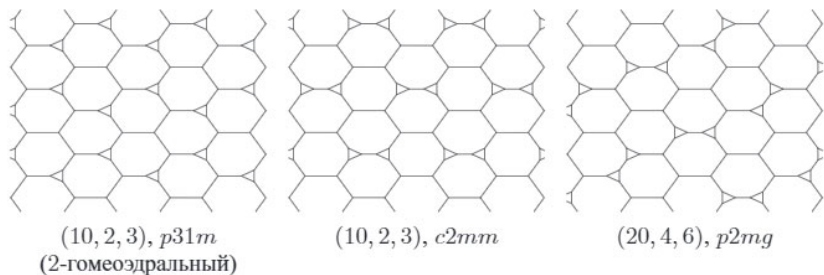
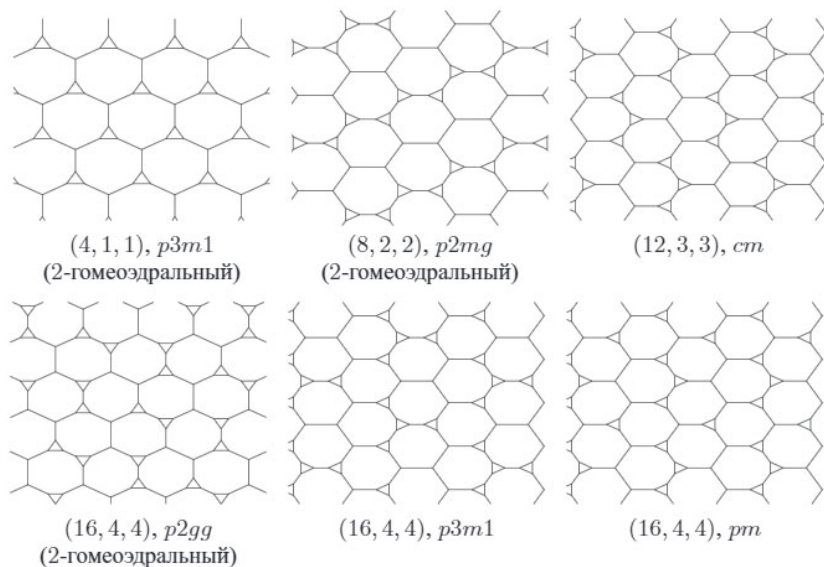


Рис. 9.6. Некоторые  $(\{3, 7\}, 3)$ -плоскости со свойствами  $3R_0$  и  $7R_6$  (случай 1)

Рис. 9.7. Некоторые  $(\{3, 8\}, 3)$ -плоскости со свойствами  $3R_0$  и  $8R_6$  (случай 2)Рис. 9.8. Некоторые  $(\{3, 9\}, 3)$ -плоскости со свойствами  $3R_0$  и  $9R_6$  (случай 3)

ция флипа (определенная ниже в доказательстве для случая 15), примененная к  $G$ , не изменит полученную в результате  $(\{4, 7\}, 3)$ -плоскость.

Рассмотрим  $(\{4, 7\}, 3)$ -плоскость  $G$  со свойствами  $4R_0$  и  $7R_5$ . Назовем ее ребро *изолированным*, если ни одно из четырех соседних с ним ребер не принадлежит никакому 4-угольнику. Перебирая возможные короны (т. е. последовательности степеней соседних граней), легко увидеть, что каждый 7-угольник содержит не более двух изолированных ребер. Следова-



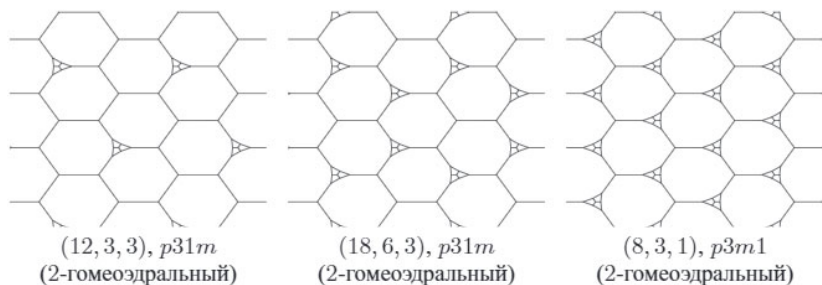
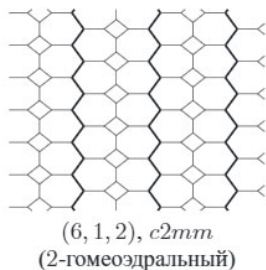


Рис. 9.9. 2-гомеоэдральные  $(\{4, b\}, 3)$ -плоскости со свойствами  $4R_2$  и  $bR_6$  при  $b = 8, 10, 12$  (случаи 7, 8, 9)

тельно, эти изолированные ребра могут образовывать либо тройки (с одной общей вершиной для трех таких ребер), либо пути и циклы (в которых каждая вершина содержится не более чем в двух ребрах).

Если  $G$  содержит цикл изолированных ребер, то это множество изолированных ребер образует зигзаг, т. е. каждые два последовательных ребра принадлежат общей грани, но никакие три последовательных ребра таким свойством не обладают. Исследуя локальную конфигурацию (т. е. перебирая варианты короны), легко увидеть, что эта структура может быть заполнена единственным образом. Следовательно, соответствующая  $(\{4, 7\}, 3)$ -плоскость имеет следующий вид:



Этот паркет мы обозначаем через  $(\{4, 7\}, 3)_{spec}$ .

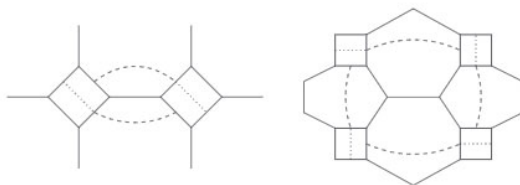
Для данного тора  $G$  его *квадрат* — это тор, имеющий в четыре раза больше вершин и ребер, который получается заменой фундаментальной области  $\mathcal{D}$  на плоскости на область  $2\mathcal{D}$ , состоящую из всех  $2x$  при  $x \in \mathcal{D}$ . Если фундаментальная группа порождена  $v_1$  и  $v_2$ , то другой способ описания фундаментальной области — это  $\mathcal{D} \cup (v_1 + \mathcal{D}) \cup (v_2 + \mathcal{D}) \cup (v_1 + v_2 + \mathcal{D})$ , а фундаментальная группа будет порождена  $2v_1$  и  $2v_2$ .



**Теорема 9.3.3.**

- (i) Пусть  $(\{4, 7\}, 3)$ -плоскость  $G$  обладает свойствами  $4R_0$  и  $7R_5$ ; тогда  $G$  получается в результате удаления центральных ребер из некоторой  $(\{4, 8\}, 3)$ -плоскости  $G'$  со свойствами  $4R_1$  и  $8R_5$ .
- (ii) Пусть  $(\{4, 7\}, 3)$ -тор  $G$  обладает свойствами  $4R_0$  и  $7R_5$ ; тогда либо сам тор  $G$ , либо его квадрат получается в результате удаления центральных ребер из некоторого  $(\{4, 8\}, 3)$ -тора  $G'$  со свойствами  $4R_1$  и  $8R_5$ .
- (iii) Пусть  $(\{4, 7\}, 3)$ -плоскость или тор  $G$  имеет универсальную накрывающую, отличную от  $(\{4, 7\}, 3)_{\text{spec}}$ . Тогда  $G$  получается в результате удаления ребер из ровно двух  $(\{4, 8\}, 3)$ -плоскостей со свойствами  $4R_1$  и  $8R_5$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** (i) Можно считать, что карта  $G$  не равна  $(\{4, 7\}, 3)_{\text{spec}}$ . Первый шаг состоит в том, что мы поставим в соответствие карте  $G$  другую 4-валентную плоскость  $\text{skel}(G)$ , множество вершин которой состоит из всех 4-угольников. Каждая семиугольная грань граничит с двумя 4-угольниками; следовательно, она определяет ребро в  $\text{skel}(G)$ . Поэтому карта  $\text{skel}(G)$  является 4-валентной. Ниже изображены некоторые варианты локальной структуры плоскости  $G$  (обычными линиями) и  $\text{skel}(G)$  (пунктирными линиями).



Ясно, что грани карты  $\text{skel}(G)$  могут соответствовать тройкам или путям из изолированных ребер, а также могут быть 2-угольниками, содержащими единственное ребро. Кроме того, поскольку карта  $G$  отлична от  $(\{4, 7\}, 3)_{\text{spec}}$ , то плоскость  $\text{skel}(G)$  связна.

Перебор всех возможных видов граней карты  $\text{skel}(G)$  показывает, что для каждой грани можно найти два множества отрезков, разрезающих 2-угольники пополам и локально реализующих некоторую  $(\{4, 8\}, 3)$ -плоскость (один пример показан на рисунке выше).

Теперь мы покажем, как можно найти согласованную систему разрезов для  $G$ , т. е. систему разрезов, превращающую нашу карту в  $(\{4, 8\}, 3)$ -плоскость. Рассмотрим путь  $v_0, \dots, v_m$ , в котором  $v_i$  и  $v_{i+1}$  — соседние вершины

в  $skel(G)$ . Пусть выбрана линия разреза для  $v_0$ , тогда однозначно определяются линии разреза для всех  $v_i$ . Предположим, что согласованная система разрезов не существует. Тогда найдется замкнутый путь  $v_0, \dots, v_m = v_0$  такой, что начальный выбор линии разреза для  $v_0$  приводит после обхода по этому пути к другой линии разреза для  $v_m = v_0$ . Если такой путь существует, то его можно считать несамопересекающимся, т.е. это простой контур, обозначим его через  $C$ .

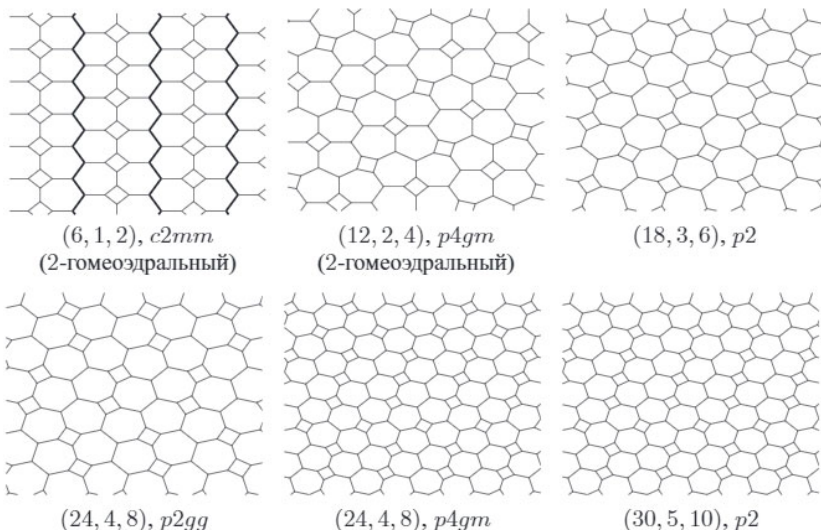
Рассмотрим множество граней, содержащихся внутри этого контура. Их можно упорядочить, обозначив через  $F_0, \dots, F_q$  так, чтобы для каждого  $0 \leq i \leq q$  графы, определенные гранями  $F_0, \dots, F_i$ , были окружены некоторым путем  $P_i$ , не имеющим самопересечений. Для грани  $F_i$  существует согласованная система разрезов ее 4-угольников. Удалив грань  $F_i$ , мы получим путь  $P_{i-1}$ , не имеющий согласованной системы разрезов. Но в конце концов мы получим противоречие, поскольку  $P_0$  — это просто грань карты  $skel(G)$  и потому имеет согласованную систему разрезов.

Теперь мы докажем часть (ii) для случая, когда карта  $G$  является  $(\{4, 7\}, 3)$ -тором со свойствами  $4R_0$  и  $7R_5$ . Приведенные выше рассуждения легко обобщаются до следующего результата: если  $P$  и  $P'$  — гомологичные замкнутые пути в  $skel(G)$ , то  $P$  имеет согласованную систему разрезов, если и только если  $P'$  имеет согласованную систему разрезов. Группа гомологий  $H_1(G)$  изоморфна  $\mathbb{Z}^2$ , т.е. существуют два таких замкнутых пути  $P_1$  и  $P_2$ , что любой другой замкнутый путь  $P$  гомологичен  $n_1 P_1 + n_2 P_2$ .

Теперь предположим, что  $P_1$  и  $P_2$  имеют согласованные системы разрезов. Тогда и  $G$  имеет согласованную систему разрезов. Предположим, что  $P_1$  или  $P_2$  не имеет согласованной системы разрезов. Если  $P_1$  имеет вид  $v_0, \dots, v_m$ , то путь  $P'_1$ , соответствующий  $P_1$  в квадрате  $G'$  тора  $G$ , имеет вид  $v_0, \dots, v_m, \dots, v_{2m}$ . Далее,  $v_{2m} = v_0$  и  $v_0 \neq v_m$ . Так как разрез для  $v_0$  может быть выбран всего двумя способами, то разрез для  $v_{2m}$  совпадает с разрезом для  $v_0$ . Аналогичные рассуждения можно провести для  $P_2$  и, следовательно, тор  $G'$  (квадрат тора  $G$ ), действительно, имеет согласованную систему разрезов. Утверждение (iii) — это следствие связности карты  $skel(G)$  для всех  $G$ , отличных от  $(\{4, 7\}, 3)_{spec}$ -тора. ■

На рис. 9.10 изображены некоторые примеры  $(\{4, 7\}, 3)$ -плоскостей, обладающих свойствами  $4R_0$  и  $7R_5$ .

**Случай 14**, т.е.  $(\{4, 8\}, 3)$ -плоскости со свойствами  $4R_0$  и  $8R_4$ . Коруна 8-угольников обязательно имеет вид  $(48)^4$ ; поэтому здесь возможна только одна плоскость.

Рис. 9.10. Некоторые  $(\{4, 7\}, 3)$ -плоскости со свойствами  $4R_0$  и  $7R_5$  (случай 13)

**Случай 15**, т.е.  $(\{4, 8\}, 3)$ -плоскость со свойствами  $4R_1$  и  $8R_5$ . Особым совершенным паросочетанием  $SPM^3$  в паркете  $\{3, 6\}$  называется всякое подмножество его ребер, обладающее свойствами:

- 1) каждая вершина принадлежит ровно одному ребру из  $SPM$  и
- 2) каждая вершина содержится ровно в одном таком 3-угольнике, что его сторона, противоположная рассматриваемой вершине, принадлежит  $SPM$ .

Операция *флип* определяется для  $(3, 6)$ -плоскостей с фиксированным особым совершенным паросочетанием  $SPM$  и состоит в замене ребер из  $SPM$  на противоположные к ним в соответствии с приведенной ниже диаграммой.



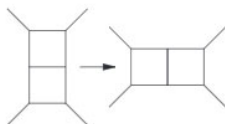
В результате снова получается паркет  $\{3, 6\}$ , но с другим особым совершенным паросочетанием.

<sup>3</sup>Сокращение от special perfect matching.

Для заданного  $(\{4, 8\}, 3)$ -тора  $G$ , обладающего свойствами  $4R_1$  и  $8R_5$ , рассмотрим плоскость  $skel(G)$ , множество вершин которой состоит из 8-угольных граней, а множество ребер образовано двумя классами. Ребра первого класса получаются из ребер, разделяющих смежные 8-угольники, а ребра второго класса получаются из центральных ребер  $(4, 3)$ -полицикла  $P_2 \times P_3$  карты  $G$ .

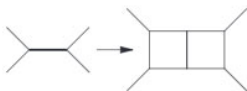
#### Теорема 9.3.4.

- (i) Пусть  $(\{4, 8\}, 3)$ -плоскость  $G$  обладает свойствами  $4R_1$  и  $8R_5$ . Тогда  $skel(G)$  — это паркет  $\{3, 6\}$  с особым совершенным паросочетанием.
- (ii) Для каждого особого совершенного паросочетания паркета  $\{3, 6\}$  можно определить соответствующую  $(\{4, 8\}, 3)$ -плоскость со свойствами  $4R_1$  и  $8R_5$ .
- (iii) Флип  $(3, 6)$ -плоскости с особым совершенным паросочетанием соответствует следующему преобразованию:



**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** (i) Из определения  $skel(G)$  ясно, что для любой  $(\{4, 8\}, 3)$ -плоскости со свойством  $4R_1$  соответствующая карта  $skel(G)$  будет 6-валентной и будет иметь совершенное паросочетание. Ясно, что корона 8-угольника может иметь вид 84484888 или 84488488. Участок 848 означает, что вершина, соответствующая этой 8-угольной грани, содержится в 3-угольнике, причем противоположная сторона этого 3-угольника принадлежит нашему совершенному паросочетанию. Следовательно, паросочетание является особым.

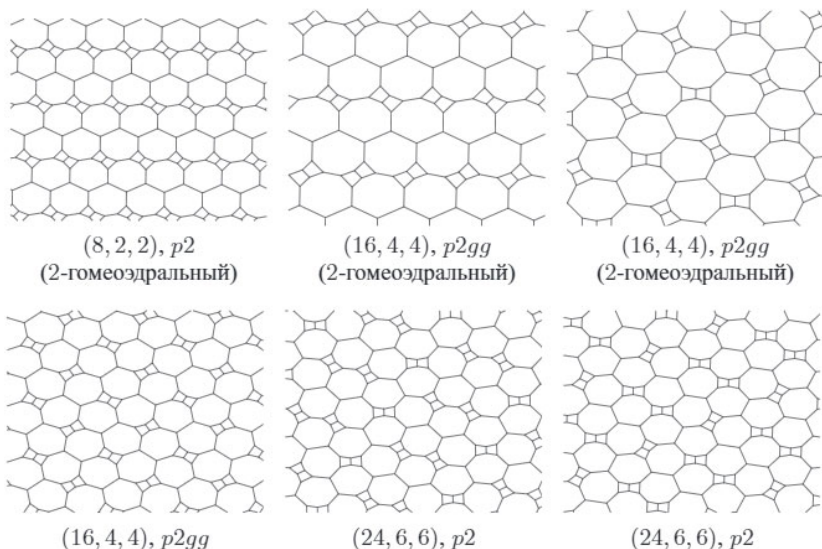
(ii) Пусть  $G$  — паркет  $\{3, 6\}$  с фиксированным особым совершенным паросочетанием, рассмотрим двойственный к нему и преобразуем в нем каждое ребро, соответствующее ребру из нашего паросочетания, следующим образом (см. ниже).



Ясно, что в результате получится  $(\{4, 8\}, 3)$ -плоскость со свойствами  $4R_1$  и  $8R_5$ .

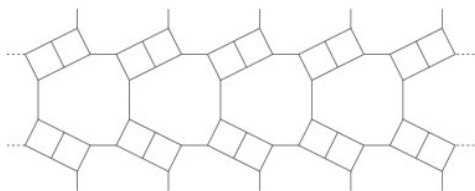
Утверждение (iii) очевидно. ■



Рис. 9.11. Некоторые  $(\{4, 8\}, 3)$ -плоскости со свойствами  $4R_1$  и  $8R_5$  (случай 15)

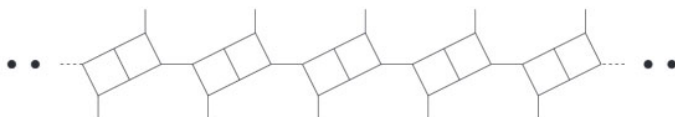
На рис. 9.11 изображены некоторые примеры таких плоскостей.

**Случай 16**, т. е.  $(\{4, 10\}, 3)$ -плоскости со свойствами  $4R_1$  и  $10R_4$ . Все 4-угольники разбиваются на пары. Следовательно, корона 10-угольника может быть  $c_1 = 44b44b4b4b$ ,  $c_2 = 44b4b44b4b$  или  $c_3 = 44b44b44bb$ , где  $b = 10$ . В случае короны  $c_3$  должна быть вершина, содержащаяся в трех 10-угольниках  $F_1, F_2, F_3$ . Но перебор всех вариантов расстановки 4-угольников вокруг этой вершины показывает, что их невозможно расположить так, чтобы  $F_i$  были смежны с шестью 4-угольниками. Следовательно, возможны только варианты  $c_1$  и  $c_2$ . Предположим, что все 10-угольники имеют тип  $c_2$ . Тогда плоскость однозначно определена. Теперь предположим, что один из 10-угольников имеет тип  $c_1$ . Тогда возникает следующая бесконечная цепочка (см. ниже).





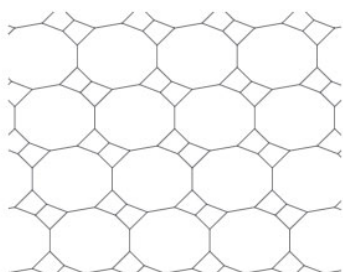
Ясно, что тогда каждая такая плоскость однозначно описывается бесконечным словом  $\dots \alpha_i \dots$ , в котором буквы  $\alpha_i$  равны  $u$  или  $v$ , где  $u$  означает следующее:



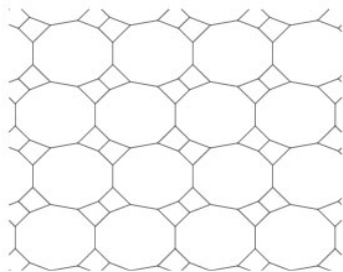
а  $v$  означает следующее:



Ниже изображены первые два примера.



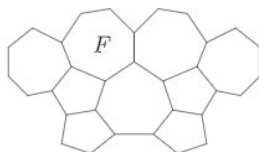
$(6, 2, 1)$ ,  $c2mt$  (2-гомеоздальный):  
слово  $u^\infty$  или  $v^\infty$



$(12, 4, 2)$ ,  $p2mg$  (2-гомеоздальный):  
слово  $(uv)^\infty$

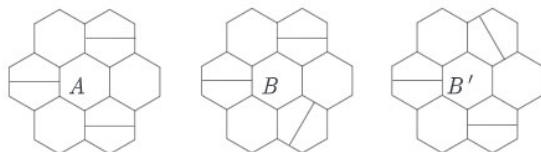
**Случай 17**, т.е.  $(\{5, 7\}, 3)$ -плоскости со свойствами  $5R_1$  и  $7R_3$ . Этот случай описан в [DFSV00], где, кроме того, перечислены все группы симметрии. Этот случай особенно интересен в органической химии; см. [CBCL96], где осуществлен поиск металлических карбоновых структур в виде  $(\{5, 7\}, 3)$ -плоскостей (полученных в результате декорирования паркета  $\{6, 3\}$ ).

Корона 7-угольника может иметь вид 5575757 или 5577557. Следующий рисунок показывает, почему второй вариант невозможен.



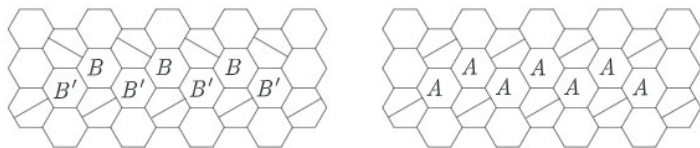
Здесь 7-угольник  $F$  должен граничить с 5-угольниками по трем оставшимся ребрам. Значит, один из 5-угольников будет граничить как минимум с двумя 5-угольниками, что запрещено. Такое же доказательство показывает, что ни одна вершина не содержится в трех 7-угольниках.

Итак, короны 7-угольников имеют вид 5575757. Имеется только три варианта расположения этих 7-угольников и пары прикрепленных к ним 5-угольников, с точностью до поворотов плоскости:



Таким образом, данная плоскость может быть получена в результате декорирования паркета  $\{6, 3\}$ , т. е. добавления к нему ребер.

Разберемся теперь, как отдельные фрагменты  $A$  и  $B$  могут сочетаться, покрывая всю плоскость. Ясно, что выбор данного 7-угольника в качестве центра некоторого фрагмента  $B$  приводит к тому, что два из трех его семиугольных соседей должны быть центрами некоторых конфигураций  $B'$ . Таким образом, цепочка, составленная из центров фрагментов  $B$ , продолжается в обе стороны до бесконечности. Фрагменты  $A$  тоже обладают подобным свойством.



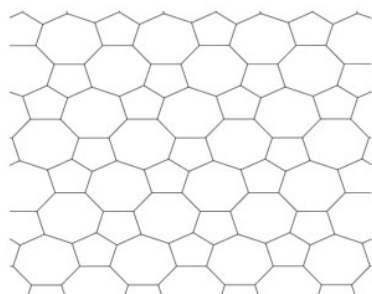
Теперь введем символ  $u$ :



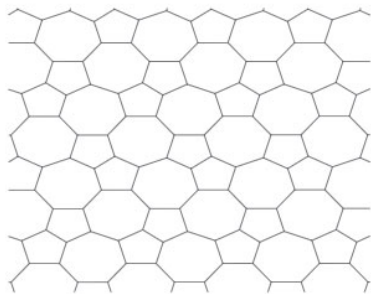
и символ  $v$ :



Заметим, что  $(\{5, 7\}, 3)$ -тор со свойствами  $5R_1$  и  $7R_3$  соответствует слову вида  $\dots \alpha_i \dots$ , где  $\alpha_i$  равны  $u$  или  $v$ . Ниже изображены первые два примера.

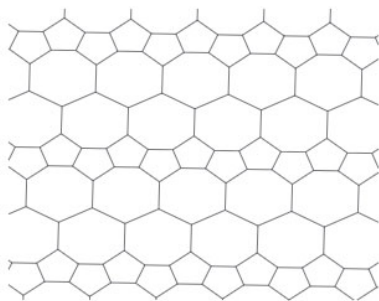


$(8, 2, 2)$ ,  $c2mt$  (2-гомеоздальный):  
слово  $u^\infty$  или  $v^\infty$



$(16, 4, 4)$ ,  $p2gg$  (2-гомеоздальный):  
слово  $(uv)^\infty$

**Случай 18**, т. е.  $(\{5, 7\}, 3)$ -плоскость со свойствами  $5R_2$  и  $7R_4$ . Предположим, что некоторый 7-угольник имеет корону 5557777. Видно, что эти три 5-угольника должны входить в бесконечную цепочку и потому возможна только следующая плоскость:

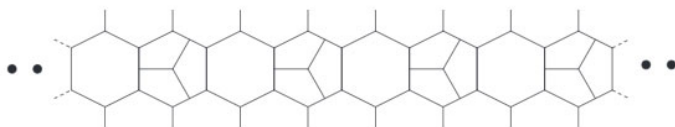


$(8, 2, 2)$ ,  $p2mg$  (2-гомеоздальный)

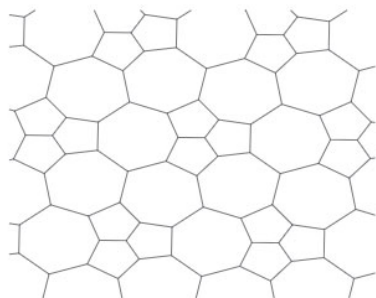
Теперь предположим, что 5-угольники образуют тройки. Пусть некоторый 7-угольник имеет корону 5757577, тогда один из соседних 7-угольников граничит не менее чем с четырьмя 5-угольниками, что невозможно. Следовательно, в короне каждого 7-угольника должны встречаться участки 7557 и 757. Таким образом, после замены каждой тройки 5-угольников на 6-угольник получится паркет  $\{6, 3\}$ . Это означает, что эти плоскости получаются добавлением 5-угольников в паркет  $\{6, 3\}$ . Простые рассуждения показывают, что они описываются словами вида  $\dots \alpha_i \dots$ , где  $\alpha_i$  равны  $u$  или  $v$ ; здесь через  $u$  обозначено следующее:



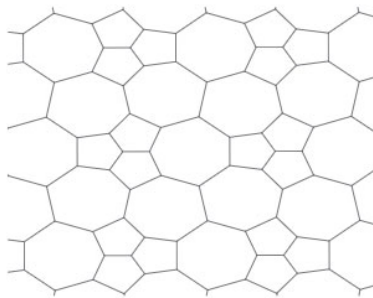
а через  $v$ :



Первые два примера изображены ниже.



$(12, 3, 3)$ ,  $p31m$  (2-гомеоздральный):  
слово  $u^\infty$  или  $v^\infty$



$(24, 6, 6)$ ,  $p2mg$ :  
слово  $(uv)^\infty$

**Случай 19**, т. е.  $(\{5, 8\}, 3)$ -плоскость со свойствами  $5R_2$  и  $8R_2$ . В такой плоскости 5-угольники и 8-угольники будут образовывать бесконечные цепочки, либо найдется тройка из 5-угольников или 8-угольников. Если есть такая тройка, то плоскость полностью определяется: вокруг этой тройки должны быть концентрические кольца из 5-угольников и 8-угольников, а они определены однозначно. Предположим теперь, что 5-угольники и 8-угольники сгруппированы в линии. Тогда они обязательно образуют бесконечные цепочки.

Корона 5-угольника имеет вид 58588. С точностью до ориентации цепочки из 5-угольников существует два варианта, которые мы обозначаем через  $u$  и  $v$ .

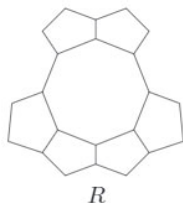
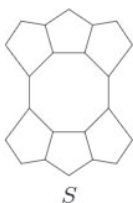
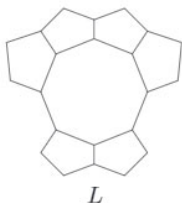


$u$



$v$

Следовательно, соответствующее плоскости бесконечное слово можно записать в форме 5-слова ( $p$ -слова — это бесконечные слова, описывающие ориентацию  $p$ -угольников в одной из бесконечных цепочек  $p$ -угольников)  $\dots \alpha_i \dots$ , где  $\alpha_i$  равны  $u$  или  $v$ . Другой подход состоит в том, чтобы рассмотреть бесконечную цепочку 8-угольников. С точностью до ориентации бесконечной цепочки 8-угольников возможны три варианта, которые мы обозначаем через  $L$ ,  $S$  и  $R$ .



Таким образом, бесконечное слово, описывающее плоскость, может быть записано в виде 8-слова  $\dots \beta_i \dots$ , где  $\beta_i$  равны  $L$ ,  $S$  или  $R$ .

### Теорема 9.3.5.

- (i) 5-слово соответствует  $(\{5, 8\}, 3)$ -плоскости со свойствами  $5R_2$  и  $8R_2$ , в которой  $p$ -угольники сгруппированы в бесконечные цепочки, тогда и только тогда, когда оно имеет вид  $(\gamma_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ , где  $\gamma_i$  равны  $uv$  или  $vu$ .
- (ii) 8-слово соответствует  $(\{5, 8\}, 3)$ -плоскости со свойствами  $5R_2$  и  $8R_2$ , в которой  $p$ -угольники сгруппированы в бесконечные цепочки, если и только если оно имеет вид  $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ , где  $\alpha_i = LS^{m_i}RS^{n_i}$  для некоторых  $m_i, n_i \geq 0$ . Соответствующее 5-слово равно  $(\gamma_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ , где  $\gamma_i = (vu)^{m_i}(uv)^{n_i}$ .

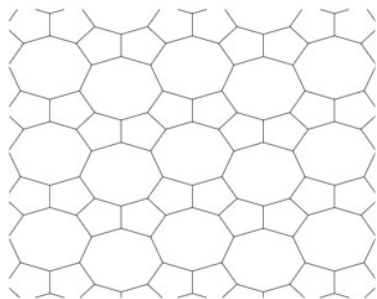
**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Начнем с доказательства утверждения (ii). Достаточно показать, что в последовательности не могут возникнуть два фрагмента  $L$  или  $R$  подряд, даже если их будут разделять фрагменты  $S$ . Предположим, что в последовательности встретился участок  $LS^m L$ . Соответствующая бесконечная цепочка 8-угольников граничит с двумя другими бесконечными цепочками 8-угольников. Легко видеть, что одна из них содержит участок  $LS^{m-1}L$ , а другая — участок  $LS^{m+1}L$ . Повторяя это рассуждение, приходим к бесконечной цепочке, содержащей участок  $LL$ . Но этот случай исключается, поскольку соответствует тройке из 5-угольников.



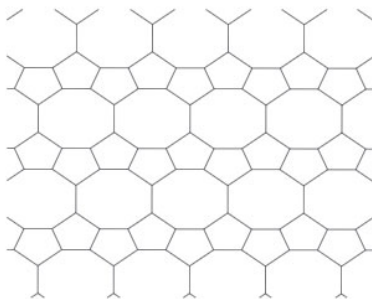
Несложно видеть, что приведенному выше 8-слову соответствует 5-слово  $\dots(vu)^{m_i}(uv)^{n_i}\dots$ . Ясно, что любое 5-слово вида  $(\gamma_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ , где  $\gamma_i$  равны  $uv$  или  $vu$ , может быть записано в такой форме. ■

Заметим, что существует и другое описание таких плоскостей. Рассмотрим *ступеньку* — два смежных 5-угольника; затем расположим ступеньки так, чтобы они образовали бесконечную лестницу (бесконечную цепочку из 5-угольников), которая может идти то вверх, то вниз. Бесконечное слово  $\dots\gamma_i\dots$ , в котором  $\gamma_i$  равны  $uv$  или  $vu$  соответствует лестнице, если договориться, что, например,  $uv$  означает «вверх», а  $vu$  означает «вниз».

Нижне изображены первые два примера.



$(12, 4, 2)$ ,  $p2mg$  (2-гомеоздральный):  
5-слово  $(uvvv)^\infty$  или 8-слово  $(LR)^\infty$



$(6, 2, 1)$ ,  $c2mm$  (2-гомеоздральный):  
5-слово  $(uv)^\infty$  или 8-слово  $(S)^\infty$

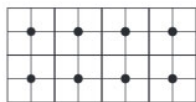
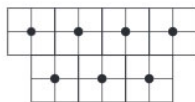
**Случаи 20–23**, т. е.  $(\{5, b\}, 3)$ -плоскости со свойствами  $5R_3$  и  $bR_{12-b}$ , где  $b = 8, 10, 11$  и  $12$ . Все эти случаи разобраны в теоремах 12.5.7, 12.5.13 и в леммах 12.5.4 (ii), 12.5.3 (ii).

**Случаи 24–27**, т. е.  $(\{3, b\}, 4)$ -плоскости со свойствами  $3R_2$  и  $bR_4$ , где  $5 \leq b \leq 8$ . Предположим, что 3-угольники образуют не четверки, а цепочки, как в антипризме  $APrism_m$  при некотором  $m \geq 4$ . Тогда не остается свободных ребер и вся плоскость сводится к этой цепочке, что невозможно.

Следовательно, все 3-угольники сгруппированы в четверки. Каждый  $b$ -угольник граничит с  $b-4$  четверками. Если стянуть четверки в вершины, то получится новая 4-валентная плоскость, причем  $b$ -угольники превратятся в 4-угольники. Значит, это паркет  $\{4, 4\}$ . Следовательно, рассматриваемые плоскости на комбинаторном уровне соответствуют выбору некоторого подмножества  $S$  вершин паркeta  $\{4, 4\}$  такого, что каждый 4-угольник инцидентен ровно  $b-4$  элементам  $S$ . Ясно, что переход от  $S$  к его дополнению во множестве всех вершин паркeta  $\{4, 4\}$  дает биекцию между случаями 24

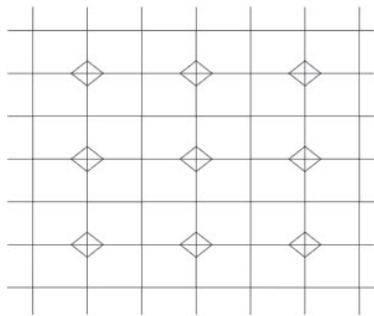
и 26. Заметим, что тем не менее в случае 24 имеется две 2-гомеоэдральные плоскости, а в случае 26 — ни одной.

Рассмотрим случай 24: каждый 4-угольник должен быть инцидентен ровно одной вершине из  $S$ . Все 4-угольники, инцидентные фиксированной вершине, образуют блок из четырех 4-угольников. Ясно, что такие блоки образуют бесконечные цепочки. Две соседние бесконечные цепочки либо находятся в точности напротив друг друга, либо нет, и мы обозначаем это через  $u$  и  $v$ .

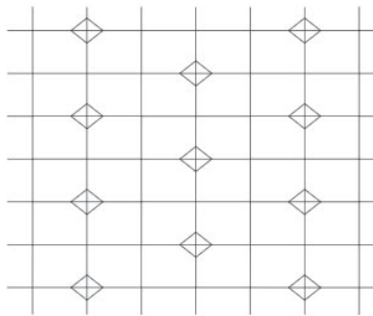
 $u$  $v$ 

Таким образом, плоскости в случае 24 соответствуют бесконечным словам, составленным из  $u$  и  $v$ .

Ниже изображены первые два примера.



$(8, 4, 4)$ ,  $p4mm$  (2-гомеоэдральный):  
 $(u)^\infty$



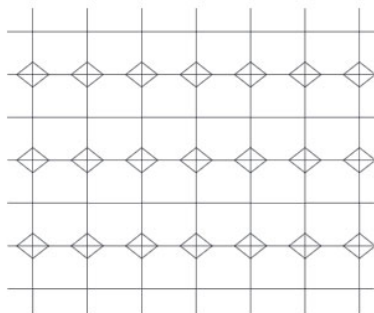
$(8, 4, 4)$ ,  $c2mm$  (2-гомеоэдральный):  
 $(v)^\infty$

Рассмотрим случай 25: каждый 4-угольник должен быть инцидентен двум вершинам из  $S$ . Для каждого 4-угольника эти две вершины могут располагаться либо в концах одной диагонали, либо в концах одного ребра. Мы докажем, что образуется структура из бесконечных цепочек, внутри которых этот выбор все время одинаков. Обозначим через  $u$ ,  $v$  случаи ребра и диагонали соответственно.

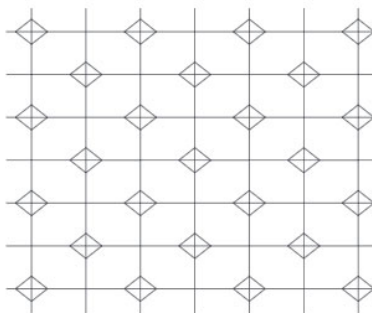
 $u$  $v$

Если для каждого 4-угольника вершины из  $S$  расположены на диагонали, то, очевидно, слово имеет вид  $v^\infty$ . Предположим, что в некотором 4-угольнике вершины из  $S$  принадлежат одному ребру, тогда это ребро определяет бесконечную цепочку, в которой вершины из  $S$  все время должны быть на ребре. Значит, плоскость описывается указанными бесконечными словами.

Ниже изображены первые два примера.



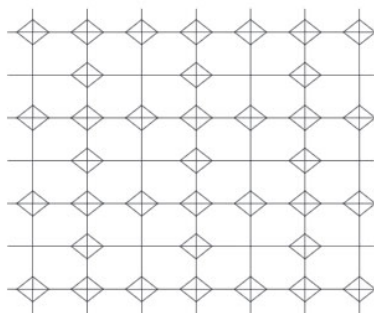
$(6, 4, 2)$ ,  $p2mt$  (2-гомеоздальный):  $u^\infty$



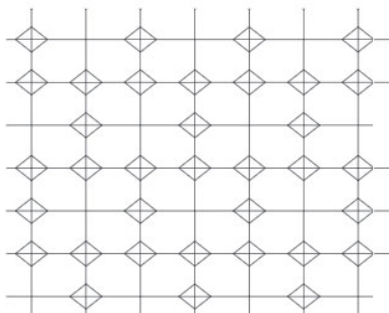
$(6, 4, 2)$ ,  $p4mt$  (2-гомеоздальный):  $v^\infty$

Случай 26 получается переходом к дополнению множества  $S$  из случая 24.

Ниже изображены первые два примера.



$(16, 12, 4)$ ,  $p4mt$ :  $u^\infty$



$(16, 12, 4)$ ,  $c2mt$ :  $v^\infty$

Случай 27 очень прост: каждый 4-угольник должен быть инцидентен четырем вершинам из  $S$ ; значит, все вершины паркета  $\{4, 4\}$  принадлежат  $S$ . Изображение этой плоскости см. на рис. 9.12.

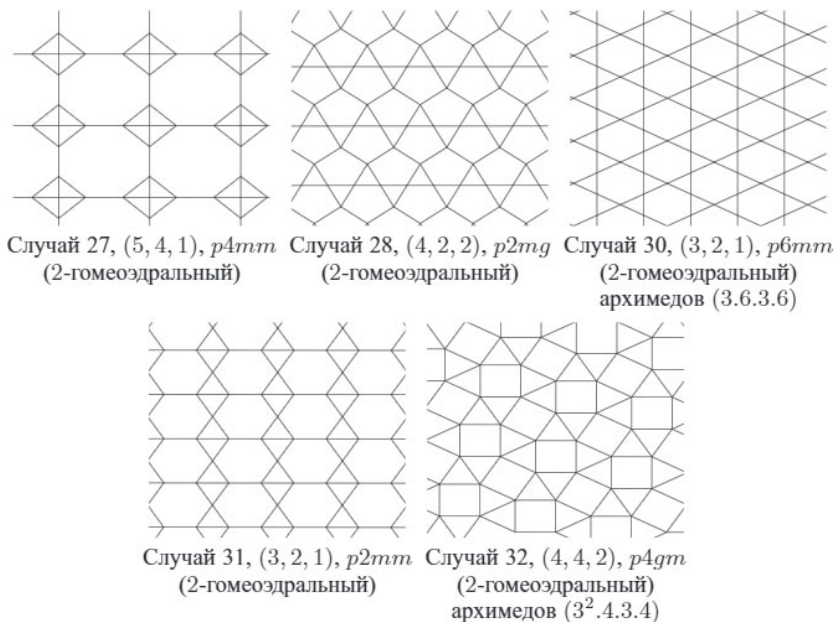


Рис. 9.12. Строго регулярные 4- и 5-валентные плоскости: отдельные случаи

**Случай 28**, т.е.  $(\{3, 5\}, 4)$ -плоскости со свойствами  $3R_0$  и  $5R_2$ . Поскольку треугольники граничат только с 5-угольниками, корона вершины может быть только 5555, 5553 или 5353. Докажем, что случай 5555 невозможен. Если бы нашлась вершина  $v$  с такой короной, то вокруг нее была бы четверка из 5-угольников. Каждая из четырех соседних с  $v$  вершин должна была бы иметь корону 5533, что противоречит свойству  $3R_0$ . Рассмотрим произвольный 5-угольник  $P_1$ ; поскольку он должен граничить с другим 5-угольником, найдется вершина с короной 5553. Эта структура продолжается до последовательности из 5-угольников, изображенной ниже, в которой выделены все вершины с короной 5553.



Поскольку мы рассматриваем случай плоскости, эта последовательность продолжается бесконечно в обе стороны. Далее мы можем добавить

3-угольники и заметить, что построение однозначно и приводит к плоскости, изображенной на рис. 9.12.

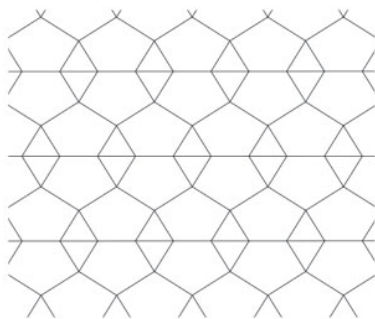
**Случай 29**, т. е.  $(\{3, 5\}, 4)$ -плоскости со свойствами  $3R_1$  и  $5R_3$ . Это единственный случай, который пока не удалось полностью решить, но мы приводим две континуальные серии примеров. Первая серия описывается бесконечными словами  $\dots \alpha_i \dots$ , где  $\alpha_i$  равны  $r$  или  $s$ ; здесь через  $r$  обозначен следующий фрагмент:



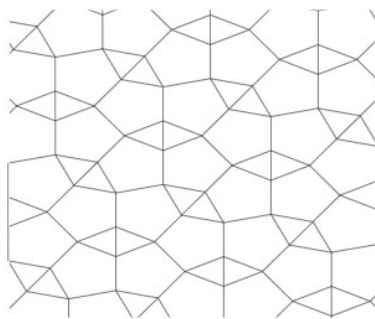
а через  $s$ :



Первые два элемента этой серии изображены ниже.

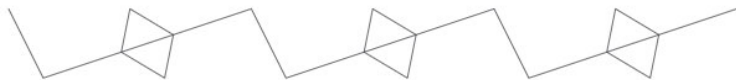


$(4, 2, 2)$ ,  $c2mm: r^\infty$   
(2-гомеоздальный)



$(8, 4, 4)$ ,  $p2gg: (rs)^\infty$   
(2-гомеоздальный)

Вторая серия описывается словами  $\dots \alpha_i \dots$ , в которых  $\alpha_i$  равны  $u$  или  $v$ , через  $u$  обозначено следующее:

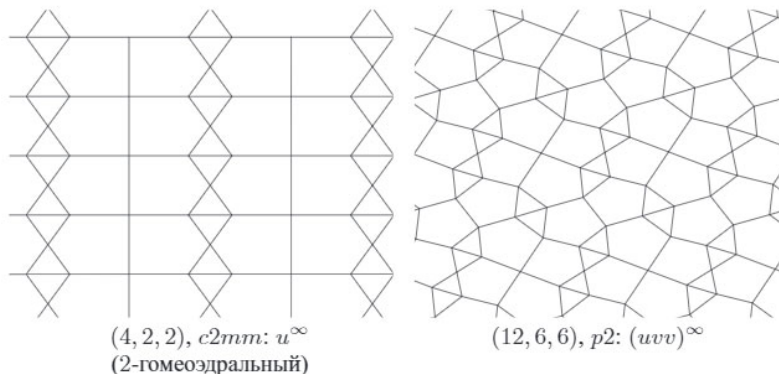


а через  $v$ :



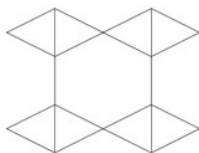


Ниже изображены два примера таких плоскостей (плоскости, соответствующие словам  $(uv)^\infty$  и  $(rs)^\infty$ , одинаковы).



**Случай 30**, т.е.  $(\{3, 6\}, 4)$ -плоскость со свойствами  $3R_0$  и  $6R_0$ . Из условий  $3R_0$  и  $6R_0$  вытекает, что корона каждой вершины имеет вид 3636. Легко видеть, что в этом случае возможен единственный паркет, называемый *паркетом Кагомэ*. Он изображен на рис. 9.12.

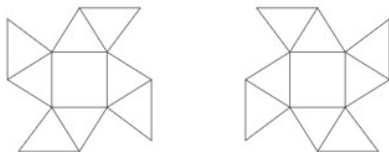
**Случай 31**, т.е.  $(\{3, 6\}, 4)$ -плоскость со свойствами  $3R_1$  и  $6R_2$ . Ясно, что вершины имеют короны  $a = 3636$ ,  $b = 3366$  или  $c = 6666$ . Каждый 3-угольник граничит с некоторым другим 3-угольником. Вершины, принадлежащие их общему ребру, имеют короны типа **b**, а вершины, не принадлежащие их общему ребру, имеют корону типа **a**. Каждый 6-угольник граничит с четырьмя 3-угольниками. Несложно убедиться, что вокруг 6-угольника возможна только следующая нижеприведенная структура.



После этого несложно показать, что эта структура однозначно продолжается на всю плоскость (результат изображен на рис. 9.12).

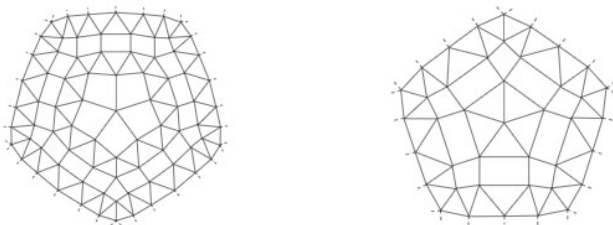
**Случай 32**, т.е.  $(\{3, 4\}, 5)$ -плоскости со свойствами  $3R_1$  и  $4R_0$ . Рассмотрим 4-угольник  $Q$ . Поскольку он граничит только с 3-угольниками, то вокруг него имеется четыре 3-угольника. Корона вершины не может содержать участок 333, так как иначе нашелся бы 3-угольник, смежный как

минимум с двумя 3-угольниками. Следовательно, корона вершины, инцидентной  $Q$ , с точностью до поворота плоскости и смены направления обхода равна 33434. Поскольку каждый 3-угольник граничит с одним 3-угольником, то возможны только два варианта:



Легко убедиться, что каждый из них однозначно продолжается на всю плоскость. Таким образом, существует единственная  $(\{3, 4\}, 5)$ -плоскость со свойствами  $3R_1$  и  $4R_0$ . Она изображена на рис. 9.12.

**Случай 33**, т.е.  $(\{3, 4\}, 5)$ -плоскости со свойствами  $3R_2$  и  $4R_2$ . Предположим, что найдется вершина, инцидентная только 3-угольникам или только 4-угольникам. Тогда оставшаяся структура определяется однозначно и является нормальной; ниже изображен вид на нее с высоты птичьего полета.

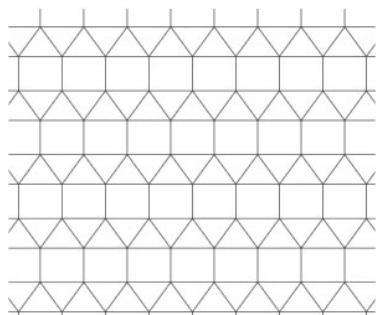


Предположим, что нет вершины, которая содержалась бы только в 4-угольниках или только в 3-угольниках. Корона вершины не может иметь вид 34444, так как входящий в нее 3-угольник граничит только с одним 3-угольником. Смежные 4-угольники образуют последовательность  $(F_i)$ . Выберем ориентацию этой последовательности. После этого на каждом шаге имеется выбор: последовательность поворачивает либо влево ( $L$ ), либо вправо ( $R$ ), либо идет прямо ( $S$ ). Поскольку случай 34444 запрещен, участки  $LL$  и  $RR$  возникнуть не могут. Предположим, что в последовательности встречается участок  $LS^m L$ . Тогда, рассмотрев две соседние последовательности 3-угольников и затем две последовательности 4-угольников, получим в них участки  $LS^{m+2} L$  и  $LS^{m-2} L$ . Следовательно, число вхождений  $S$  между двумя  $L$  можно уменьшать. В конце концов, мы приходим к вершине, окруженной пятью 3-угольниками или пятью 4-угольниками. Мы показали, что это невозможно, следовательно, участки вида  $LS^m L$  и  $RS^m R$

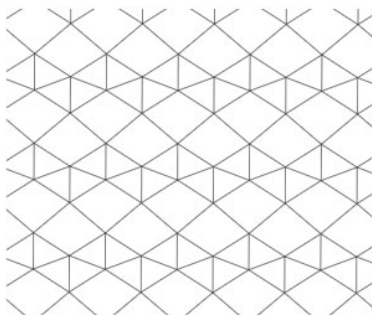
не встречаются в нашей последовательности. Значит, последовательность имеет вид  $(\gamma_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ , где  $\gamma_i$  равны  $LS^{m_1}RS^{m_1}$ . Требуется доказать, что эта последовательность не замкнется в кольцо. Если бы это случилось, то соседние кольца, полученные точно так же, как выше, — добавлением слоя из 3-угольников и затем слоя из 4-угольников — должны были бы кодироваться такой же последовательностью. Тогда с обеих сторон от выбранного кольца было бы бесконечно много граней. В нашей плоскости это запрещено.

Значит, имеется бесконечная цепочка  $(\gamma_i)$ , и можно заметить, что такие плоскости получаются добавлением ребер к паркету  $\{4, 4\}$ .

Ниже изображены первые два примера.



$(2, 2, 1)$ ,  $c2mt$  (2-гомеоэдральный):  $S^\infty$   
архимедов  $(3^3.4^2)$



$(4, 4, 2)$ ,  $p2mg$  (2-гомеоэдральный):  
 $(LR)^\infty$

## ГЛАВА 10

# Параболические слабо регулярные сферы

В этой и следующих главах выражение «№  $x$ » будет означать многогранник номер  $x$  из таблицы 9.1. Здесь мы рассматриваем  $(\{a, b\}, k)$ -сферы со свойством  $bR_j$  или  $aR_i$  такие, что  $2k = b(k - 2)$ , см. определения в главе 2.

### 10.1. Регулярные $(\{2, 6\}, 3)$ -сферы

На рис. 10.1 изображены первые карты из серии  $GC_{k,l}(Bundle_3)$  (операция Гольдберга–Коксетера  $GC_{k,l}(G)$  определяется в разделе 2.1). По теореме 2.2.1 каждая  $(\{2, 6\}, 3)$ -сфера может быть получена как  $GC_{k,l}(Bundle_3)$  для некоторых целых параметров  $0 \leq l \leq k$ .

Каждая  $(\{2, 6\}, 3)$ -сфера, за исключением  $Bundle_3$ , обладает свойством  $2R_0$ . Карта  $Bundle_3$  обладает свойством  $6R_j$  для любого  $j$ . Если некоторая  $(\{2, 6\}, 3)$ -сфера, отличная от  $Bundle_3$ , обладает свойством  $6R_j$ , то  $(6 - j)p_6 = 2p_2 = 6$ . Таким образом, случаи  $j = 0, 1, 2$  невозможны. При  $j = 3, 4, 5$  единственными  $(\{2, 6\}, 3)$ -сферами, имеющими три, четыре, пять 6-угольников вокруг каждого 6-угольника, оказываются  $GC_{1,1}(Bundle_3)$ ,  $GC_{2,0}(Bundle_3)$  и  $GC_{2,1}(Bundle_3)$  соответственно.

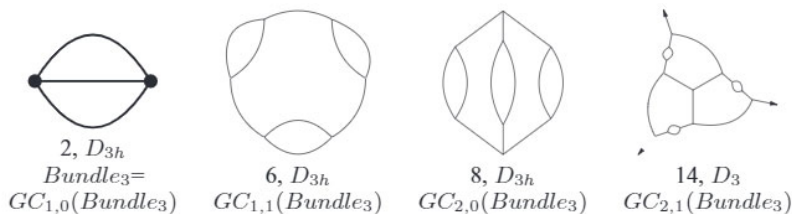


Рис. 10.1. Первые примеры  $(\{2, 6\}, 3)$ -сфер

## 10.2. Регулярные $(\{3, 6\}, 3)$ -сферы

По теореме 2.0.2 всякая не 3-связная  $(\{3, 6\}, 3)$ -сфера совпадает со сферой  $T_n$  для некоторого  $n \geq 1$ . Поэтому  $(\{3, 6\}, 3)$ -сфера, не являющаяся тетраэдром, или обладает свойством  $3R_1$  и принадлежит этой бесконечной серии, или обладает свойством  $3R_0$ .

Для отличной от тетраэдра  $(\{3, 6\}, 3)$ -сферы, обладающей свойством  $6R_j$ , выполняется соотношение  $(6 - j)p_6 \leq 3p_3 = 12$ . Таким образом, у нас есть оценка сверху на число вершин, которая позволяет найти полный список таких сфер:

- 1) первый член  $T_1$  бесконечной серии 2-связных сфер из теоремы 2.0.2; обладает свойствами  $3R_1$  и  $6R_2$ ;
- 2) второй член  $T_2$  этой бесконечной серии; обладает свойствами  $3R_1$  и  $6R_4$ ;
- 3) № 3, т.е.  $GC_{1,1}(Tetrahedron)$ ; обладает свойствами  $3R_0$  и  $6R_3$ ;
- 4) № 4, т.е.  $GC_{2,0}(Tetrahedron)$ , и № 5 (перекрученный № 4); обладают свойствами  $3R_0$  и  $6R_4$ ;
- 5) № 6, т.е.  $GC_{2,1}(Tetrahedron)$ ; обладает свойствами  $3R_0$  и  $6R_5$ .

## 10.3. Регулярные $(\{4, 6\}, 3)$ -сферы

Существует бесконечно много  $(\{4, 6\}, 3)$ -сфер, обладающих свойством  $4R_0$ ; более того, при стремлении количества вершин к бесконечности доля таких сфер среди всех  $(\{4, 6\}, 3)$ -сфер стремится к 1.

Возьмем  $(\{4, 6\}, 3)$ -сферу со свойством  $4R_1$ . На каждое ребро, разделяющее два 4-угольника, добавим 2-угольник. В результате получим  $(\{2, 6\}, 3)$ -сферу, в которой каждый 6-угольник граничит не более чем с одним 2-угольником. Все такие сферы могут быть представлены как  $GC_{k,l}(Bundle_3)$ . Следовательно,  $(\{4, 6\}, 3)$ -сфера со свойством  $4R_1$  и  $v$  вершинами существует, если и только если  $v = 2(k^2 + kl + l^2) - 6 \geq 18$ , и имеет группу симметрии  $D_3$  или  $D_{3h}$ . На самом деле, существует биекция между  $(\{4, 6\}, 3)$ -сферами со свойством  $4R_1$  и всеми  $(\{2, 6\}, 3)$ -сферами, за исключением пяти наименьших (т.е. за исключением четырех сфер, изображенных на рис. 10.1, и сферы с  $(k, l) = (3, 0)$ ). Таким образом, самая маленькая  $(\{4, 6\}, 3)$ -сфера со свойством  $4R_1$  имеет 18 вершин и соответствует параметрам  $(k, l) = (2, 2)$ .



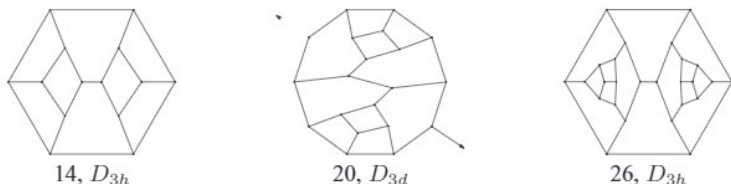


Рис. 10.2. Представители бесконечной серии  $(\{4, 6\}, 3)$ -сфер, полученных из куба  $t$ -вытягиванием с помощью 6-угольников, для  $t = 1, 2$  и  $3$

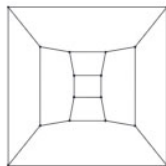
**Теорема 10.3.1.** Если  $(\{4, 6\}, 3)$ -сфера обладает свойством  $4R_2$ , то либо это  $Prism_6$ , либо эта сфера принадлежит бесконечной серии  $(\{4, 6\}, 3)$ -сфер с  $8 + 6t$  вершинами,  $t \geq 1$ , полученных из куба так называемым  $t$ -вытягиванием с помощью 6-угольников (первые представители этой бесконечной серии изображены на рис. 10.2).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Вспомним, что  $p_4 = 6$ . Пусть  $F_0$  — один из 4-угольников на  $(\{4, 6\}, 3)$ -сфере со свойством  $4R_2$ . Тогда существуют два 4-угольника  $F_1$  и  $F_2$ , соседние с  $F_0$ . Эти 4-угольники граничат с другими 4-угольниками. Возможны два случая: либо  $F_1$  и  $F_2$  — соседние, либо нет. В первом случае мы получаем три 4-угольника, окруженные тремя 6-угольниками. Эта конфигурация порождает бесконечную серию, указанную в формулировке теоремы. Во втором случае мы получаем кольцо из 4-угольников, которое приводит только к призме  $Prism_6$ . ■

Не существует  $(\{4, 6\}, 3)$ -сфер со свойством  $4R_3$ .

Для всякой  $(\{4, 6\}, 3)$ -сферы со свойством  $6R_j$ , отличной от куба, выполняется соотношение  $(6 - j)p_6 \leq 4p_4 = 24$ . Следовательно, у такой сферы может быть максимум 56 вершин. При  $j = 0$  это может быть только призма  $Prism_6$ . При  $j = 1$  таких сфер нет.

- 1) При  $j = 2$  таким свойством обладает № 19 и следующая сфера:



- 2) При  $j = 3$  — №№ 21, 22.  
 3) При  $j = 4$  — №№ 20, 23, 24, 25.  
 4) При  $j = 5$  — № 26.

### 10.4. Регулярные $(\{5, 6\}, 3)$ -сферы (фуллерены)

Если  $(\{5, 6\}, 3)$ -сфера  $P$  обладает свойством  $6R_j$ , то ясно, что выполняется неравенство  $(6 - j)p_6 \leq 5p_5 = 60$ . При  $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  отсюда следует, что число вершин  $v = 20 + 2p_6$  оценивается сверху величиной 30, 32, 50, 60, 80, 140 соответственно. С помощью компьютера был выполнен полный перебор при  $j \leq 4$ . Результаты изображены на рис. 10.3, 10.4, 10.5, 10.6 и 10.7. При  $j = 5$  такие сферы по лемме 11.1.3 должны обладать и свойством  $5R_0$ , следовательно, единственной такой сферой является № 55.

Существует бесконечно много  $(\{5, 6\}, 3)$ -сфер со свойством  $5R_0$ ; на самом деле, с ростом числа вершин доля таких сфер среди всех  $(\{5, 6\}, 3)$ -сфер стремится к 1. В химии про такие фуллерены говорят, что они удовлетворяют *правилу изолированных 5-угольников* ([FoMa95]).

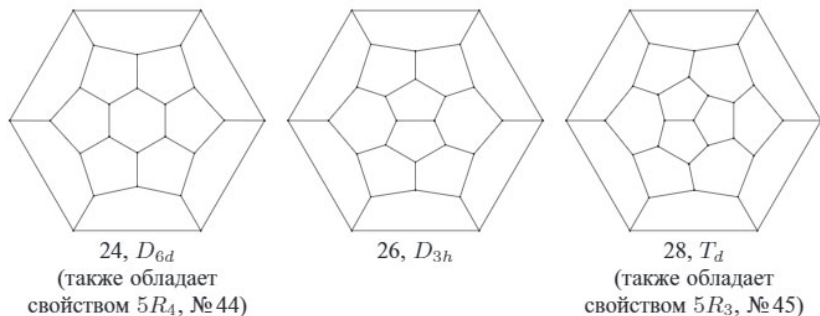


Рис. 10.3. Все  $(\{5, 6\}, 3)$ -сферы со свойством  $6R_0$  — все классические двойственные сферы Франка–Каспера (помимо додекаэдра)

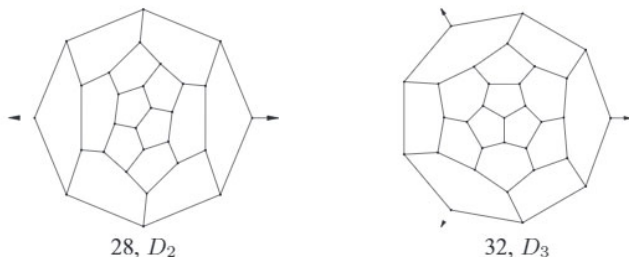
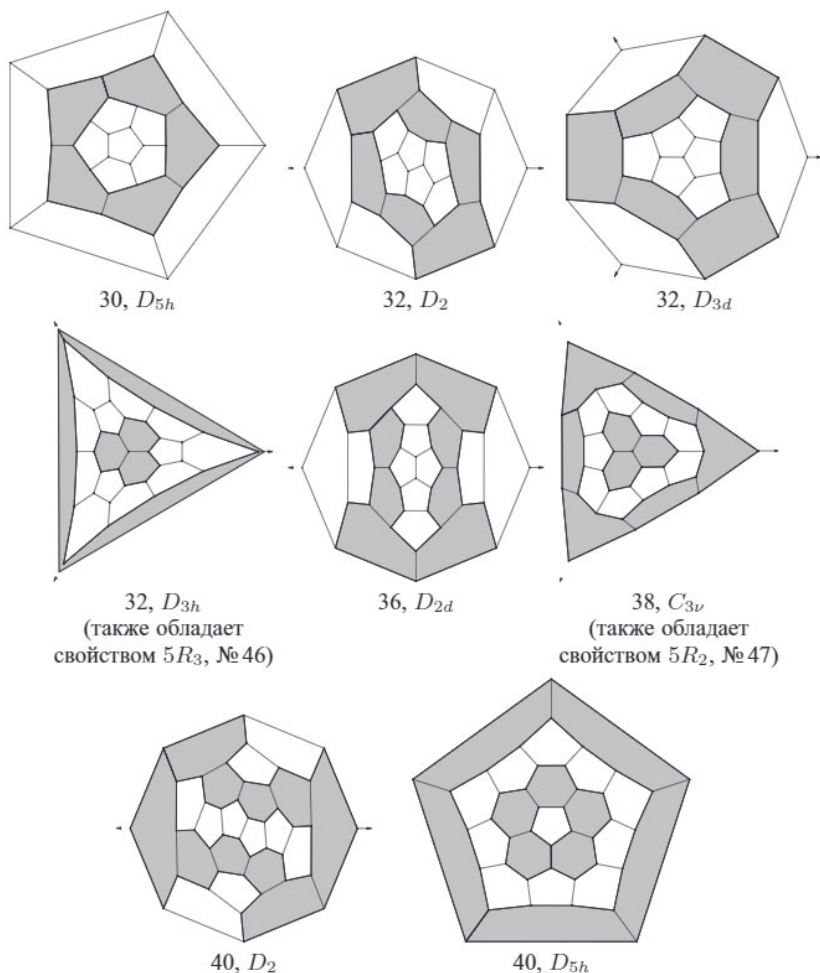


Рис. 10.4. Все  $(\{5, 6\}, 3)$ -сферы со свойством  $6R_1$  (помимо додекаэдра)

Рис. 10.5. Все  $(\{5, 6\}, 3)$ -сферы со свойством  $6R_2$  (помимо додекаэдра)

Число  $(\{5, 6\}, 3)$ -сфер со свойством  $5R_1$  тоже бесконечно и для них тоже не найдено простого описания (список всех 130 таких фуллеренов со свойством  $5R_1$ , с количеством вершин  $v \leq 72$  приведен в [Fow93]; для двух наименьших из них  $(v, \text{Aut}) = (50, D_3)$  и  $(52, T)$ ).

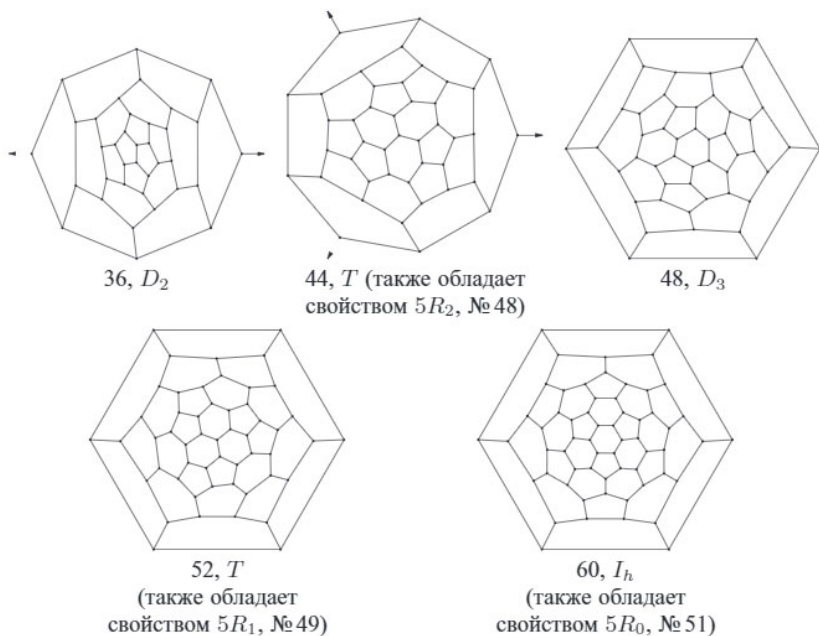


Рис. 10.6. Все  $(\{5, 6\}, 3)$ -сферы со свойством  $6R_3$  (помимо додекаэдра)

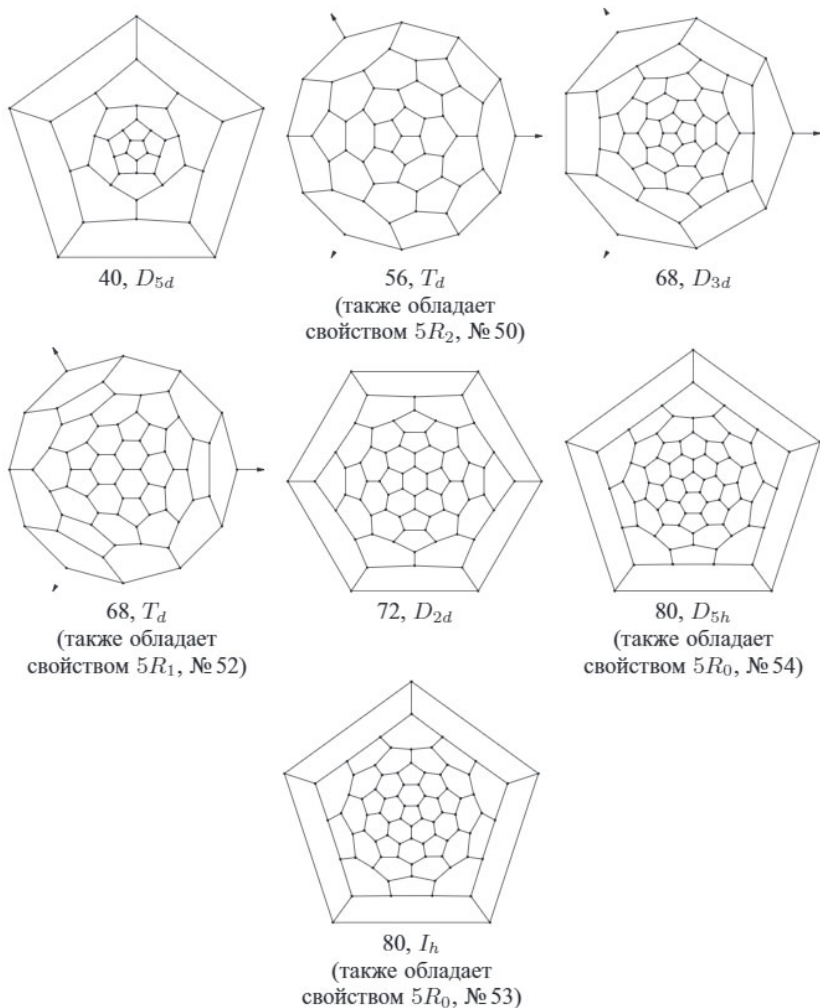
Полный список  $(\{5, 6\}, 3)$ -сфер со свойством  $5R_2$  приведен ниже в теореме 10.4.3.

Единственными  $(\{5, 6\}, 3)$ -сферами со свойством  $5R_3$  оказываются №№ 45 и 46; см. теорему 12.5.6.

Усеченная  $Prism_6$ , т. е. наименьший представитель серии № 44, — это единственная  $(\{5, 6\}, 3)$ -сфера со свойством  $5R_4$ .

**Лемма 10.4.1.** Если в некоторой  $(\{5, 6\}, 3)$ -сфере 5-угольники образуют кольцо, то это одна из четырех сфер, изображенных на рис. 10.8 (за исключением второй).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Во-первых, такое кольцо должно содержать двенадцать 5-угольников. Оно разбивает все 6-угольники на две части, каждая из которых является  $(6, 3)$ -полициклом, обозначим их через  $P$  и  $P'$ . Рассмотрим полицикл  $P$ . Его граничный код имеет вид  $b_1 \dots b_m$ , где  $b_i = 2$  или 3. Обозначим через  $v_i$  число граничных вершин степени  $i$  для  $i = 2$  и 3. На границе полицикла не может быть двух соседних вершин сте-

Рис. 10.7. Все  $(\{5, 6\}, 3)$ -сферы со свойством  $6R_4$  (помимо додекаэдра)

пени 3, так как тогда бы в исходной сфере была вершина, содержащаяся в трех 5-угольниках. Обозначим через  $p_j$  число 5-угольников нашего кольца, имеющих ровно  $j$  общих ребер с полициклом  $P$ , для  $j = 1$  и 2. Ясно,



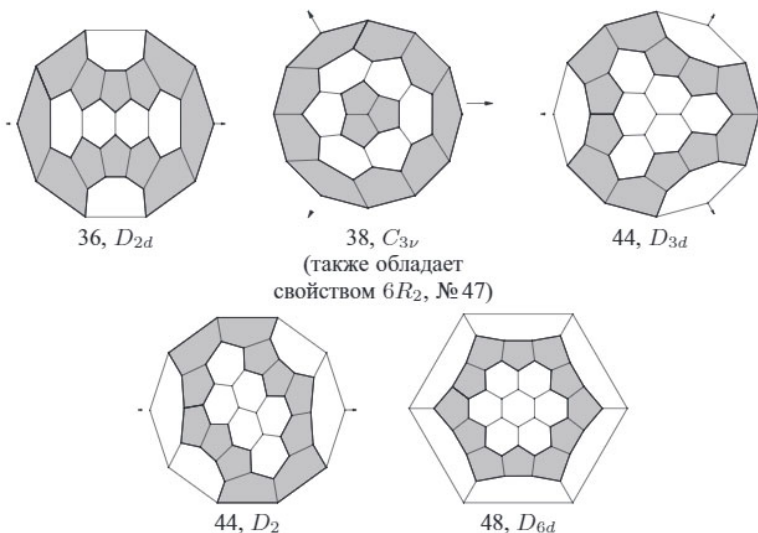


Рис. 10.8.  $\{5, 6, 3\}$ -сферы со свойством  $5R_2$ : все отдельные случаи

что  $p_2 = v_3$  и  $p_1 + p_2 = v_2$ . Если рассмотреть полицикл  $P'$ , то аналогично получаем  $p'_2 = v'_3$  и  $p'_1 + p'_2 = v'_2$ , причем  $p'_1 = p_2$  и  $p'_2 = p_1$ . С учетом соотношений  $v_2 = 6 + v_3$ ,  $v'_2 = 6 + v'_3$  из теоремы 5.2.1 получаем  $v_2 = v'_2 = 12$  и  $v_3 = v'_3 = 6$ . Следовательно, полициклы  $P$  и  $P'$  имеют по 18 граничных ребер.

В работе [HaHa76] (см. также [BBG03, Gre01]) доказано, что для данного числа 6-угольников  $h$  минимальный периметр  $(6, 3)$ -полицикла равен  $2\lceil\sqrt{12h-3}\rceil$ . Следовательно, максимальное число 6-угольников  $h$  в  $(6, 3)$ -полицикле с периметром 18 равно 7. Таким образом, максимальное число 6-угольников в  $\{5, 6, 3\}$ -сфере с кольцом из 5-угольников равно 14, а максимальное число вершин в такой  $\{5, 6, 3\}$ -сфере равно 48. Требуемый результат получается отсюда перебором на компьютере. ■

**Лемма 10.4.2.** Двенадцать 5-угольников в  $\{5, 6, 3\}$ -сфере со свойством  $5R_2$  могут образовывать граф  $G_5$  только следующих пяти видов:

$$G_5 = 4C_3, \quad G_5 = 2C_3 + C_6, \quad G_5 = C_3 + C_9, \quad G_5 = 2C_6, \quad G_5 = C_{12}.$$

**Доказательство.** Если  $\{5, 6, 3\}$ -сфера  $G$  обладает свойством  $5R_2$ , то ее граф  $G_5$  представляет собой совокупность циклов, и наша задача —

определить, какими могут быть их длины. Рассмотрим кольцо из 5-угольников, отличное от тройки 5-угольников с общей вершиной. Такое кольцо ограничивает некоторый  $(6, 3)$ -полицикл  $P$ . Обозначим через  $v_2, v_3$  число его граничных вершин степени 2, 3. По теореме 5.2.1 выполняется соотношение  $v_2 = 6 + v_3$ , а число 5-угольников, соприкасающихся с полициклом  $P$ , равно  $v_2$  и потому не может быть меньше, чем 6. Если длина цикла равна 6, то  $v_3 = 0$  и полицикл  $P$  — это просто 6-угольник.

Легко видеть, что не существует циклов длины 2 или 3, за исключением цикла из трех граней с одной общей вершиной, так как иначе это был бы только 1-связный граф, а нам известно, что все  $(\{5, 6\}, 3)$ -сферы 3-связны (см. теорему 2.0.2).

Если в  $G$  только один цикл, то граф  $G_5$  — это  $C_{12}$ . Если же в  $G$  есть хотя бы два цикла, то, как легко показать, найдутся хотя бы два цикла, окружающие некоторую вершину или  $(6, 3)$ -полицикл. Если оба эти цикла равны  $C_3$ , то оставшиеся 5-угольники образуют либо цикл  $C_6$ , либо два цикла  $C_3$ . Если только один из этих циклов равен  $C_3$ , то либо имеется цикл  $C_6$  и еще один цикл  $C_3$ , либо просто цикл  $C_9$ . Если же ни один из этих циклов не равен  $C_3$ , то оба они имеют длину как минимум 6 и, следовательно, оба имеют длину ровно 6. ■

**Теорема 10.4.3.** ([DGr02]) *Все  $(\{5, 6\}, 3)$ -сферы со свойством  $5R_2$  принадлежат следующему списку.*

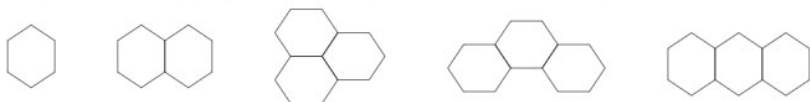
- (i) *Отдельные случаи, изображенные на рис. 10.8.*
- (ii) *Бесконечная серия фуллеренов с  $(12t + 24)$  вершинами (для всех  $t > 0$ ; с группой симметрии  $D_{6d}$  при четных  $t$  и  $D_{6h}$  при нечетных  $t$ ), в которых 5-угольники образуют два 6-цикла. Такие фуллерены получаются из усеченной призмы  $Prism_6$  при добавлении  $t$  дополнительных 6-циклов из 6-угольников.*
- (iii) *Бесконечная серия фуллеренов с  $v$  вершинами (для всех  $v \equiv 0 \pmod{4}$ ,  $v \geq 40$ ; группа симметрии  $D_2$ ,  $D_{2d}$ ,  $D_{2h}$ ,  $T$  или  $T_d$ ), в которых 5-угольники образуют четыре 3-цикла. Они получаются посредством стягивания в четыре точки всех четырех 3-угольников из любой  $(\{3, 6\}, 3)$ -сферы, в которой ни один 6-угольник не имеет более чем одного треугольного соседа (описание  $(\{3, 6\}, 3)$ -сфер см. в разделе 2.2).*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $G$  — некоторая  $(\{5, 6\}, 3)$ -сфера со свойством  $5R_2$ . Мы последовательно рассмотрим все возможные графы  $G_5$  (из 5-угольников), перечисленные в последней лемме. Случай  $G_5 = C_{12}$  уже разобран в лемме 10.4.1.

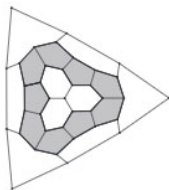
Рассмотрим случай  $G_5 = C_9 + C_3$ . Здесь  $(6, 3)$ -полицикл  $P$ , ограниченный циклом  $C_9$ , имеет  $v_2, v_3$  вершин на своей границе. Снова обозначим через  $p_1, p_2$  число 5-угольников в 9-цикле, ограничивающем полицикл  $P$ , имеющих одно и, соответственно, два общих ребра с  $P$ . Тогда выполняются соотношение  $v_2 = 6 + v_3$  (см. теорему 5.2.1) и равенства

$$p_1 + p_2 = 9, \quad p_2 = v_3, \quad p_1 + p_2 = v_2,$$

откуда вытекает, что  $v_2 = 9, v_3 = 3$  и, следовательно, в полицикле  $P$  ровно 12 граничных ребер. В  $(6, 3)$ -полицикле с числом 6-угольников  $h$  должно быть как минимум  $2\lceil\sqrt{12h-3}\rceil$  граничных ребер; следовательно, в полицикле  $P$  может быть максимум три 6-угольника (см. [BBG03, Gre01]). Ниже изображены все  $(6, 3)$ -полициклы, имеющие не более трех 6-угольников.



Подходит только третий вариант. Добавляем вокруг него цикл длины 9 из 5-угольников и затем цикл из 6-угольников:



Затем можно добавить либо кольцо из 5-угольников, либо кольцо из 6-угольников. Если добавить кольцо из 6-угольников, то появится 3-угольник, а это это запрещено. Значит, мы должны добавить кольцо из 5-угольников.

Покажем теперь, что случай  $G_5 = 2C_3 + C_6$  невозможен. Цикл из шести 5-угольников можно воспринимать как цикл с шестью *хвостами*, т.е. ребрами, соединяющими вершины цикла с другими вершинами. Аналогично, граница каждого 3-цикла из 5-угольников — это контур с девятью вершинами, шесть из которых являются концами шести хвостов. Нам нужно соединить шесть хвостов 6-цикла с 12 хвостами двух 3-циклов так, чтобы получилась карта из 6-угольников.

Ясно, что 6-цикл  $C_6$  ограничивает две области: внешнюю и внутреннюю. Возможны два случая: либо 3-циклы находятся в разных областях, либо оба они лежат в одной и той же области, допустим, внешней. В первом случае, в силу симметрии, мы можем рассматривать только внешнюю

область. Из формулы Эйлера следует, что у граничного контура этого цикла должно быть три хвоста. Легко проверить, что невозможно построить карту из 6-угольников, используя три хвоста 6-цикла и шесть хвостов 3-цикла.

Во втором случае по формуле Эйлера у нас есть 6-цикл с 6 хвостами и два 3-цикла  $C_3^A$  и  $C_3^B$ , у каждого из которых по шесть хвостов. Предположим, что такая конфигурация встречается в некотором фуллерене. Тогда в этом фуллерене есть цепочки из 6-угольников, каждая из которых соединяет некоторый 5-угольник из 6-цикла с некоторым 5-угольником из 3-цикла. Рассмотрим такую цепочку минимальной длины, пусть эта длина равна  $q$ . Тогда наш 6-цикл окружен  $q$  кольцами, по шесть 6-угольников в каждом кольце. Если мы разобьем  $q$ -ое кольцо из 6-угольников на два 6-цикла, у каждого из которых по шесть хвостов, то мы получим 6-цикл из 5-угольников, окруженный  $q - 1$  кольцом. Граница  $(q - 1)$ -го кольца имеет шесть хвостов.

Пусть цепь из  $q$  шестиугольников соединяет наш 6-цикл с циклом  $C_3^A$ . Тогда как минимум два хвоста  $(q - 1)$ -го кольца соответствуют хвостам из  $C_3^A$  (т. е. соединяются с ними). Поскольку граница  $(q - 1)$ -го кольца с шестью хвостами ничем не отличается от границы самого 6-цикла с шестью хвостами, наша задача сводится к случаю, когда два хвоста 6-цикла соединены с двумя хвостами цикла  $C_3^A$ . Есть два случая: либо между концами двух хвостов цикла  $C_3^A$  на границе  $C_3^A$  есть вершина, либо такой вершины нет. Это приводит к двум конфигурациям, каждая из которых представляет собой контур, некоторые вершины которого имеют хвосты. Обе эти конфигурации однозначно заполняются 6-угольниками, и этот процесс заполнения не может завершиться циклом  $C_3^B$  с шестью хвостами.

Если  $G_5 = 4C_3$ , то карта  $G$  может быть получена в результате стягивания в некоторую точку каждого из четырех 3-угольников некоторой  $(\{3, 6\}, 3)$ -сферы, в которой ни один 6-угольник не имеет более одного 3-угольного соседа.

Если  $G_5 = 2C_6$ , то карта  $G$  содержит два 6-цикла из 5-угольников. Оба эти цикла окружают  $(6, 3)$ -полициклы, которые являются просто 6-угольниками. Легко видеть, что здесь имеется  $t$  колец по шесть 6-угольников, разделяющих два 6-цикла из 5-угольников. Таким образом, мы попадаем в случай (ii) нашей теоремы. ■

## 10.5. Регулярные $(\{3, 4\}, 4)$ -сферы

Для всех  $(\{3, 4\}, 4)$ -сфер со свойством  $4R_j$  выполняется соотношение  $e_{3-4} = (4 - j)p_4$ . Но, очевидно,  $e_{3-4} \leq 3p_3 = 24$ , поэтому получаем

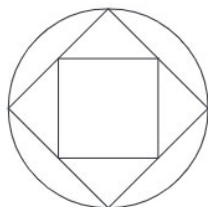


$v = 6 + p_4 \leq 6 + \frac{24}{4-j}$ , откуда при  $j = 0, 1, 2, 3$  получается оценка сверху на число вершин  $v$  величинами 12, 14, 18, 30. Непосредственные вычисления с помощью программы ENU дают список, приведенный на рис. 10.9, 10.10, 10.11 и 10.12.

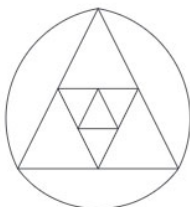
Представляется трудным описать все  $(\{3, 4\}, 4)$ -сферы со свойством  $3R_0$ ; например, медиальный граф любой  $(\{3, 4\}, 4)$ -сферы с  $v$  вершинами — это  $(\{3, 4\}, 4)$ -сфера с  $2v$  вершинами, обладающая свойством  $3R_0$ . На самом деле, с ростом числа вершин доля  $(\{3, 4\}, 4)$ -сфер со свойством  $3R_0$  стремится к 1. Но всегда остается, пусть и «намного меньше», но тоже бесконечное число  $(\{3, 4\}, 4)$ -сфер со свойством  $3R_1$ . Кажется, что получить их классификацию тоже трудно.

Зато случай  $3R_2$  значительно проще; имеет место следующая теорема.

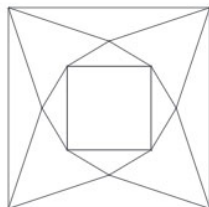
**Теорема 10.5.1.** Если  $(\{3, 4\}, 4)$ -сфера обладает свойством  $3R_2$ , то это либо антипризма  $APrism_4$ , либо член бесконечной серии  $t$ -удлиненных октаэдров (первые представители для  $t = 1, 2$  изображены на рис. 10.11, 10.12).



8,  $D_{4d}$   
(также обладает  
свойством  $3R_2$ , № 61)



9,  $D_{3h}$

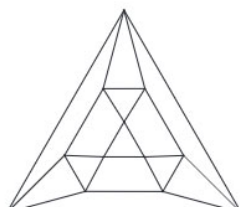


12,  $O_h$   
(также обладает  
свойством  $3R_0$ , № 63)

Рис. 10.9. Все  $(\{3, 4\}, 4)$ -сферы со свойством  $4R_0$  (помимо октаэдра)



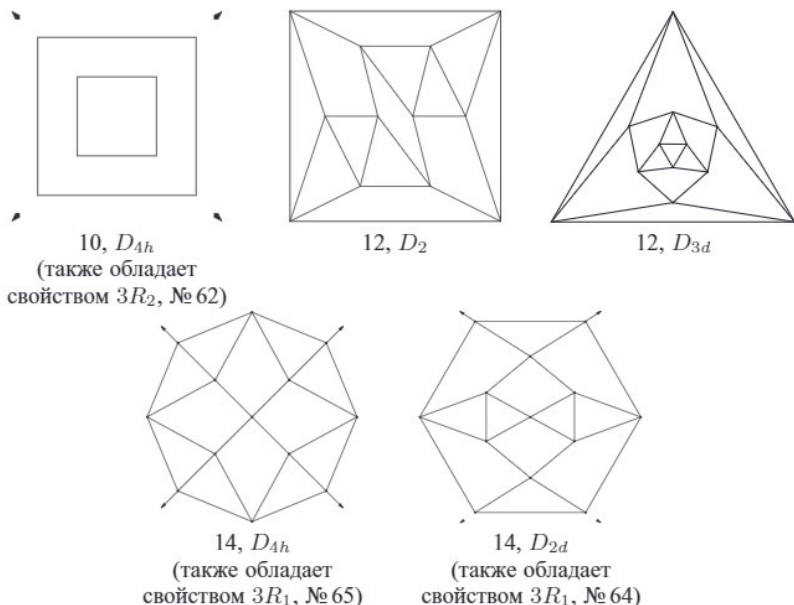
10,  $D_2$



12,  $D_{3h}$

Рис. 10.10. Все  $(\{3, 4\}, 4)$ -сферы со свойством  $4R_1$  (помимо октаэдра)

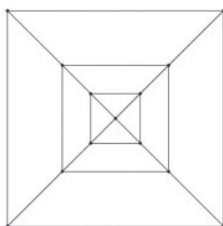


Рис. 10.11. Все  $(\{3, 4\}, 4)$ -сферы со свойством  $4R_2$  (помимо октаэдра)

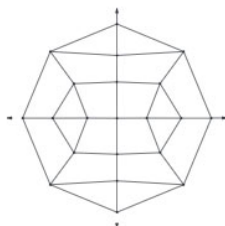
**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $F_0$  — некоторый 3-угольник в  $(\{3, 4\}, 4)$ -сфере, обладающей свойством  $3R_2$ . Тогда  $F_0$  граничит с некоторыми двумя 3-угольниками  $F_1$  и  $F_2$ . У этих 3-угольников есть другие 3-угольные соседи. Возможны два случая: либо у  $F_1$  и  $F_2$  есть второй общий 3-угольный сосед, либо такого соседа нет. В первом случае получается конструкция из четырех 3-угольников, окруженных четырьмя 4-угольниками. Этот случай порождает серию  $t$ -удлиненных октаэдров,  $t \geq 1$ . Во втором случае может получиться только  $APrism_4$ . ■

## 10.6. Регулярные $(\{2, 3\}, 6)$ -сферы

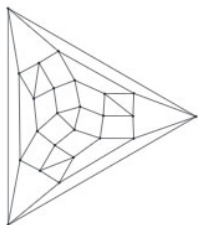
Для всякой  $(\{2, 3\}, 6)$ -сферы со свойством  $3R_j$  выполняется соотношение  $e_{2-3} = (3-j)p_3$ ; поэтому  $v = 2 + \frac{1}{2}p_3 \leq 2 + \frac{6}{3-j}$ , откуда при  $j = 0, 1, 2$  следуют оценки сверху на число вершин  $v$  величиной 4, 5, 8 соответственно. Отсюда получается список, изображенный на рис. 10.13, 10.14, и 10.15.



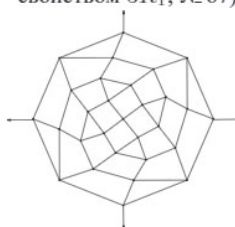
14,  $D_{4h}$   
(также обладает  
свойством  $3R_2$ , № 66)



22,  $D_{2d}$   
(также обладает  
свойством  $3R_1$ , № 67)



24,  $D_3$

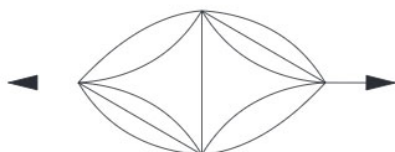
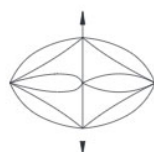
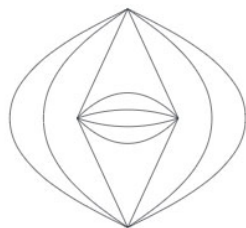
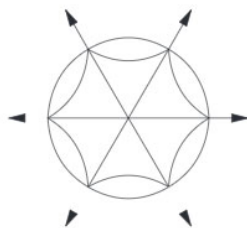


30,  $O = GC_{2,1}$  (Octahedron)  
(также обладает  
свойством  $3R_0$ , № 68)

Рис. 10.12. Все  $(\{3, 4\}, 4)$ -сферы со свойством  $4R_3$  (помимо октаэдра)

Если  $(\{2, 3\}, 6)$ -сфера  $G$  обладает свойством  $2R_1$ , то двойственная к ней сфера  $G^*$  имеет вершины степени 2 или 3 и 6-угольные грани. Вершины карты  $G^*$  степени 2 образуют пары. Заменяем в каждой паре соединяющее их ребро на 2-угольники и получим некоторую  $(\{2, 6\}, 3)$ -сферу. Эта процедура устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множеством  $(\{2, 3\}, 6)$ -сфер со свойством  $2R_1$  и  $v$  вершинами и множеством  $(\{2, 6\}, 3)$ -сфер с  $(2v + 2)$  вершинами, отличных от  $Bundle_3$  и  $GC_{1,1}(Bundle_3)$ , здесь  $v = k^2 + kl + l^2$  для некоторых  $0 \leq l \leq k$ . Например, только одна  $(\{2, 3\}, 6)$ -сфера с тремя вершинами обладает свойством  $2R_1$ ; она соответствует  $(\{2, 6\}, 3)$ -сфере с восемью вершинами.

Если рассмотреть  $(\{5, 6\}, 3)$ -сферу  $G$  со свойством  $5R_1$ , то двойственная к ней сфера  $G^*$  имеет вершины степени 5 или 6 и 3-угольные грани. Вершины степени 5 сферы  $G^*$  образуют пары, поэтому после того, как мы в каждой паре заменим ребро 2-угольником, получится  $(\{2, 3\}, 6)$ -сфера со свойством  $2R_0$ . Это показывает, что надежда получить описание  $(\{2, 3\}, 6)$ -сфер со свойством  $2R_0$  невелика.

3,  $D_{3h}$  (также обладает свойством  $2R_1$ )4,  $T_d$  (также обладает свойством  $2R_0$ )Рис. 10.13. Все  $(\{2, 3\}, 6)$ -сферы, обладающие свойством  $3R_0$  (помимо  $Bundle_6$ )4,  $D_{2d}$ 5,  $D_{3h}$  (также обладает свойством  $2R_0$ )Рис. 10.14. Все  $(\{2, 3\}, 6)$ -сферы, обладающие свойством  $3R_1$  (помимо  $Bundle_6$ )4,  $D_{2d}$ 8,  $D_{6h}$  (также обладает свойством  $2R_0$ )Рис. 10.15. Все  $(\{2, 3\}, 6)$ -сферы, обладающие свойством  $3R_2$  (помимо  $Bundle_6$ )



## ГЛАВА 11

# Общие свойства 3-валентных регулярных карт

В этой главе мы рассмотрим следующую задачу: описать все *слабо* регулярные  $(\{a, b\}, 3)$ -карты на сфере и на торе (случай строго регулярных карт рассмотрен в главе 9).

Мы использовали компьютерные методы (перебор всех вариантов) в тех случаях, когда эти методы работают, а иначе проводили теоретические доказательства. Компьютерный подход не может работать в случае тора, так как для любого  $(\{a, b\}, 3)$ -тора со свойством  $bR_j$  или  $aR_i$  можно построить  $(\{a, b\}, 3)$ -тор с тем же свойством и сколь угодно большим числом вершин  $v$ .

Тем не менее во многих подслучаях, случай тора оказывается проще, поскольку формула Эйлера здесь имеет вид  $v - e + f = 0$  вместо более сложного соотношения  $v - e + f = 2$ . Проиллюстрируем это различие на примере:  $(\{5, 7\}, 3)$ -сфера со свойством  $7R_2$  удовлетворяет соотношению  $x_0 + x_3 + p_7 = 20$  (см. теорему 15.1.1), которое позволяет получить оценки сверху на  $v$  и перечислить такие сферы, а  $(\{5, 7\}, 3)$ -торы со свойством  $7R_2$  должны удовлетворять соотношению  $x_0 + x_3 + p_7 = 0$ , следовательно, такие торы вообще не существуют.

Также интересно посмотреть на имеющиеся закономерности. Если  $(\{a, b\}, 3)$ -торы со свойством  $bR_j$  поддаются классификации, то обычно для  $(\{a, b\}, 3)$ -сфер со свойством  $bR_j$  имеется больше свободы (например, сравните теоремы 13.2.2 и 13.2.3). С другой стороны, если  $(\{a, b\}, 3)$ -торы со свойством  $aR_i$  поддаются классификации, то обычно ограничения на  $(\{a, b\}, 3)$ -сферы со свойством  $aR_i$  оказываются более сильными (см., например, теорему 12.5.2).

Теперь мы приводим сводку результатов и гипотез, касающихся конечности числа  $(\{4, b\}, 3)$ -сфер.

- Число  $(\{4, b\}, 3)$ -сфер со свойством  $bR_j$  равно 0 при  $j \geq b - 2 \geq 6$  (теорема 18.2.2); это число конечно при  $j \leq 3$  (все такие сферы перечислены в теореме 14.1.2 при  $j \leq 2$  и в теореме 16.1.1 (ii) при  $j = 3$ );



оно бесконечно при  $j = 4$  (есть гипотеза, что все такие сферы с  $b = 8$  перечислены в 17.1.3 и что при  $b \geq 9$  их — бесконечное число).

- Число  $(\{4, b\}, 3)$ -сфер со свойством  $4R_0$  конечно только при  $b = 6$  и  $7$  (см. теоремы 12.0.1 (i), 12.1.2 и 12.0.1).
- Число  $(\{4, b\}, 3)$ -сфер со свойством  $4R_1$  бесконечно при  $b = 6, 7, 8$  и  $9$  (см. теоремы 12.2.2, 12.2.3, 12.2.4 и 12.0.1).
- Число  $(\{4, b\}, 3)$ -сфер со свойством  $4R_2$  (отличных от призмы  $Prism_b$ ) бесконечно при  $6 \leq b \leq 13$  и  $b = 15$ , а для других значений  $b$  такие сферы не существуют (см. теоремы 12.3.1 (ii), 12.3.2, 12.3.3, 12.3.4, 12.3.5, 12.3.7, 12.3.9, 12.3.6 и 12.3.8).

Ниже мы приводим результаты и гипотезы, касающиеся существования числа  $(\{4, b\}, 3)$ -торов.

- При  $j \leq 3$  не существует  $(\{4, b\}, 3)$ -торов со свойством  $bR_j$  (теоремы 14.1.2 и 16.1.1 (i)).

При  $j = 4$  такой тор существует, если и только если  $b \geq 8$ ; более того, он обладает свойством  $4R_0$  при  $b = 8$  (теоремы 17.1.2 (i), (ii)); при  $b = 9$  такие торы описаны (см. теорему 17.1.2 (iii), (iv)).

При  $j = 5$  такой тор существует, если и только если  $b \geq 7$ ; более того, он обладает свойством  $4R_0$  при  $b = 7$  (теорема 18.1.1).

При  $j = 6$  и при условии, что  $(\{4, b\}, 3)$ -тор 3-связен, он также обладает свойством  $4R_2$  (теорема 18.2.1).

- $(\{4, b\}, 3)$ -тор со свойством  $4R_i$  может существовать только при  $(i, b) = (0, 7), (1, 7), (1, 8), (1, 9), (2, 7 \leq b \leq 16), (2, 18)$  (теоремы 12.0.1 (ii) и 12.3.1 (i)). Пример тора с  $(i, b) = (1, 9)$  см. на рис. 12.4.

Ниже мы приводим сводку результатов и гипотез, касающихся конечности числа  $(\{5, b\}, 3)$ -сфер.

- Число  $(\{5, b\}, 3)$ -сфер со свойством  $bR_0$  конечно (и равно 4, 2, 3, 3, 5 и 4), если и только если  $6 \leq b \leq 11$  (в теореме 13.2.3 перечисляются такие сферы при  $b \leq 12$  и доказывается случай  $b = 12$ ; данное утверждение при  $b > 12$  — это наша гипотеза).
- Число  $(\{5, b\}, 3)$ -сфер со свойством  $bR_1$  конечно (и равно 3, 4, 7 и 22) при  $6 \leq b \leq 9$  (на рисунках 10.4, 14.1, 14.2, 14.3 и 14.4 приведены все такие сферы при  $6 \leq b \leq 9$ ; мы предполагаем, что их число бесконечно при  $b > 9$ ).

- Число  $(\{5, b\}, 3)$ -сфер со свойством  $bR_2$  конечно (и равно 9 и 27), если и только если  $6 \leq b \leq 7$  (в теореме 15.1.3 этот факт доказывается при  $b \geq 8$ ; при  $b = 6$  и  $b = 7$  все такие сферы приведены на рис. 10.5, 15.6 и 15.7).
- Число  $(\{5, b\}, 3)$ -сфер со свойством  $bR_3$  конечно (и равно 6), если и только если  $b = 6$  (в этом состоит гипотеза 16.2.3; в теореме 16.2.4 это доказывается при  $b = 9, 10, 12$ ).
- Число  $(\{5, b\}, 3)$ -сфер со свойством  $bR_4$  конечно (и равно 8), если и только если  $b = 6$  (см. рис. 10.7, в теоремах 17.2.1, 17.2.2, 17.2.4 это доказывается при  $b = 7, 8, 10, 13, 16$ ).
- Число  $(\{5, b\}, 3)$ -сфер со свойством  $bR_5$  конечно (и равно 2), если и только если  $b = 6$  (в теоремах 18.1.6, 18.1.7 это доказывается при всех  $b \leq 21$ , за исключением случаев  $b = 7, 10, 13, 16, 19$ ; мы предполагаем, что это верно для всех  $b$ ; на рисунках 19.2, 18.1 изображены примеры для  $b = 7, 8, 9$  соответственно).
- Если  $b \geq 7$ , то по теореме 12.0.1  $(\{5, b\}, 3)$ -сфера со свойством  $5R_i$  может существовать только при  $i = 2$  (см. [DGr02]) или при  $i = 3$ . Далее,  $(\{5, b\}, 3)$ -сфера со свойством  $5R_3$  существует, если и только если  $6 \leq b \leq 10$  (в теореме 12.5.2 перечислены такие сферы при  $b = 7$  и доказан случай  $b \leq 10$ , в теореме 12.5.9 описана бесконечная серия и семь отдельных примеров для  $b = 8$ , в теореме 12.5.11 показано, что при  $b = 9$  существует ровно один пример, в теореме 12.5.12 построены три примера для  $b = 10$ ).

Далее мы приводим сводку результатов и гипотез, касающихся существования  $(\{5, b\}, 3)$ -торов.

- $(\{5, b\}, 3)$ -тор со свойством  $bR_0$  существует, если и только если  $b \geq 12$ ; при  $b = 12$  он обладает свойством  $bR_0$ , если и только если он обладает свойством  $5R_3$  (теоремы 13.2.2 и 12.5.2 (ii)).
- $(\{5, b\}, 3)$ -тор со свойством  $bR_1$  существует, если и только если  $b \geq 10$ ; при  $b = 10$  он соответствует некоторому особому совершенному паросочетанию 6-валентного разбиения тора на 3-угольники (теоремы 14.2.2 (ii), 14.2.5 и 14.2.3).
- $(\{5, b\}, 3)$ -тор со свойством  $bR_2$  существует, если и только если  $b \geq 8$ ; при  $b = 8$  он обладает свойством  $bR_2$ , если и только если он обладает свойством  $5R_2$  (теоремы 15.2.1 и 15.2.2).

- $(\{5, b\}, 3)$ -тор со свойством  $bR_3$  существует, если и только если  $b \geq 7$ ; при  $b = 7$  он обладает свойством  $bR_3$ , если и только если он обладает свойством  $5R_1$  (теоремы 16.2.2 и 16.2.1).
- $(\{5, b\}, 3)$ -тор со свойством  $bR_4$  существует, если и только если  $b \geq 7$  (теорема 17.2.3).
- По теореме 12.0.1  $(\{5, b\}, 3)$ -тор со свойством  $5R_i$  может существовать только при  $i = 2$  и  $i = 3$ . Далее,  $(\{5, b\}, 3)$ -тор со свойством  $5R_2$  существует, если и только если  $b = 7$  или 8 (см. теорему 12.4.1), а  $(\{5, b\}, 3)$ -тор со свойством  $5R_3$  существует, если и только если  $b = 8, 10, 11, 12$ ; более того, он обладает свойством  $bR_{12-b}$  при  $b = 10, 11, 12$  (теоремы 12.5.2, 12.5.11 (ii), лемма 12.5.5 (ii) и гипотеза 12.5.14 для  $b = 10$ ).

Учитывая приведенные выше результаты для сфер и торов, мы выдвигаем следующую гипотезу.

**Гипотеза 11.0.1.** Число  $(\{a, b\}, 3)$ -сфер со свойством  $bR_j$  конечно, если и только если существует  $(\{a, b\}, 3)$ -тор со свойством  $bR_j$ .

Отметим, что аналогичная гипотеза для свойства  $aR_i$  не выполняется, например, при  $(a, b; i) = (5, 11; 3)$  (лемма 12.5.4) и при  $(5, 12; 3)$  (лемма 12.5.3).

Мы приводим изображения некоторых  $(\{a, b\}, 3)$ -карт, особенно в тех случаях, где была получена полная классификация. Однако ограничения на объем книги не позволили нам опубликовать все то, что мы хотели бы; дополнительную информацию можно найти в работе [DuDe06].

Изучение регулярных карт представляет интерес для химии и физики, поскольку большое количество таких карт уже встречалось в этих науках. Например, многие из известных минимизаторов (энергии) в задаче Томсона (для данного количества частиц на сфере), в задаче Таммеса о минимальном расстоянии между  $n$  точками на сфере, в задаче Скирма (для данного целого барионного числа) являются регулярными  $(\{5, 6\}, 3)$ -многогранниками. Регулярные  $(\{5, 7\}, 3)$ -плоскости связаны с предполагаемой «металлоуглеродной» деформацией графитовой решетки (см. [DFSV00]). Далее, например, все известные многогранники  $P$  такие, что их остов изометричен некоторому подграфу некоторого гиперкуба или полукуба, либо сами являются регулярными, либо имеют регулярный двойственный многогранник  $P^*$ .

**Теорема 11.0.2.** Если множество пятиугольных граней некоторой  $(\{5, b\}, 3)$ -сферы со свойством  $bR_j$  содержит хотя бы два  $(5, 3)$ -полицикла  $A_2$  или хотя бы два  $(5, 3)$ -полицикла  $A_3$ , то существует бесконечно много  $(\{5, b\}, 3)$ -сфер со свойством  $bR_j$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В полицикле  $A_2$  (см. рис. 7.2) есть центральное ребро; при его удалении получается  $(5, 3)_{gen}$ -полицикл (см. раздел 4.5), являющийся объединением двух  $(5, 3)$ -полициклов  $E_2$  (см. рис. 7.2). Граница этого  $(5, 3)_{gen}$ -полицикла состоит из двух частей, каждая из которых имеет граничный код  $(23^3)^2$ . Следовательно, этот полицикл может быть с обеих сторон заполнен одной и той же структурой, в которой снова имеется как минимум два  $(5, 3)$ -полицикла  $A_2$ , и полученный полицикл снова обладает свойством  $bR_j$ . Эта операция, очевидно, может быть проделана еще раз, и таким образом мы получаем бесконечную серию.

Рассмотрим элементарный  $(5, 3)$ -полицикл  $A_3$  (см. рис. 7.2) и удалим из него центральную вершину. В результате получится  $(5, 3)_{gen}$ -полицикл, граница которого состоит из двух компонент. Оказывается, что обе компоненты имеют один и тот же граничный код, а именно  $(3^2 2)^3$ . Следовательно, обе компоненты границы могут быть дополнены одной и той же структурой, причем полученный полицикл снова обладает свойством  $bR_j$ . Таким образом, мы получили  $(\{5, b\}, 3)$ -сферу со свойством  $bR_j$  большего размера. Эту операцию, очевидно, можно повторять, получая все большие  $(\{5, b\}, 3)$ -сферы со свойством  $bR_j$ . Эта конструкция порождает бесконечное множество таких сфер. ■

Следующая теорема, являющаяся некоторым обобщением теоремы 5.2.1, оказывается очень полезной при получении классификационных результатов.

**Теорема 11.0.3.** Пусть  $P$  — конечный  $(a, 3)_{gen}$ -полицикл с  $t$  компонентами границы. Обозначим через  $v_2$  и  $v_3$  число вершин степени 2 и 3 на его границе. Пусть  $x$  и  $p_a$  — число внутренних вершин и число  $a$ -угольных внутренних граней. Тогда имеют место соотношения

$$\begin{cases} ap_a - 3x = v_2 + 2v_3, \\ p_a - \frac{x}{2} = (2 - t) + \frac{v_3}{2}. \end{cases}$$

Если  $a \neq 6$ , то эта система уравнений имеет следующее решение:

$$\begin{cases} p_a = \frac{1}{a-6} \{v_2 - v_3 - 6(2-t)\}, \\ x = \frac{1}{a-6} \{2v_2 - (a-4)v_3 - 2a(2-t)\}. \end{cases}$$



**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Будем рассматривать данное множество  $a$ -угольных граней как плоский граф, состоящий из нескольких  $a$ -угольников и  $t$  других граней.

При подсчете числа ребер  $e$  двумя способами, получаем  $2e = ap_a + v_2 + v_3 = 2v_2 + 3v_3 + 3x$ , откуда  $ap_a - 3x = v_2 + 2v_3$ .

С другой стороны, по формуле Эйлера,  $v - e + f = 2$ , поэтому при замене  $v = v_2 + v_3 + x$  и  $f = t + p_a$  получаем соотношение  $p_a - \frac{x}{2} = (2 - t) + \frac{v_3}{2}$ . Решение получившейся линейной системы дает выражения для  $p_a$  и  $x$ . ■

## 11.1. Произвольные $(\{a, b\}, 3)$ -карты

**Определение 11.1.1.** Пусть  $G - (\{a, b\}, 3)$ -карта (на сфере или на торе), обладающая свойством  $bR_j$ . Поставим ей в соответствие карту  $b(G)$  (на сфере или на торе соответственно), образованную  $b$ -угольными гранями карты  $G$  (с учетом их смежности). Эта карта индуцирована двойственной картой карты  $G$ .

Отметим, что карта  $b(G)$  может быть несвязной. Таковы, например, все  $(\{5, b\}, 3)$ -карты, обладающие свойством  $bR_0$  или  $bR_1$ . Из классификации  $(4, 3)$ -полициклов в разделе 4.2 следует, что единственной  $(\{4, b\}, 3)$ -картой со свойством  $bR_j$ , для которой карта  $b(G)$  несвязна, является призма  $Prism_b$ .

### Следствие 11.1.2.

- (i) Если  $(\{a, b\}, 3)$ -многогранник  $G$  обладает свойством  $bR_j$ , то  $j \leq 5$ .
- (ii) Если 3-связный  $(\{a, b\}, 3)$ -тор  $G$  обладает свойством  $bR_j$ , то  $j \leq 6$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** (i) Сфера  $b(G)$  не содержит ни одного 2-угольника, так как иначе карта  $G$  оказалась бы не 3-связной. Следовательно, можно применить теорему 1.2.3 (ii) и получить  $j \leq 5$ .

(ii) В случае тора из 3-связности следует, что степени граней карты  $b(G)$  не больше чем 3. По теореме 1.2.3 (ii) получаем, что  $j \leq 6$ . ■

Если убрать требование 3-связности, то ограничений сверху на величину  $j$  не будет. Например, по теореме 13.2.4 для любого  $j \geq 2$  существует  $(\{5, 5j\}, 3)$ -сфера со свойством  $5jR_j$ .

**Лемма 11.1.3.** Если некоторая  $(\{a, b\}, k)$ -карта обладает свойством  $bR_j$  при  $j = b - 1$ , то она обладает свойством  $aR_0$ .



**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Достаточно заметить, что из наличия общего ребра у каких-то двух  $a$ -угольных граней следует, что  $j < b - 1$ . ■

**Теорема 11.1.4.** Пусть  $M$  — это  $(\{a, b\}, 3)$ -карта со свойством  $bR_j$  (на сфере или на торе).

(i) Если  $a = 3$ , то:

- если  $M$  — тор, то  $j \geq 6$ ; если  $j = 6$ , то  $M$  обладает свойством  $3R_0$ ;
- если  $M$  — сфера и  $j < 6$ , то  $p_b \leq \frac{12}{6-j}$ ; если  $j = 6$ , то  $e_{3-3} = 6$ .

(ii) Если  $a = 4$ , то:

- если  $M$  — тор, то  $j \geq 12 - b$ ; если  $j = 12 - b$ , то  $M$  обладает свойством  $4R_0$ ;
- если  $M$  — сфера и  $j < 12 - b$ , то  $p_b \leq \frac{24}{12-b-j}$ ; если  $j = 12 - b$ , то  $e_{4-4} = 12$ .

(iii) Если  $a = 5$ , то:

- если  $M$  — тор, то  $j \geq 30 - 4b$ ; если  $j = 30 - 4b$ , то  $M$  обладает свойством  $5R_0$ ;
- если  $M$  — сфера и  $j < 30 - 4b$ , то  $p_b \leq \frac{60}{30-4b-j}$ ; если  $j = 30 - 4b$ , то  $e_{5-5} = 30$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Формула Эйлера (1.1) может быть записана в виде

$$p_b(b-6) = p_a(6-a) - 6\chi,$$

где  $\chi = 2$  для сферы и 0 для тора. Кроме того, выполняется следующее неравенство:

$$e_{a-b} = p_b(b-j) = ap_a - 2e_{a-a}.$$

Если исключить из этих уравнений переменную  $p_a$ , то в случаях  $a = 3, 4, 5$  мы получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} p_b(j-6) &= 2e_{3-3} - 6\chi; & p_b(j+b-12) &= 2e_{4-4} - 12\chi; \\ p_b(4b+j-30) &= 2e_{5-5} - 30\chi. \end{aligned}$$

Разберем случай  $a = 4$  (остальные случаи рассматриваются аналогично). В этом случае для тора имеем  $p_b(b+j-12) \geq 0$ , откуда  $j \geq 12 - b$ .

Если  $j = 12 - b$ , то  $e_{4-4} = 0$ . В случае сферы, если  $j < 12 - b$ , то  $p_b = \frac{24 - 2e_{4-4}}{12 - b - j} \leq \frac{24}{12 - b - j}$ , а при  $j = 12 - b$  это уравнение упрощается к виду  $e_{4-4} = 12$ . ■

Все  $(\{4, b\}, 3)$ -сферы со свойством  $bR_3$  перечислены в теореме 16.1.1, все  $(\{4, b\}, 3)$ -сферы со свойством  $bR_2$  перечислены в теореме 15.1.4, не существует  $(\{4, b\}, 3)$ -сфер со свойством  $bR_1$  по теореме 14.1.2, и единственной  $(\{4, b\}, 3)$ -сферой со свойством  $bR_0$  является призма  $Prism_b$ . Все  $(\{4, 7\}, 3)$ -сферы со свойством  $7R_4$  изображены на рис. 17.1, предположительный список  $(\{4, 8\}, 3)$ -сфер со свойством  $8R_4$  приведен в гипотезе 17.1.3; их бесконечно много. Известны три примера  $(\{4, 7\}, 3)$ -сфер со свойством  $7R_5$  (см. рис. 18.3), но неясно, конечное ли их число или бесконечное.

Из теоремы 12.0.1 мы знаем, что не существует  $(\{5, 7\}, 3)$ -сфер со свойством  $5R_i$  при  $i \leq 1$ . Все  $(\{5, 7\}, 3)$ -сферы со свойством  $7R_2$  перечислены в главе 15 (см. рис. 15.6 и 15.7).

## 11.2. Неразрешенные вопросы

Мы приводим здесь список некоторых интересных нерешенных задач о 3-валентных регулярных полициклах.

- 1) Выяснить, конечно ли число  $(\{4, 7\}, 3)$ -сфер со свойством  $7R_5$  и число  $(\{5, 7\}, 3)$ -сфер со свойством  $7R_5$ .
- 2) Выяснить, конечно ли число  $(\{5, 7\}, 3)$ -сфер со свойством  $7R_3$  и число  $(\{5, 10\}, 3)$ -сфер со свойством  $5R_3$ .
- 3) Выяснить, существуют ли  $(\{5, b\}, 3)$ -торы со свойством  $bR_5$ .

Один из наиболее интересных возникающих здесь вопросов заключается в проверке нашей гипотезы о том, что число  $(\{a, b\}, 3)$ -сфер со свойством  $bR_j$  бесконечно тогда и только тогда, когда существует  $(\{a, b\}, 3)$ -тор со свойством  $bR_j$ .

Для каждой пары  $aR_i, bR_j$  и фиксированного рода  $g \geq 2$  число строго регулярных карт, очевидно, конечно. Но, безусловно, оно очень велико. Интересно было бы определить, какие типы строгой регулярности могут реализовываться для карт рода  $g \geq 2$ . Другое возможное направление исследований — изучить все слабо регулярные  $(\{a, b\}, k)$ -карты для  $k \geq 4$ .

Можно также рассматривать случай  $a = b$ , т. е. в основной задаче различать два класса  $a$ -угольников. Это напоминает рассматривавшиеся ранее  $(R, q)$ -полициклы, у которых были грани-дыры и собственные грани.

## ГЛАВА 12

### Сферы и торы со свойством $aR_i$

Начнем со следующего общего результата.

**Теорема 12.0.1.** Пусть  $G$  — 3-связная  $(\{a, b\}, 3)$ -сфера или тор со свойством  $aR_i$ , причем  $b \geq 7$ . Тогда выполнено следующее:

- (i)  $aR_i$  имеет один из видов:  $3R_0, 4R_0, 4R_1, 4R_2, 5R_1, 5R_2, 5R_3, 5R_4$ ;
- (ii) в случае  $5R_4$  карта  $G$  — усеченная  $Prism_b$ ;
- (iii) в случае  $5R_1$  обязательно  $b = 7$  и  $G$  принадлежит случаю 17 из списка строго регулярных плоскостей в таблице 9.3.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Ясно, что  $a = 3, 4$  или  $5$ . Если некоторая  $(\{3, b\}, 3)$ -карта 3-связна, то она обладает свойством  $3R_0$ , что исключает случаи  $3R_1$  и  $3R_2$ .

Из свойства  $aR_{a-1}$  вытекает свойство  $bR_0$  (см. лемму 11.1.3). Не существует  $(\{4, b\}, 3)$ -карт со свойствами  $4R_3$  и  $bR_0$  и единственная  $(\{5, b\}, 3)$ -карта, обладающая свойствами  $5R_4$  и  $bR_0$ , — это усеченная призма  $Prism_b$  (см. таблицу 9.1).

Рассмотрим  $(\{5, b\}, 3)$ -сферу или тор со свойством  $5R_1$ . По формуле Эйлера,  $12\chi = p_5 - (b - 6)p_b$ . Имеется  $n_P = \frac{p_5}{2}$  пар 5-угольников. Такие пары определяют  $4n_P$  участков вида  $b5b$  и  $2n_P$  участков вида  $b55b$  в граничных последовательностях  $b$ -угольников. Тогда

$$2(4n_P) + 3(2n_P) = 7p_5 \leq bp_b.$$

Поскольку  $G$  — сфера или тор, выполняется неравенство  $\chi \geq 0$ , т. е.  $p_5 \geq (b - 6)p_b$ . Следовательно,  $b = 7$ ,  $p_5 = p_7$  и  $\chi = 0$ ; таким образом, это тор. Так как  $p_5 = p_7$ , то граничные последовательности 7-угольников имеют вид  $\alpha_1 \dots \alpha_m$ , где  $\alpha_i = 57$  или  $557$ . Легко увидеть, что возможен только один вариант: два участка вида  $57$  и один участок вида  $557$ . Таким образом,  $G$  обладает свойством  $7R_3$ . ■

## 12.1. Карты со свойством $aR_0$

**Теорема 12.1.1.** Пусть  $(\{a, b\}, 3)$ -сфера или тор  $G$  обладает свойством  $aR_0$ , причем  $b > 6$ ; тогда выполнено следующее:

(i) Если  $a = 3$ , то  $b \leq 12$ .

- Если  $b = 12$ , то  $G$  — это случай 6 из списка строго регулярных торов.
- Если  $b = 11$ , то  $G$  — это случай 5 из списка строго регулярных торов.
- Если  $b = 7, 8, 9, 10$  и  $G$  является сферой, то  $G$  имеет как минимум 20, 24, 52, 60 вершин соответственно.

(ii) Если  $a = 4$ , то  $b \leq 8$ .

- Если  $b = 8$ , то  $G$  — это случай 14 из списка строго регулярных торов.
- Если  $b = 7$  и  $G$  является сферой, то  $G$  имеет как минимум 80 вершин.

(iii) Случай  $a = 5$  невозможен.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Тот факт, что  $a = 3, 4$  или 5, следует из формулы Эйлера для  $(\{a, b\}, 3)$ -карт:

$$p_a(6 - a) - p_b(b - 6) = 6\chi,$$

где  $\chi = 2$  и 0 для сферы и тора.

Из свойства  $aR_0$  следует, что число  $e_{a-b}$  (количество  $a$ - $b$  ребер) удовлетворяет соотношению:

$$e_{a-b} = ap_a \leq p_b \lfloor b/2 \rfloor,$$

так как корона  $b$ -угольника не может содержать  $a$ -угольники, прилегающие к двум соседним сторонам. Таким образом, получаем

$$6\chi = (6 - a)p_a - p_b(b - 6) \leq p_b \Psi_a(b), \quad \text{где } \Psi_a(b) = \frac{6 - a}{a} \lfloor b/2 \rfloor - (b - 6).$$

Если  $\Psi_a(b) < 0$ , то не может существовать ни сферы, ни тора. Если  $\Psi_a(b) = 0$ , то  $\chi = 0$ , т.е.  $G$  является тором и обладает свойством  $bR_j$

для некоторого  $j$ . Если  $\Psi_a(b) > 0$ , то возможен и случай сферы, и случай тора. Более того, если  $G$  является тором, то  $p_b \geq \frac{6\chi}{\Psi_a(b)}$ , что дает оценку снизу на  $v$ .

Для завершения доказательства нужно в приведенное выше соотношение подставить  $a = 3, 4, 5$ . ■

**Теорема 12.1.2.** *Существуют две бесконечные серии  $(\{4, 7\}, 3)$ -сфер со свойством  $4R_0$ . Они имеют  $140 + 84i$  вершин (см. два примера на рис. 12.1). При четных  $i$  они различны: сфера в одной серии имеет группу симметрии  $D_{7h}$ , а в другой серии — группу симметрии  $D_{7d}$ . При нечетных  $i$  сферы двух серий изометричны и имеют группу симметрии  $D_7$ .*

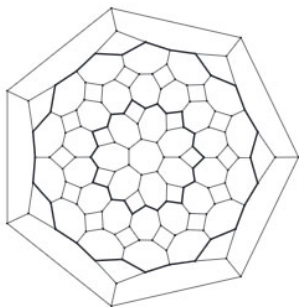
**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Из рис.12.1 ясно, что такие сферы существуют. Мы покажем, что их бесконечно много.

Рассмотрим следующую полосу из 4- и 7-угольников.



Левый и правый концы полосы могут быть соединены так, что получится кольцо с четырнадцатью 4-угольниками.

Это кольцо можно вставить на место одной из линий разреза, изображенных ниже, и в результате получится  $(\{4, 7\}, 3)$ -сфера, снова обладающая свойством  $4R_0$  и имеющая на 84 вершины больше, чем исходная сфера.



Ясно, что такую операцию можно повторять снова и снова. ■



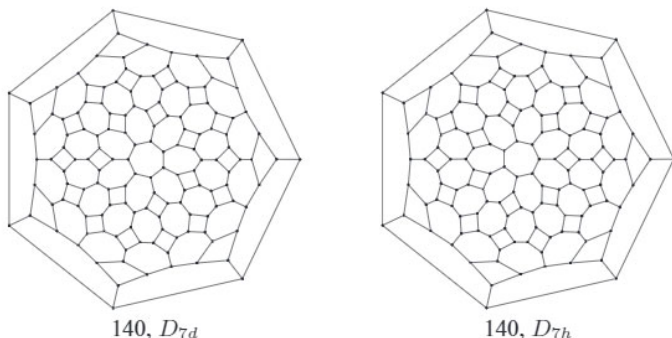


Рис. 12.1. Первые члены двух бесконечных серий  $(\{4, 7\}, 3)$ -сфер со свойством  $4R_0$  (см. теорему 12.1.2)

## 12.2. Карты со свойством $4R_1$

**Теорема 12.2.1.** Пусть  $(\{4, b\}, 3)$ -сфера или тор  $G$  обладает свойством  $4R_1$ . Тогда:

- (i)  $b \leq 10$ ;
- (ii) если  $b = 7, 8, 9$  и  $G$  является сферой, то она имеет не менее 32, 48, 108 вершин;
- (iii) если  $b = 10$ , то  $G$  — тор, и он также обладает свойством  $10R_4$  (т. е. это случай 16 из таблицы 9.3).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** (i) Для  $(\{4, b\}, 3)$ -карт со свойством  $4R_1$  формула Эйлера имеет вид  $6\chi = 2p_4 - (b-6)p_b$ , где  $\chi = 2$  для сфер и 0 для торов.

Получаем, что  $p_4 = 3\chi + \frac{b-6}{2}p_b$ .

Каждая пара соседних 4-угольников порождает пару соседних 4-угольников, встречающихся в виде участка  $b44b$  в коронах  $b$ -угольников, и пару изолированных 4-угольников, входящих в корону  $b$ -угольников внутри участков вида  $b4b$ . Таким образом, имеется  $p_4$  участков вида  $b44b$  и  $p_4$  участков вида  $b4b$  в множестве корон  $b$ -угольных граней рассматриваемой карты. Следовательно, имеет место неравенство

$$2p_4 + 3p_b \leq bp_b,$$

которое можно записать в более простом виде:  $30\chi \leq (30-3b)p_b$ . Поскольку  $\chi \geq 0$ , то  $b \leq 10$ .

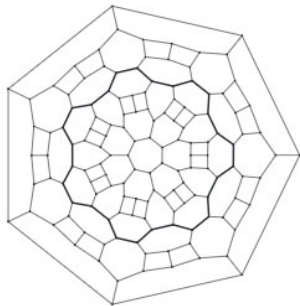
(ii) Если  $G$  — сфера, то  $\chi = 2$ . Тогда из записанного выше неравенства при  $b = 7, 8, 9$  следует, что  $p_b \geq \frac{20}{3}, 10, 20$  соответственно. Из соображений четности получаем неравенства  $p_b \geq 8, 10, 20$  и оценки снизу на число вершин величиной 32, 48, 108 соответственно.

(iii) Для  $(\{4, 10\}, 3)$ -карты со свойством  $4R_1$  наше неравенство имеет вид  $30\chi \leq 0$ , откуда  $\chi = 0$ , т. е.  $G$  является тором и  $2p_4 + 3p_3 = 10p_{10}$ . Но это означает, что в короне 10-угольников не встречается участок вида  $10^2$ . Следовательно, их короны имеют вид  $\alpha_1 \dots \alpha_r$ , где  $\alpha_i$  равно либо 10.4, либо  $10.4^2$ . Для данной 10-угольной грани  $F$  обозначим через  $y_2$  и  $y_3$  количество  $\alpha_i$ , равных 10.4 и  $10.4^2$  соответственно. Очевидно, что  $2y_2 + 3y_3 = 10$ , откуда  $(y_2, y_3) = (5, 0)$  или  $(2, 2)$ . Следовательно, в любом случае  $y_3 \leq y_2$ . Но мы знаем, что в среднем по всем 10-угольным граням  $y_3 = y_2$ ; это возможно только в том случае, если  $y_2 = y_3$  для каждой 10-угольной грани. Следовательно, данный тор обладает свойством  $10R_4$ . ■

Нижняя оценка на число вершин  $(\{4, b\}, 3)$ -сфер достигается только при  $b = 8$  (см. рис. 12.2, 12.3, 12.5 и теорему 12.2.4).

**Теорема 12.2.2.** *Существует бесконечно много  $(\{4, 7\}, 3)$ -сфер со свойством  $4R_1$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Доказательство основано на построении следующего начального примера с 140 вершинами и группой симметрии  $D_{7d}$ .



Мы будем делать разрез по выделенному пути и вставлять следующую структуру, состоящую из 7 элементарных частей.



Очевидно, что в результате получается  $(\{4, 7\}, 3)$ -сфера, которая снова обладает свойством  $4R_1$ , и что эту операцию можно повторять. ■

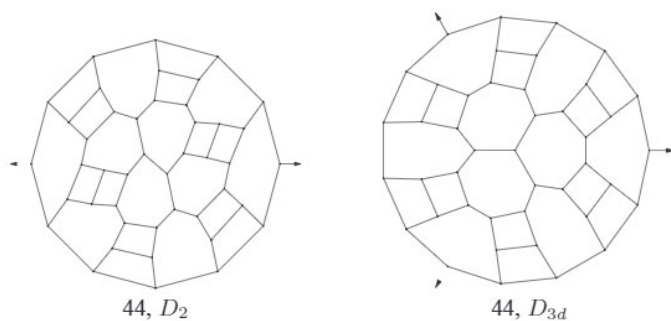


Рис. 12.2. Две самые маленькие  $(\{4, 7\}, 3)$ -сферы со свойством  $4R_1$

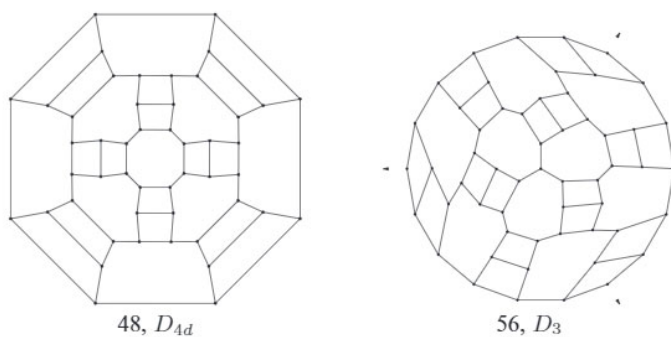


Рис. 12.3. Две  $(\{4, 8\}, 3)$ -сферы со свойством  $4R_1$

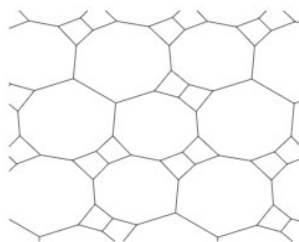


Рис. 12.4. Пример  $(\{4, 9\}, 3)$ -тора со свойством  $4R_1$

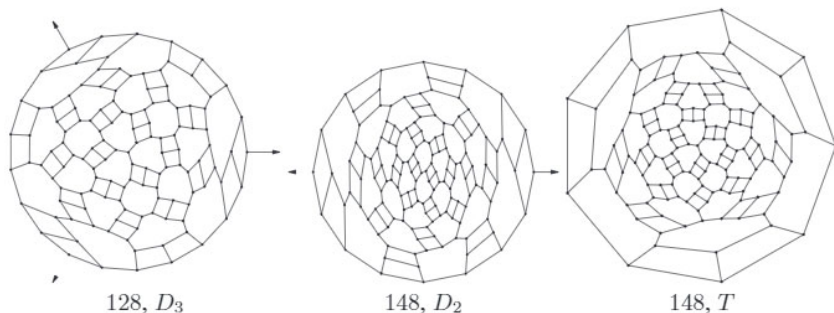
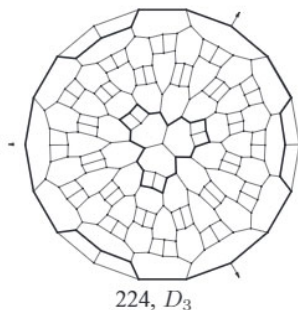


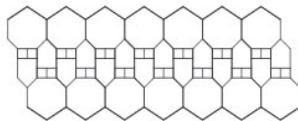
Рис. 12.5. Некоторые из  $(\{4, 9\}, 3)$ -сфер, обладающих свойством  $4R_1$

**Теорема 12.2.3.** *Существует бесконечно много  $(\{4, 8\}, 3)$ -сфер со свойством  $4R_1$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Мы строим следующий пример  $(\{4, 8\}, 3)$ -сферы со свойством  $4R_1$ :



Идея состоит в том, чтобы сделать разрез по линии, выделенной на рисунке, и вставить следующую полосу:



Очевидно, что эту операцию можно повторять. ■

Существуют  $(\{4, 9\}, 3)$ -горы, обладающие свойством  $4R_1$ , см. пример на рис. 12.4, для этого примера  $(v, p_4, p_9) = (20, 6, 4)$ .

Рассмотрим произвольную  $(\{4, 9\}, 3)$ -сферу  $G$  со свойством  $4R_1$  и заменим каждую пару соседних 4-угольников на одно ребро. Получается *редуцированная сфера*, которую обозначают через  $Red(G)$ . Эта сфера снова является 3-валентной. Множество пар соседних 4-угольников в  $G$  переходит при этом в множество ребер  $\mathcal{ES}(G)$  в карте  $Red(G)$ , которое имеет следующие свойства.

- 1) Это *паросочетание*, т. е. ни одна вершина не принадлежит более чем одному ребру из  $\mathcal{ES}(G)$ .
- 2) Для каждой грани  $F$  в карте  $G$  обозначим через  $h(F)$  число ребер в  $\mathcal{ES}(G)$ , инцидентных некоторой вершине из  $F$  (такие ребра содержат либо целое ребро, либо только одну вершину из  $F$ ). Имеет место соотношение  $h(F) + l(F) = 9$ , где через  $l(F)$  обозначена степень грани  $F$ .

Если некоторое подмножество ребер плоского графа обладает перечисленными свойствами, то мы называем его *особым  $(\{4, 9\}, 3)$ -паросочетанием*.

### Теорема 12.2.4.

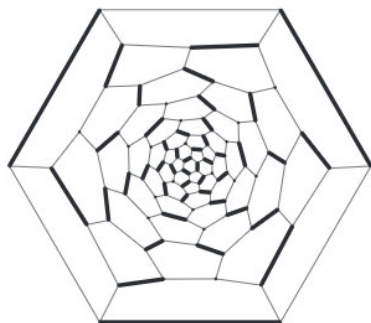
- (i) Если  $G$  —  $(\{4, 9\}, 3)$ -сфера, обладающая свойством  $4R_1$  и имеющая  $v$  вершин, а  $G' = Red(G)$ , то  $v = \frac{5}{2}v' + 18$ .
- (ii) Наименьшая  $(\{4, 9\}, 3)$ -сфера со свойством  $4R_1$  — это изображенная на рис. 12.5 карта с 128 вершинами.
- (iii) Существует бесконечно много  $(\{4, 9\}, 3)$ -сфер со свойством  $4R_1$ .

**Доказательство.** (i) Рассмотрим  $(\{4, 9\}, 3)$ -сферу, обладающую свойством  $4R_1$  и имеющую  $v$  вершин. Имеют место соотношения  $3v = 4p_4 + 9p_9$  и  $2p_4 - 3p_9 = 12$ . Количество пар соседних 4-угольников равно  $\frac{p_4}{2}$ . Сфера  $Red(G)$  имеет  $v' = v - 2p_4$  вершин. Легко получить, что  $v' = 2p_9 - 4$  и  $v = 8 + 5p_9$ , откуда и следует требуемый результат.

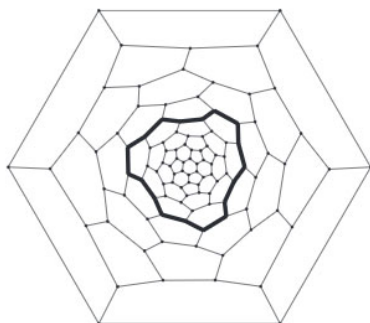
(ii) Рассмотрим  $(\{4, 9\}, 3)$ -сферу со свойством  $4R_1$  и редуцированную сферу  $Red(G)$ , которая будет  $(\{5, 6, 7, 8, 9\}, 3)$ -сферой. Мы перебрали  $(\{5, 6, 7, 8, 9\}, 3)$ -сферы с не более чем 44 вершинами и в каждой из них искали особое  $(\{4, 9\}, 3)$ -паросочетание. Мы обнаружили только один граф с 44 вершинами, являющийся  $(\{5, 6\}, 3)$ -сферой и имеющий единственное особое  $(\{4, 9\}, 3)$ -паросочетание. Он соответствует  $(\{4, 9\}, 3)$ -сфере со свойством  $4R_1$ , и из части (i) следует, что она является наименьшей.



(iii) Рассмотрим следующую  $(\{5, 6\}, 3)$ -сферу с особым  $(\{4, 9\}, 3)$ -паросочетанием:

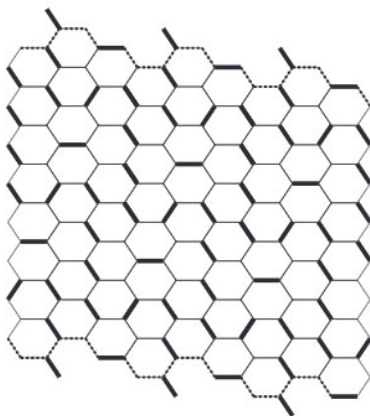


Особое  $(\{4, 9\}, 3)$ -паросочетание



Линия разреза

Разрежем эту сферу вдоль отмеченной линии и вставим на ее место следующую структуру:



Легко видеть, что в результате снова получается  $(\{5, 6\}, 3)$ -сфера, имеющая особое  $(\{4, 9\}, 3)$ -паросочетание. Более того, эту операцию можно повторять сколь угодно много раз. ■

Хотя правильность приведенного выше доказательства очень легко проверить, интересен и способ, с помощью которого удалось получить пример. Во-первых, давайте ограничимся рассмотрением фуллеренов. Во-вторых, будем искать пример только среди цилиндрических структур, поскольку практически все полученные до сих пор бесконечные серии имели

такой вид. Далее, ограничим поиск на фуллерены с группой симметрии  $D_3$ , поскольку это наиболее симметричный случай. После этого, чтобы еще сократить поиск, мы можем потребовать, чтобы наше особое  $(\{4, 9\}, 3)$ -паросочетание было *эквивариантным*, т.е. имело ту же группу симметрии, что и сам фуллерен. Мы нашли изображенный выше фуллерен с особым  $(\{4, 9\}, 3)$ -паросочетанием, выбрали линию разреза и рассмотрели задачу поиска возможной структуры для вставки как задачу поиска фуллерена на торе. Мы нашли 14 различных возможных структур и выбрали наиболее симметричную.

Поиск особых  $(\{4, 9\}, 3)$ -паросочетаний в фуллеренах приводит к  $(\{4, 9\}, 3)$ -сферам:

- 1) одна с 128 вершинами и группой симметрии  $D_3$ ,
- 2) две с 148 вершинами и группами симметрии  $(1, D_2)$  и  $(1, T)$ ,
- 3) 10 с 168 вершинами  $((5, C_2)$  и  $(5, D_3))$ ,
- 4) 23 с 188 вершинами  $((9, C_1), (10, C_2), (3, D_2)$  и  $(1, D_3))$ ,
- 5) 66 с 208 вершинами  $((44, C_1), (19, C_2), (2, C_3)$  и  $(1, C_s))$ .

### 12.3. Карты, обладающие свойством $4R_2$

Ниже в теореме 12.3.1 приведены необходимые условия существования  $(\{4, b\}, 3)$ -сфер и торов со свойством  $4R_2$ . Существование бесконечного числа  $(\{4, b\}, 3)$ -сфер со свойством  $4R_2$  для  $b = 6 - 13, 15$  доказано в теоремах 10.3.1, 12.3.2, 12.3.3, 12.3.4, 12.3.5, 12.3.6, 12.3.7, 12.3.8 и 12.3.9. Из существования  $(\{4, b\}, 3)$ -торов со свойствами  $4R_2$  и  $bR_6$  при  $b = 8, 10, 12, 14, 16$  и 18, очевидно, следует существование  $(\{4, b\}, 3)$ -торов со свойством  $4R_2$  для этих значений (см. таблицу 9.3). При  $b = 7, 9, 11, 13, 15$  существование  $(\{4, b\}, 3)$ -торов  $4R_2$  доказано в теоремах 12.3.2, 12.3.4, 12.3.6, 12.3.8 и 12.3.9.

#### Теорема 12.3.1.

- (i)  $(\{4, b\}, 3)$ -тор со свойством  $4R_2$  существует только при  $b = 7 - 16, 18$ . При  $b = 14, 16, 18$  такие торы являются строго регулярными.
- (ii)  $(\{4, b\}, 3)$ -сфера со свойством  $4R_2$ , отличная от призмы  $Prism_b$ , существует только при  $b = 6 - 13, 15$ . Число вершин такой сферы должно быть равно как минимум 20 (при  $b = 7$ ), 32 (при  $b = 8$ ),

28 (при  $b = 9$ ), 44 (при  $b = 10$ ), 92 (при  $b = 11$ ), 56 (при  $b = 12$ ), 116 (при  $b = 13$ ), 140 (при  $b = 15$ ). Если сфера имеет указанное минимальное число вершин, то она строго регулярна.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Поскольку мы исключаем случай призмы  $Prism_b$ , цикл из 4-угольников невозможен как в случае (i), так и в случае (ii). Следовательно, каждый 4-угольник входит в некоторый фрагмент  $\{4, 3\} - v$ , т.е. в тройку 4-угольников с общей вершиной. Обозначим через  $n_t$  количество таких троек. Имеет место соотношение  $p_4 = 3n_t$ . Далее, подсчет числа ребер двумя способами дает неравенство

$$6n_t = e_{4-b} \leq p_b 2 \left\lfloor \frac{b}{3} \right\rfloor.$$

Формула Эйлера (1.1) имеет вид  $6\chi = 2p_4 - (b-6)p_b$ , где  $\chi$  равно 2 для сферы и 0 для тора. Таким образом, получаем

$$6\chi = 2p_4 - (b-6)p_b \leq p_b \Psi(b), \quad \text{где} \quad \Psi(b) = 2 \left\lfloor \frac{b}{3} \right\rfloor - (b-6).$$

Функция  $\Psi$  удовлетворяет условиям:

- $\Psi(b) > 0$  при  $b \in \{6, \dots, 13, 15\}$ ;
- $\Psi(b) = 0$  при  $b = 14, 16, 18$ ;
- $\Psi(b) < 0$  при  $b = 17$  и при  $b \geq 19$ .

Если  $\Psi(b) < 0$ , то ни сфера, ни тор существовать не могут. Если  $\Psi(b) = 0$ , то  $\chi = 0$ . Кроме того, все  $b$ -угольные грани должны иметь ровно  $2 \left\lfloor \frac{b}{3} \right\rfloor$  соседних 4-угольников, т.е. тор является строго регулярным.

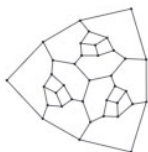
Если  $\Psi(b) > 0$ , то выполняется неравенство  $p_b \geq \frac{6\chi}{\Psi(b)}$ , которое и дает заявленные нижние оценки. ■

Операция  $(\{4, 3\} - v)$ -замены множества  $S$  вершин карты  $G$  состоит в замене каждой вершины из  $S$  на  $(4, 3)$ -полицикл  $\{4, 3\} - v$ .

### Теорема 12.3.2.

- (i) Каждая  $(\{4, 7\}, 3)$ -карта может быть получена из некоторой  $(\{5, 7\}, 3)$ -карты в результате  $(\{4, 3\} - v)$ -замены некоторого множества вершин  $S$  такого, что каждый 5-угольник инцидентен ровно одной вершине из  $S$ .

- (ii) Существует  $(\{4, 7\}, 3)$ -тор со свойством  $4R_2$ .
- (iii) Из каждой  $(\{4, 7\}, 3)$ -сферы со свойством  $4R_2$  и  $v$  вершинами можно получить  $(\{4, 7\}, 3)$ -сферу со свойством  $4R_2$  и  $(v + 36)$  вершинами, заменив центральную вершину некоторой тройки следующей структурой:



- (iv) Существует бесконечно много  $(\{4, 7\}, 3)$ -сфер со свойством  $4R_2$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** (i) Рассмотрим некоторую  $(\{4, 7\}, 3)$ -карту и заменим каждый  $(4, 3)$ -полицикл  $\{4, 3\} - v$  на вершину. В результате получится карта, состоящая из 3-, 5- и 7-угольников. Нам нужно доказать, что 3-угольники в ней встречаться не могут. Действительно, если бы нашелся 3-угольник, то в исходной карте должен был быть 7-угольник, инцидентный двум  $(4, 3)$ -полициклам  $\{4, 3\} - v$ . Тогда один из соседних 7-угольников также должен иметь общие ребра с обеими тройками  $\{4, 3\} - v$ . Отсюда следует, что два эти 7-угольника имеют две общие соседние 7-угольные грани, обозначим их через  $F_1$  и  $F_2$ . Каждая из этих двух граней инцидентна одному  $(4, 3)$ -полициклу  $\{4, 3\} - v$ . Мы получаем противоречие, поскольку грани  $F_1$  и  $F_2$  ограничивают 2-угольник.

(ii) Нам уже известно, что существует  $(\{5, 7\}, 3)$ -тор со свойством  $7R_4$ , в котором 5-угольники сгруппированы в тройки (см. раздел 9.3, случай 18). Таким образом, мы можем применить операцию из части (i) и получить нужный нам тор.

Часть (iii) очевидна, а часть (iv) получается последовательным применением операции из части (iii). ■

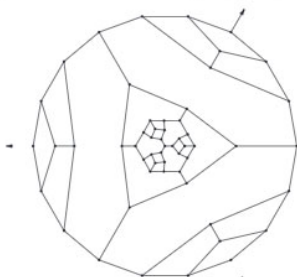
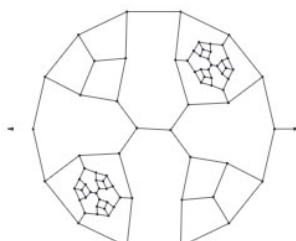
**Теорема 12.3.3.** Существует бесконечно много  $(\{4, 8\}, 3)$ -сфер со свойством  $4R_2$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Возьмем  $(4, 3)$ -полицикл  $\{4, 3\} - v$  и добавим вокруг него  $2t$  колец по три 6-угольника в каждом. Затем соединим ребрами три вершины степени 2 с одной новой вершиной (тем самым образуется еще один  $(4, 3)$ -полицикл  $\{4, 3\} - v$ ). Мы получаем 3-валентный плоский граф  $G$ , содержащий две тройки из 4-угольников. Чтобы теперь получить

$(\{4, 8\}, 3)$ -сферу со свойством  $4R_2$ , нужно найти подмножество вершин  $S$  такое, что:

- каждый 4-угольник инцидентен ровно двум вершинам из  $S$  и
- каждый 6-угольник инцидентен ровно одной вершине из  $S$ .

Сначала в качестве элементов  $S$  мы берем те вершины карты  $G$ , которые инцидентны ровно одному 4-угольнику из  $G$ . Затем нам нужно найти вершины, инцидентные этим трем 6-угольникам и покрывающие остальные 6-угольники. Легко увидеть, что это возможно.

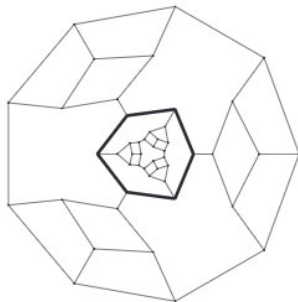
56,  $D_{3d}$ 80,  $C_{2h}$ 

На рисунке выше изображены первые примеры из этой бесконечной серии. ■

#### Теорема 12.3.4.

- Существует бесконечно много  $(\{4, 9\}, 3)$ -сфер со свойством  $4R_2$ .
- Существует  $(\{4, 9\}, 3)$ -тор со свойством  $4R_2$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Возьмем следующий граф,





разрежем его вдоль выделенных ребер и вставим следующую структуру,



причем выделенные вершины заменим на тройки  $(\{4, 3\} - v)$ . Эту операцию, очевидно, можно повторять, поэтому получается бесконечная серия.

(ii) Структурой, изображенной на рисунке выше в части (i), можно замостить плоскость. При факторизации этого замощения получается требуемый тор. ■

**Теорема 12.3.5.** *Существует бесконечно много  $(\{4, 10\}, 3)$ -сфер со свойством  $4R_2$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим следующую  $(\{4, 10\}, 3)$ -сферу со свойством  $4R_2$



и вдоль разреза по выделенным ребрам вставим следующую структуру,

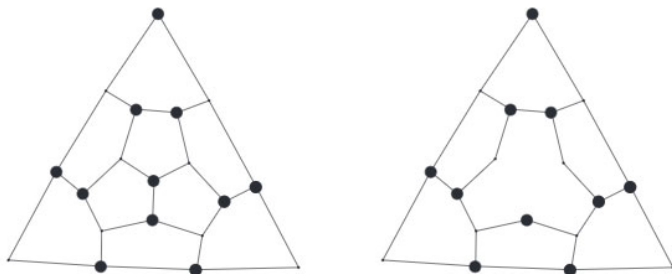


где выделенные вершины заменяются на тройки  $\{4, 3\} - v$ . При повторении этой операции получается требуемая бесконечная серия. ■

**Теорема 12.3.6.**

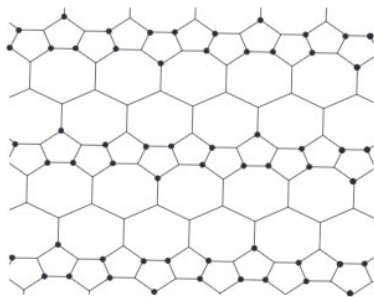
- (i) Существует бесконечно много  $(\{4, 11\}, 3)$ -сфер со свойством  $4R_2$ .  
 (ii) Существует  $(\{4, 11\}, 3)$ -тор со свойством  $4R_2$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** (i) Мы используем бесконечные семейства  $(\{5, 7\}, 3)$ -сфер со свойством  $7R_4$ , которые были построены в теореме 17.2.2. В этих полициклах 5-угольники сгруппированы в два полицикла  $A_3$  и ленты (длины 6). Для  $(\{4, 3\} - v)$ -замены выберем множество вершин  $S$  следующим образом.

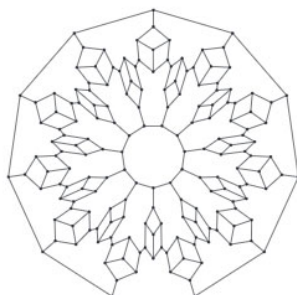


Таким образом, здесь каждый 5-, 7-угольник инцидентен трем, двум вершинам в  $S$  соответственно. Это означает, что при выполнении  $(\{4, 3\} - v)$ -замены получится  $(\{4, 11\}, 3)$ -сфера со свойством  $4R_2$ . Поскольку серия в теореме 17.2.2 бесконечна, то и здесь получается бесконечная серия.

- (ii) На рисунке ниже изображен  $(\{5, 7\}, 3)$ -тор.

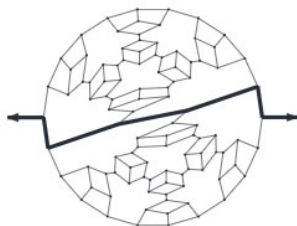


При  $(\{4, 3\} - v)$ -замене выделенных вершин получится  $(\{4, 11\}, 3)$ -тор со свойством  $4R_2$ . ■

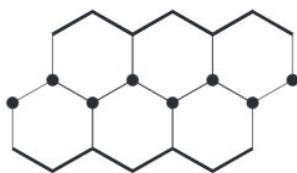
176,  $D_{11d}$ Рис. 12.6.  $(\{4, 11\}, 3)$ -сфера со свойством  $4R_2$ **Теорема 12.3.7.**

- (i) Существует бесконечно много  $(\{4, 12\}, 3)$ -сфер со свойством  $4R_2$ .
- (ii) Существует  $(\{4, 12\}, 3)$ -сфера со свойством  $4R_2$  с группой симметрии  $O$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Возьмем следующую  $(\{4, 12\}, 3)$ -сферу со свойством  $4R_2$



и вставим вдоль выделенной линии разреза следующую структуру,



где выделенные вершины подвергаются  $(\{4, 3\} - v)$ -замене. Повторением этой операции мы получаем бесконечную серию сфер требуемого вида.

(ii) Рассмотрим  $GC_{2,1}(Cube)$ , т. е. № 26, и заменим на тройки вершины, инцидентные хотя бы одному 4-угольнику или оси симметрии 3-го порядка.

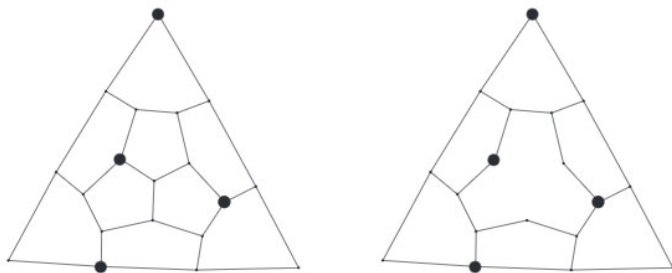


### Теорема 12.3.8.

- (i) Существует бесконечно много  $(\{4, 13\}, 3)$ -сфер со свойством  $4R_2$ .
- (ii) Существует  $(\{4, 11\}, 3)$ -тор со свойством  $4R_2$ .

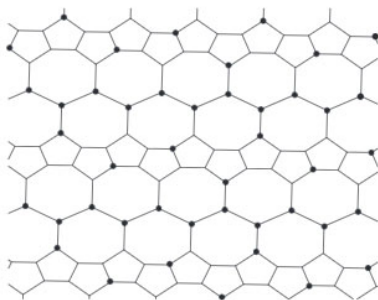
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Здесь мы используем бесконечные серии  $(\{5, 7\}, 3)$ -сфер со свойством  $7R_4$ , построенные в теореме 17.2.2. Так же, как в теореме 12.3.6, мы выберем некоторое множество вершин  $S$  и сделаем  $(\{4, 3\} - v)$ -замену. Нужно, чтобы каждая пятиугольная грань была инцидентна 4 вершинам из  $S$ , а каждая семиугольная грань была инцидентна 3 вершинам из  $S$ . Здесь будет удобнее говорить о дополнении  $\bar{S} = \{1, \dots, v\} - S$ , где  $v$  — число вершин данного плоского графа.

В этих графах 5-угольники сгруппированы в два полицикла  $A_3$  и полосы длины 6. Все 7-угольники образуют две серии параллельных колец длины 3. Существует простой зигзаг, разделяющий эти два кольца. Включим все эти вершины в  $\bar{S}$ . Вершины 5-угольников отметим следующим образом:



Таким образом, каждый 5- или 7-угольник инцидентен одной или четырьмя вершинами из множества  $\bar{S}$  соответственно. Это означает, что после  $(\{4, 3\} - v)$ -замены на множестве  $S$  получится  $(\{4, 13\}, 3)$ -сфера со свойством  $4R_2$ . Из бесконечности серии в теореме 17.2.2 следует, что и здесь получится бесконечная серия.

(ii) На рисунке ниже изображен  $(\{5, 7\}, 3)$ -тор.



После  $(\{4, 3\} - v)$ -замены не выделенных жирным вершин получится  $(\{4, 13\}, 3)$ -тор со свойством  $4R_2$ . ■

### Теорема 12.3.9.

- (i) Из любой  $(\{5, 7\}, 3)$ -карты со свойством  $7R_4$ , в которой 7-угольники имеют короны  $7^4 5^3$ , можно получить  $(\{4, 15\}, 3)$ -карту со свойством  $4R_2$ , выполнив  $(\{4, 3\} - v)$ -замену всех вершин, инцидентных пяти-угольным граням.
- (ii) Существует  $(\{4, 15\}, 3)$ -тор со свойством  $4R_2$ .
- (iii) Существует бесконечно много  $(\{4, 15\}, 3)$ -сфер со свойством  $4R_2$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для доказательства части (i) достаточно рассмотреть локальную структуру.

(ii) Рассмотрим  $(\{5, 7\}, 3)$ -тор, обладающий свойствами  $5R_2$  и  $7R_4$  (существует единственный такой тор), и применим операцию из (i).

(iii) Требуемая бесконечная серия получается применением операции из (i) из  $(\{5, 7\}, 3)$ -сфер, построенных в теореме 17.2.2. ■

### Теорема 12.3.10.

- (i) Если  $G$  —  $(\{4, 11\}, 3)$ -сфера со свойством  $4R_2$ , отличная от  $Prism_{11}$ , то она может быть получена в результате  $(\{4, 3\} - v)$ -замены некоторого множества вершин  $S$  в некотором 3-валентном плоском графе  $G'$ . Причем граф  $G'$  содержит  $-4 + 12x$  вершин, граф  $G$  содержит  $8 + 42x$  вершин, множество  $S$  содержит  $2 + 5x$  вершин,  $x \geq 1$ .
- (ii) Если  $G$  —  $(\{4, 13\}, 3)$ -сфера со свойством  $4R_2$ , отличная от  $Prism_{13}$ , то она может быть получена в результате  $(\{4, 3\} - v)$ -замены



*некоторого множества  $S$  в некотором 3-валентном плоском графе  $G'$ . Причем граф  $G'$  содержит  $-4 + 12x$  вершин, граф  $G$  содержит  $8 + 54x$  вершин, множество  $S$  содержит  $2 + 7x$  вершин,  $x \geq 1$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем только часть (i), поскольку доказательство части (ii) очень похоже. Обозначим через  $n_1$  число вершин в  $G'$ , которые не подвергаются  $(\{4, 3\} - v)$ -замене, а через  $n_2$  — число вершин в  $G'$ , которые такой замене подвергаются. Тогда  $p_4 = 3n_2$  и  $-5p_{11} + 2p_4 = 12$ . Обозначим через  $v$  число вершин графа  $G$ . Тогда  $v = n_1 + 7n_2$  и  $3v = 11p_{11} + 4p_4$ . Исключая из этих уравнений неизвестные  $p_{11}$ ,  $v$  и  $p_4$ , получаем соотношение  $n_1 = \frac{7n_2 - 44}{5}$ . Таким образом, величина  $n_2$  может быть записана в виде  $2 + 5x$ , где  $x \in \mathbb{Z}$ . Отсюда следует, что  $n_1 = 7x - 6$ ,  $v = 8 + 42x$  и  $n_1 + n_2 = -4 + 12x$ . ■

Последняя теорема дает следующий алгоритм построения  $(\{4, 11\}, 3)$ -сфер со свойством  $4R_2$ .

- 1) Берем 3-валентный граф, грани которого имеют степень 5, 7, 8, 9 и 11.
- 2) Делаем полный перебор множеств вершин  $S$  для  $(\{4, 3\} - v)$ -замены таких, что каждая 5-, 7-, 9- и 11-угольная грань инцидентна соответственно 3, 2, 1 и 0 вершинам из  $S$ .

Если рассмотреть все 3-валентные плоские графы  $G'$  с не более чем  $12m - 4$  вершинами, и для каждого из них провести полный перебор, то получится полный список  $(\{4, 11\}, 3)$ -сфер с не более чем  $42m + 8$  вершинами.

То же самое можно проделать для  $(\{5, 13\}, 3)$ -сфер. Но в этом случае в множество  $S$  для  $(\{4, 3\} - v)$ -замены входят более половины вершин. Поэтому с вычислительной точки зрения при переборе удобнее рассматривать дополнение  $\bar{S}$ .

Можно перечислить все  $(\{5, 7, 9, 11\}, 3)$ -сферы, имеющие не более чем 56 вершин. В результате полного перебора мы получили 87 сфер. Это означает, что получен полный список  $(\{4, 11\}, 3)$ -сфер со свойством  $4R_2$ , имеющих не более чем 218 вершин. Все эти сферы, за исключением строго регулярных, имеют 176 вершин. По группам симметрии они распределяются следующим образом:  $(38, C_1)$ ,  $(31, C_2)$ ,  $(4, C_{2h})$ ,  $(1, C_3)$ ,  $(10, C_i)$ ,  $(2, C_s)$  и  $(1, D_{11d})$ . Если мы ограничимся рассмотрением  $(\{5, 7\}, 3)$ -сфер, то полный список можно получить вплоть до 68 вершин. В результате полного перебора мы нашли 27276 графов, которые распределяются по группам симметрии следующим образом:  $(26299, C_1)$ ,  $(895, C_2)$ ,  $(3, C_{2h})$ ,  $(1, C_{2\nu})$ ,  $(9, C_3)$ ,  $(16, C_i)$ ,  $(28, C_s)$ ,  $(16, D_2)$ ,  $(8, D_3)$  и  $(1, S_4)$ .

Далее,  $(\{5, 7, 9, 11, 13\}, 3)$ -сферы тоже могут быть перечислены вплоть до 56 вершин. В результате полного перебора мы обнаружили 12 сфер. Это означает, что получен полный список  $(\{4, 13\}, 3)$ -сфер со свойством  $4R_2$ , имеющих не более 278 вершин. Все эти сферы, за исключением двух строго регулярных, имеют 224 вершины. Распределение по группам симметрии выглядит следующим образом:  $(3, C_1)$ ,  $(4, C_2)$ ,  $(2, C_i)$ ,  $(2, D_3)$  и  $(1, S_6)$ . Если мы ограничимся рассмотрением  $(\{5, 7\}, 3)$ -сфер, то полный список можно получить вплоть до 68 вершин. В результате полного перебора мы нашли 805 графов, которые распределяются по группам симметрии следующим образом:  $(707, C_1)$ ,  $(86, C_2)$ ,  $(4, C_3)$ ,  $(1, C_s)$ ,  $(3, D_2)$  и  $(4, D_3)$ .

## 12.4. Карты, обладающие свойством $5R_2$

### Теорема 12.4.1.

- (i) Если  $(\{5, b\}, 3)$ -сфера обладает свойством  $5R_2$ , то  $b = 7$ .
- (ii) Если  $(\{5, b\}, 3)$ -тор обладает свойством  $5R_2$ , то  $b = 7$  или 8.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Из формулы Эйлера в теореме 13.1.1 (iii) следует соотношение:

$$(6 - b)(x_0 + x_3) + (8 - b)p_5 = 4b\chi,$$

где  $\chi$  равно 2 и 0 соответственно для сферы и тора.

Если  $b > 8$ , то получается противоречие. Если  $b = 8$ , то  $-2(x_0 + x_3) = 2\chi$ , откуда  $\chi = 0$  (т. е. это тор) и  $x_0 = x_3 = 0$ . ■

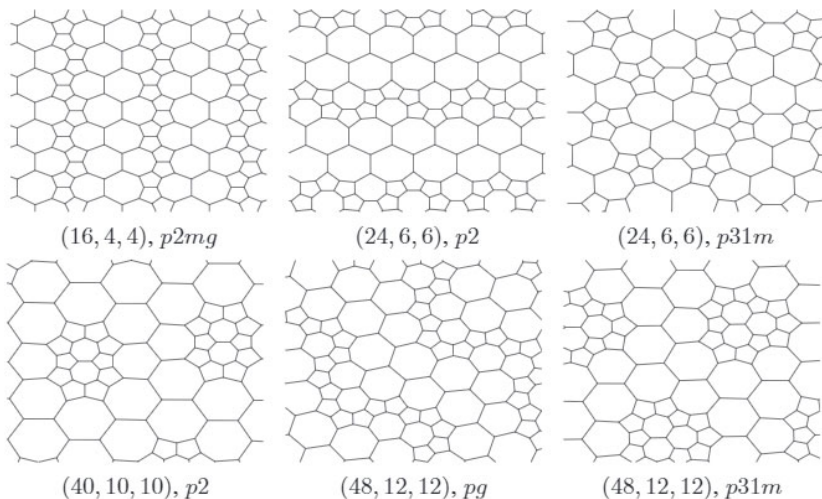
Отметим, что бесконечное число  $(\{5, 7\}, 3)$ -сфер со свойством  $5R_2$  было построено в [HKS07]. В теореме 15.2.1 доказывается, что  $(\{5, 8\}, 3)$ -тор обладает свойством  $5R_2$ , если и только если он обладает свойством  $8R_2$ .

На рис. 12.7 и 17.15 изображены некоторые  $(\{5, 7\}, 3)$ -торы со свойством  $5R_2$  и  $7R_4$  соответственно.

## 12.5. Карты, обладающие свойством $5R_3$

Ключевым результатом в этом разделе является следующая простая теорема.

**Теорема 12.5.1.** Множество пятиугольных граней всякой  $(\{5, b\}, 3)$ -карты со свойством  $5R_3$  разбивается на полициклы вида  $E_1$  и  $E_2$ .

Рис. 12.7. Некоторые  $(\{5, 7\}, 3)$ -торы со свойством  $5R_2$ 

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим  $(\{5, b\}, 3)$ -карту со свойством  $5R_3$  и некоторый 5-угольник  $F$  в этой карте. Грань  $F$  граничит с 5-угольниками либо по трем последовательным ребрам, либо по двум соседним ребрам и одному изолированному ребру. Первый случай соответствует полициклу  $E_2$ , а во втором случае может получиться либо  $E_1$ , либо  $E_2$ . ■

В этом разделе через  $n_1$  и  $n_2$  мы будем обозначать количество  $(5, 3)$ -полициклов  $E_1$  и  $E_2$ .

**Теорема 12.5.2.** Пусть  $G$  —  $(\{5, b\}, 3)$ -тор, обладающий свойством  $5R_3$ ; тогда:

- (i)  $b \leq 12$ ;
- (ii) если  $b = 12$ , то этот тор также обладает свойством  $12R_0$ ;
- (iii) если  $b = 11$ , то этот тор также обладает свойством  $11R_1$ .

Пусть  $G$  —  $(\{5, b\}, 3)$ -сфера, обладающая свойством  $5R_3$ ; тогда:

- (i)  $b \leq 10$ ;
- (ii) если  $b = 7$ , то таких сфер всего две — они изображены на рис. 12.8.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Доказательство состоит из трех лемм, приведенных ниже. ■

**Лемма 12.5.3.**

- (i) При  $b > 12$  не существует  $(\{5, b\}, 3)$ -торов со свойством  $5R_3$ ; при  $b = 12$  все такие торы обладают свойством  $12R_0$ .
- (ii) Существует единственная  $(\{5, 12\}, 3)$ -плоскость со свойствами  $5R_3$  и  $12R_0$ ; она изображена на рис. 9.5, случай 23.
- (iii) При  $b \geq 12$  не существует  $(\{5, b\}, 3)$ -сфер со свойством  $5R_3$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Начнем с более простого случая тора (i). В первых, выполняется соотношение  $p_5 = 3n_1 + 4n_2$ . Кроме того, по формуле Эйлера,  $p_5 = (b - 6)p_b$ , откуда получаем

$$e = 3(b - 5)p_b = 3 \frac{b - 5}{b - 6} p_5.$$

Прямым подсчетом получаются соотношения

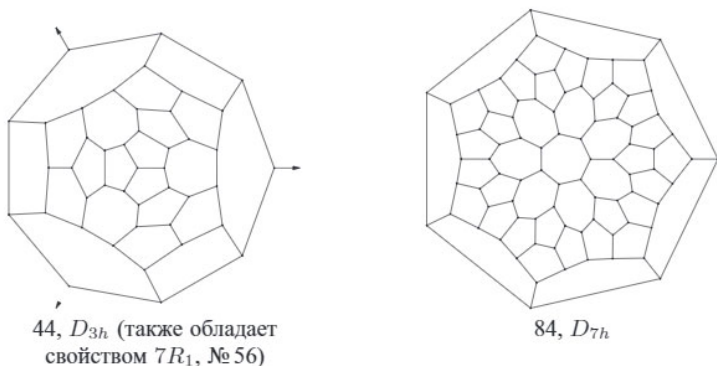
$$e_{5-5} = \left(3 + \frac{3}{2}\right) n_1 + 6n_2 \quad \text{и} \quad e_{5-b} = 6n_1 + 8n_2.$$

Далее

$$\begin{aligned} e_{b-b} &= 3 \frac{b-5}{b-6} (3n_1 + 4n_2) - \left( \left(3 + \frac{3}{2}\right) n_1 + 6n_2 \right) - (6n_1 + 8n_2) = \\ &= \left( \frac{9(b-5)}{b-6} - \left(9 + \frac{3}{2}\right) \right) n_1 + \left( \frac{12(b-5)}{b-6} - 14 \right) n_2 = \\ &= \frac{18 - \frac{3}{2}b}{b-6} n_1 + \frac{24 - 2b}{b-6} n_2 = \frac{12-b}{b-6} \left\{ \frac{3}{2} n_1 + 2n_2 \right\}. \end{aligned}$$

Если  $b > 12$ , то  $e_{b-b} = n_2 = n_1 = 0$ , что невозможно. Если  $b = 12$ , то  $e_{12-12} = 0$ , т. е. тор обладает свойством  $12R_0$ .

Для доказательства утверждения (ii) рассмотрим произвольную  $(\{5, 12\}, 3)$ -плоскость со свойствами  $5R_3$  и  $12R_0$ . Заметим, что 5-угольники не могут образовывать  $(5, 3)$ -полицикл  $E_2$ , так как это привело бы к наличию двух соседних 12-угольников. Следовательно, каждый 12-угольник окружен шестью  $(5, 3)$ -полициклами  $E_1$ , а главный остов, образованный

Рис. 12.8. Все  $(\{5, 7\}, 3)$ -сферы, обладающие свойством  $5R_3$ 

$(5, 3)$ -полициклами  $E_1$ , является 3-валентным графом с шестиугольными гранями; это паркет  $\{6, 3\}$ . Таким образом, карта  $G$  — это плоскость, изображенная на рис. 9.5.

Доказательство утверждения (iii) повторяет, с небольшими поправками, рассуждение из части (i). Сначала мы получаем  $p_5 = 12 + (b - 6)p_b$ , затем

$$e = 3 \left( 10 + (b - 5) \frac{p_5 - 12}{b - 6} \right) \quad \text{и} \quad v = 2 \left( 10 + (b - 5) \frac{p_5 - 12}{b - 6} \right)$$

и, наконец

$$e_{b-b} = \left( 30 - 36 \frac{b - 5}{b - 6} \right) + \frac{12 - b}{b - 6} \left( \frac{3}{2} n_1 + 2n_2 \right).$$

Если  $b \geq 12$ , то число  $e_{b-b}$  оказывается отрицательным, что невозможно. ■

#### Лемма 12.5.4.

- (i) *Всякий  $(\{5, 11\}, 3)$ -тор, обладающий свойством  $5R_3$ , обладает и свойством  $11R_1$ .*
- (ii) *Существует единственная  $(\{5, 11\}, 3)$ -плоскость со свойствами  $5R_3$  и  $11R_1$  — это изображенный на рис. 9.5 случай 22.*
- (iii) *Не существует  $(\{5, 11\}, 3)$ -сфер со свойством  $5R_3$ .*



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Корона 11-угольника в  $(\{5, 11\}, 3)$ -карте со свойством  $5R_3$  может иметь один из нижеперечисленных шести типов.

Тип 1	$E_1 E_2 (11\text{-угольник}) E_2 E_1 E_1$
Тип 2	$E_1 E_2 (11\text{-угольник})^3 E_2 E_1$
Тип 3	$E_1 E_2 (11\text{-угольник})^5 E_2$
Тип 4	$E_2 (11\text{-угольник}) E_2 E_2 (11\text{-угольник})^2 E_2$
Тип 5	$E_2 (11\text{-угольник})^7 E_2$
Тип 6	$(11\text{-угольник})^{11}$

Будем обозначать через  $p_{11,i}$ , где  $1 \leq i \leq 6$ , число 11-угольных граней типа  $i$ .

В случае тора (i) рассмотрим число  $x_i$  вершин, содержащихся ровно в  $i$   $b$ -угольных гранях. Тогда очевидно, что

$$x_0 = n_1 + 2n_2, \quad x_1 = 6n_1 + 6n_2 \quad \text{и} \quad x_2 = 2n_2.$$

число вершин нашего тора равно  $2 \frac{b-5}{b-6} (3n_1 + 4n_2)$ . Отсюда получаем

$$\begin{aligned} x_3 &= 2 \frac{6}{5} (3n_1 + 4n_2) - (n_1 + 2n_2) - (6n_1 + 6n_2) - 2n_2 = \\ &= \left( \frac{36}{5} - 7 \right) n_1 + \left( 8 \frac{6}{5} - 10 \right) n_2 = \frac{1}{5} n_1 - \frac{2}{5} n_2. \end{aligned}$$

Далее, прямым вычислением получаем

$$\begin{cases} 3x_3 = 2p_{11,2} + 4p_{11,3} + p_{11,4} + 6p_{11,5} + 11p_{11,6}, \\ 3n_1 = 3p_{11,1} + 2p_{11,2} + p_{11,3}, \\ 4n_2 = 2p_{11,1} + 2p_{11,2} + 2p_{11,3} + 4p_{11,4} + 2p_{11,5}. \end{cases}$$

Из предыдущих уравнений следует, что

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{2}{3} p_{11,2} + \frac{4}{3} p_{11,3} + \frac{1}{3} p_{11,4} + 2p_{11,5} + \frac{11}{3} p_{11,6}, \\ \frac{1}{5} n_1 - \frac{2}{5} n_2 &= -\frac{1}{15} p_{11,2} - \frac{2}{15} p_{11,3} - \frac{2}{5} p_{11,4} - \frac{1}{5} p_{11,5}, \end{aligned}$$

откуда, очевидно, вытекают соотношения  $p_{11,2} = p_{11,3} = p_{11,4} = p_{11,5} = p_{11,6} = 0$ . Таким образом, утверждение (i) выполняется.

Для доказательства утверждения (ii) рассмотрим произвольную  $(\{5, 11\}, 3)$ -плоскость  $G$ , обладающую свойствами  $5R_3$  и  $11R_1$ . Ясно, что

здесь 5-угольники могут быть только типа 1. Рассмотрим теперь 3-валентную плоскость  $\tilde{G}$ , в которой в качестве вершин берутся  $(5, 3)$ -полициклы  $E_1$  карты  $G$ , причем два полицикла  $E_1$  считаются соседними, если у них есть общее ребро или если они соединены некоторым  $(5, 3)$ -полициклом  $E_2$ . Тогда  $\tilde{G}$  — 3-валентная плоская карта с шестиугольными гранями, т.е. это  $\{6, 3\}$ . Каждая пара соседних 11-угольников ограничит с шестью  $(5, 3)$ -полициклами  $E_1$  и двумя  $(5, 3)$ -полициклами  $E_2$ . Эти два полицикла  $E_2$  соответствуют противоположным сторонам 6-угольников в разбиении  $\{6, 3\}$ . Множество всех таких ребер представляет собой семейство параллельных ребер в  $\{6, 3\}$ ; паркет  $\{6, 3\}$  имеет три таких семейства параллельных ребер, но все они изоморфны. Таким образом, единственная  $(\{5, 11\}, 3)$ -плоскость  $G$  — это карта, изображенная на рис. 9.5.

В случае сфер из утверждения (iii) имеем

$$x_3 = 2 \left( 10 + 6 \frac{p_5 - 12}{5} \right) - x_0 - x_1 - x_2 = \frac{-22}{5} + \frac{1}{5} n_1 - \frac{2}{5} n_2.$$

Используя выражения для  $x_3$ ,  $n_1$  и  $n_2$  через  $p_{11,i}$ , получаем равенство

$$x_3 = -\frac{22}{5} - \frac{1}{15} p_{11,2} - \frac{2}{15} p_{11,3} - \frac{2}{5} p_{11,4} - \frac{1}{5} p_{11,5},$$

т.е.  $x_3$  должно быть отрицательно — получаем противоречие. ■

### Лемма 12.5.5.

- (i) Если  $(\{5, 7\}, 3)$ -сфера обладает свойством  $5R_3$ , то это одна из двух сфер, изображенных на рис. 12.8.
- (ii) Не существует  $(\{5, 7\}, 3)$ -торов со свойством  $5R_3$ .

**Доказательство.** По аналогии с предыдущей леммой множество семиугольных граней можно разбить на нижеперечисленные типы.

Тип 1	$E_1 E_2 (7\text{-угольник}) E_2$
Тип 2	$E_2 (7\text{-угольник})^3 E_2$
Тип 3	$(7\text{-угольник})^7$

Предположим, что некоторая сфера содержит грань типа 1; тогда эта грань обязательно имеет соседнюю грань того же типа 1. Эти две грани ограничены четырьмя  $(5, 3)$ -полициклами: двумя вида  $E_1$  и двумя вида  $E_2$ .

Каждый из двух  $(5, 3)$ -полициклов  $E_1$  имеет две вершины степени 2. Поскольку полицикл  $E_1$  граничит только с 7-угольниками типа 1, у нас есть только один способ заполнить эту структуру, а именно, добавлять грани типа 1. Таким образом, в результате получается строго регулярная сфера.

Теперь предположим, что граней типа 1 нет; тогда  $n_1 = 0$ . Значит, все встречающиеся  $(5, 3)$ -полициклы имеют вид  $E_2$ . Эти полициклы граничат с 7-угольниками по двое; следовательно, на сфере они образуют циклы. Поскольку это  $(\{5, 7\}, 3)$ -сфера, то в ней должен существовать хотя бы один  $(7, 3)$ -полицикл, окруженный кольцом из  $(5, 3)$ -полициклов  $E_2$ ; обозначим этот полицикл через  $P'_7$ .

Из вида  $(5, 3)$ -полицикла  $E_2$  мы заключаем, что граничный код полицикла  $P'_7$  равен  $(32^3)^h$  для некоторого  $h$ . Если удалить из этой границы 7-угольники, то получится граничный код  $2^h$ , т. е. простой  $h$ -угольник. Следовательно,  $h = 7$ . Аналогичное рассуждение мы проводим с другой стороны этой структуры и получаем вторую  $(\{5, 7\}, 3)$ -сферу со свойством  $5R_3$ .

Заодно приведенное выше доказательство показывает, что не существует ни одного  $(\{5, 7\}, 3)$ -тора, обладающего свойством  $5R_3$ . ■

**Теорема 12.5.6.** *Если  $(\{5, 6\}, 3)$ -сфера обладает свойством  $5R_3$ , то это либо №45, либо №46.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим  $(\{5, 6\}, 3)$ -сферу (т. е. фуллерен)  $G$  со свойством  $5R_3$ . Каждый 6-угольник в этой сфере либо граничит с двумя  $(5, 3)$ -полициклами  $E_2$ , либо граничит с тремя  $(5, 3)$ -полициклами  $E_1$ , либо не граничит с  $(5, 3)$ -полициклами вообще. Сфера  $G$  содержит хотя бы один 6-угольник, имеющий пятиугольного соседа. Если этот 6-угольник граничит с двумя  $(5, 3)$ -полициклами  $E_2$ , то это №46. Если он граничит с тремя  $(5, 3)$ -полициклами  $E_1$ , то это №45. ■

Теперь рассмотрим для  $b = 8, 9, 10$  все  $(\{5, b\}, 3)$ -карты, обладающие свойством  $5R_3$ . Множество пятиугольных граней таких карт допускает разбиение на  $(5, 3)$ -полициклы  $E_1$  и  $E_2$ . В полицикле  $E_1$  есть два открытых ребра, а в полицикле  $E_2$  — три открытых ребра. Если рассмотреть граф, образованный всеми этими полициклами, то в нем будут 2- и 3-валентные вершины. Этот граф необязательно связный. Его связные компоненты (т. е.  $(b, 3)_{gen}$ -полициклы, образованные  $b$ -угольниками гранями) окружены 5-угольниками по границе (возможно, состоящей из нескольких компонент). Мы получим некоторые классификационные результаты для этих  $(b, 3)_{gen}$ -полициклов в том случае, когда они являются  $(b, 3)$ -полициклами. Это позволит нам получить некоторые приме-

ры  $(\{5, 8\}, 3)$ -карт со свойством  $5R_3$  и  $(\{5, 10\}, 3)$ -карт со свойством  $5R_3$ . Кроме того, мы получим полную классификацию  $(\{5, 9\}, 3)$ -сфер и торов со свойством  $5R_3$ .

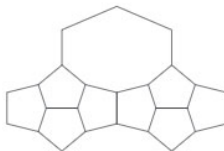
Известно (см. [DDS08] и главу 5), что  $(b, 3)$ -граничный код конечно-го  $(b, 3)$ -полицикла вообще говоря не определяет его однозначно; тем не менее, этого не может случиться для полициклов, рассматриваемых в данном разделе, и мы будем использовать  $(b, 3)$ -граничный код в качестве обозначения для рассматриваемых  $(b, 3)$ -полициклов.

Рассмотрим такой  $(b, 3)$ -полицикл; он окружен элементарными  $(5, 3)$ -полициклами  $E_1$  и  $E_2$ , что мы символически записываем в виде  $E_1 E_2^{n_1} \dots E_1 E_2^{n_u}$ . Этот *символьный код*, состоящий из  $E_1$  и  $E_2$ , соответствует следующему граничному коду:

$$b(n_1, \dots, n_u) = 22(2232)^{n_1} \dots 22(2232)^{n_u}.$$

**Теорема 12.5.7.** *Существует единственная  $(\{5, 8\}, 3)$ -плоскость, обладающая свойствами  $5R_3$  и  $8R_4$  — это изображенный на рис. 9.5 случай 20.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Каждый 8-угольник на такой плоскости должен граничить с четырьмя 5-угольниками, следовательно, с двумя  $(5, 3)$ -полициклами  $E_1$  и  $E_2$ . Если среди них есть  $E_1$ , то этот 8-угольник граничит как минимум с тремя  $(5, 3)$ -полициклами  $E_1$  и  $E_2$ . Значит,  $E_1$  среди них быть не может и окрестность 8-угольника имеет следующий вид:



Это означает, что плоскость определяется однозначно и имеет вид, изображенный на рис. 9.5. ■

**Лемма 12.5.8.** (случай  $(8, 3)$ )

(i) Рассмотрим символьный код  $(n_1, \dots, n_u)$ .

— Если  $n_i = 0, 1$  или  $2$  для некоторого  $i$ , то граничный код  $b(n_1, \dots, n_u)$  является  $(8, 3)$ -заполняемым, если и только если  $(n_1, \dots, n_u)$  равно  $(0, 0, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 1)$  или  $(2, 2, 2)$  соответственно.



- Если  $n_i \geq 3$  для всех  $i$ , то граничный код  $b(n_1, \dots, n_u)$  является  $(8, 3)$ -заполняемым, если и только если граничный код

$$22(23)^{x_1} \dots 22(23)^{x_u}, \quad \text{где } x_i = n_i - 3,$$

является  $(8, 3)$ -заполняемым.

- (ii) Для любого фиксированного  $u$  существует конечное число символьных кодов  $(n_1, \dots, n_u)$  таких, что граничный код  $b(n_1, \dots, n_u)$  является  $(8, 3)$ -заполняемым. С точностью до изоморфизма, при  $u \leq 11$  возможные варианты образуют следующий нижеприведенный список.

$u$	Символьный код	$p_8$
3	(1, 1, 1) и (2, 2, 2)	3 и 6
4	(0, 0, 0, 0) и (3, 3, 3, 3)	1 и 13
6	(3, 4, 3, 4, 3, 4)	24
8	(3, 4, 3, 5, 3, 4, 3, 5)	35
9	(3, 4, 4, 3, 4, 4, 3, 4, 4)	39
10	(3, 4, 3, 5, 3, 5, 3, 4, 3, 6)	46
11	(3, 4, 3, 5, 4, 3, 4, 4, 3, 4, 5)	50

- (iii) Граничный код  $b(n_1, \dots, n_u)$  является  $(8, 3)$ -заполняемым, если и только если граничный код  $b(3, 4^{n_1}, \dots, 3, 4^{n_u})$  является  $(8, 3)$ -заполняемым.
- (iv) Существует бесконечно много граничных кодов вида  $b(n_1, \dots, n_u)$ , которые являются  $(8, 3)$ -заполняемыми.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** (i) Ясно, что если некоторое  $n_i = 0$ , то единственный способ заполнить структуру состоит в получении изолированного 8-угольника, имеющего символьный код  $(0, 0, 0, 0)$ .

Таким образом, будем считать, что  $n_i \geq 1$ . Если  $n_i = 1$  для некоторого  $i$ , то существует единственный способ заполнить имеющуюся структуру, при этом получается тройка 8-угольников с символьным кодом  $(1, 1, 1)$ . Пусть теперь  $n_i \geq 2$ . Если  $n_i = 2$  для некоторого  $i$ , то существует единственный способ заполнить имеющуюся структуру, при этом получается шесть 8-угольников с символьным кодом  $(2, 2, 2)$ . Далее, пусть  $n_i \geq 3$ . Ясно, что множество граничных ребер, инцидентных 8-угольнику в возможном  $(8, 3)$ -заполнении, является или путем, или пустым множеством,



т.е. грань не может иметь с границей несколько общих участков. Следовательно, граничный код  $b(n_1, \dots, n_u)$  допускает  $(8, 3)$ -заполнение, если и только если такое заполнение допускает граничный код, полученный в результате вставки всех граней, инцидентных границе, т.е. код  $22(23)^{x_1}22(23)^{x_2} \dots 22(23)^{x_u}$  с  $x_i = n_i - 3$ .

(ii) Из теоремы 11.0.3 можно увидеть, что числа  $p_8$  и  $x$  (число 8-угольных граней и внутренних вершин возможного  $(8, 3)$ -заполнения) удовлетворяют равенствам

$$\begin{cases} p_8 = u - 3, \\ x = 2u - 8 - \sum_{i=1}^u x_i. \end{cases}$$

Следовательно, для фиксированного  $u$  величина  $x_i \leq 2u - 8$  фиксирована и возможно конечное число граничных кодов, следовательно, возможно конечное число  $(8, 3)$ -заполнений. После этого выполняется перебор на компьютере.

(iii) Возьмем исходный граничный код  $b(3, 4^{n_1}, 3, 4^{n_2}, \dots, 3, 4^{n_u})$  и выполним преобразование из второго пункта части (i). В результате получим граничный код  $b(n_1, \dots, n_u)$ .

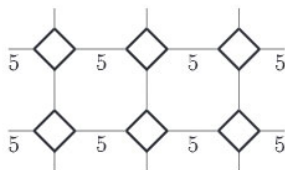
(iv) Используя преобразование из части (iii), можно из данного граничного кода  $b(n_1, \dots, n_u)$  получать другой код. Таким образом можно получить бесконечно много таких граничных кодов. ■

Приведенные выше факты наводят на мысль, что, вероятно, для каждого  $u \geq 4$  существует хотя бы один  $(8, 3)$ -заполняемый граничный код  $b(n_1, \dots, n_u)$ .

### Теорема 12.5.9.

- (i) Существует  $(\{5, 8\}, 3)$ -тор, обладающий свойством  $5R_3$ , но не обладающий свойством  $8R_4$ .
- (ii) Существует последовательность  $(F_i)_{i \geq 0}$  из  $(\{5, 8\}, 3)$ -сфер, обладающих свойством  $5R_3$  и имеющих  $1640 + 1152i$  вершин. Они имеют группу симметрии  $O_h$  при  $i = 0$  и  $D_{4h}$  — в остальных случаях.
- (iii) Существуют  $(\{5, 8\}, 3)$ -сферы со свойством  $5R_3$ , для которых  $(v, \text{Aut}(G))$  равны:  $(56, O_h)$ ,  $(92, T_d)$ ,  $(164, T_d)$ ,  $(488, O_h)$ ,  $(3944, C_{2\nu})$ ,  $(4196, T_d)$ ,  $(6248, D_{4h})$ .

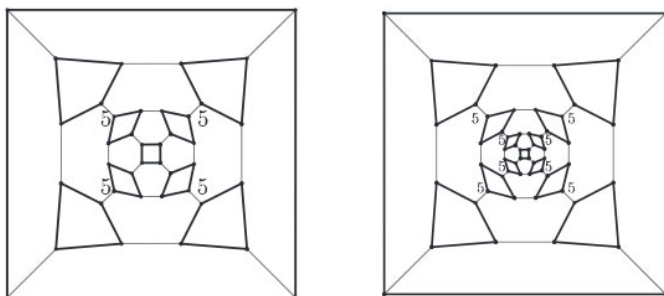
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Требуемый  $(\{5, 8\}, 3)$ -тор со свойством  $5R_3$  получается в результате склейки двух  $(8, 3)$ -полициклов с граничными кодами  $(3, 3, 3, 3)$  и  $(3, 4, 3, 5, 3, 4, 3, 5)$  следующим образом (см. ниже).



Значение 3 соответствует выделенным ребрам,  
остальные неотмеченные ребра соответствуют значению 4

Очевидно, что из этой конструкции получается требуемый тор.

(ii) Вариацией конструкции из (i) можно получить бесконечное число  $(\{5, 8\}, 3)$ -сфер со свойством  $5R_3$ . На этот раз мы рассмотрим символьные коды  $(3, 3, 3, 3)$ ,  $(3, 4, 3, 4, 3, 4)$  и  $(3, 4, 3, 5, 3, 4, 3, 5)$ . При  $i = 0$  мы рассмотрим усеченный октаэдр, имеющий группу симметрии  $O_h$ . При  $i = 1, 2$  мы выполним построение в соответствии со следующим рисунком (см. ниже).



Значения 3 или 4 приписываются (выделенным или невыделенным)  
неподписанным ребрам

При  $i \geq 3$  имеется очевидное обобщение.

(iii) Приведенные выше примеры  $(8, 3)$ -полициклов достаточно разнообразны, и это позволяет нам построить целый ряд примеров  $(\{5, 8\}, 3)$ -сфер со свойством  $5R_3$ . Чтобы задать такую сферу, мы приписываем ребрам некоторого 3-валентного плоского графа значения так, что для каждого контура, ограничивающего грань, код  $(n_1, \dots, n_t)$  является  $(8, 3)$ -заполняемым. Точнее, можно сделать следующее.

- 1) Возьмем куб и припишем код  $(0, 0, 0, 0)$  ребрам каждой грани. Получится № 58.
- 2) Возьмем тетраэдр и припишем ребрам каждой грани код  $(1, 1, 1)$ . Получится № 59.
- 3) Рассмотрим тетраэдр и припишем ребрам каждой грани код  $(2, 2, 2)$ . Получится  $(\{5, 8\}, 3)$ -сфера со свойством  $5R_3$  и группой симметрии  $T_d$ , имеющая 164 вершины.
- 4) Возьмем куб и припишем ребрам каждой грани код  $(3, 3, 3, 3)$ . Получится  $(\{5, 8\}, 3)$ -сфера со свойством  $5R_3$  и группой симметрии  $O_h$ , имеющая 488 вершин.
- 5) Рассмотрим три графа на рис. 12.9 с соответствующими значениями на их ребрах. Получим три  $(\{5, 8\}, 3)$ -сферы с 3 944, 4 196 и 6 248 вершинами.

На рис. 17.16 изображены некоторые примеры  $(\{5, 8\}, 3)$ -торов, которые обладают свойством  $8R_4$ , но не обладают свойством  $5R_3$ .

**Лемма 12.5.10.** (случай  $(9, 3)$ )

- (i) Рассмотрим символичный код  $(n_1, \dots, n_u)$ .

– Если  $n_i = 0$  для некоторого  $i$ , то граничный код  $b(n_1, \dots, n_u)$  является  $(9, 3)$ -заполняемым, если и только если  $(n_1, \dots, n_u) = (0, 1, 0, 1)$ .

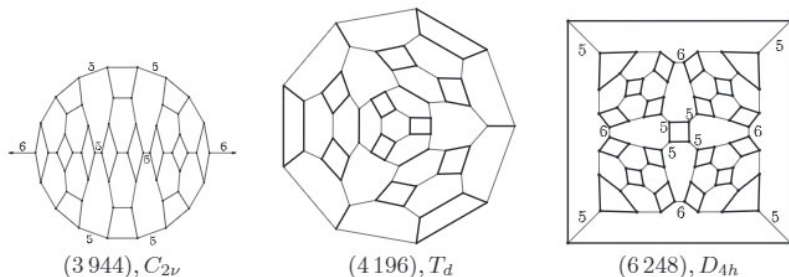


Рис. 12.9. Некоторые 3-валентные сферы, которые мы использовали в качестве остовов для  $(\{5, 8\}, 3)$ -сфер со свойством  $5R_3$ ; здесь выделенным ребрам приписано значение 3, а невыделенным неподписанным ребрам приписано значение 4

- Если  $n_i \geq 1$  для всех  $i$ , то граничный код  $b(n_1, \dots, n_u)$  является  $(9, 3)$ -заполняемым, если и только если граничный код

$$2(233)^{x_1} \dots 2(233)^{x_u}, \quad \text{где } x_i = n_i - 3,$$

является  $(9, 3)$ -заполняемым.

- (ii) Для любого фиксированного  $u$  существует конечное число символьных кодов  $(n_1, \dots, n_u)$  таких, что граничный код  $b(n_1, \dots, n_u)$  является  $(9, 3)$ -заполняемым. С точностью до изоморфизма, при  $u \leq 30$  существует всего два таких кода:

$u$	символьный код	$p_9$
4	$(0, 1, 0, 1)$	2
9	$(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$	10

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Если  $n_i = 0$ , то граничный код содержит хотя бы семь последовательных двоек. Чтобы быть заполняемым, он должен содержать ровно семь последовательных двоек. Тогда, очевидно, возможен только один вариант  $(n_1, \dots, n_u) = (0, 1, 0, 1)$ .

Если  $n_i \geq 1$ , то так же, как в случае  $(8, 3)$ -полициклов, грань, прилегающая к границе, имеет с границей только один общий участок. Следовательно, существует единственный способ добавления 9-угольников, прилегающих к границе, — они образуют кольцо. Это заполнение имеет следующий граничный код:

$$2(233)^{x_1} 2(233)^{x_2} \dots 2(233)^{x_u}, \quad \text{где } x_i = n_i - 1.$$

(ii) Из формулы Эйлера (см. 11.0.3) следует, что числа  $p_9$  и  $x$  (число 9-угольных граней и внутренних вершин возможного  $(9, 3)$ -заполнения) удовлетворяют равенствам

$$\begin{cases} p_9 = \frac{1}{3} \left( u - 6 - \sum_i x_i \right), \\ x = \frac{2}{3} \left( u - 9 - 4 \sum_i x_i \right). \end{cases}$$

Следовательно, для фиксированного  $u$  величина  $x_i \leq \frac{u-9}{4}$  фиксирована, и возможно лишь конечное число граничных кодов, т. е. возможно лишь конечное число  $(9, 3)$ -заполнений. После этого выполняется перебор на компьютере. ■

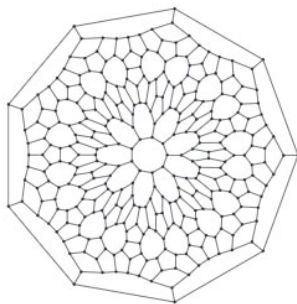
Кажется правдоподобным, что существует только два символических кода  $(n_1, \dots, n_u)$ , для которых код  $b(n_1, \dots, n_u)$  является  $(9, 3)$ -заполняемым, а именно  $(0, 1, 0, 1)$  и  $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ .

### Теорема 12.5.11.

- (i) Существует только одна  $(\{5, 9\}, 3)$ -сфера со свойством  $5R_3$ . Она имеет 486 вершин и группу симметрии  $D_{9h}$ ; она получается, если в призме  $Prism_9$  приписать значение 1 ребрам, входящим в 9-угольники, и значение 0 — остальным ребрам (см. рис. 12.10).
- (ii) Не существует  $(\{5, 9\}, 3)$ -торов со свойством  $5R_3$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Если в разбиении множества девятиугольных граней встречается  $(9, 3)$ -полицикл с граничным кодом  $b(0, 1, 0, 1)$ , то все доказано. Это так, поскольку ребро со значением 0 может принадлежать только  $(9, 3)$ -полициклу с граничным кодом  $b(0, 1, 0, 1)$ . Следовательно, возникает последовательность таких граней. Рассматривая соседние 9-угольники, можно заметить, что конструкция должна замыкаться, и тем самым получается требуемый граф.

(i) Рассмотрим такую сферу  $G$  и граф  $E_1(G)$ , множество вершин которого представляет собой множество  $(5, 3)$ -полициклов  $E_1$  карты  $G$ , а две вершины считаются соседними, если они соединены последовательностью  $(5, 3)$ -полициклов  $E_2$ . Граф  $E_1(G)$  можно рассматривать как сферу, правда, с тем исключением, что он необязательно является связным, т.е. граница некоторых «граней» карты  $E_1(G)$  состоит, возможно, из нескольких циклов. Обозначим через  $C_1, \dots, C_l$  компоненты связности графа  $E_1(G)$ , являющиеся плоскими графами в традиционном смысле, а через  $F_1, \dots, F_l$  —



486,  $D_{9h}$

Рис. 12.10. Единственная  $(\{5, 9\}, 3)$ -сфера, обладающая свойством  $5R_3$



грани  $E_1(G)$ , граница которых состоит из нескольких циклов. Обозначим через  $Conn(G)$  граф, вершинами которого являются все  $C_i$  и  $F_j$ , и в котором ребро соединяет  $C_i$  и  $F_j$ , если существует цикл, принадлежащий и  $C_i$ , и  $F_j$ . Поскольку  $G$  является сферой, то  $Conn(G)$  — дерево. Следовательно, в нем есть хотя бы одна вершина степени не больше 1.

Если эта вершина имеет степень 0, то это означает, что  $E_1(G)$  связан. Обозначим через  $p_i$  число  $i$ -угольных граней в  $E_1(G)$ . Из леммы 12.5.10 и формулы Эйлера следует, что не равняющиеся нулю могут только  $p_4$ ,  $p_9$  и  $p_i$  с  $i \geq 30$ . Таким образом, формула Эйлера (1.1)

$$2p_4 - 3p_9 - \sum_{i \geq 30} (i-6)p_i = 12$$

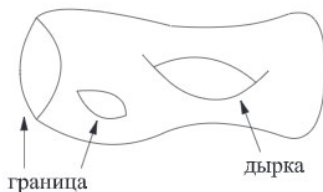
показывает, что  $p_4 > 0$ , откуда вытекает требуемое.

Предположим, что некоторая вершина, скажем,  $C_i$ , имеет степень 1. Связная компонента  $C_i$  граничит с гранью  $F_j$  по некоторому циклу длины  $h$ . Рассмотрим плоский граф, образованный только компонентой  $C_i$ . Среди его граней встречаются только 4-, 9- и  $i$ -угольники с  $i \geq 30$  и еще один  $h$ -угольник. В таком случае формула Эйлера имеет вид

$$(6-h) + 2p_4 - 3p_9 - \sum_{i \geq 30} (i-6)p_i = 12.$$

Отсюда вытекает, что  $p_4 > 0$ , что нам и требовалось.

(ii) Доказательство в случае тора проходит по тому же принципу, что и в случае сферы, но с некоторыми дополнительными усложнениями. Во-первых, мы уже в самом начале не можем исключить той возможности, что некоторые границы могут быть заполнены  $(9, 3)_{gen}$ -полициклами, как показано ниже.



Но если такое произошло, то есть два цикла, не гомологичных нулю. Мы рассмотрим граф  $Conn(G)$ , множество вершин которого состоит из связных компонент  $C_1, \dots, C_t$  графа  $E_1(G)$  и из «граней»  $F_1, \dots, F_s$ , имеющих по несколько граничных циклов. Граф  $Conn(G)$  должен быть

деревом, так как из существования цикла следовало бы, что размерность  $H_1(G)$  больше, чем 2. Таким образом, доказательство для случая сферы работает и здесь, поэтому у нас не может получиться тор.

Предположим теперь, что одна из карт в  $E_1(G)$  является тором. Тогда граф  $Conn(G)$  — дерево, и работает доказательство из случая сфер. Значит, это невозможно.

Теперь будем рассматривать случай, когда все связанные компоненты карты  $E_1(G)$  являются плоскими графами и множество 9-угольников разбито на  $(9, 3)_{gen}$ -полициклы, имеющие одну или несколько компонент границы. Граф  $Conn(G)$  уже не обязан быть деревом и информация о том, что это именно тор, сосредоточена в циклах графа  $Conn(G)$ .

Обозначим через  $DE(G)$  множество ориентированных ребер  $Conn(G)$ . Обозначим через  $V(G)$  векторное пространство с каноническим базисом  $(e_d)_{d \in DE(G)}$ . Для каждого цикла  $c$  в  $Conn(G)$  выберем некоторую ориентацию и обозначим через  $f(c)$  его образ в  $V(G)$ . Обозначим через  $H(G)$  векторное подпространство в  $V(G)$ , порожденное всеми циклами  $c$  из  $Conn(G)$ . Легко видеть, что размерность группы гомологий  $H_1(G)$  нашей карты  $G$  равна  $2 \dim(H(G))$ . Поскольку наша карта является тором, выполнено  $\dim(H(G)) = 1$ . Таким образом, в  $Conn(G)$  существует ровно один цикл.

Предположим, что в графе  $Conn(G)$  есть вершина степени 3 (являющаяся или компонентой  $C_i$ , или гранью  $F_j$ ), тогда существует вершина степени 1, которая должна представлять некоторую компоненту  $C_{i'}$ , и мы получаем противоречие тем же методом, что и в случае сфер. Значит, все вершины графа  $Conn(G)$  имеют степень 2. Это означает, что граф  $Conn(G)$  имеет вид

$$\dots - C_1 - F_1 - C_2 - \dots - C_t - F_t - C_1 - \dots$$

при некотором  $t$ .

Здесь каждая компонента  $C_i$  граничит с двумя гранями  $F_i$  и  $F_{i+1 \pmod t}$  по некоторым циклам длин  $l_i$  и  $k_i$  (длины равны числу  $(5, 3)$ -полициклов  $E_1$  в этих циклах). Формула Эйлера для плоского графа  $C_i$  имеет вид

$$(6 - l_i) + (6 - k_i) + 2p_4 - 3p_9 - \sum_{i \geq 30} (i - 6)p_i = 12$$

или, по-другому,

$$2p_4 = l_i + k_i + 3p_9 + \sum_{i \geq 30} (i - 6)p_i.$$

Если  $p_4 > 0$ , то имеется участок  $(0, 1, 0, 1)$ , и получается противоречие. Значит,  $p_4 = 0$ . Тогда  $l_i = k_i = 0$  и  $p_i = 0$ . Это означает, что  $C_i$  — это просто кольца из  $(5, 3)$ -полициклов  $E_2$ .

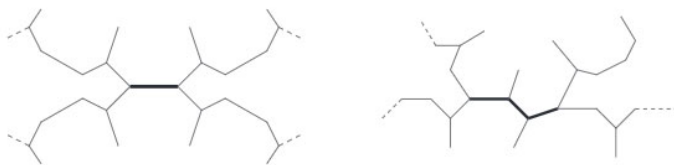
Теперь рассмотрим  $(9, 3)_{gen}$ -полициклы  $F_i$  с двумя компонентами границы, имеющими коды  $(2223)^{h_i}$  и  $(2223)^{g_i}$ . Так же, как и в случае  $(9, 3)$ -полициклов, существует единственный способ вставить грани, прилегающие к границе. Но наличие двух компонент границы создает дополнительные трудности, которые отсутствовали в случае  $(9, 3)$ -полициклов.

Мы будем действовать так же, как в случае  $(9, 3)$ -полициклов, имеющих границу вида  $b(\dots)$ : вставим грани, прилегающие к 5-угольникам. Первый случай возникает, если добавленные 9-угольные грани не имеют общего ребра. В этом случае  $(9, 3)_{gen}$ -полицикл, полученный в результате заполнения старой границы, имеет две компоненты границы вида  $(323)^{h_i}$  и  $(323)^{g_i}$ . Обозначим через  $p_9$  число внутренних 9-угольников, а через  $x$  — число внутренних вершин. Из теоремы 11.0.3 следует, что

$$\begin{cases} p_9 = \frac{v_2 - v_3}{3} = -\frac{h_i + k_i}{3}, \\ x = \frac{2v_2 - 5v_3}{3} = -\frac{8}{3}(h_i + k_i), \end{cases}$$

т. е. обе величины оказываются строго отрицательными, а это невозможно.

Во втором случае 9-угольники имеют общие ребра. Локально возможны следующие варианты:



Пусть  $p$  — число таких последовательностей общих ребер. Тогда задача заполнения  $(9, 3)_{gen}$ -полицикла с двумя границами сводится к задаче заполнения  $p$   $(9, 3)$ -полициклов, заданных их граничными кодами.

Эти граничные коды имеют вид  $(323)^{h_i} \alpha (323)^{k_i} \beta$ , где  $\alpha, \beta$  равны 223, 322 или 32223. Снова применяя теорему 11.0.3, получаем

$$\begin{cases} p_9 = \frac{v_2 - v_3}{3} - 2, \\ x = \frac{2v_2 - 5v_3}{3} - 6. \end{cases}$$

Из этих формул получаем

$$x = -\frac{8}{3}(h_i + k_i) + u_\alpha + u_\beta - 6,$$

где  $u_\alpha, u_\beta$  равны  $-\frac{1}{3}$  или  $-\frac{4}{3}$ , в зависимости от величины  $\alpha$  или  $\beta$ . В любом случае  $x < 0$ , что невозможно. Таким образом, не существует  $(\{5, 9\}, 3)$ -торов со свойством  $5R_3$ . ■

В случае  $b = 10$  известно с точностью до изоморфизма только три символьных кода  $(n_1, \dots, n_t)$ , для которых граничный код  $b(n_1, \dots, n_t)$  является  $(10, 3)$ -заполняемым:

$t$	символьный код	$p_{10}$
5	(0, 0, 0, 0, 0)	1
6	(0, 1, 0, 1, 0, 1)	3
9	(0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1)	6

Напомним, что единственной  $(\{5, 10\}, 3)$ -сферой со свойствами  $10R_j$  и  $5R_3$  является № 60.

**Теорема 12.5.12.** *Существует как минимум две  $(\{5, 10\}, 3)$ -сферы со свойством  $5R_3$ :*

- 1) сфера с 740 вершинами и группой симметрии  $I_h$ ;
- 2) сфера с 7940 вершинами и группой симметрии  $I_h$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Построение первого примера использует усеченный икосаэдр (являющийся наименьшей  $(\{5, 6\}, 3)$ -сферой с изолированными 5-угольниками): множество его ребер разбивается на  $(5 - 6)$ -ребра и  $(6 - 6)$ -ребра. Если приписать значение 0 ребрам первого рода и значение 1 ребрам второго рода, то все 5-угольники будут иметь символьную последовательность  $(0^5)$ , а все 6-угольники — символьную последовательность  $(0, 1, 0, 1, 0, 1)$ . Таким образом, получается сфера с 740 вершинами и группой симметрии  $I_h$ .

Для построения второго примера рассмотрим следующий  $(\{5, 6\}, 3)$ -полицикл:



Припишем выделенным ребрам значение 0, а остальным ребрам — значение 1 (этот граф изометричен подграфу усеченного икосаэдра). Если взять икосаэдр и заменить каждую 5-валентную вершину изображенным выше  $(\{5, 6\}, 3)$ -полициклом, а затем склеить по открытым ребрам со значением 0, то получится сфера с 5-, 6- и 9-угольными гранями. Девятиугольные грани будут иметь символьную последовательность  $(1, 0, 1)^3$ . Следовательно, структура может быть заполнена. ■

**Теорема 12.5.13.** *Существует единственная  $(\{5, 10\}, 3)$ -плоскость, обладающая свойствами  $5R_3$  и  $10R_2$ ; она изображена на рис. 9.5, случай 21.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Каждый 10-угольник на такой плоскости должен граничить с восемью 5-угольниками, т. е. с четырьмя  $(5, 3)$ -полициклами  $E_1$  и  $E_2$ . Ясно, что возможны только следующие два варианта короны 10-угольника:

тип 1	$E_2(10\text{-угольник})E_2E_2(10\text{-угольник})E_2$
тип 2	$E_1E_2(10\text{-угольник})^2E_2E_1$

Если встретился тип 2, то есть полицикл  $E_1$  и должна быть пара соседних полициклов  $E_1$  и  $E_2$ . «Ребро»  $E_1 - E_2$  инцидентно двум 10-угольникам, которые обязательно имеют тип 2. Таким образом, мы получаем последовательность из трех  $(5, 3)$ -полициклов  $E_1$ , которая не содержится ни в короне типа 1, ни в короне типа 2. Следовательно, корон типа 2 быть не может. Таким образом, все 10-угольники имеют тип 1 и образуют бесконечные цепочки или циклы. Каждая такая цепочка ограничена с двух сторон двумя одинаковыми цепочками. Следовательно, цикл из 10-угольников существовать не может, так как иначе в ограниченной области плоскости должно было бы быть бесконечно много граней. Значит, 10-угольники образуют бесконечные цепочки, что и изображено на рис. 9.5. ■

**Гипотеза 12.5.14.** *Всякий  $(\{5, 10\}, 3)$ -тор, обладающий свойством  $5R_3$ , также обладает свойством  $10R_2$ .*



## ГЛАВА 13

# Сферы и торы Франка–Каспера

Мы называем  $(\{5, b\}, 3)$ -картой Франка–Каспера всякую  $(\{5, b\}, 3)$ -сферу, обладающую свойством  $bR_0$  (в химии и кристаллографии многогранниками Франка–Каспера называют всего четыре многогранника, а именно, многогранники, двойственные ко всем четырем  $(\{5, 6\}, 3)$ -многогранникам, обладающим свойством  $6R_0$ ). Заметим, что при  $a \leq 4$  существует всего четыре ориентированные  $(\{a, b\}, 3)$ -карты, обладающие свойством  $bR_0$ , — это призма  $Prism_b$ , куб, тетраэдр и  $Bundle_3$ .

### 13.1. Формула Эйлера для $(\{a, b\}, 3)$ -карт, обладающих свойством $bR_0$

Напомним, что  $p_b$  — это число  $b$ -угольных граней карты, и для  $i = 0, 1, 2, 3$  через  $x_i$  будем обозначать число вершин, содержащихся ровно в  $i$   $a$ -угольных гранях.

**Теорема 13.1.1.** Пусть  $(\{a, b\}, 3)$ -сфера или тор  $P$  обладают свойством  $bR_0$ . Тогда

$$\begin{cases} (6-a)x_3 + (2(a-b) + (6-a)b)p_b = 4a & \text{для сферы,} \\ (6-a)x_3 + (2(a-b) + (6-a)b)p_b = 0 & \text{для тора.} \end{cases}$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Ясно, что  $v = x_0 + x_1 + x_2 + x_3$ .

Вычисляя число ребер  $e$  двумя способами, получаем

$$2e = 3v = bp_b + ap_a.$$

Формула Эйлера для ориентированной карты рода  $g$  имеет вид  $2 - 2g = v - e + p_a + p_b$ ; ее можно переписать в виде

$$2 - 2g = -\frac{v}{2} + p_a + p_b.$$

Исключая  $p_a$  из двух написанных выше уравнений, получаем

$$(6 - a)v - 2(2 - 2g)a = 2(b - a)p_b.$$

В нашем случае  $x_0 = x_1 = 0$  и  $x_2 = bp_b$ . Следовательно,  $(6 - a)x_3 - 2(2 - 2g)a = (2(b - a) - (6 - a)b)p_b$ . ■

Из этой формулы вытекает, что число  $(\{5, b\}, 3)$ -полициклов при  $b \leq 9$  конечно, но в следующем разделе мы увидим, что имеют место более общие теоремы конечности.

### 13.2. Главный остов, элементарные полициклы и классификационные результаты

Будем называть  $(5, 3)$ -полицикл 0-элементарным, если он элементарен и его граничный код имеет вид  $223^{q_1} \dots 223^{q_m}$ . Анализ списка элементарных конечных  $(5, 3)$ -полициклов (см. рис. 7.2) показывает, что существует ровно три 0-элементарных полицикла:  $E_1$ ,  $C_1$  и  $C_3$ .

Классификация  $(\{5, b\}, 3)$ -сфер Франка–Каспера может быть проведена с помощью разложения на элементарные полициклы, которое было описано в главе 7. Пусть дана некоторая  $(\{5, b\}, 3)$ -сфера Франка–Каспера  $G$ . Можно удалить все ее  $b$ -угольные грани. В результате получится  $(5, 3)_{gen}$ -полицикл. Этот  $(5, 3)_{gen}$ -полицикл разлагается на элементарные  $(5, 3)_{gen}$ -полициклы при разрезе вдоль мостов (определения этих понятий см. в главе 7). В этой главе мост — это ребро, концы которого содержатся в двух различных  $b$ -угольных гранях.

**Лемма 13.2.1.** *Рассмотрим  $(\{5, b\}, 3)$ -карту Франка–Каспера, отличную от курносой  $Prism_b$ . Тогда множество всех мостов, объединенное с множеством всех ребер, принадлежащих  $b$ -угольным граням, образует разложение пятиугольных граней на 0-элементарные  $(5, 3)$ -полициклы.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предположим, что некоторая  $b$ -угольная грань не соединяется ни с одним мостом. Это означает, что эта  $b$ -угольная грань окружена двумя концентрическими кольцами из 5-угольных граней, т. е. это курносая  $Prism_b$ . Значит, все  $(5, 3)_{gen}$ -полициклы, возникающие при разрезе вдоль мостов, являются  $(5, 3)$ -полициклами. Эти  $(5, 3)$ -полициклы обязательно будут 0-элементарными. ■

Теперь для данной карты Франка–Каспера рассмотрим карту, вершины которой — это составляющие исходную карту 0-элементарные  $(5, 3)$ -полициклы. Мосты и  $b$ -угольные грани исходной карты Франка–Каспера

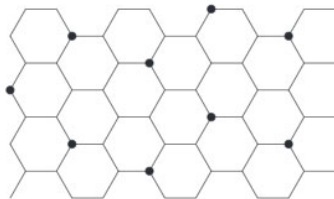
соответствуют ребрам и, соответственно, граням новой карты. Затем мы удаляем вершины степени 2 и получаем 3-валентную карту, которую будем называть *главным остовом*.

**Теорема 13.2.2.**

- (i)  $(\{5, b\}, 3)$ -торы со свойством  $bR_0$  существуют, если и только если  $b \geq 12$ .
- (ii) Всякий  $(\{5, 12\}, 3)$ -тор со свойством  $12R_0$  также обладает свойством  $5R_3$ .

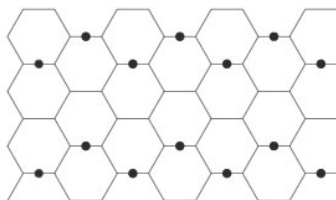
**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для доказательства существования  $(\{5, b\}, 3)$ -торов со свойством  $bR_0$  при  $b \geq 12$  достаточно построить пример периодической  $(\{5, b\}, 3)$ -плоскости со свойством  $bR_0$ .

Наш стандартный пример — это плоская графитовая решетка, или паркет  $\{6, 3\}$ , т. е. 3-валентное замощение плоскости шестиугольниками. Каждую вершину этого паркета можно заменить на 0-элементарный  $(5, 3)$ -полицикл — либо  $E_1$ , либо  $C_3$ . Если использовать только полицикл  $E_1$ , то получится  $(\{5, 12\}, 3)$ -плоскость со свойством  $12R_0$ . Чтобы получить  $(\{5, 13\}, 3)$ -плоскость, нужно вместо некоторых полициклов  $E_1$  использовать полициклы  $C_3$  так, чтобы каждый 6-угольник граничил ровно с одним полициклом  $C_3$ . Легко убедиться, что это возможно; ниже приведен соответствующий пример.



Более того, множества вершин графитовой решетки  $\{6, 3\}$  можно разбить на 6 орбит  $O_i$  так, что каждый 6-угольник содержит ровно одну вершину из каждой орбиты  $O_i$ . Следовательно, поместив  $C_3$  в вершины из орбит  $O_1, \dots, O_i$ , можно получить  $(\{5, 12 + i\}, 3)$ -плоскость со свойством  $(12 + i)R_0$ .

Если добавить  $(5, 3)$ -полицикл  $C_1$  на ребра графитовой решетки в соответствии с приведенным ниже рисунком,



то из  $(\{5, b\}, 3)$ -плоскости, полученной в результате предыдущей операции, мы получим  $(\{5, b + 5\}, 3)$ -плоскость, которая по-прежнему обладает свойством  $(b+5)R_0$ . Эту процедуру, очевидно, можно повторять; следовательно, доказано существование для всех  $b \geq 12$ .

Пусть  $b \leq 11$ . Степень грани в главном остове  $(\{5, b\}, 3)$ -плоскости равна числу  $(5, 3)$ -полициклов  $E_1$  и  $C_3$ , которым эта грань инцидентна. Ясно, что таких инцидентностей для каждой грани может быть не более пяти. Учитывая, что главный остов 3-валентен, приходим к противоречию с формулой Эйлера (1.1), значит, утверждение (i) верно.

(ii) Пусть дана  $(\{5, 12\}, 3)$ -плоскость  $M$ , обладающая свойством  $12R_0$ . Если  $F$  — ее 12-угольная грань, то она инцидентна некоторым 0-элементарным  $(5, 3)$ -полициклам. Ясно, что степень грани  $F$  в главном остове равна числу 0-элементарных  $(5, 3)$ -полициклов  $E_1$  и  $C_3$ , в которых она содержится. Следовательно, эта степень не превосходит 6. Но если в 3-валентном торе все грани имеют степень не более чем 6, то все его грани должны иметь степень ровно 6, т. е. все 12-угольные грани исходной карты граничат только с полициклами  $E_1$ . Существует только одна структура, удовлетворяющая этому условию; она обладает свойством  $5R_3$ . ■

### Теорема 13.2.3.

(i) При  $b \leq 11$  число  $(\{5, b\}, 3)$ -многогранников Франка – Каспера конечно; помимо додекаэдра, это:

- при  $b = 6$ : три классических примера,
- при  $b = 7$ : курносая  $Prism_7$ ,
- при  $b = 8$ : курносая  $Prism_8$  и строго регулярная карта № 58,
- при  $b = 9, 10$  и  $11$ : курносая  $Prism_b$  и карты, изображенные на рис. 13.1, 13.2 и 13.3 соответственно.

(ii) При  $b = 12$  (помимо додекаэдра и курносой призмы  $Prism_{12}$ ) имеются три отдельных сферы и одна бесконечная серия  $(FK_i)_{i \geq 0}$  с  $104 + 56i$  вершинами (группа симметрии равна  $O_h$  при  $i = 0$ ,  $D_{4d}$  при нечетных  $i$  и  $D_{4h}$  во всех остальных случаях), см. рис. 13.4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим  $(\{5, b\}, 3)$ -сферу  $G$ , где  $b \leq 11$ . Каждая грань главного остова инцидентна максимум пяти вершинам, соответствующим полициклам  $E_1$  и  $C_3$ . Следовательно, главный остов — это

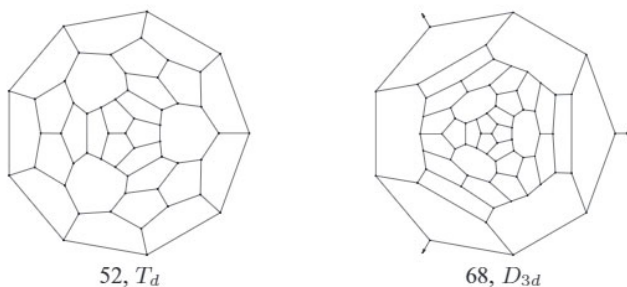


Рис. 13.1. Все регулярные  $(\{5, 9\}, 3)$ -сферы со свойством  $9R_0$ , за исключением додекаэдра и курносой  $Prism_9$

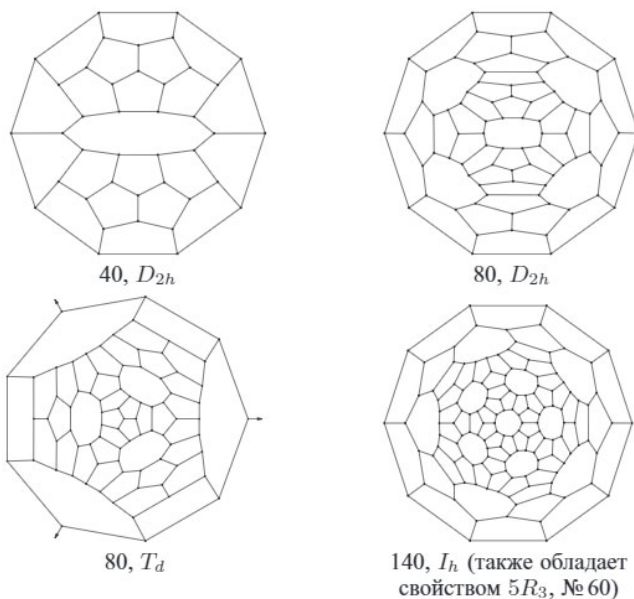


Рис. 13.2. Все регулярные  $(\{5, 10\}, 3)$ -сферы со свойством  $10R_0$ , за исключением додекаэдра и курносой  $Prism_{10}$



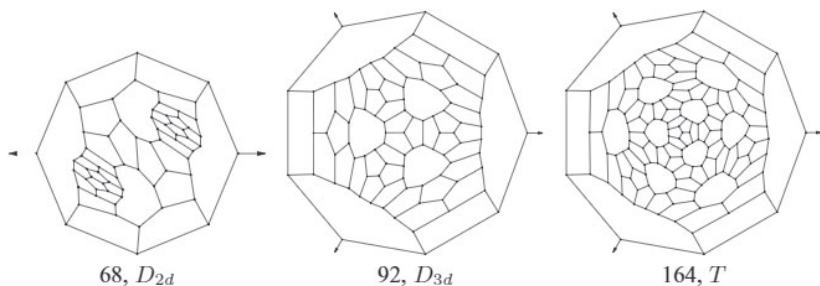
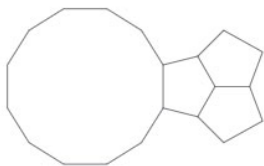


Рис. 13.3. Все регулярные  $(\{5, 11\}, 3)$ -сферы со свойством  $11R_0$ , за исключением додекаэдра и курносой  $Prism_{11}$

3-валентная сфера с не более чем 5-угольными гранями. Существует конечное число вариантов, каждый из которых может быть рассмотрен с помощью компьютера, следовательно, часть (i) выполнена.

Если  $b = 12$ , то аналогичные рассуждения показывают, что степени граней главного остова не превосходят 6. Поскольку это плоский граф, то найдется грань степени не больше, чем 5. Эта грань инцидентна некоторой вершине  $v$ , соответствующей  $(5, 3)$ -полициклу  $C_3$  или  $C_1$ . Следовательно, исходная  $(\{5, 12\}, 3)$ -сфера содержит следующий участок:



После этого мы запускаем перебор, стартуя от изображенного выше  $(\{5, 12\}, 3)$ -полицикла. После нахождения трех отдельных сфер, указанных выше, перебор за циклизуется, генерируя бесконечную серию карт; таким образом, утверждение (ii) выполнено. ■

**Теорема 13.2.4.** Все  $(\{5, b\}, 3)$ -сферы, для которых  $r_b = 2$ , имеют  $4b$  вершин.

За исключением курносой  $Prism_b$  для всех таких сфер  $b \equiv 0 \pmod{5}$ ; это:

- (i) сфера, полученная в результате расщепления  $\frac{b}{5}$  додекаэдров (в каждом из них одно ребро расщепляется на два ребра) и склеивания их

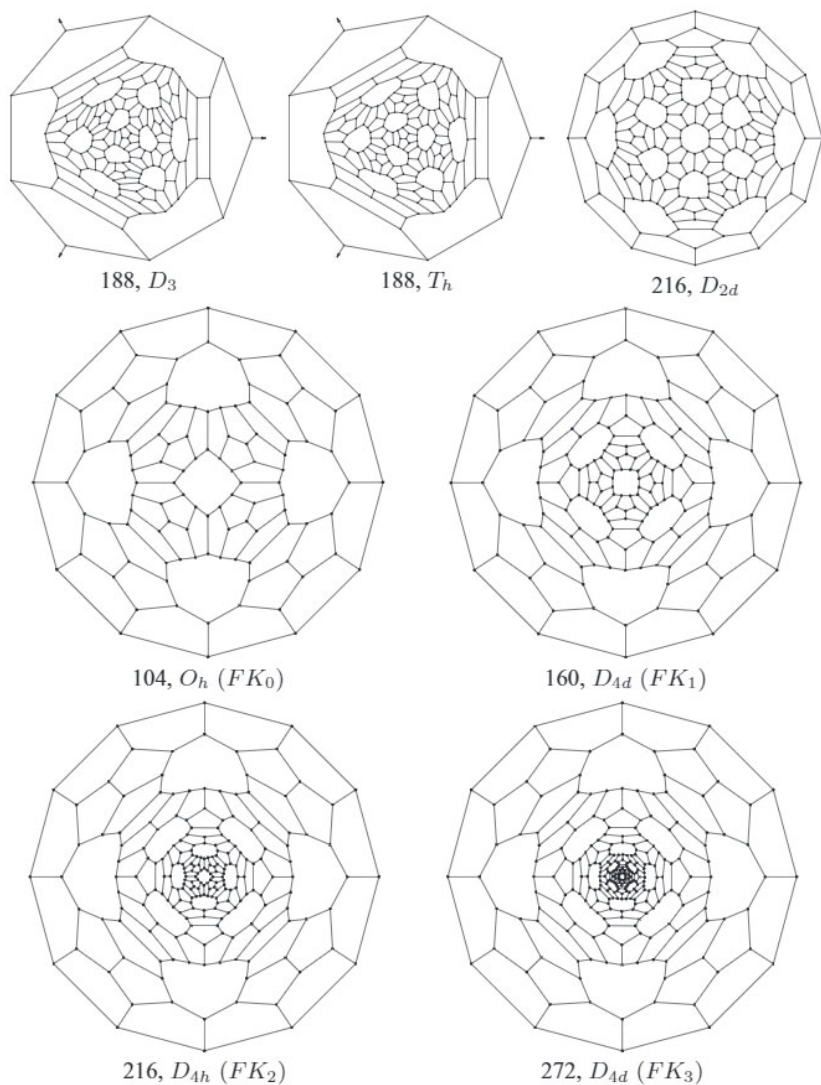


Рис. 13.4. Все регулярные  $(\{5, 12\}, 3)$ -сферы со свойством  $12R_0$ , за исключением додекаэдра и курнозой  $Prism_{12}$ : три отдельных случая и серия  $FK_i$ , здесь изображены ее члены при  $0 \leq i \leq 3$

в единое целое; она обладает свойством  $bR_0$  и имеет группу симметрии  $D_{\frac{b}{5}h}$ ;

- (ii) сфера, полученная в результате расщепления  $\frac{b}{5}$  додекаэдров (в каждом из них одно ребро расщепляется на два полуредра) и склеивания их в единое целое; она обладает свойством  $bR_{\frac{b}{5}}$  и имеет группу симметрии  $D_{\frac{b}{5}h}$ .

**Гипотеза 13.2.5.** При каждом  $b > 12$  существует бесконечно много  $(\{5, b\}, 3)$ -сфер со свойством  $bR_0$ .

## ГЛАВА 14

# Сферы и торы со свойством $bR_1$

Здесь мы рассмотрим  $(\{5, b\}, 3)$ -сферы со свойством  $bR_1$ . В теореме 14.1.2 доказано, что  $(\{4, b\}, 3)$ -карт со свойством  $bR_1$  не существует.

Конечность числа  $(\{5, b\}, 3)$ -сфер со свойством  $bR_1$  доказана при  $b \leq 9$  в теореме 14.2.2, полный список таких карт приведен на рис. 10.4, 14.1, 14.2, 14.3 и 14.4. Мы предполагаем, что при  $b \geq 10$  их число бесконечно.

### 14.1. Формула Эйлера для $(\{a, b\}, 3)$ -карт со свойством $bR_1$

Напомним, что через  $p_b$  мы обозначаем число  $b$ -угольных граней  $(\{a, b\}, 3)$ -карты, а через  $x_i$ , где  $i = 0, 1, 2, 3$ , — число вершин, содержащихся ровно в  $i$   $a$ -угольных гранях.

**Теорема 14.1.1.** Пусть  $(\{a, b\}, 3)$ -сфера или тор  $P$  обладает свойством  $bR_1$ , т. е.  $b$ -угольники сгруппированы в изолированные друг от друга пары, тогда  $p_b$  должно быть четным и должны выполняться равенства

$$\begin{cases} (6-a)x_3 + (2(a-b) + (6-a)(b-1))p_b = 4a & \text{на сфере,} \\ (6-a)x_3 + (2(a-b) + (6-a)(b-1))p_b = 0 & \text{на торе.} \end{cases}$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Ясно, что  $v = x_0 + x_1 + x_2 + x_3$ .

Вычислив число ребер  $e$  двумя способами, получаем

$$2e = 3v = bp_b + ap_a.$$

Формула Эйлера для ориентируемой поверхности рода  $g$  имеет вид  $2-2g = v - e + p_b + p_a$ ; ее можно переписать следующим образом:

$$2-2g = -\frac{v}{2} + p_b + p_a.$$

Исключая  $p_a$  из двух приведенных выше уравнений, получаем

$$(6 - a)v - 2(2 - 2g)a = 2(b - a)p_b.$$

В нашем случае  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = p_b$  и  $x_2 = (b - 2)p_b$ . Отсюда получаем

$$(6 - a)x_3 - 2(2 - 2g)a = (2(b - a) - (6 - a)(b - 1))p_b,$$

что и требовалось. ■

Из этой формулы вытекает конечность числа  $(\{5, b\}, 3)$ -сфер при  $b \leq 8$ , но в следующем разделе мы покажем, что при  $b = 9$  их число тоже конечно.

**Теорема 14.1.2.** *Не существует  $(\{4, b\}, 3)$ -сфер и торов со свойством  $bR_1$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Возьмем  $(\{4, b\}, 3)$ -сферу, обладающую свойством  $bR_1$ , и найдем две  $b$ -угольные грани, имеющие общее ребро. Эти два  $b$ -угольника должны быть окружены кольцом  $F_1, \dots, F_m$  из 4-угольников. Пусть 4-угольник  $F_i$  граничит с обоими  $b$ -угольниками, тогда  $F_{i-1}$  и  $F_{i+1}$  смежны и, следовательно,  $F_{i-1}$  и  $F_{i+1}$  граничат с некоторым другим 4-угольником; этот 4-угольник должен граничить с обоими  $b$ -угольниками, что невозможно, поскольку у двух  $b$ -угольников может быть только одно общее ребро.

На самом деле, последнее рассуждение не использует тот факт, что мы рассматриваем сферу; следовательно, оно проходит для любой карты. Другое, более прямое доказательство может быть получено применением теоремы 14.1.1. ■

## 14.2. Элементарные полициклы

Рассмотрим  $(\{5, b\}, 3)$ -карту  $G$ , обладающую свойством  $bR_1$ . Удалим все ее  $b$ -угольные грани. Получится  $(5, 3)_{gen}$ -полицикл. Этот  $(5, 3)_{gen}$ -полицикл разлагается на элементарные  $(5, 3)_{gen}$ -полициклы при разрезе вдоль мостов (определения этих понятий см. в главе 7). В этой главе *мост* — это ребро, не принадлежащее  $b$ -угольным граням, хотя его концы содержатся в двух различных  $b$ -угольных гранях.

Будем называть  $(5, 3)$ -полицикл *1-элементарным*, если он элементарен и его граничный код имеет вид  $2^{n_1}3^{m_1} \dots 2^{n_t}3^{m_t}$ , где каждое  $n_i$  равно 1 или 2, и, кроме того, если  $n_i = 1$ , то  $n_{i-1} = n_{i+1} = 2$ . Таким образом, каждый 0-элементарный  $(5, 3)$ -полицикл является также 1-элементарным.



Несложно понять, что список 1-элементарных  $(5, 3)$ -полициклов, которые не являются 0-элементарными, состоит из полициклов  $C_2$ ,  $D$  и всех  $E_{2n}$  при  $n \geq 1$ .

**Теорема 14.2.1.** Пусть дана  $(\{5, b\}, 3)$ -карта со свойством  $bR_1$ , тогда множество всех ее мостов, объединенное со множеством всех ребер, инцидентных  $b$ -угольным граням, задает разложение множества пятиугольных граней на 1-элементарные  $(5, 3)$ -полициклы.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Ясно, что курносая  $Prism_{b'}$  при  $b' \geq 2$  не может появиться среди компонент разложения множества пятиугольных граней на  $(5, 3)_{gen}$ -полициклы. Значит, множество пятиугольных граней разбивается на  $(5, 3)$ -полициклы.

Для доказательства того факта, что все возникающие  $(5, 3)$ -полициклы будут 1-элементарными, мы исследуем список элементарных  $(5, 3)$ -полициклов (см. рис. 7.2).

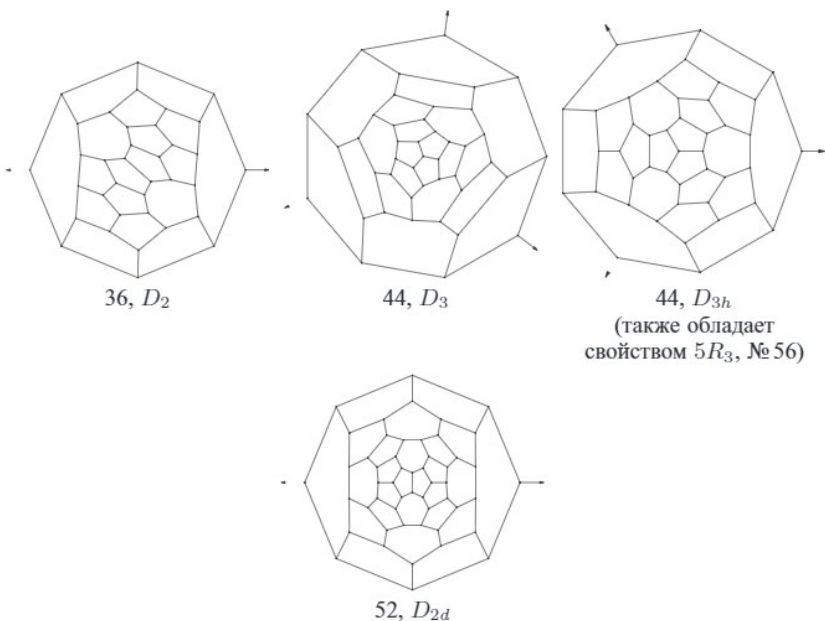


Рис. 14.1. Все регулярные  $(\{5, 7\}, 3)$ -сферы со свойством  $7R_1$ , за исключением додекаэдра

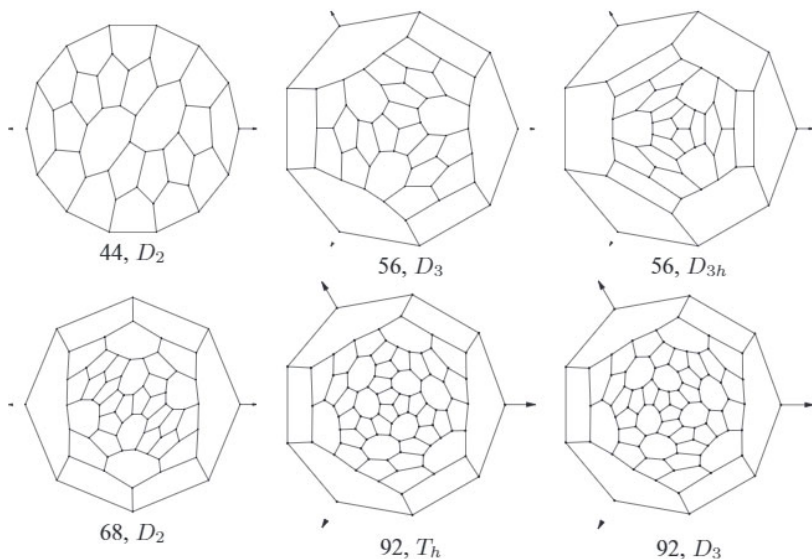


Рис. 14.2. Все регулярные  $(\{5, 8\}, 3)$ -сферы со свойством  $8R_1$ , за исключением додекаэдра

Каждый  $(5, 3)$ -полицикл из нашего разложения должен содержать в своем граничном коде участок 22, поскольку в противном случае он был бы ограничен кольцом из  $b$ -угольников, которые граничат как минимум с двумя  $b$ -угольниками каждый. Это исключает случай  $A_i$ ,  $1 \leq i \leq 5$ .

Участок вида  $3^{h_1}23^{h_2}23^{h_3}$ , где  $h_i \geq 1$ , соответствует  $b$ -угольнику с  $b = 2 + h_2$ ; мы докажем, что такой участок встречаться не может. Ясно, что не может встречаться участок вида  $3^{h_1}23^{h_2}23^{h_3}23^{h_4}$  с  $h_i \geq 1$ , так как тогда один из двух  $b$ -угольников имел бы вершину степени 2, которая не может соединяться с полициклом. Это исключает случай  $B_3$ .

Далее,  $(5, 3)$ -полицикл  $B_2$  встречаться тоже не может, поскольку замыкание двух вершин степени два в последовательности 32323 приведет к  $b$ -угольнику с  $b = 3$ , а такая структура не существует.

Теперь рассмотрим случай  $(5, 3)$ -полициклов  $E_{2n-1}$ ; замыкание двух изолированных вершин степени два соответствует  $(n + 1)$ -угольнику. Но с противоположной стороны  $(5, 3)$ -полицикл  $E_{2n-1}$  имеет границу  $23^n 2$ ; следовательно, после объединения с другими  $(5, 3)$ -полициклами, получится  $b$ -угольник с  $b > n + 1$ , что невозможно. Все оставшиеся  $(5, 3)$ -полициклы являются 1-элементарными. ■

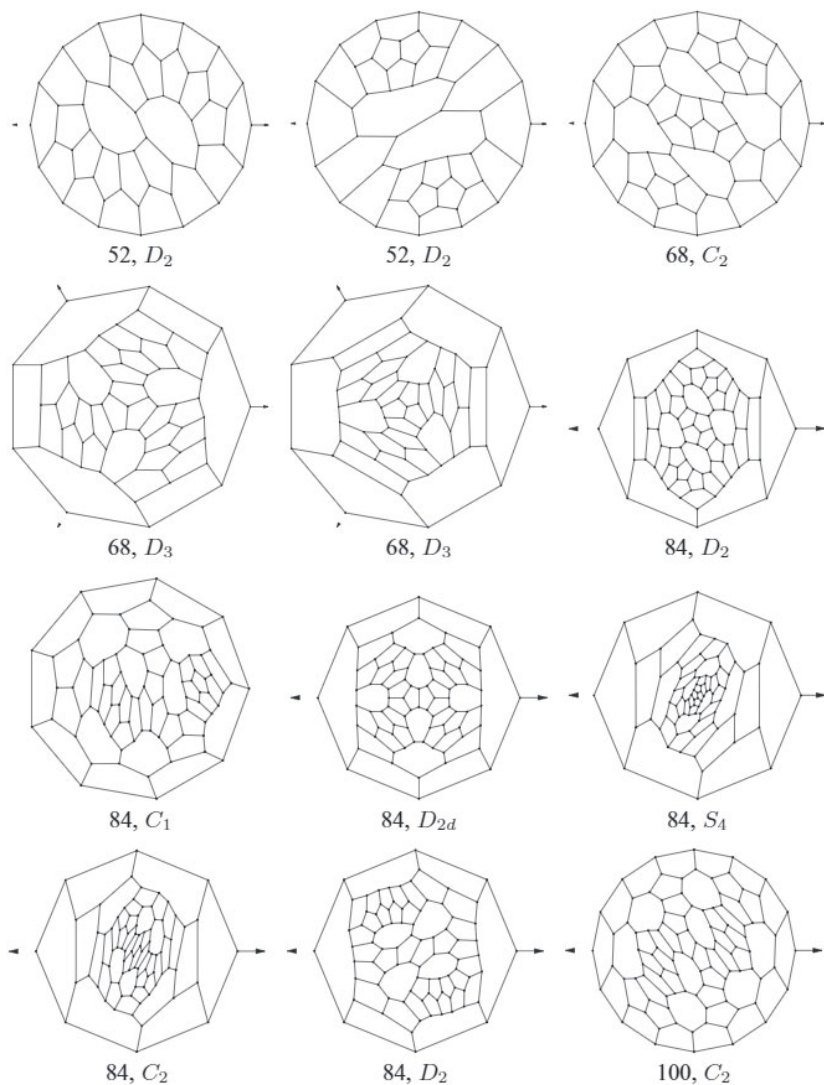


Рис. 14.3. Все регулярные  $(\{5, 9\}, 3)$ -сферы со свойством  $9R_1$ , за исключением додекаэдра (первая часть)

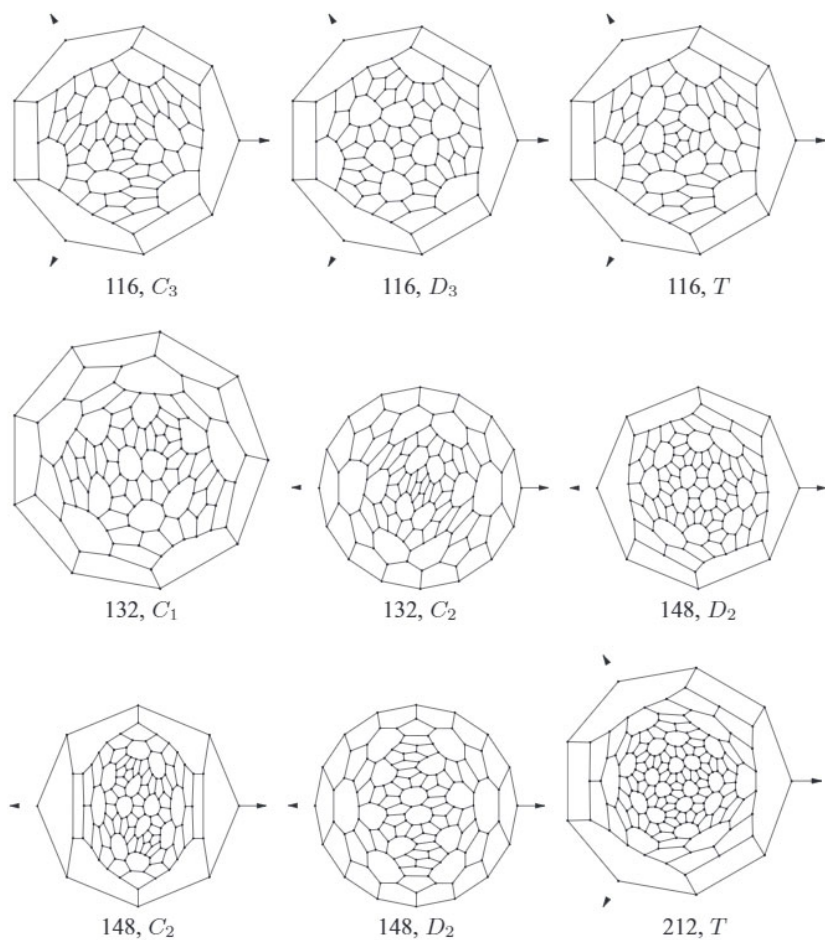
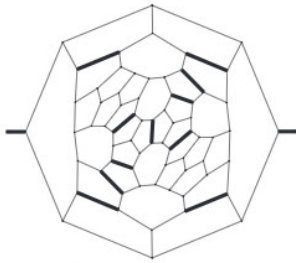
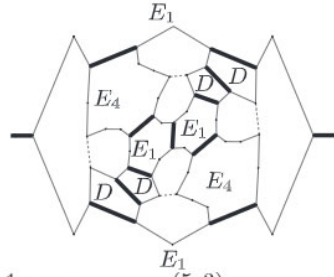


Рис. 14.4. Все регулярные  $(\{5, 9\}, 3)$ -сферы со свойством  $9R_1$ , за исключением додекаэдра (вторая часть)

Все 1-элементарные  $(5, 3)$ -полициклы встречаются в разложениях  $(\{5, b\}, 3)$ -карт, обладающих свойством  $bR_1$ . Ниже приведены примеры таких разложений.



Мосты разложения

1-элементарные  $(5, 3)$ -полициклы  
разложения**Теорема 14.2.2.**

- (i)  $(\{5, b\}, 3)$ -сферы, обладающие свойством  $bR_1$ , могут иметь максимум 32, 52, 92, 212 вершин в случаях  $b = 6, 7, 8, 9$  соответственно.
- (ii) При  $b \leq 9$  не существует  $(\{5, b\}, 3)$ -торов со свойством  $bR_1$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** По теореме 14.1.1 выполнено равенство  $x_3 + (9 - b)p_b = 20$ , где через  $x_3$  обозначено число вершин, содержащихся ровно в трех 5-угольниках. Поскольку степени граней не превосходят 9, то в разложение могут входить только следующие 1-элементарные  $(5, 3)$ -полициклы:  $D, C_1, C_2, C_3, E_1, E_2, E_4, E_6, E_8, E_{10}, E_{12}$ . Обозначим через  $p_D, p_{C_1}, \dots$  количество таких полициклов. Вычисляя количество внутренних вершин, получаем

$$x_3 = 10p_{C_1} + 7p_{C_2} + 4p_{C_3} + p_{E_1} + \sum_{i=1}^6 2ip_{E_{2i}}. \quad (14.1)$$

С другой стороны, имеют место уравнения

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{b-b} = \frac{1}{2}p_b = \frac{1}{2}p_D + \frac{1}{2}p_{C_2} + \sum_{i=1}^6 p_{E_{2i}}, \\ e_{5-b} = (b-1)p_b = 3p_D + 10p_{C_1} + 10p_{C_2} + 9p_{C_3} + 6p_{E_1} + \sum_{i=1}^6 (6+2i)p_{E_{2i}}, \\ p_5 = p_D + 10p_{C_1} + 8p_{C_2} + 6p_{C_3} + 3p_{E_1} + \sum_{i=1}^6 (2i+2)p_{E_{2i}}. \end{array} \right. \quad (14.2)$$



Затем мы рассматриваем следующую задачу линейного программирования (см., например, [Chv83]):

$$\begin{aligned} &\text{найти максимум} && p_b \\ &\text{при условиях} && (14.1), (14.2), x_3 + (9 - b)p_b = 20 \\ &&& p_b \geq 0, p_5 \geq 0, x_3 \geq 0, p_D \geq 0, \dots \end{aligned}$$

При  $b = 6, 7, 8, 9$ , максимальное значение  $p_b$  равно 6, 8, 12, 24, что даст приведенные выше оценки сверху на число вершин. Тем самым часть (i) доказана.

На самом деле, при  $b = 9$  можно привести более простое доказательство. Из первых двух уравнений (14.2) получаем

$$e_{5-9} - 6e_{9-9} = 5p_9 = 7p_{C_1} + 10p_{C_2} + 9p_{C_3} + 6p_{E_1} + \sum_{i=1}^6 2ip_{E_{2i}}. \quad (14.3)$$

Ясно, что следующая задача линейного программирования:

$$\begin{aligned} &\text{найти максимум} && \sum_i a_i x_i \\ &\text{при условиях} && \sum_i b_i x_i = b, \quad x_i \geq 0, \quad \text{где } a_i, b_i > 0, \end{aligned}$$

имеет решение  $b \max_i \frac{a_i}{b_i}$ . Используя уравнение (14.3) для  $p_9$ , уравнение (14.1) для  $x_3$  и соотношение  $x_3 = 20$ , получаем  $p_9 \leq 20 \frac{6}{5} = 24$ .

Перейдем к части (ii). Во-первых, из теоремы 14.1.1 следует, что  $x_3 = 0$ . Далее,  $p_{C_1} = p_{C_2} = p_{E_1} = p_{E_{2i}} = 0$ . Следовательно, получаем соотношения:

$$e_{9-9} = \frac{1}{2} p_9 = \frac{1}{2} p_D \quad \text{и} \quad e_{5-9} = 8p_9 = 3p_D;$$

значит,  $p_9 = p_D = 0$ . Таким образом, не существует  $(\{5, 9\}, 3)$ -торов со свойством  $9R_1$ . Заметим, что при  $b \leq 8$  доказательство сводится к применению одной лишь теоремы 14.1.1(ii). ■

Описание всех  $(\{5, b\}, 3)$ -сфер со свойством  $bR_1$  при  $b \leq 9$  выполнялось на компьютере с использованием исчерпывающего перебора. Результаты приведены на рис. 10.4, 14.1, 14.2, 14.3 и 14.4. Оказываются, что все верхние оценки из теоремы 14.2.2 достигаются. В  $(\{5, b\}, 3)$ -сферах, для которых достигаются эти верхние оценки, 5-угольники образуют элементарные  $(5, 3)$ -полициклы  $D$  и  $E_1$ . Программа, перечисляющая  $(\{5, b\}, 3)$ -сферы, заканчивает работу при всех  $b \leq 9$ , что еще раз доказывает, что при этих

значениях  $b$  существует лишь конечное число  $(\{5, b\}, 3)$ -сфер со свойством  $bR_1$ .

Напомним, что особое совершенное паросочетание 6-валентного замощения плоскости 3-угольниками — это совершенное паросочетание с двумя свойствами: каждая вершина содержится ровно в одном его ребре и каждая вершина содержится ровно в одном таком 3-угольнике, что его сторона, противоположная данной вершине, принадлежит паросочетанию.

### Теорема 14.2.3.

- (i) В разложении  $(\{5, 10\}, 3)$ -тора со свойством  $10R_1$  на элементарные  $(5, 3)$ -полициклы могут встречаться только полициклы  $D$  и  $E_1$ .
- (ii) Каждый  $(\{5, 10\}, 3)$ -тор со свойством  $10R_1$  соответствует, описанным ниже способом некоторому 6-валентному замощению тора 3-угольниками с фиксированным особым совершенным паросочетанием:

- 10-угольные грани соответствуют вершинам,
- $(5, 3)$ -полициклы  $D$  и  $E_1$  соответствуют треугольным граням,
- мосты между  $(5, 3)$ -полициклами образуют первую часть множества ребер, а ребра, разделяющие соседние 10-угольники, составляют вторую часть. Эта вторая часть множества ребер образует особое совершенное паросочетание.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Априори в разложении такого  $(\{5, 10\}, 3)$ -тора могут встречаться  $(5, 3)$ -полициклы  $D, C_1, C_2, C_3, E_1$  и  $E_{2i}$  с  $1 \leq i \leq 7$ . Мы будем использовать те же обозначения, что и при доказательстве предыдущей теоремы. Из теоремы 14.1.1 следует, что  $x_3 = p_{10}$ ; значит, так же, как и в предыдущей теореме, получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{10} = x_3 = 10p_{C_1} + 7p_{C_2} + 4p_{C_3} + p_{E_1} + \sum_{i=1}^7 2ip_{E_{2i}}, \\ e_{10-10} = \frac{1}{2} p_{10} = \frac{1}{2} p_D + \frac{1}{2} p_{C_2} + \sum_{i=1}^7 p_{E_{2i}}, \\ e_{5-10} = 9p_{10} = 3p_D + 10p_{C_1} + 10p_{C_2} + 9p_{C_3} + 6p_{E_1} + \sum_{i=1}^7 (6 + 2i)p_{E_{2i}}. \end{array} \right.$$

Вычитая эти уравнения друг из друга, получаем

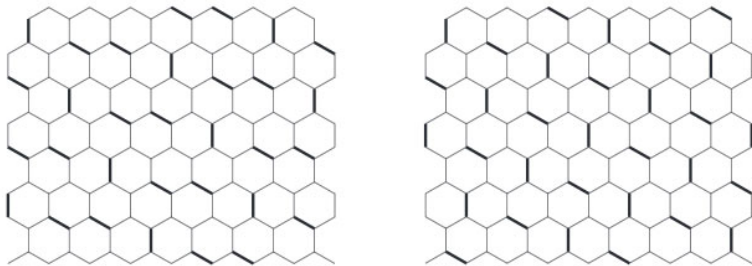
$$\begin{cases} e_{5-10} - 6e_{10-10} = 6p_{10} = 10p_{C_1} + 7p_{C_2} + 9p_{C_3} + 6p_{E_1} + \sum_{i=1}^7 2ip_{E_{2i}}, \\ e_{5-10} - 6e_{10-10} - 6x_3 = 0 = -50p_{C_1} - 35p_{C_2} - 15p_{C_3} - \sum_{i=1}^7 10ip_{E_{2i}}. \end{cases}$$

Из второго уравнения следует, что  $p_{C_1} = p_{C_2} = p_{C_3} = p_{E_{2i}} = 0$ ; таким образом, часть (i) доказана.

Из приведенных выше равенств следует, что  $p_{10} = x_3 = p_{E_1} = p_D$ . Мы будем говорить, что  $(5, 3)$ -полицикл *инцидентен* 10-угольной грани, если он имеет с ней некоторую последовательность общих ребер. Заметим, что  $(5, 3)$ -полициклы  $D$  и  $E_1$  должны быть инцидентны ровно трем 10-угольным граням. Следовательно, каждая 10-угольная грань инцидентна ровно трем полициклам  $D$  и трем полициклам  $E_1$ . Теперь рассмотрим тор, вершины которого — это 10-угольные грани, а грани — это  $(5, 3)$ -полициклы  $D$  и  $E_1$ . Ребра этого тора — это все мосты, разделяющие смежные элементарные  $(5, 3)$ -полициклы, и все ребра, соединяющие два полицикла  $D$  и разделяющие две 10-угольные грани.

Ясно, что этот тор 6-валентен, а множество ребер, разделяющих смежные 10-угольники, образует особое совершенное паросочетание. Глядя на такое особое совершенное паросочетание, можно определить расположение полициклов  $D$  и  $E_1$  и получить исходный  $(\{5, 10\}, 3)$ -тор. Таким образом, доказана часть (ii). ■

**ЗАМЕЧАНИЕ 14.2.4.** Существует много разных особых совершенных паросочетаний. На рисунке ниже изображены два примера.



Также заметим, что из теоремы 14.2.3 с учетом теоремы 9.3.4 следует, что существует взаимно-однозначное соответствие между  $(\{5, 10\}, 3)$ -торами, обладающими свойством  $10R_1$ , и  $(\{4, 8\}, 3)$ -торами, обладающими свойствами  $4R_1$  и  $8R_5$ .

**Теорема 14.2.5.** Для каждого  $b \geq 10$  существует  $(\{5, b\}, 3)$ -тор со свойством  $bR_1$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Такой тор может быть получен как фактор некоторой  $(\{5, b\}, 3)$ -плоскости. Мы снова получим такую плоскость из графитовой решетки  $\{6, 3\}$ , добавив на нее дополнительную структуру. В каждую вершину, инцидентную выделенному жирным ребру на рисунке ниже, мы помещаем  $(5, 3)$ -полицикл  $D$ , а в остальные вершины —  $(5, 3)$ -полицикл  $E_1$ . В результате получится  $(\{5, b\}, 3)$ -плоскость со свойством  $bR_1$ .



Заметим, что  $(5, 3)$ -полициклы  $D$  образуют пары соседних; каждая такая пара  $(5, 3)$ -полициклов  $D$  может быть заменена на  $(5, 3)$ -полицикл  $E_{2n}$ , где  $n \geq 1$ . Легко видеть, что получается  $(\{5, 10 + n\}, 3)$ -плоскость со свойством  $(10 + n)R_1$ . ■

Отметим также, что существует много других вариантов построения карт со свойством  $bR_1$  (например, замена  $E_1$  на  $C_3$  или вставка  $(5, 3)$ -полициклов  $C_1$ ).

**Гипотеза 14.2.6.** При каждом  $b \geq 10$  существует бесконечно много  $(\{5, b\}, 3)$ -сфер со свойством  $bR_1$ .





## ГЛАВА 15

# Сферы и торы со свойством $bR_2$

Здесь мы рассматриваем  $(\{a, b\}, 3)$ -сферы и торы, обладающие свойством  $bR_2$  (т. е. карты, в которых  $b$ -угольники образуют простые несамопересекающиеся циклы). После обсуждения нескольких общих результатов мы перейдем к случаю тора. Затем, в разделе 15.3, мы рассмотрим один особый случай  $(\{a, b\}, 3)$ -сфер с циклом из  $b$ -угольников. В этой главе мы следуем работам [DGr02, DDS08, DuDe06].

### 15.1. $(\{a, b\}, 3)$ -карты со свойством $bR_2$

Напомним, что через  $p_a$  и  $p_b$  мы обозначаем соответственно число  $a$ - и  $b$ -угольных граней в данной  $(\{a, b\}, 3)$ -карте со свойством  $bR_2$ .

**Теорема 15.1.1.** Пусть  $(\{a, b\}, 3)$ -сфера или тор  $G$  обладает свойством  $bR_2$ . Тогда

$$\begin{cases} (6-a)x + (4-(4-a)(4-b))p_b = 4a & \text{на сфере,} \\ (6-a)x + (4-(4-a)(4-b))p_b = 0 & \text{на торе,} \end{cases} \quad (15.1)$$

где через  $x$  обозначено число вершин, содержащихся или в трех  $a$ -угольных гранях, или в трех  $b$ -угольных гранях.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Обозначим через  $x_0, x_1, x_2, x_3$  число вершин, содержащихся ровно в нуле, одной, двух или трех  $a$ -угольных гранях. Тогда  $x = x_0 + x_3$ .

Имеется  $x_0$  циклов длины 3 из  $b$ -угольных граней, которые включают  $3x_0$  граней.

Выполняются соотношения  $x_1 = (b-4)(p_b - 3x_0) + (b-3)3x_0$  и  $x_2 = 2(p_b - 3x_0) + 3x_0$ . Вычисляя число ребер  $e$  двумя способами, получаем

$$2e = 3(x_0 + x_1 + x_2 + x_3) = ap_a + bp_b.$$

Формула Эйлера  $2 - 2g = (x_0 + x_1 + x_2 + x_3) - e + p_a + p_b$ , где  $g$  — это род ориентируемой карты, может быть записана в виде

$$2 - 2g = -\frac{1}{2}(x_0 + x_1 + x_2 + x_3) + p_a + p_b.$$

Исключая  $p_a$  из двух приведенных выше уравнений, получаем

$$(6 - a)(x_0 + x_1 + x_2 + x_3) - 4(1 - g)a = 2(b - p)p_b,$$

откуда после замены  $x_1$  и  $x_2$  получается требуемая формула. ■

**Следствие 15.1.2.** При  $(a, b) = (3, b), (4, b), (5, 6), (5, 7)$  число  $(\{a, b\}, 3)$ -сфер, обладающих свойством  $bR_2$ , конечно.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В этих случаях уравнение (15.1) принимает вид  $bp_b + 3x = 12, 4p_b + 2x = 16, 2p_b + x = 20, p_7 + x = 20$ . Значит, величина  $p_b$  ограничена некоторой константой, откуда следует, что величина  $p_a$  (а значит, и число вершин  $v$ ) тоже ограничена. ■

Из формулы Эйлера также следует, что в любой  $(\{a, b\}, 3)$ -сфере со свойством  $bR_2$  число  $e_{a-a}$  ребер, разделяющих пары смежных  $a$ -угольников, равно

$$\frac{6a + p_b((a - 3)(b - 4) - 6)}{6 - a}.$$

Значит, это число при  $(a, b) = (4, 10), (5, 7)$  постоянно и равно 24, 30 соответственно, а число таких сфер конечно при  $(a, b) = (4, b < 10), (5, b < 7)$ .

**Теорема 15.1.3.** При каждом  $b \geq 8$  существует бесконечно много  $(\{5, b\}, 3)$ -сфер со свойством  $bR_2$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Возьмем два додекаэдра и удалим по вершине из каждого из них. Соединяя три освободившихся ребра, получаем  $(\{5, 8\}, 3)$ -сферу со свойством  $8R_2$ , имеющую две 8-угольные грани и восемнадцать 5-угольных граней, которые разбиваются на два  $(5, 3)$ -полицикла  $A_3$ . Остается воспользоваться теоремой 11.0.2.

Для доказательства утверждения при  $b > 8$ , нам нужно найти некоторый начальный граф со свойством  $bR_2$ . Для каждого  $n \geq 0$  возьмем три  $(5, 3)$ -полицикла  $E_{2n}$  (где  $E_0$  — это результат склеивания двух  $(5, 3)$ -полициклов  $D$ , а при остальных  $n \geq 1$  полицикл  $E_n$  можно найти на рис. 7.2) и склеим их по открытым ребрам. Граница полученного графа будет иметь две компоненты с кодами вида  $(23^{2+n})^3$ ; каждая из них может быть заполнена с помощью трех  $(6 + n)$ -угольников (при этом в каждом случае

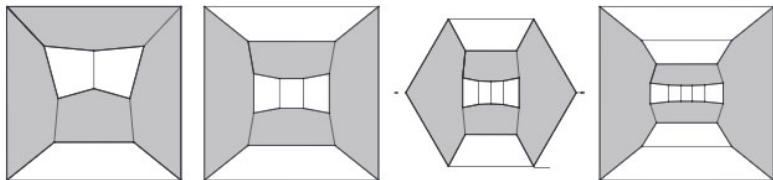
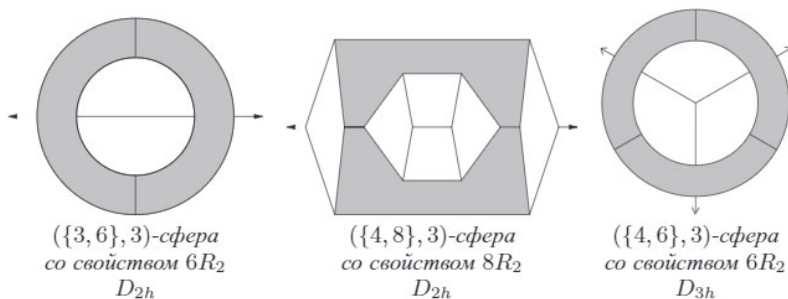


Рис. 15.1. Случаи  $b = 5, 6, 7, 8$  бесконечных серий  $(\{4, b\}, 3)$ -сфер, имеющих 4-цикл из  $b$ -угольников

будет добавлена одна вершина). Заменяем эти две вершины на  $(5, 3)$ -полициклы  $A_3$ . Получится  $(\{5, 9+n\}, 3)$ -сфера со свойством  $(9+n)R_2$ , к которой можно применить теорему 11.0.2 и получить бесконечное число сфер. ■

**Теорема 15.1.4.** При  $a = 3, 4$  все  $(\{a, b\}, 3)$ -сферы со свойством  $bR_2$  (помимо тетраэдра и куба) образуют следующий список.

- 1)  $(\{4, b\}, 3)$ -сферы, имеющие 4-цикл из  $b$ -угольников и параметры  $p_4 = 2(b - 3)$  и  $p_b = 4$ , изображенные в случаях  $b = 5, 6, 7, 8$  на рис. 15.1.
- 2)  $Prist_3$  и следующие сферы:



**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Уравнение (15.1) из теоремы 15.1.1 в случае  $(\{4, b\}, 3)$ -сфер со свойством  $bR_2$  принимает вид  $4p_b + 2x = 16$ . Оно имеет следующие решения:  $(p_b, x) = (4, 0), (3, 2), (2, 4), (1, 6)$  и  $(0, 8)$ . Решение  $(0, 8)$  соответствует кубу, а решение  $(1, 6)$ , очевидно, не реализуется.

С другой стороны, все  $(4, 3)$ -полициклы уже были классифицированы. Пусть некоторая  $(\{4, b\}, 3)$ -сфера  $G$  со свойством  $bR_2$  содержит хотя бы один  $b$ -угольник. Тогда  $G$  содержит некоторый  $(4, 3)$ -полицикл  $P$ , ограниченный  $b$ -угольными гранями.

Если полицикл  $P$  равен  $P_2 \times P_k$ , где  $k \geq 2$ , то он граничит с четырьмя  $b$ -угольными гранями. Значит,  $p_b \geq 4$ . С учетом приведенных выше рассуждений получаем, что  $p_b = 4$ , значит, имеется только один цикл, а во втором  $(4, 3)$ -полицикле нет внутренних вершин. Тогда второй полицикл имеет вид  $P_2 \times P_{k'}$ . Единственный возможный вариант — это  $b = k + 3$  и  $k' = k$ .

Если полицикл  $P$  равен  $\{4, 3\} - v$ , то  $p_b \geq 3$  и  $x \geq 1$ . Возможен только случай  $p_b = 3$  и  $x = 2$ . Значит, имеется только один цикл, а второй полицикл содержит ровно одну внутреннюю вершину. Следовательно, рассматриваемая сфера — это единственная  $(\{4, 6\}, 3)$ -сфера со свойством  $6R_2$ .

Если полицикл  $P$  равен  $\{4, 3\} - e$ , то  $p_b \geq 2$  и  $x \geq 2$ . Если  $p_b = 3$ , то получился бы цикл длины один, что невозможно; следовательно,  $p_b = 2$ ,  $x = 4$ . Заполнение 4-угольниками возможно только в случае  $b = 8$ . Получается  $(\{4, 8\}, 3)$ -сфера, имеющая 2-цикл из 8-угольников (т. е. пару 8-угольников, имеющих два общих непоследовательных ребра).

В случае  $(\{3, b\}, 3)$ -сфер со свойством  $bR_2$  уравнение (15.1) может быть переписано в виде  $bp_b + 3x = 12$ . С другой стороны, существует только два  $(3, 3)$ -полицикла, которые могут входить в такую сферу — это 3-угольник и пара смежных 3-угольников.

Если этот полицикл является 3-угольником, то  $p_b \geq 3$ . Тогда  $12 \geq bp_b \geq 3b$ , поэтому  $b \leq 4$ . Тогда  $b = 4$  и наша сфера — это  $Prism_3$ .

Если этот полицикл является парой смежных 3-угольников, то  $p_b \geq 2$ ,  $12 \geq bp_b \geq 2b$ , откуда  $b \leq 6$ . Значения меньше, чем 6, невозможны; следовательно, получаем  $(\{3, 6\}, 3)$ -сферу с 2-циклом из 6-угольников. ■

## 15.2. $(\{5, b\}, 3)$ -торы со свойством $bR_2$

**Теорема 15.2.1.**  *$(\{5, 8\}, 3)$ -тор обладает свойством  $8R_2$ , если и только если он обладает свойством  $5R_2$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Возьмем  $(\{5, 8\}, 3)$ -тор и допустим, что он обладает свойством  $8R_2$ . По теореме 15.1.1 имеет место соотношение  $x_0 + x_3 = 0$ , т. е.  $x_0 = x_3 = 0$ .

Кроме того, из формулы Эйлера (1.1) следует равенство  $p_5 = 2p_8$ . Общее число ребер  $e$  равно

$$\frac{1}{2}(5p_5 + 8p_8) = 9p_8.$$

Более того, из свойства  $8R_2$  вытекает, что  $e_{8-8} = p_8$ ,  $e_{5-8} = 6p_8$  и  $e_{5-5} = 2p_8$ .



Обозначим через  $p_{5,i}$  число 5-угольных граней, которые смежны ровно с  $i$  экземплярами 5-угольных граней. Прямым подсчетом получаем, что

$$p_5 = \sum_{i \geq 0} p_{5,i} \quad \text{и} \quad 2p_8 = e_{5-5} = \frac{1}{2} \sum_{i \geq 0} i p_{5,i}.$$

Вычитая эти уравнения друг из друга, получаем  $0 = \sum_{i \geq 0} \left(\frac{i}{2} - 1\right) p_{5,i}$ . Предположим, что  $p_{5,i} \neq 0$  при  $i > 2$ .

Тогда найдется хотя бы одна вершина, содержащаяся ровно в трех 5-угольных гранях, но это невозможно. Следовательно, уравнение сводится к следующему:

$$0 = -p_{5,0} - \frac{1}{2} p_{5,1}.$$

Отсюда следует, что  $p_{5,i} = 0$  при  $i < 2$ . Таким образом, наш  $(\{5, 8\}, 3)$ -тор является строго регулярным — он обладает свойством  $5R_i$ , где  $i = 2$ .

Если наша карта обладает свойством  $5R_2$ , то, снова используя теорему 15.1.1, получаем, что  $x_0 + x_3 = 0$ , т. е.  $x_0 = x_3 = 0$ .

Далее, с помощью все тех же вычислений, получаем  $e_{8-8} = p_8$ ,  $e_{5-8} = 6p_8$  и  $e_{5-5} = 2p_8$ .

Рассмотрим 8-угольную грань  $F$ ; поскольку  $x_0 = x_3 = 0$ , корона грани  $F$  не содержит участков вида 88. Допустим, что корона грани  $F$  содержит участок 858; в силу свойства  $5R_2$  короны 5-угольных граней должны быть равны 88855. Отсюда следует, что  $x_0 + x_3 > 0$ .

Значит, участок 858 в короне 8-угольника содержаться не может, и, следовательно, каждая 8-угольная грань смежна не более чем с двумя 8-угольными гранями. Поскольку в среднем 8-угольные грани смежны ровно с двумя 8-угольными гранями, то должно выполняться свойство  $8R_2$ . ■

**Теорема 15.2.2.**  $(\{5, b\}, 3)$ -тор со свойством  $bR_2$  существует, если и только если  $b \geq 8$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим графитовую решетку  $\{6, 3\}$  и поместим в каждую ее вершину по 5-угольнику. В результате, очевидно, получится  $(\{5, 8\}, 3)$ -плоскость, обладающая свойством  $8R_2$ . Чтобы получить  $(\{5, b\}, 3)$ -плоскости с  $b \geq 8$ , нужно перестроить эту структуру. Сгруппируем 5-угольники в пары так, что пятиугольники в каждой паре смежны. Каждая такая пара, выделенная на рисунке ниже, может быть превращена в  $(5, 3)$ -полицикл  $E_{2n}$  с  $n \geq 1$ .





Получаем  $(\{5, 8 + n\}, 3)$ -плоскость со свойством  $(8 + n)R_2$ . Все эти плоскости периодичны; следовательно, при факторизации (по действию подгруппы параллельных переносов) получится  $(\{5, b\}, 3)$ -тор со свойством  $bR_2$ .

Для доказательства несуществования  $(\{5, b\}, 3)$ -торов при  $b \leq 7$  достаточно воспользоваться теоремой 15.1.1; из нее следует, что  $p_b = 0$ , а это невозможно. ■

На рис. 15.2, 15.3 изображены некоторые примеры  $(\{5, b\}, 3)$ -торов со свойством  $bR_2$  при  $b = 9, 10$ .

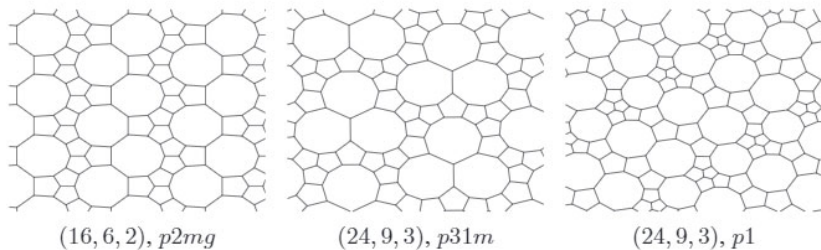


Рис. 15.2. Некоторые  $(\{5, 9\}, 3)$ -торы со свойством  $9R_2$

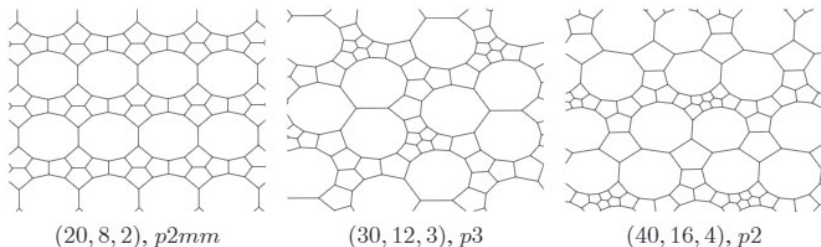


Рис. 15.3. Некоторые  $(\{5, 10\}, 3)$ -торы со свойством  $10R_2$

**15.3.  $(\{a, b\}, 3)$ -сферы, содержащие цикл из  $b$ -угольников**

Рассмотрим те  $(\{a, b\}, 3)$ -сферы, в которых все  $b$ -угольники образуют один цикл некоторой длины  $n$ . Такие сферы составляют любопытное подмножество среди всех  $(\{a, b\}, 3)$ -сфер со свойством  $bR_2$ . В этом разделе мы откажемся от ограничения  $a < b$  и вместо этого будем предполагать лишь, что  $a, b \geq 3$ . По сути мы предполагаем, что  $b > 3$ , поскольку единственная  $(\{a, 3\}, 3)$ -сфера — это тетраэдр.

**Теорема 15.3.1.** *При  $b \geq 4$  и  $a \geq 5$   $(\{a, b\}, 3)$ -сфера может содержать  $n$ -цикл из  $b$ -угольников только при следующих значениях параметров  $n$ ,  $a$  и  $b$ .*

- (i) Если  $b = 4$ , то  $n = a$ , и в этом случае реализуется только  $Prism_a$ .
- (ii) Если  $b \geq 5$ , то  $a \leq 7$ , причем если  $a \geq 6$ , то  $b = 5$ . Кроме того, выполняется следующее.
  - 1) Если  $a = 7$ , то  $n - (x + x') = 28$ ;  $n \geq 28$ . Существует только одна  $(\{5, 7\}, 3)$ -сфера с 28-циклом из 5-угольников.
  - 2) Если  $a = 6$ , то существует четыре  $(\{5, 6\}, 3)$ -сферы с 12-циклом из 5-угольников (см. рис. 10.8).
  - 3) Если  $a = 5$ , то:
    - а) если  $b = 6$ , то  $n \leq 10$ , и все возможные сферы изображены на рис. 10.5;
    - б) если  $b = 7$ , то  $n \leq 20$ , и все возможные сферы изображены на рис. 15.6.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Начнем со случая (i). Ясно, что 4-угольники могут образовывать цикл только одним способом, и при этом получается  $Prism_n$ , где  $n = a$  (см., например, классификацию  $(4, 3)$ - и  $(4, 3)_{gen}$ -полициклов в главе 4).

Через  $I_n$  и  $O_n$  обозначим  $(a, 3)$ -полициклы, содержащиеся внутри и снаружи  $n$ -цикла из  $b$ -угольников. Обозначим через  $x, x'$  число внутренних вершин в полициклах  $I_n, O_n$  соответственно. Формула (15.1) может быть записана в следующем виде:

$$(a - 6)(x + x') = (4 - (a - 4)(b - 4))n - 4a.$$

Рассмотрим случай (ii) и допустим, для начала, что  $a \geq 7$ . Поскольку  $a - 6 > 0$  и  $x + x' \geq 0$ , то  $4 - (a - 4)(b - 4) > 0$ . При  $a \geq 7$  это неравенство может выполняться только при условии  $b = 5$  и  $a = 7$ . При таких значениях  $a$  и  $b$  уравнение (15.1) принимает вид

$$x + x' = n - 28.$$

Следовательно, при  $n < 28$  не существует  $(\{5, 7\}, 3)$ -сфер с циклом из 5-угольников. При  $n = 28$  должно выполняться  $x + x' = 0$ , и единственная возможная сфера изображена на рис. 15.5.

Теперь рассмотрим случай  $a = 6$ . В этом случае уравнение (15.1) принимает вид

$$(12 - 2b)n = 24.$$

Значит,  $12 - 2b > 0$ , т.е.  $b < 6$ . Так как  $b \geq 5$ , то  $b = 5$  и  $n = 12$ . Существует четыре  $(\{5, 6\}, 3)$ -сферы с циклом из 5-угольников: см. рис. 10.8 и доказательство леммы 10.4.1.

Случай  $a = 5$  наиболее интересен. Здесь уравнение (15.1) принимает вид

$$x + x' = 20 - (8 - b)n. \quad (15.2)$$

При  $b < 8$  это равенство дает оценку на  $n$ , так как  $x + x' \geq 0$ . ■

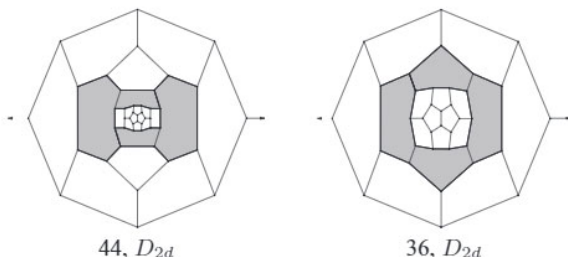
ЗАМЕЧАНИЕ 15.3.2.

- (i) Все  $(\{5, 7\}, 3)$ -сферы с  $n$ -циклом из 5-угольников при  $n \leq 50$  были перечислены в [HKS07]; кроме того, там построены бесконечные серии таких сфер.
- (ii) Несколько бесконечных серий  $(\{5, b\}, 3)$ -сфер с циклом из  $b$ -угольников при  $b = 10$  и  $b \equiv 2, 3 \pmod{5}$ ,  $b \geq 13$  построены в [MaSo07]. Там доказано существование  $(\{5, b\}, 3)$ -сфер с циклом из  $b$ -угольников при  $b \equiv 0, 1, 4 \pmod{5}$ ,  $b \geq 5$ ,  $b \neq 9$ , при  $b \equiv 1, 4 \pmod{5}$ ,  $b \geq 5$  и при  $b \equiv 0 \pmod{10}$ ,  $b \geq 20$ .

Приведем теперь две бесконечные серии из [DGr02]:

- 1) Для  $t \geq 1$  построим  $(\{5, 5t + 3\}, 3)$ -сферу  $D_{2d}$  с 4-циклом из  $(5t + 3)$ -угольников, взяв в качестве шапочек два одинаковых  $(5, 3)$ -полицикла  $tC_1$ .
- 2) Для  $t \geq 1$  построим  $(\{5, 5t + 2\}, 3)$ -сферу  $D_{2d}$ , взяв в качестве шапочек два одинаковых  $(5, 3)$ -полицикла  $P$ . Если  $t = 1$ , то  $P = A_4$ , а если  $t \geq 2$ , то  $P = B_2 + (t - 2)C_1 + B_2$ .

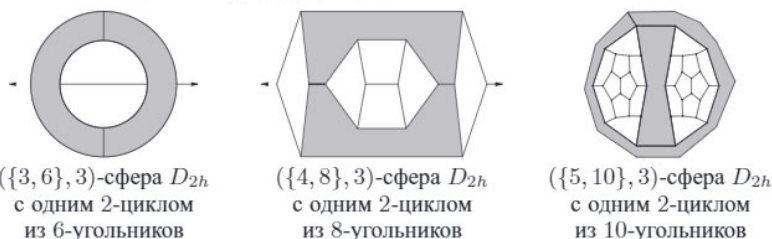
Ниже изображены первые члены этих бесконечных серий.



У нас есть гипотеза, что существует бесконечно много  $(\{5, b\}, 3)$ -сфер с одним циклом из  $b$ -угольников при каждом  $b \geq 8$ .

Существование  $(\{a, b\}, 3)$ -сферы с одним циклом из  $b$ -угольников эквивалентно тому, что для некоторого граничного кода  $c = 23^{c_1} 23^{c_2} \dots 23^{c_m}$  и он сам, и его  $b$ -дополнение (т.е. код  $c' = 23^{c'_1} 23^{c'_2} \dots 23^{c'_m}$ , где  $c'_i = b - 4 - c_i$ ) могут быть заполнены  $a$ -угольниками. Единственность такой сферы означает, что существует только один такой код  $c$  и что он допускает единственное заполнение  $a$ -угольниками. Для  $b$ -самодополнительных кодов  $c$  (т.е. тех кодов, для которых  $b$ -дополнение совпадает с самим кодом  $c$  с точностью до циклического сдвига или смены направления обхода), единственность такой сферы эквивалентна единственности заполнения кода  $c$ .

Ниже изображены  $(\{a, b\}, 3)$ -сферы с одним 2-циклом из  $b$ -угольников.



Ниже изображены  $(\{a, b\}, 3)$ -сферы с одним 3-циклом из  $b$ -угольников.



**Теорема 15.3.3.**

- (i) Пусть даны две  $(\{5, 10\}, 3)$ -сферы, обладающие свойством  $10R_2$  и имеющие пару 5-угольников, граничащих только с 5-угольниками. Тогда можно соединить эти сферы так, что получится новая  $(\{5, 10\}, 3)$ -сфера со свойством  $10R_2$ , не являющаяся 3-связной и имеющая 2-цикл из 10-угольников, граничащих друг с другом по двум противоположным сторонам.
- (ii) Каждая  $(\{5, 10\}, 3)$ -сфера, имеющая 2-цикл из 10-угольников, граничащих по противоположным ребрам, может быть получена с помощью описанной выше процедуры соединения двух  $(\{5, 10\}, 3)$ -сфер со свойством  $10R_2$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** (i) Сначала разрежем общее ребро двух 5-угольников на каждой из этих сфер. Затем соединим две надрезанные сферы по этим полуребрам и получим требуемую новую  $(\{5, 10\}, 3)$ -сферу.

(ii) В случае  $(\{5, 10\}, 3)$ -сферы, имеющей 2-цикл на противоположных ребрах, можно очевидным образом выполнить обратную процедуру, разрезая ребра этого цикла. ■

Оказывается, что каждая из известных  $(\{5, 10\}, 3)$ -сфер, обладающих свойством  $10R_2$ , имеет ровно две такие пары 5-угольников. Следовательно, в каждую из них можно, например, «вписать додекаэдр» и получить не 3-связную  $(\{5, 10\}, 3)$ -сферу со свойством  $10R_2$ .

**Теорема 15.3.4.** При каждом  $t \geq 0$  существует  $(\{5, 8\}, 3)$ -сфера, имеющая  $t$  циклов длины 3 из 8-угольников и не являющаяся 3-связной. Эта последовательность соответствует  $(\{5, 8\}, 3)$ -сферам со свойством  $8R_2$ , содержащим тройку попарно смежных 5-угольников, которые не граничат с 8-угольными гранями.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Возьмем два додекаэдра и удалим из каждого из них по вершине. Склеим ребра, принадлежащие разным додекаэдрам, в единое целое. Получается единственная  $(\{5, 8\}, 3)$ -сфера с 3-циклом из 8-угольников. Эту конструкцию можно обобщить, если брать  $t + 1$  додекаэдр, удалять по вершине из двух додекаэдров и по две противоположных вершины из остальных  $t - 1$  додекаэдров. Все эти додекаэдры можно склеить так, что получится  $(\{5, 8\}, 3)$ -сфера с  $t$  циклами длины 3 из 8-угольников (см. рис. 15.4).

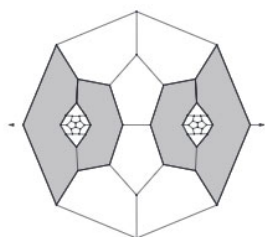
Возьмем  $(\{5, 8\}, 3)$ -сферу, обладающую свойством  $8R_2$  и имеющую такую тройку из 5-угольников. По условию мы можем добавить вокруг этой



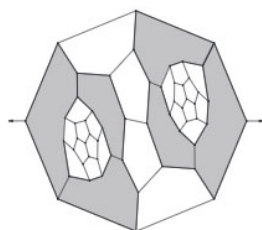
тройки цикл из 5-угольников. В результате получится  $(5, 3)$ -полицикл, имеющий ровно три вершины степени 2. Легко видеть, что можно добавить еще один 5-угольник так, что структура замкнется и получится додекаэдр. Если мы не будем добавлять пятиугольник, то нужно будет добавить 3-цикл из 8-угольников. Далее вокруг этой структуры нужно будет добавить цикл из 5-угольников. Затем снова можно добавить либо 5-угольник, и, следовательно, три 5-угольника так, что получится  $(\{5, 8\}, 3)$ -сфера с 3-циклом из 8-угольников, или можно продолжить добавление троек 8-угольников, и снова повторяется то же рассуждение. Таким образом, поскольку наш граф конечен, то в конце концов получится некоторая  $(\{5, 8\}, 3)$ -сфера с  $t$  циклами длины 3 из 8-угольников. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 15.3.5. Для поиска  $(\{5, 7\}, 3)$ -сфер, имеющих  $n$ -цикл из 7-угольников, использовались следующие два метода (иллюстрации см. на рис. 15.6):

- (i) Хармут ([Har00]) использовал компьютерную программу CPF (см. [Har]) для нахождения всех таких сфер при  $n \leq 16$ . Точнее, он перечислил, используя

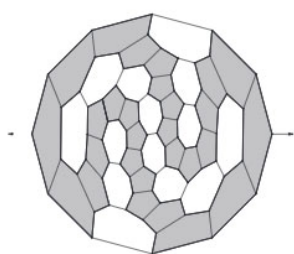


$(\{5, 10\}, 3)$ -сфера с двумя 2-циклами из 10-угольников

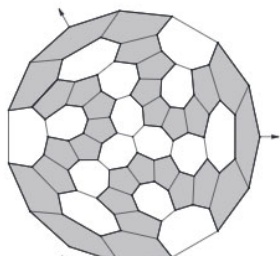


$(\{5, 8\}, 3)$ -сфера с двумя 3-циклами из 8-угольников

Рис. 15.4. Примеры сфер с двумя циклами из теорем 15.3.3 и 15.3.4



84,  $D_2$



92,  $D_3$

Рис. 15.5.  $(\{5, 7\}, 3)$ -сферы, имеющие один  $n$ -цикл из 5-угольников, при  $n \leq 31$

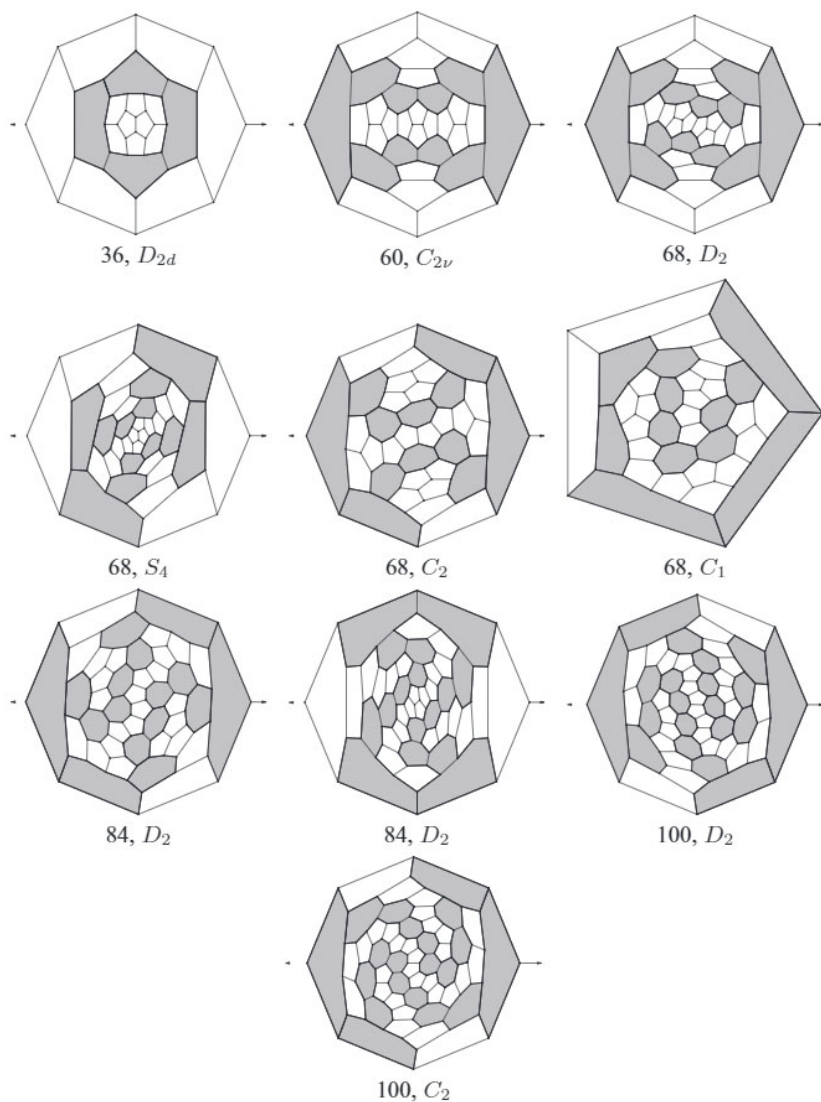


Рис. 15.6. Все  $(\{5, 7\}, 3)$ -сферы, имеющие один цикл из 7-угольников

некоторую модификацию программы CPF, все  $(\{5, 7\}, 3)$ -сферы, обладающие свойством  $7R_2$  и имеющие не более 84 вершин.

- (ii) Существует и другой метод. Каждая  $(\{5, 7\}, 3)$ -сфера с одним  $n$ -циклом из 7-угольников соответствует двум  $(5, 3)$ -полициклам  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{P}'$ . Обозначим через  $x$  и  $x'$  число внутренних вершин этих полициклов, через  $p_5$  и  $p'_5$  — число 5-угольников в них, а через  $v_3$  и  $v'_3$  — число 3-валентных вершин на их границах. Из теоремы 5.2.1 получаем, что  $p_5 = 6 + v_3 - n$  и  $x \leq 10 + v_3 - 2n$  и аналогичные соотношения выполняются для  $p'_5$  и  $x'$ . С другой стороны,  $v_3 + v'_3 = 3n$ ; следовательно, одно из чисел  $v_3, v'_3$ , скажем  $v_3$ , удовлетворяет неравенству  $v_3 \leq \frac{3}{2}n$ , а значит

$$p_5 \leq 6 + \frac{n}{2} \quad \text{и} \quad x \leq 10 - \frac{n}{2}.$$

Поскольку  $n \leq 20$ , отсюда следует, что нам нужно перебрать все  $(5, 3)$ -полициклы, имеющие  $p_5 \leq 16$  и менее чем  $16 - p_5$  внутренних вершин. Результаты выглядят следующим образом.

$p_5$	$x_{\max}$	№ $(5, 3)$ -полицикла	11	5	1287
6	10	18	12	4	3 147
7	9	35	13	3	6 850
8	8	87	14	2	12 803
9	7	204	15	1	13 448
10	6	518	16	0	4 160

К каждому такому  $(5, 3)$ -полициклу мы добавляем, если это возможно, цикл из 7-угольников, а затем проверяем, можно ли получившуюся  $(5, 3)$ -границу заполнить 5-угольниками (соответствующие алгоритмы см. в разделе 5.2). В тех случаях, когда заполнение возможно, получается  $(\{5, 7\}, 3)$ -сфера с циклом из 7-угольников.

Той же стратегией, что и в случае  $(\{5, 7\}, 3)$ -сфер с  $n$ -циклом из 7-угольников, можно руководствоваться в случае  $(\{5, b\}, 3)$ -сфер с  $n$ -циклом из  $b$ -угольников при  $b \geq 8$ . Это позволяет найти целый ряд  $(\{5, b\}, 3)$ -сфер при  $b = 8, 9$  и  $10$ ; они описаны в [DDS08].

Всякая  $(\{5, 7\}, 3)$ -сфера с  $n$ -циклом из 5-угольников при  $n \leq 31$  содержит не более девятнадцати 7-угольников. Следовательно, один из составляющих ее  $(7, 3)$ -полициклов содержит не более девяти 7-угольников. Мы перебрали все  $(7, 3)$ -полициклы с не более чем девятью 7-угольниками и получили только две сферы, которые изображены на рис. 15.5. Первая сфера появлялась в [DG02], а вторая совпадает с одной из сфер, найденных в [HKS07].

Классификация  $(\{5, 7\}, 3)$ -сфер с более чем одним циклом из 7-угольников была получена следующим образом. Можно рассматривать только

сферы  $G$ , имеющие не менее 88 вершин, поскольку сферы с указанным свойством, имеющие не более 84 вершин, были описаны в [Har00]. Из соотношения  $p_7 + x = 20$  следует, что  $x \leq 3$ . Значит, нам достаточно перебирать сферы, которые имеют не более трех вершин, содержащихся только в 5-только в 7-угольных гранях. Более того, если сфера  $G$  содержит хотя бы один цикл из 7-угольников, то она содержит хотя бы два  $(5, 3)$ -полицикла, ограниченных 7-угольниками. Легко видеть, что эти  $(5, 3)$ -полициклы принадлежат списку, приведенному в замечании 15.3.5.ii. Таким образом, наш метод заключается в следующем. Нужно взять один  $(5, 3)$ -полицикл из списка, добавить к нему цикл из 7-угольников. Затем добавлять 5- и 7-угольники всеми возможными способами, проверяя, что величина  $x$  не превысила 3 и что каждый 7-угольник граничит ровно с двумя 7-угольниками.

Этот метод позволил найти две новые  $(\{5, 7\}, 3)$ -сферы со свойством  $7R_2$ . Таким образом, получаем следующую теорему.

**Теорема 15.3.6.** *Список всех  $(\{5, 7\}, 3)$ -сфер со свойством  $7R_2$  (помимо додекаэдра) состоит из 10 сфер с одним циклом из 7-угольников (см. рис. 15.6) и 16 сфер с более чем одним циклом из 7-угольников (см. рис. 15.7).*

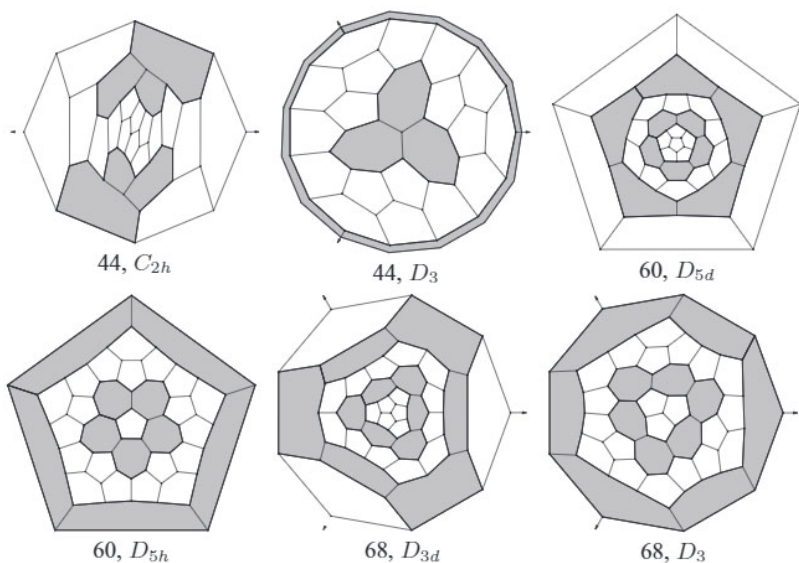


Рис. 15.7

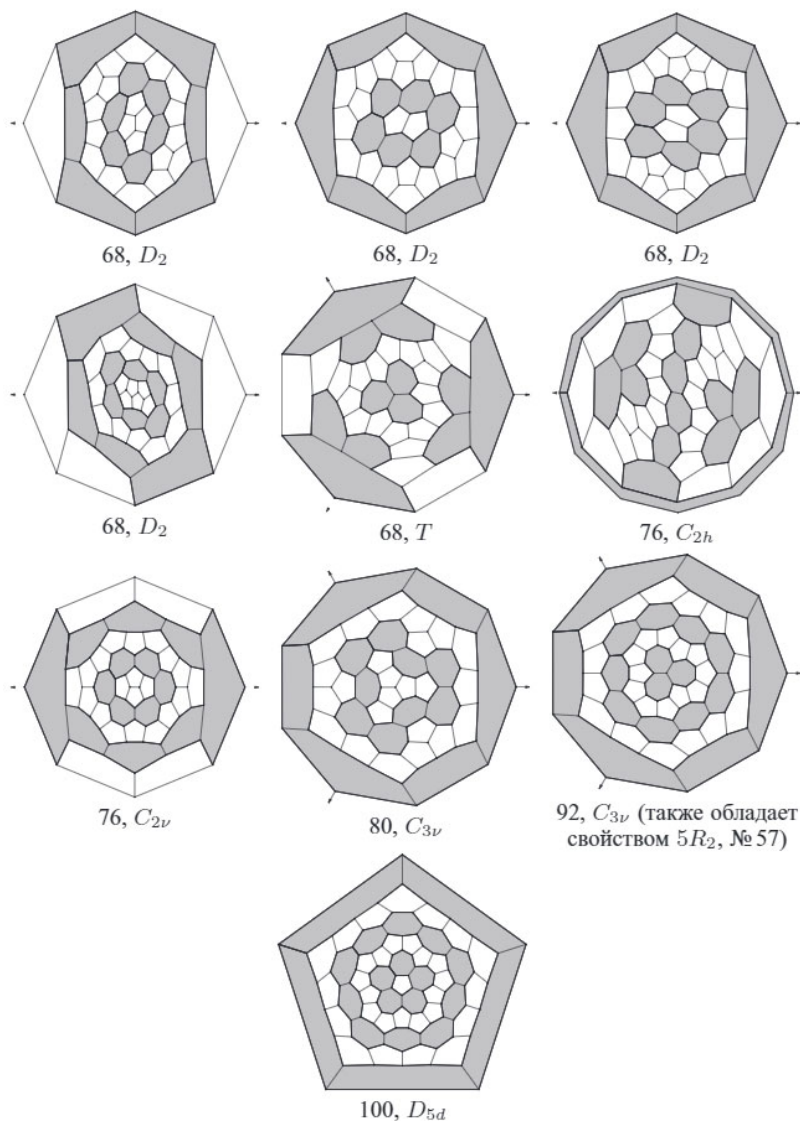


Рис. 15.7. (продолжение). Все  $(\{5, 7\}, 3)$ -сферы, в которых 7-угольники образуют  $t \geq 2$  циклов





## ГЛАВА 16

# Сферы и торы со свойством $bR_3$

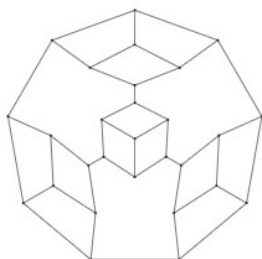
В данной главе мы получим полную классификацию  $(\{4, b\}, 3)$ -карт со свойством  $bR_3$ . В случае  $(\{5, b\}, 3)$ -карт у нас есть только некоторые результаты, касающиеся их существования.

### 16.1. Классификация $(\{4, b\}, 3)$ -карт, обладающих свойством $bR_3$

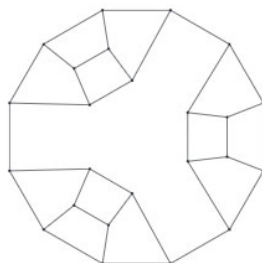
Определения  $(4, 3)$ -полициклов, которые используются в теореме ниже, можно найти в разделе 4.2.

#### Теорема 16.1.1.

- (i) При  $b \geq 5$  не существует  $(\{4, b\}, 3)$ -торов со свойством  $bR_3$ .
- (ii) Список всех  $(\{4, b\}, 3)$ -сфер со свойством  $bR_3$  приведен ниже.
  - Следующая  $(\{4, 9\}, 3)$ -сфера и 2-связная  $(\{4, 12\}, 3)$ -сфера:



28,  $T_d$  (также обладает свойством  $4R_2$ , № 35)



24,  $D_{3h}$

- При каждом  $b \geq 8$  существует одна сфера  $F_b$ , содержащая два  $(4, 3)$ -полицикла  $\{4, 3\} - e$  и два  $(4, 3)$ -полицикла  $P_2 \times P_{b-6}$ . Она имеет группу симметрии  $D_{2h}$  при  $b = 8$  и  $D_2$  при  $b > 8$ .

- При каждом  $b \geq 7$  существует одна сфера  $G_b$ , содержащая два  $(4, 3)$ -полицикла  $\{4, 3\} - v$  и три  $(4, 3)$ -полицикла  $P_2 \times P_{b-5}$ . Она имеет группу симметрии  $D_{3h}$  при  $b = 7$  и  $D_3$  при  $b > 7$ .
- При каждом  $b \geq 5$  существует одна сфера  $H_b$ , в которой есть две точки, принадлежащие трем  $b$ -угольникам, и три  $(4, 3)$ -полицикла  $P_2 \times P_{b-3}$ . Она имеет группу симметрии  $D_{3h}$  при  $b = 5$  и  $D_3$  при  $b > 5$ .
- Семейство сфер  $K_{b,h}$ , где  $1 \leq h \leq b - 5$ , содержащих два  $(4, 3)$ -полицикла  $P_2 \times P_{b-4}$ , два полицикла  $P_2 \times P_{h+1}$  и два полицикла  $P_2 \times P_{b-3-h}$ . Если  $h = 1$ , то группа симметрии равна  $O_h$  при  $b = 6$  и  $D_4$  — в противном случае. Если  $h > 1$ , то группа симметрии равна  $D_{2d}$  при  $h = \frac{b-4}{2}$  и  $D_2$  в остальных случаях.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** (i) Возьмем  $(\{4, b\}, 3)$ -карту  $G$ , обладающую свойством  $bR_3$ . Множество всех 4-угольных граней карты  $G$  разбивается на  $(4, 3)$ -полициклы:  $\{4, 3\} - v$ ,  $\{4, 3\} - e$  и  $P_2 \times P_k$ , где  $2 \leq k \leq 7$ . Рассмотрим сферу  $b(G)$ , образованную  $b$ -угольниками карты  $G$ , в которой два  $b$ -угольника считаются соседними, если у них есть общее ребро. Поскольку  $G$  обладает свойством  $bR_3$ , то карта  $b(G)$  является 3-валентной.

Каждая вершина, инцидентная трем  $b$ -угольным граням, соответствует некоторой 3-угольной грани карты  $b(G)$ . Каждый  $(4, 3)$ -полицикл  $\{4, 3\} - v$  соответствует 3-угольной грани. Каждый  $(4, 3)$ -полицикл  $\{4, 3\} - e$  соответствует некоторой 2-угольной грани. С другой стороны, все полициклы  $P_2 \times P_k$  соответствуют 4-угольным граням. На торе не существует 3-валентных карт, все грани которых имеют степень не более четырех, а на сфере такая карта должна иметь не более восьми вершин (это следует из формулы Эйлера (1.1)).

(ii) Возьмем  $(\{4, b\}, 3)$ -карту  $G$ , обладающую свойством  $bR_3$ , рассмотрим ассоциированную с ней карту  $G' = b(G)$ . Карта  $G'$  имеет не более 8 вершин, поэтому число вершин в карте  $G$  не превосходит 32, 40, 48 и 56 при  $b = 7, 8, 9, 10$  соответственно. При таких значениях имеется классификация  $(\{4, b\}, 3)$ -сфер и, таким образом, утверждение доказано при  $b \leq 10$ . Теперь допустим, что  $b \geq 11$ .

Карта  $G'$  — это 3-валентная сфера с не более чем четырехугольными гранями. Существует всего пять таких карт: тетраэдр,  $Bundle_3$ ,  $Prism_2$ ,  $Prism_3$  и куб.

Если  $G'$  — тетраэдр, то она имеет только 3-угольные грани; следовательно, все они соответствуют  $(4, 3)$ -полициклам  $\{4, 3\} - v$  или вершинам. Ясно, что либо все они соответствуют полициклам  $\{4, 3\} - v$ , либо

все они соответствуют вершинам, поскольку все грани карты  $G$  должны быть  $b$ -угольными. Эти два случая соответствуют строго регулярной сфере № 35 и тетраэдру.

Если карта  $G'$  — это  $Bundle_3$ , то, очевидно, получается указанная выше 2-связная сфера.

Если карта  $G'$  — это  $Prism_2$ , то ее множество граней состоит из двух 2-угольников и двух 4-угольников. Следовательно, карта  $G$  образована двумя  $(4, 3)$ -полициклами  $\{4, 3\} - e$ , одним  $(4, 3)$ -полициклом  $P_2 \times P_k$  и одним  $(4, 3)$ -полициклом  $P_2 \times P_{k'}$ , где вообще говоря  $k \neq k'$ . Для данного полицикла  $P_2 \times P_k$ , смежного с  $b$ -угольными гранями  $F_1, F_2, F_3$  и  $F_4$ , последовательность из  $(k - 1)$ -го 4-угольника может граничить либо с  $F_1$  и  $F_3$ , либо с  $F_2$  и  $F_4$ . Следовательно, нужно выбрать ориентации  $(4, 3)$ -полициклов  $P_2 \times P_k$ .

Для каждой 4-угольной грани карты  $G'$  есть два варианта ориентации полициклов  $P_2 \times P_k$ . Следовательно, всего есть четыре варианта, а с точностью до изоморфизма — два варианта. В одном из этих вариантов некоторая  $b$ -угольная грань будет иметь корону  $4b4b444b$ , что невозможно. Значит, нужно выбирать ориентацию 4-угольных граней таким образом, чтобы их короны имели вид  $4^{b-7}b4b444b$ ; следовательно,  $k = k'$ , и получается сфера  $F_b$ .

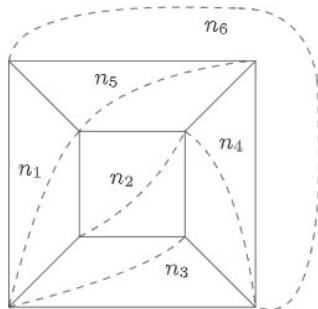
Если карта  $G'$  — это  $Prism_3$ , то две ее 3-угольные грани соответствуют в сфере  $G$  либо полициклам  $\{4, 3\} - v$ , либо вершинам, инцидентным только  $b$ -угольным граням. Три 4-угольные грани соответствуют  $(4, 3)$ -полициклам  $P_2 \times P_{k_i}$ , где  $1 \leq i \leq 3$ . Требуется определить значения  $k_i$  и ориентации соответствующих полициклов.

Обозначим через  $(F_j)_{1 \leq j \leq 3}$  и  $(F'_j)_{1 \leq j \leq 3}$  два цикла длины 3 из граней. Рассмотрим грани  $F_i$ . Их граничные коды могут иметь вид либо  $b\alpha b4b4$ , либо  $b\alpha b4^{k_i-1}b4$ , либо  $b\alpha b4^{k_i-1}b4^{k_{i'}-1}$ . Здесь слово  $\alpha$  пусто, если  $F_i$  имеют общую вершину, и  $\alpha = 44$ , если грани  $F_i$  граничат с общим  $(4, 3)$ -полициклом  $\{4, 3\} - v$ . Ясно, что первый вариант, т. е.  $b\alpha b4b4$ , невозможен, поскольку он приводит к степени 5 или 7. Значит, вариант  $b\alpha b4^{k_i-1}b4^{k_{i'}-1}$  тоже невозможен, и грани  $F_i$  должны иметь граничный код вида  $b\alpha b4^{k_i-1}b4$ . Отсюда следует, что  $k_1 = k_2 = k_3$ .

Для граней  $F'_i$  с помощью таких же рассуждений получаем, что их граничный код имеет вид  $b\alpha' b4^{k_i-1}b4$ , где слово  $\alpha'$  пусто в случае вершины и равно 44 в случае полицикла  $\{4, 3\} - v$ . Значит,  $\alpha = \alpha'$ , т. е. либо в обоих случаях имеется общая вершина, либо в обоих случаях имеется  $(4, 3)$ -полицикл  $\{4, 3\} - v$ . В результате получаются серии  $G_b$  и  $H_b$ .

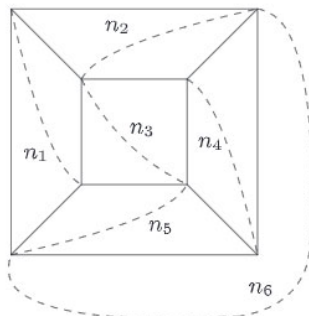
Теперь предположим, что  $G'$  — куб. Как уже обсуждалось выше, все 4-угольные грани карты  $G$  должны быть сгруппированы в  $(4, 3)$ -полицик-

лы  $P_2 \times P_k$ . Нам нужно выбрать ориентацию на каждой 4-угольной грани карты  $G'$ . Поскольку есть два варианта выбора для каждой из шести граней, то всего получается 64 варианта. Каждая  $b$ -угольная грань должна граничить хотя бы с одной последовательностью из 4-угольников. Из-за этого остается 22 случая. А с точностью до симметрии есть всего 3 случая (очень похожее рассуждение проводилось в теореме 9.2.2). Первый из этих случаев изображен ниже.



Буквы соответствуют длине  $(4, 3)$ -полициклов следующим образом:  $n_1$  соответствует  $P_2 \times P_{n_1+1}$ . Каждая вершина инцидентна трем 4-угольным граням. Таким образом, появляются три пунктирных пути. Если какие-то два из этих путей инцидентны данной вершине, т. е. если соответствующие  $(4, 3)$ -полициклы граничат с данной  $b$ -угольной гранью по изолированным 4-угольникам, то длина третьей пунктирной линии однозначно определена. Отсюда  $n_2 = n_5 = n_6 = n_3 = b - 4$ . Теперь рассмотрим случай, когда вершина инцидентна только одной пунктирной линии. Учитывая уже найденные соотношения, ясно, что  $n_1 = n_4 = 1$ . Получается карта  $K_{b,1}$ .

Второй случай изображен ниже.



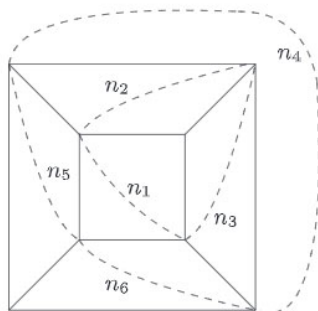


С помощью таких же рассуждений получаем, что  $n_1 = n_4 = b - 5$ . Аналогичные соображения для других вершин дают уравнения

$$n_3 + n_5 = n_3 + n_2 = n_2 + n_6 = n_5 + n_6 = b - 4.$$

Отсюда  $n_5 = n_6$ ,  $n_3 = n_6$  и  $n_3 = b - 4 - n_2$ . Эти значения соответствуют карте  $K_{b,h}$ .

Третий случай изображен ниже.



Получаем, что  $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = n_6 = b - 5$ . Две оставшиеся вершины, не инцидентные ни одной пунктирной линии, дают уравнение  $3(b - 5) = b - 3$ , т. е.  $b = 6$ , а этот случай уже рассмотрен. ■

На рис. 16.1, 16.2, 16.3 и 16.4 изображены все слабо регулярные  $(\{4, b\}, 3)$ -сферы со свойством  $bR_3$  при  $b = 7, 8, 9$  и  $10$  соответственно.

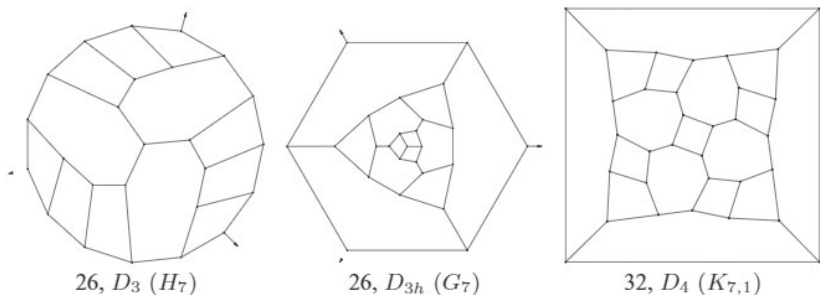


Рис. 16.1. Все регулярные  $(\{4, 7\}, 3)$ -сферы со свойством  $7R_3$ , за исключением куба

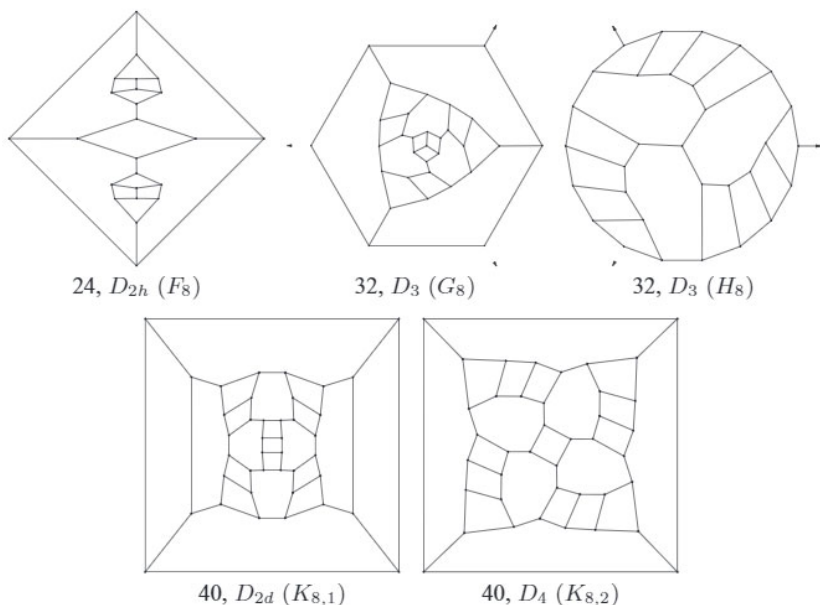


Рис. 16.2. Все регулярные  $\{4, 8, 3\}$ -сферы со свойством  $8R_3$ , за исключением куба

## 16.2. $(\{5, b\}, 3)$ -карты, обладающие свойством $bR_3$

### Теорема 16.2.1.

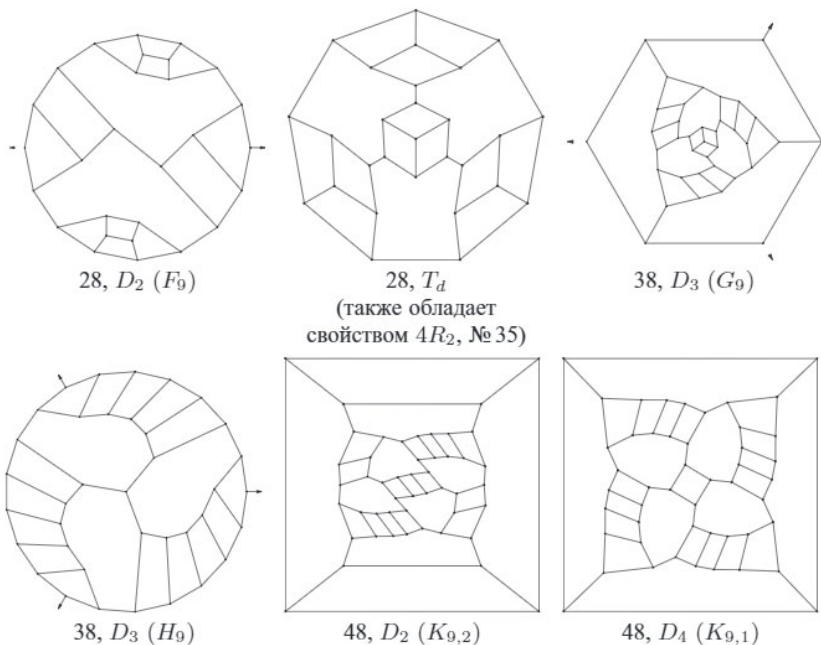
- (i)  $(\{5, 7\}, 3)$ -тор обладает свойством  $7R_3$  тогда и только тогда, когда он обладает свойством  $5R_1$ .

Более того, соответствующая  $(\{5, 7\}, 3)$ -плоскость со свойством  $5R_1$  принадлежит к случаю 17 из таблицы 9.3.

- (ii) Всякая  $(\{5, 7\}, 3)$ -сфера со свойством  $7R_3$  удовлетворяет соотношению  $x_0 + x_3 = 20$ , где через  $x_i$  обозначено число вершин, инцидентных  $i$  5-угольным граням.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Сначала предположим, что дан тор, обладающий свойством  $7R_3$ . Имеют место стандартные соотношения

$$p_5 = p_7 \quad \text{и} \quad e = 6p_7.$$

Рис. 16.3. Все регулярные  $(\{4, 9\}, 3)$ -сферы со свойством  $9R_3$ , за исключением куба

Далее, из свойства  $7R_3$  следует, что

$$e_{7-7} = \frac{3}{2} p_7, \quad e_{5-7} = 4p_7 \quad \text{и} \quad e_{5-5} = \frac{1}{2} p_7.$$

Выражая эти величины через  $x_i$ , получаем

$$2e_{7-7} = 3x_0 + x_1, \quad e_{5-7} = x_1 + x_2 \quad \text{и} \quad 2e_{5-5} = x_2 + 3x_3.$$

Комбинируя эти равенства, получаем

$$0 = 3p_7 + p_7 - 4p_7 = 2e_{7-7} - e_{5-7} + 2e_{5-5} = 3x_0 + 3x_3,$$

откуда  $x_0 = x_3 = 0$  и, следовательно,  $x_1 = 3p_7$ ,  $x_2 = p_7$ . Обозначим через  $p_{5,k}$  число 5-угольных граней, инцидентных ровно  $k$  экземплярам 5-угольников. Простой подсчет дает равенства

$$x_1 = 5p_{5,0} + 3p_{5,1} + p_{5,2} \quad \text{и} \quad 2x_2 = 2p_{5,1} + 4p_{5,2}.$$

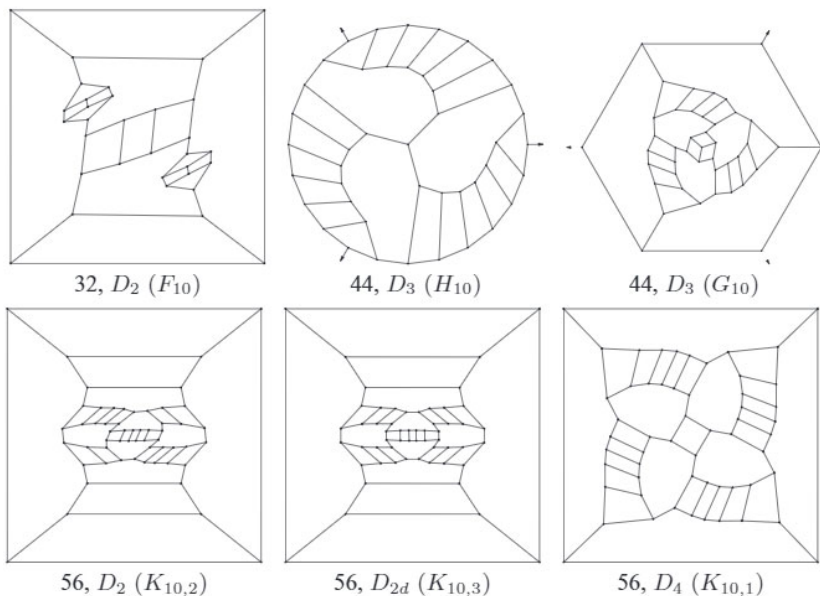


Рис. 16.4. Все регулярные  $(\{4, 10\}, 3)$ -сферы со свойством  $10R_3$ , за исключением куба

Поскольку  $x_2 = p_7 = p_5 = p_{5,1} + p_{5,2}$ , получаем  $p_{5,2} = 0$ , откуда  $p_{5,0} = 0$ , а значит наш тор обладает свойством  $5R_1$ .

С другой стороны, если тор обладает свойством  $5R_1$ , то такие же вычисления дают равенства  $x_0 = x_3 = 0$ ,  $x_1 = 3p_7$  и  $x_2 = p_7$ .

Обозначим теперь через  $p_{7,k}$  число 7-угольных граней, инцидентных ровно  $k$  экземплярам 7-угольных граней. Получаем

$$x_2 = 7p_{7,0} + 5p_{7,1} + 3p_{7,2} + p_{7,3} \quad \text{и} \quad 2x_1 = 2p_{7,1} + 4p_{7,2} + 6p_{7,3}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} 0 &= 6p_7 - 2x_1 = \\ &= 6(p_{7,0} + p_{7,1} + p_{7,2} + p_{7,3}) - (2p_{7,1} + 4p_{7,2} + 6p_{7,3}) = \\ &= 6p_{7,0} + 4p_{7,1} + 2p_{7,2}. \end{aligned}$$

Таким образом,  $p_{7,0} = p_{7,1} = p_{7,2} = 0$  и тор обладает свойством  $7R_3$ .

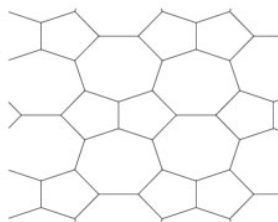
Доказательство в случае сфер очень похоже; мы только приведем отличающиеся формулы:

$$p_5 = 12 + p_7 \quad \text{и} \quad e = 30 + 6p_7,$$

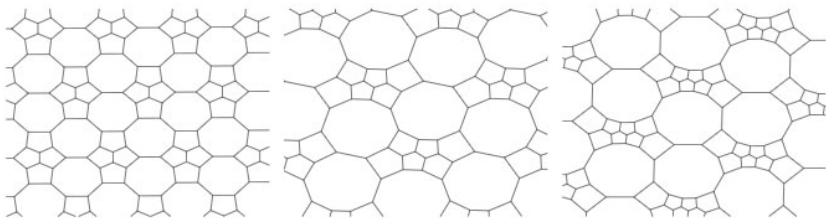
из которых следует, что  $3x_0 + 3x_3 = 2e_{7-7} - e_{5-7} + 2e_{5-5} = 60$ . ■

**Теорема 16.2.2.** При каждом  $b \geq 7$  существует  $(\{5, b\}, 3)$ -тор, обладающий свойством  $bR_3$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Возьмем следующий  $(\{5, 7\}, 3)$ -тор со свойствами  $5R_1$  и  $7R_3$  (случай 17)



и заменим каждую пару смежных 5-угольников на элементарный  $(5, 3)$ -полицикл  $E_{2n}$ . Получится  $(\{5, 7+n\}, 3)$ -тор, обладающий свойством  $(7+n)R_3$ . Ниже изображены такие торы при  $b = 8, 9$  и  $10$ . ■

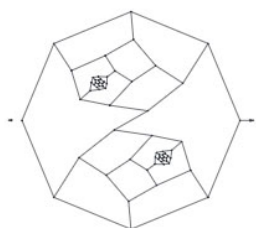
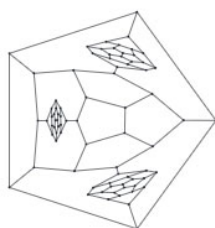


**Гипотеза 16.2.3.** При каждом  $b \geq 7$  существует бесконечно много  $(\{5, b\}, 3)$ -сфер со свойством  $bR_3$ .

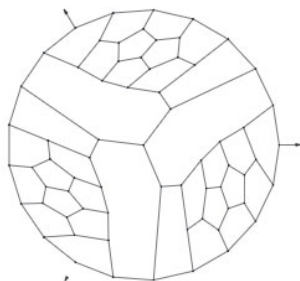
**Теорема 16.2.4.** Существует бесконечно много  $(\{5, b\}, 3)$ -сфер со свойством  $bR_3$  при  $b = 9, 10$  и  $12$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Следующие  $(\{5, 9\}, 3)$ -,  $(\{5, 10\}, 3)$ -сферы

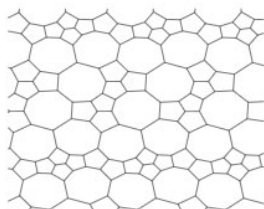
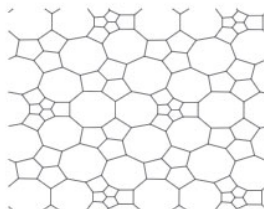
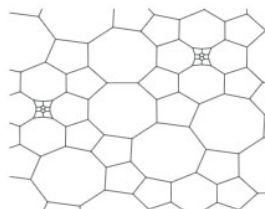


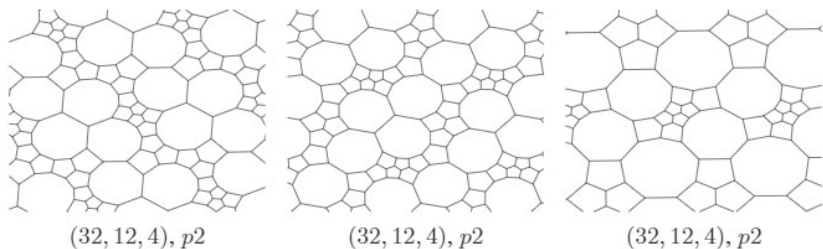
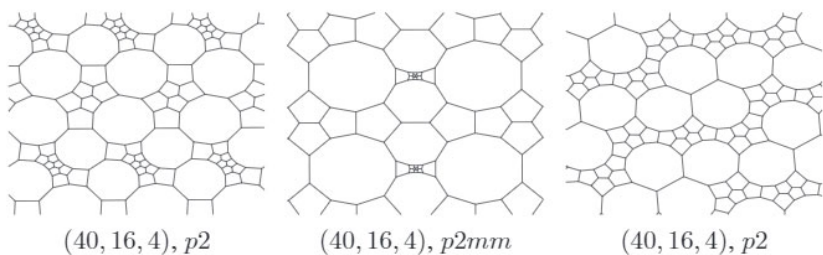
68,  $C_2$ 80,  $C_s$ 

обладают свойствами  $9R_3$ ,  $10R_3$  и содержат по два  $(5, 3)$ -полицикла  $A_2$ ; следовательно, с помощью теоремы 11.0.2 разрешаются случаи  $b = 9$  и  $10$ . Усечем две противоположные вершины оси симметрии 3-го порядка следующей  $(\{5, 9\}, 3)$ -сферы со свойством  $9R_3$ ,

68,  $D_3$ 

а затем заполним получившиеся в результате усечения треугольники  $(5, 3)$ -полициклами  $A_3$ . В результате получится  $(\{5, 12\}, 3)$ -сфера со свойством  $12R_3$ . Теперь из теоремы 11.0.2 следует случай  $b = 12$ . ■

(36, 12, 6),  $p_2$ (36, 12, 6),  $p_{31m}$ (48, 16, 8),  $p_2$ Рис. 16.5. Некоторые  $(\{5, 8\}, 3)$ -торы со свойством  $8R_3$

Рис. 16.6. Некоторые  $(\{5, 9\}, 3)$ -торы со свойством  $9R_3$ Рис. 16.7. Некоторые  $(\{5, 10\}, 3)$ -торы со свойством  $10R_3$ 

На рис. 16.5, 16.6 и 16.7 изображены некоторые  $(\{5, b\}, 3)$ -торы, обладающие свойством  $bR_3$ , при  $b = 8, 9$  и  $10$  соответственно.



## ГЛАВА 17

# Сферы и торы со свойством $bR_4$

В этой главе мы приводим классификацию всех  $(\{4, b\}, 3)$ -сфер со свойством  $bR_4$  при  $b \leq 8$ . Кроме того, мы получаем необходимые и достаточные условия существования  $(\{4, b\}, 3)$ -торов со свойством  $bR_4$ .

Здесь будут использоваться  $(4, 3)$ -полициклы, определенные в разделе 4.2.

### 17.1. $(\{4, b\}, 3)$ -карты со свойством $bR_4$

**Лемма 17.1.1.** Пусть  $(\{4, b\}, 3)$ -сфера или тор  $G$  обладает свойством  $bR_4$ . Обозначим через  $x_i$  число вершин, которые содержатся ровно в  $i$  экземплярах 4-угольных граней. Тогда

$$\begin{cases} x_0 + x_3 = 8 & \text{на сфере,} \\ x_0 + x_3 = 0 & \text{на торе.} \end{cases}$$

**Доказательство.** Обозначим через  $G' = b(G)$  карту, образованную всеми  $b$ -угольными гранями относительно их смежности (наличие общего ребра); это 4-валентная карта. Множество 4-угольных граней карты  $G$  разбивается на  $(4, 3)$ -полициклы  $\{4, 3\} - v$ ,  $\{4, 3\} - e$  и  $P_2 \times P_k$ , где  $k \geq 2$ . Обозначим через  $p_{\{4,3\}-v}, \dots$  число соответствующих полициклов.

Из этих полициклов получаются соответственно 3-, 2- и 4-угольные грани карты  $G'$ . Остальные грани карты  $G'$  являются 3-угольными и соответствуют тем вершинам карты  $G$ , которые инцидентны трем  $b$ -угольным граням.

Таким образом,  $G'$  — это 4-валентная карта с 2-, 3- и 4-угольными гранями. Формула Эйлера (1.1) для таких карт имеет вид  $4\chi = 2p_2 + p_3$ , где через  $p_i$  обозначено число  $i$ -угольных граней, а  $\chi = 2$  для сфер и 0 для торов. Ясно, что  $p_2 = p_{\{4,3\}-e}$  и  $p_3 = p_{\{4,3\}-v} + x_0$ . Поэтому

$$4\chi = 2p_{\{4,3\}-e} + p_{\{4,3\}-v} + x_0.$$

Оказывается, что  $x_3 = 2p_{\{4,3\}-e} + p_{\{4,3\}-v}$ . ■

Для последней теоремы есть и более стандартное доказательство, не использующее классификацию  $(4, 3)$ -полициклов. Оно очень полезно для классификации соответствующих карт.

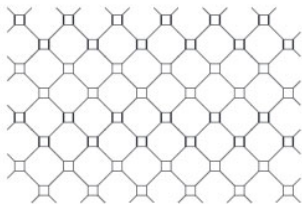
### Теорема 17.1.2.

- (i)  $(\{4, b\}, 3)$ -торы со свойством  $bR_4$  существуют, если и только если  $b \geq 8$ .
- (ii)  $(\{4, 8\}, 3)$ -тор обладает свойством  $8R_4$ , если и только если он обладает свойством  $4R_0$ .
- (iii) Всякий  $(\{4, b\}, 3)$ -тор, обладающий свойством  $bR_4$ , не содержит ни  $(4, 3)$ -полициклов  $\{4, 3\} - v$  и  $\{4, 3\} - e$ , ни вершин, инцидентных только  $b$ -угольникам. Такой тор определяется заданием ориентации  $(4, 3)$ -полициклов  $P_2 \times P_k$  в 4-валентном паркете на торе.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** (i) Стандартные соображения (подсчет двумя способами и формула Эйлера) дают соотношения:

$$p_4 = \frac{b-6}{2} p_b \quad \text{и} \quad e_{4-4} = \frac{b-8}{2} p_b.$$

Отсюда вытекает, что  $(\{4, b\}, 3)$ -тор со свойством  $bR_4$  существует, если и только если  $b \geq 8$ . С другой стороны, существует единственная  $(\{4, 8\}, 3)$ -плоскость со свойством  $8R_4$  (случай 14 в таблице 9.1, см. рис. 9.5); нужно перестроить ее так, чтобы получилась  $(\{4, b\}, 3)$ -плоскость. Для этого мы используем следующую схему



и заменяем каждый 4-угольник с двумя выделенными ребрами на  $(4, 3)$ -полицикл  $P_2 \times P_{b-6}$ .

(ii) Если  $b = 8$ , то  $e_{4-4} = 0$ , т.е. все 4-угольники изолированы. С другой стороны, если  $(\{4, 8\}, 3)$ -тор обладает свойством  $4R_0$ , то каждый 8-угольник граничит не более чем с четырьмя 4-угольниками, откуда легко получить требуемое.



(iii) Для каждого  $(\{4, b\}, 3)$ -тора со свойством  $bR_4$  по лемме 17.1.1 выполняется равенство  $x_0 + x_3 = 0$ . Следовательно,  $x_0 = x_3 = 0$ . Далее,  $P_{\{4,3\}-e} = P_{\{4,3\}-v} = 0$ . Значит, все  $(4, 3)$ -полициклы имеют вид  $P_2 \times P_k$ . С другой стороны, карта  $b(G)$  представляет собой, очевидно, 4-валентный паркет на торе. Каждая ее вершина соответствует  $b$ -угольной грани, а каждый 4-угольник соответствует  $(4, 3)$ -полициклу  $P_2 \times P_k$ . Для того, чтобы задать тор, нам остается только выбрать ориентацию такого полицикла и значение  $k$ . ■

Из теоремы 11.1.4 следует, что число  $(\{4, 7\}, 3)$ -сфер со свойством  $7R_4$  конечно. Они изображены на рис. 17.1.

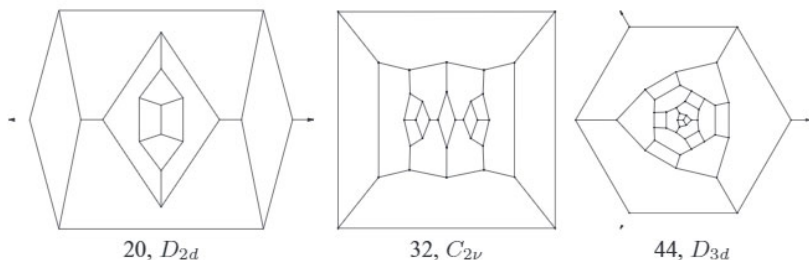


Рис. 17.1. Все регулярные  $(\{4, 7\}, 3)$ -сферы со свойством  $7R_4$ , за исключением куба и строго регулярных карт № 27, 28, 30 и 31

**Гипотеза 17.1.3.** Все  $(\{4, 8\}, 3)$ -сферы, обладающие свойством  $8R_4$ , принадлежат следующему списку сфер с  $v$  вершинами.

- 1) Две бесконечные серии сфер, которые содержат ровно один  $(4, 3)$ -полицикл  $\{4, 3\} - e$ ,  $v = 32 + 8t$  ( $t \geq 0$ ). При нечетных  $t$  сферы из этих серий изоморфны и имеют группу симметрии  $C_{2i}$ ; при четных положительных  $t$  они не изоморфны, в одной серии сферы имеют группу симметрии  $C_{2h}$ , а в другой группу симметрии  $C_{2v}$ . При  $t = 0$  сфера обладает симметриями не только из группы  $C_{2h}$ , но и из большей группы  $D_{2h}$  (см. рис. 17.9).
- 2) Две бесконечные серии сфер, которые содержат ровно четыре  $(4, 3)$ -полицикла  $\{4, 3\} - v$ ,  $v = 32 + 16t$  ( $t \geq 0$ ). Их группы симметрии равны  $D_{2d}$ ,  $D_{2h}$ . Если  $t = 0$ , то сфера обладает не только симметриями из группы  $D_{2d}$ , но и из большей группы  $T_d$  (см. рис. 17.10). Первыми представителями этих серий являются № 33 и № 32.

- 3) Четыре бесконечные серии сфер, которые содержат ровно два  $(4, 3)$ -полицикла  $\{4, 3\} - v$  и шесть  $(4, 3)$ -полициклов  $P_2 \times P_3$ ,  $v = 80 + 24t$  ( $t \geq 0$ ). В двух сериях группа симметрии равна  $C_2$ , в одной группа симметрии равна  $C_{2v}$  и в одной  $C_{2h}$  (см. рис. 17.11).
- 4) Две бесконечные серии сфер, которые содержат двенадцать  $(4, 3)$ -полициклов  $P_2 \times P_3$ , имеют  $v = 144 + 16t$  вершин ( $t \geq 0$ ) и группу симметрии  $D_2$  (см. рис. 17.12).
- 5) Три бесконечных серии сфер, которые содержат двенадцать  $(4, 3)$ -полициклов  $P_2 \times P_3$ , имеют  $v = 128 + 32t$  вершин ( $t \geq 0$ ) и группы симметрии  $D_2$ ,  $D_{2d}$  и  $D_{2h}$  соответственно (см. рис. 17.13).
- 6) Набор отдельных примеров, изображенных на рис. 17.2–17.8 (включая № 34).

Ниже мы объясним, почему представляется вероятным, что это полный список. На компьютере был выполнен перебор, использующий следующие два соотношения (см. теоремы 11.1.4 и 17.1.1):

$$e_{4-4} = 12, \quad x_0 + x_3 = 8,$$

т. е. если в процессе перебора при построении некоторой карты образуется фрагмент с  $e_{4-4} > 12$  или  $x_0 + x_3 > 8$ , то этот случай можно отбросить.

Множество всех 4-угольных граней разбивается на  $(4, 3)$ -полициклы. Ясно, что это могут быть только полициклы  $\{4, 3\} - v$ ,  $\{4, 3\} - e$ ,  $P_2 \times P_2$ ,  $P_2 \times P_3$ ,  $P_2 \times P_4$  и  $P_2 \times P_5$ .

Перебор состоит из следующих этапов.

- 1) Возьмем в качестве начального участка  $(\{4, 8\}, 3)$ -полицикл, состоящий из  $(4, 3)$ -полицикла  $P_2 \times P_5$ , окруженного четырьмя 8-угольниками. На следующих этапах можно считать, что полицикл  $P_2 \times P_5$  не появляется.
- 2) Возьмем в качестве начального участка  $(\{4, 8\}, 3)$ -полицикл, состоящий из  $(4, 3)$ -полицикла  $\{4, 3\} - e$ , окруженного двумя 8-угольниками. На следующих этапах можно считать, что сфера не содержит полицикл  $\{4, 3\} - e$ .
- 3) Возьмем в качестве начального участка  $(\{4, 8\}, 3)$ -полицикл, состоящий из  $(4, 3)$ -полицикла  $\{4, 3\} - v$ , окруженного тремя 8-угольниками. На следующих этапах можно считать, что  $x_3 = 0$ .

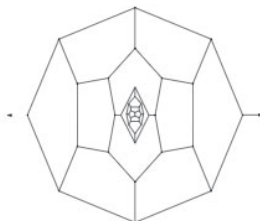
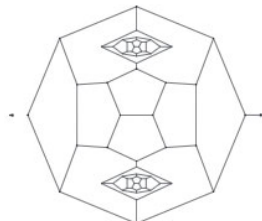
- 4) Возьмем в качестве начального участка  $(\{4, 8\}, 3)$ -полицикл, состоящий из  $(4, 3)$ -полицикла  $P_2 \times P_4$ , окруженного четырьмя 8-угольниками. На следующих этапах можно считать, что полицикл  $P_2 \times P_4$  не появляется.
- 5) Возьмем в качестве начального участка  $(\{4, 8\}, 3)$ -полицикл, состоящий из  $(4, 3)$ -полицикла  $P_2 \times P_3$ , окруженного четырьмя 8-угольниками.

Ни одна из программ, соответствующих этим этапам, не завершает работу. Точнее, программы выдают некоторое количество отдельных карт и затем генерируют карты из бесконечных серий, указанных в нашей гипотезе. Таким образом, наша гипотеза верна для сфер, имеющих не более 400 вершин. Но для того, чтобы доказать ее, потребовался бы более глубокий анализ поведения этих программ, и число технических деталей, с точки зрения программирования, было бы громадным.

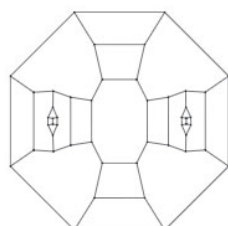
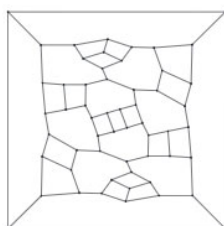
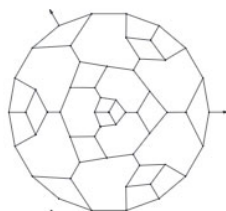
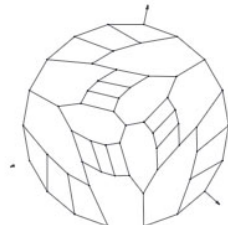
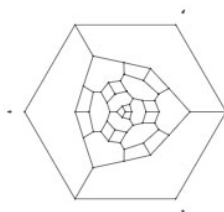
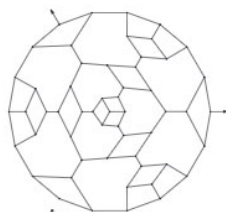
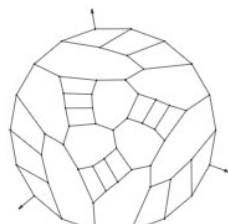
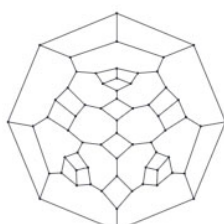
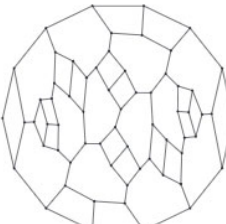
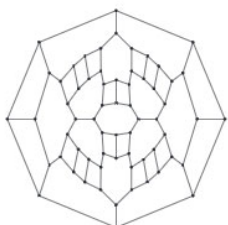
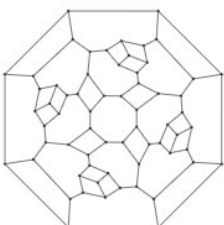
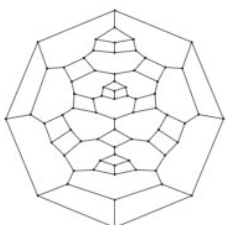
## 17.2. $(\{5, b\}, 3)$ -карты со свойством $bR_4$

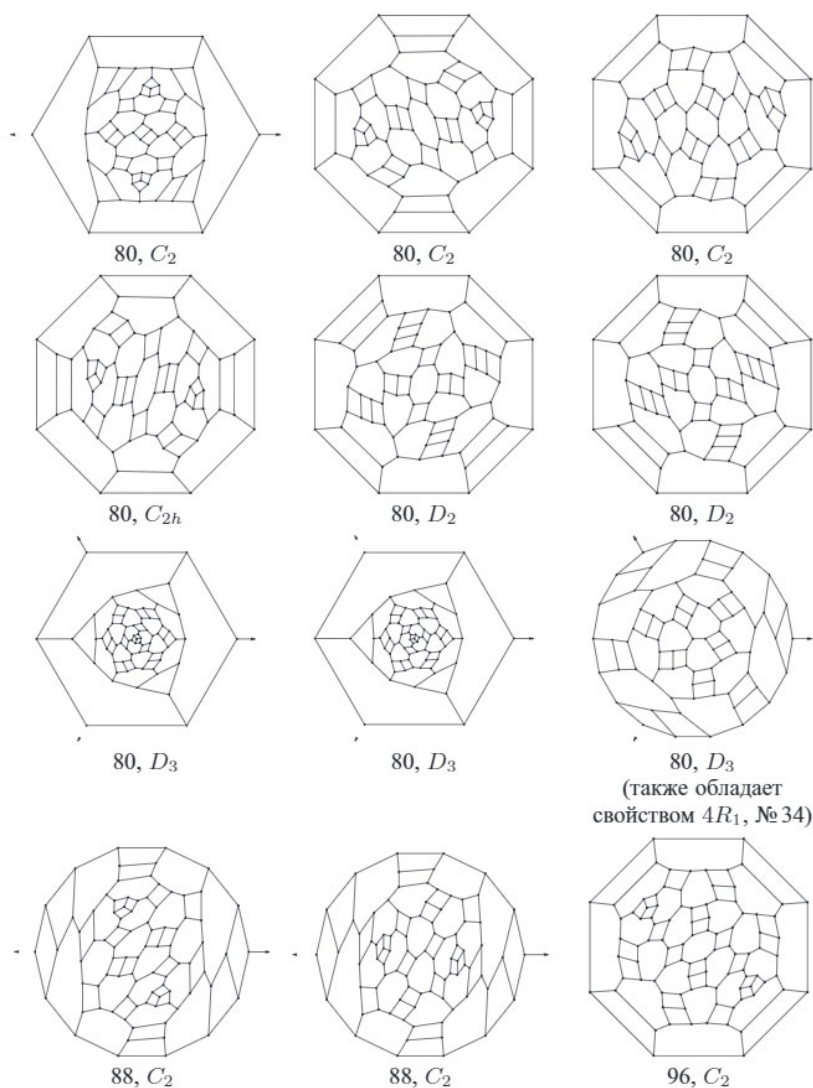
**Теорема 17.2.1.** *Существует бесконечная серия  $(\{5, 8\}, 3)$ -сфер со свойством  $8R_4$ .*

**Доказательство.** Возьмем в додекаэдре некоторое ребро и поместим в середину этого ребра 4-угольник. Внутри этого 4-угольника можно поместить еще один додекаэдр, разрезав одно из его ребер и подклеив его концы внутри 4-угольника. Эту конструкцию можно обобщить, делая разрезы на противоположных ребрах додекаэдра. Первые примеры изображены ниже. ■

44,  $D_{2d}$ 68,  $D_{2h}$ 

В этом построении необязательно разрезать именно противоположные ребра додекаэдра — есть и другие способы. На самом деле, для каждого ребра додекаэдра есть пять других ребер, каждое из которых можно разрезать и получить  $(\{5, 8\}, 3)$ -сферу со свойством  $8R_4$ .

48,  $D_{2h}$ 56,  $C_2$ 56,  $C_{3v}$ 56,  $D_3$ 56,  $D_{3d}$ 56,  $T_d$ 56,  $T_h$ 64,  $C_s$ 64,  $C_2$ 64,  $D_{2d}$ 64,  $C_{4h}$ 72,  $C_s$ Рис. 17.2.  $(\{4, 8\}, 3)$ -сферы со свойством  $8R_4$ : отдельные случаи (первая часть)

Рис. 17.3.  $(\{4, 8\}, 3)$ -сферы со свойством  $8R_4$ : отдельные случаи (вторая часть)



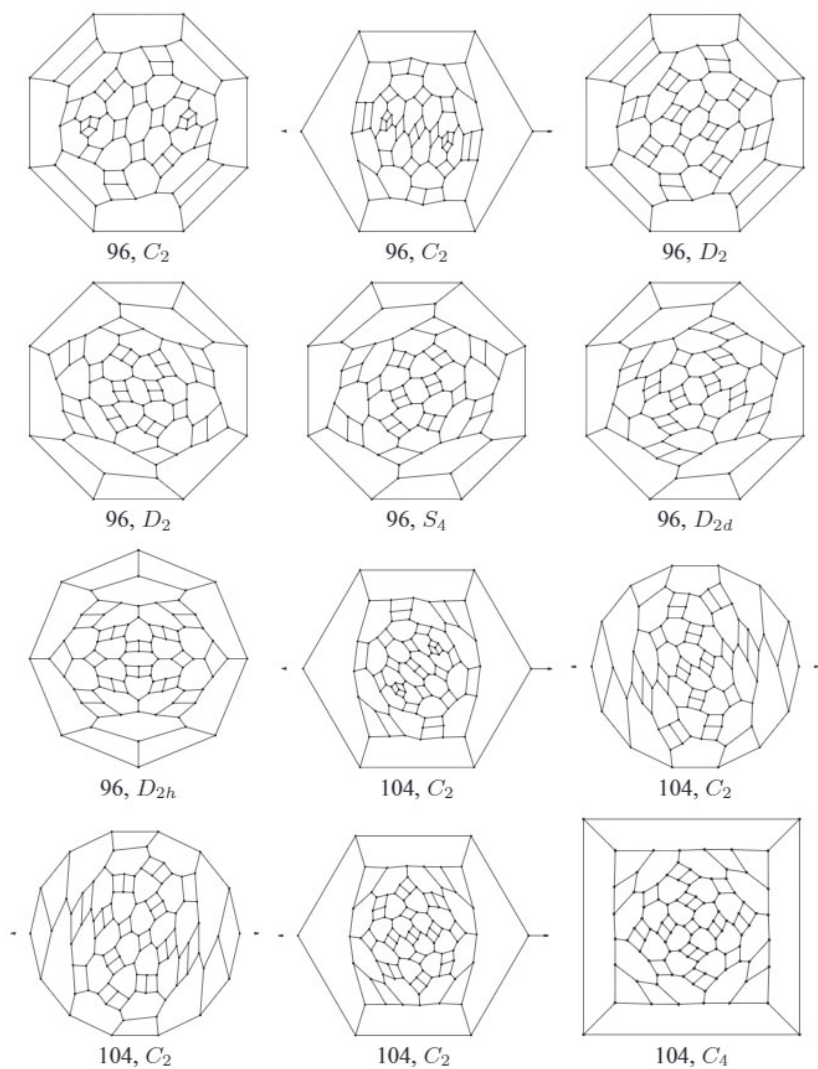
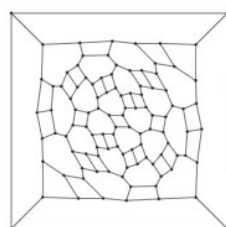
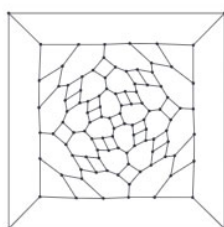
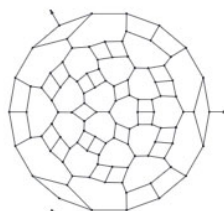
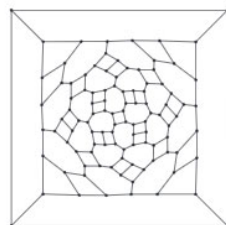
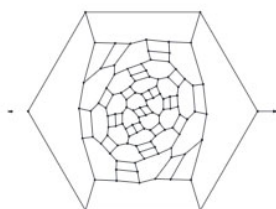
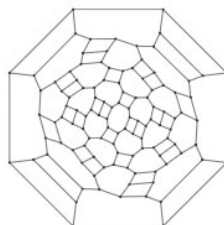
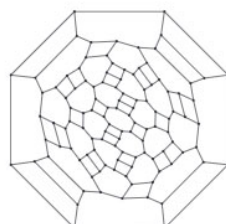
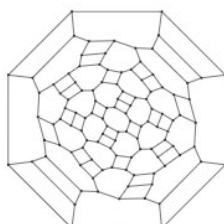
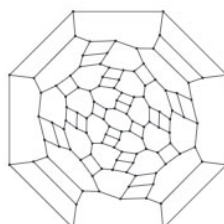
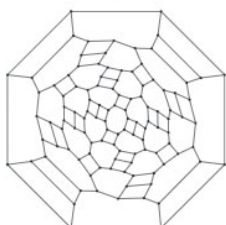
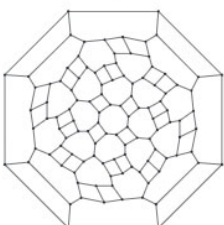
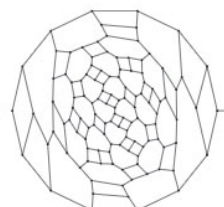


Рис. 17.4.  $(\{4, 8\}, 3)$ -сферы со свойством  $8R_4$ : отдельные случаи (третья часть)

104,  $D_2$ 104,  $D_4$ 104,  $D_{3d}$ 104,  $O$ 112,  $C_2$ 112,  $C_2$ 112,  $D_2$ 112,  $D_2$ 112,  $D_2$ 112,  $D_2$ 112,  $D_4$ 120,  $C_2$ Рис. 17.5.  $(\{4, 8\}, 3)$ -сферы со свойством  $8R_4$ : отдельные случаи (четвертая часть)

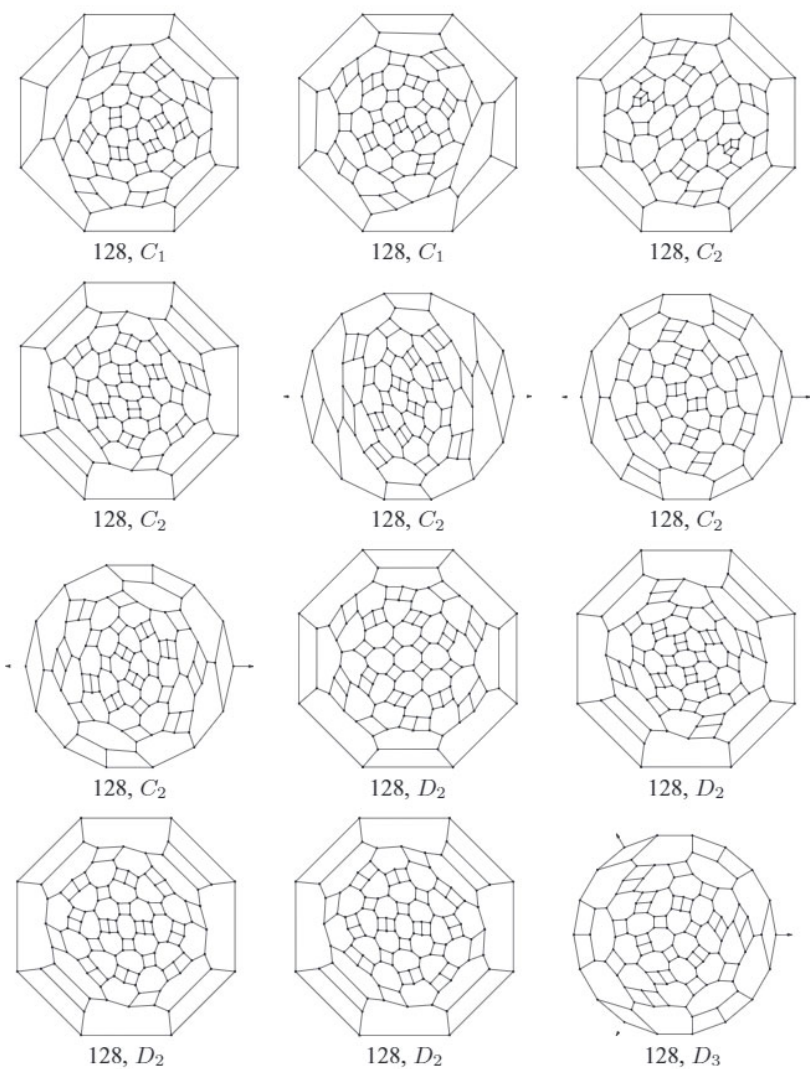
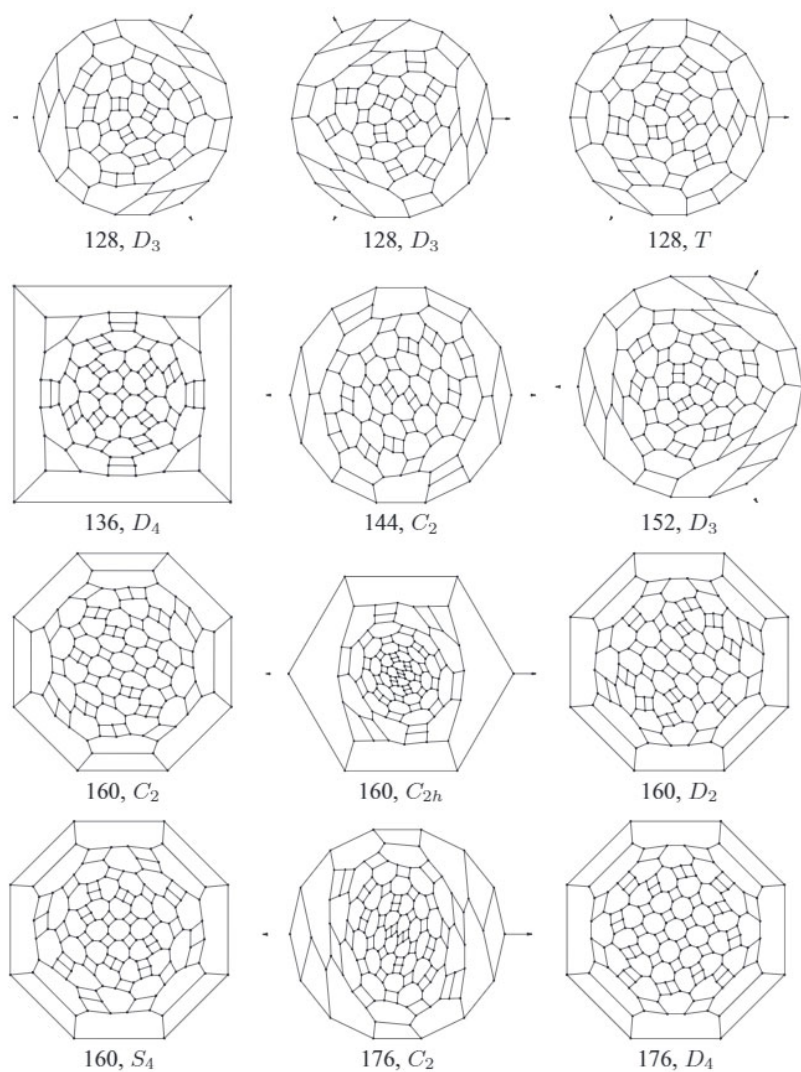


Рис. 17.6.  $(\{4, 8\}, 3)$ -сферы со свойством  $8R_4$ : отдельные случаи (пятая часть)

Рис. 17.7.  $(\{4, 8\}, 3)$ -сферы со свойством  $8R_4$ : отдельные случаи (шестая часть)

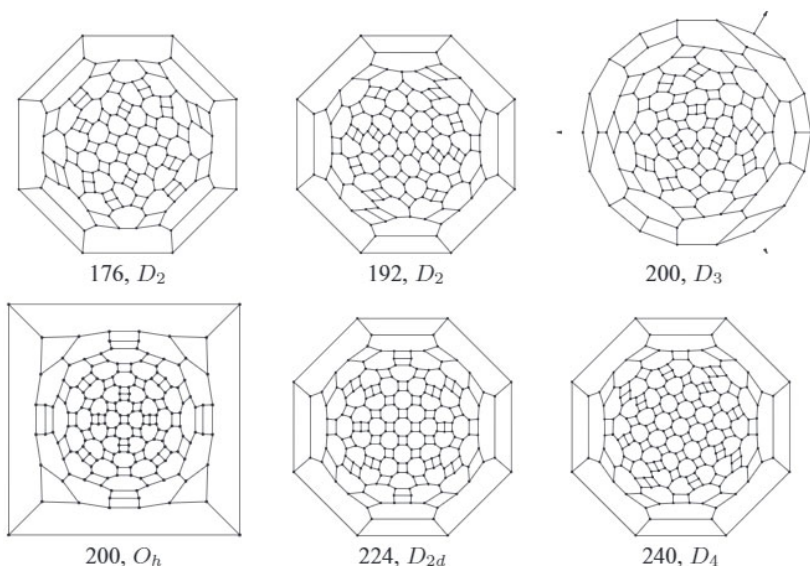


Рис. 17.8.  $(\{4, 8\}, 3)$ -сферы со свойством  $8R_4$ : отдельные случаи (седьмая часть)

**Теорема 17.2.2.** *Всякая  $(\{5, 7\}, 3)$ -сфера со свойством  $7R_4$ , в которой 5-угольные грани образуют хотя бы один  $(5, 3)$ -полицикл, граничный код которого содержит не более трех двоек, принадлежит бесконечной серии таких сфер, имеющих  $v = 20 + 24t$  вершин,  $t \geq 1$ , и группу симметрии  $D_{3d}$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Обозначим через  $v_3$ ,  $v_2$  число вершин степени 3, 2 на границе, тогда получаем  $v_3 \leq 2v_2$  и  $v_2 \leq 3$ .

Из формулы  $p_5 = 6 - v_2 + v_3$  для числа 5-угольных граней в  $(5, 3)$ -полицикле (см. теорему 5.2.1) следует, что  $p_5 \leq 9$ . Полный перебор всех  $(5, 3)$ -полициклов из девяти 5-угольников показывает, что возможен только элементарный  $(5, 3)$ -полицикл  $A_3$ .

Теперь мы расширим этот полицикл, добавив вокруг него 7-угольники. Поскольку каждый 7-угольник граничит с четырьмя 7-угольниками, то нужно добавить еще одно кольцо из 7-угольников. Каждая 7-угольная грань в этих кольцах граничит с четырьмя 7-угольными гранями. Следовательно, мы должны добавить кольцо из 5-угольников. Если мы добавим еще один 5-угольник, то получится структура, которую можно достроить только одним способом — добавить еще два 5-угольника, и тогда получится сфера.



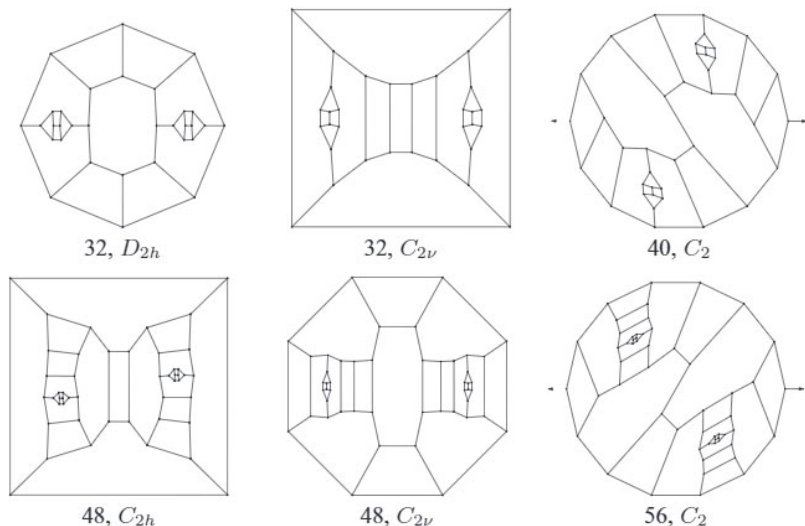


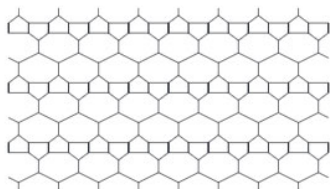
Рис. 17.9. Первые члены бесконечных серий  $(\{4, 8\}, 3)$ -сфер со свойством  $8R_4$ , которые содержат два  $(4, 3)$ -полицикла  $\{4, 3\} - e$

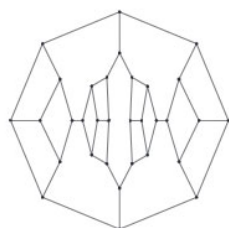
Если не добавлять 5-угольник, то нужно добавить кольцо из 7-угольников, и рассуждение повторяется. Поскольку наш граф конечен, то рано или поздно мы получим сферу, принадлежащую этой бесконечной серии. ■

Вероятно, существуют  $(\{5, 7\}, 3)$ -сферы со свойством  $7R_4$ , не подпадающие под последнюю теорему 17.2.2, поскольку существует большое разнообразие  $(\{5, 7\}, 3)$ -торов со свойством  $7R_4$ .

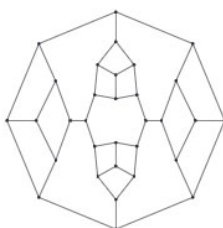
**Теорема 17.2.3.** Для каждого  $b \geq 7$  существует  $(\{5, b\}, 3)$ -тор со свойством  $bR_4$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для доказательства нам потребуется следующая  $(\{5, 7\}, 3)$ -плоскость со свойством  $7R_4$ , которая также обладает свойством  $5R_2$  (отдельный подслучай случая 18 из таблицы 9.3).

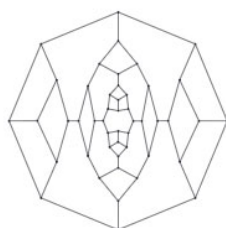




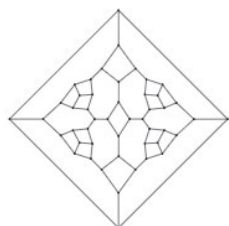
32,  $D_{2h}$   
(также обладает  
свойством  $4R_2$ , № 33)



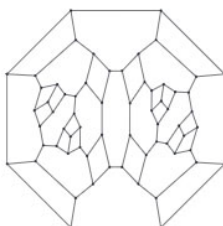
32,  $T_d$   
(также обладает  
свойством  $4R_2$ , № 32)



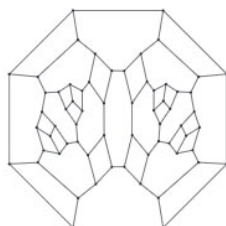
48,  $D_{2d}$



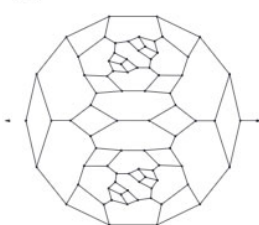
48,  $D_{2h}$



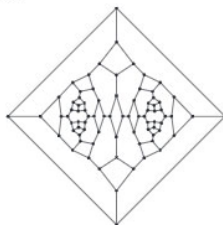
64,  $D_{2d}$



64,  $D_{2h}$



80,  $D_{2d}$



80,  $D_{2h}$

Рис. 17.10. Первые члены бесконечных серий  $(\{4, 8\}, 3)$ -сфер со свойством  $8R_4$ , которые содержат четыре  $(4, 3)$ -полицикла  $\{4, 3\} - v$

Чтобы получить  $(\{5, b\}, 3)$ -тор со свойством  $bR_4$ , нужно перестроить эту структуру. Все 5-угольники можно разбить на пары следующим образом, так что образуется полицикл  $E_0$ .



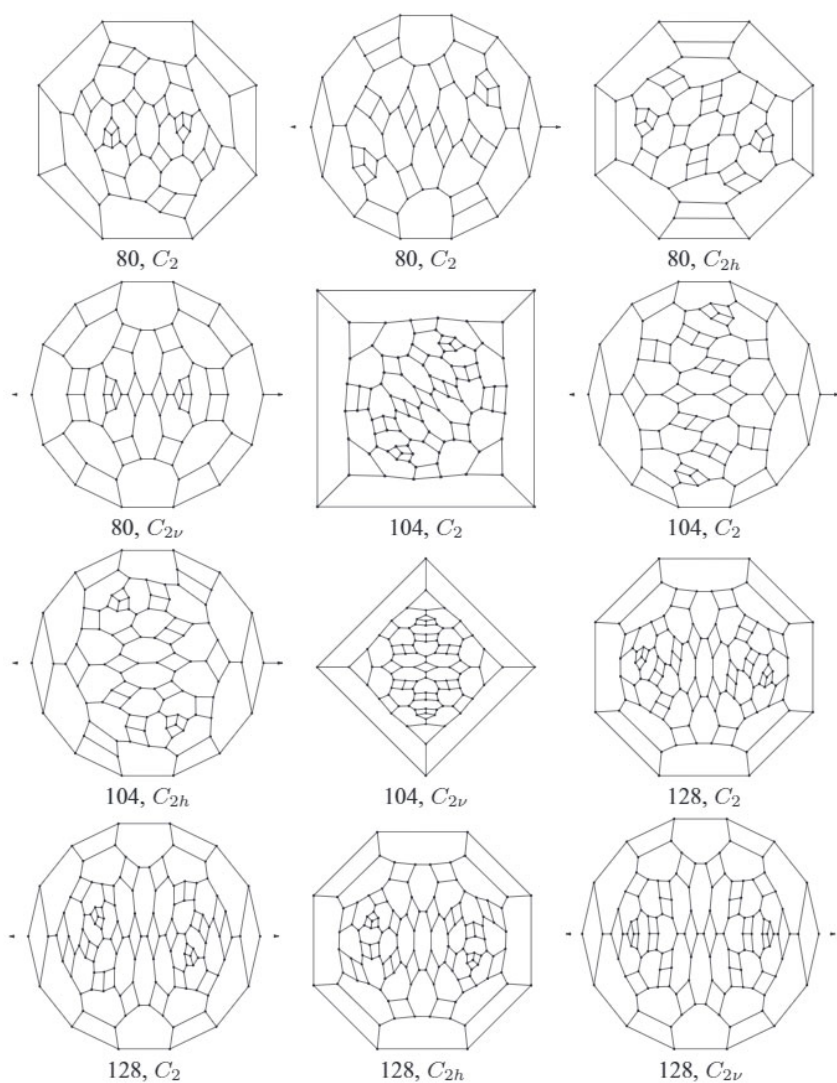


Рис. 17.11. Первые члены бесконечных серий  $(\{4, 8\}, 3)$ -сфер со свойством  $8R_4$ , которые содержат два  $(4, 3)$ -полицикла  $\{4, 3\} - v$

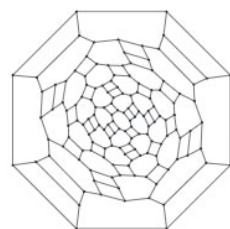
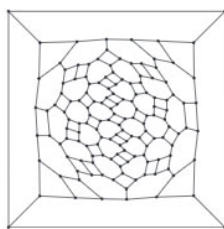
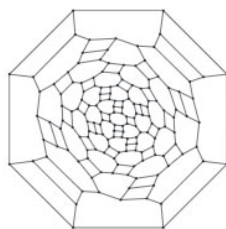
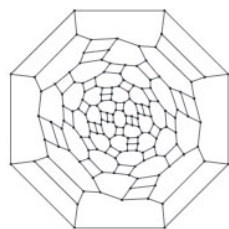
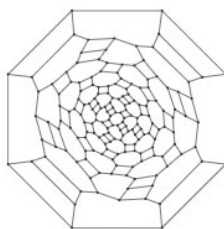
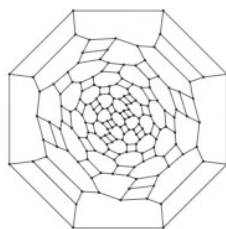
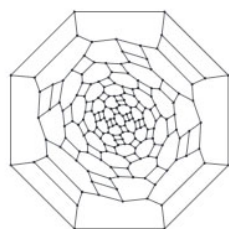
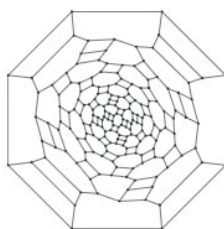
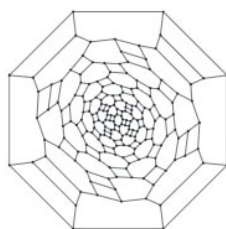
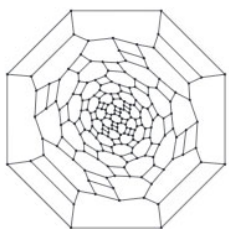
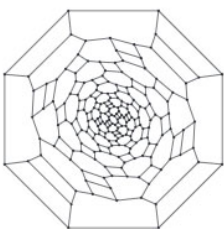
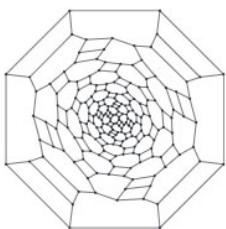
144,  $D_2$ 144,  $D_2$ 160,  $D_2$ 160,  $D_2$ 176,  $D_2$ 176,  $D_2$ 192,  $D_2$ 192,  $D_2$ 208,  $D_2$ 208,  $D_2$ 224,  $D_2$ 224,  $D_2$ 

Рис. 17.12. Первые члены бесконечных серий  $(\{4, 8\}, 3)$ -сфер со свойством  $8R_4$ , которые содержат двенадцать  $(4, 3)$ -полициклов  $P_2 \times P_3$  и имеют группу симметрии  $D_2$

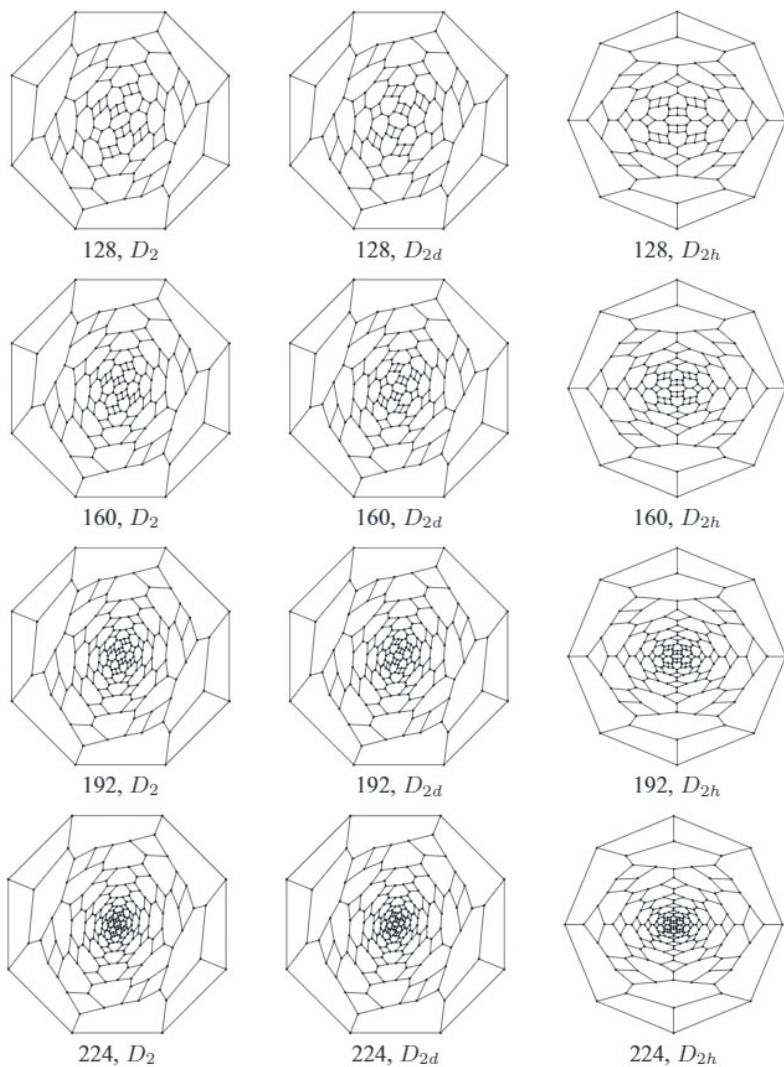


Рис. 17.13. Первые члены бесконечных серий  $(\{4, 8\}, 3)$ -сфер со свойством  $8R_4$ , содержащие двенадцать  $(4, 3)$ -полициклов  $P_2 \times P_3$  и имеющие группу симметрии  $D_2$ ,  $D_{2d}$  или  $D_{2h}$



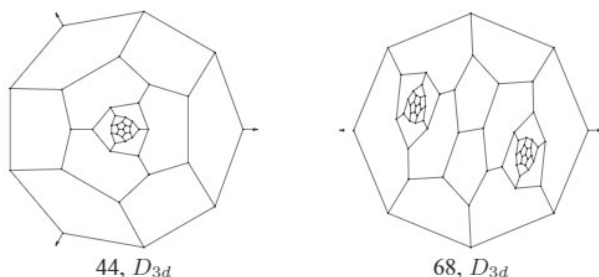


Рис. 17.14. Обе  $(\{5, 7\}, 3)$ -сферы со свойством  $7R_4$ , имеющие не более 76 вершин; это случаи  $t = 1, 2$  бесконечной серии сфер с  $20+24t$  вершинами; см. теорему 17.2.2

Каждую из этих пар 5-угольников можно заменить на полицикл  $E_{2n}$ , где  $n \geq 1$ . В результате получается периодическая  $(\{5, 7+n\}, 3)$ -плоскость, обладающая свойством  $(7+n)R_4$ . При факторизации получается требуемый тор. ■

**Теорема 17.2.4.** При  $b = 7, 10, 13, 16$  существует бесконечно много  $(\{5, b\}, 3)$ -сфер со свойством  $bR_4$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Возьмем куб, усечем некоторые его вершины и заменим их на полициклы  $A_3$  так, чтобы каждый 4-угольник граничил ровно с  $t$  усеченными вершинами. Легко видеть, что полученный граф будет  $(\{5, 4+3t\}, 3)$ -сферой со свойством  $(4+3t)R_4$ . Ясно, что для любого значения  $1 \leq t \leq 4$  существует требуемое множество вершин. Доказательство завершается применением теоремы 11.0.2. ■

На рис. 17.15, 17.16, 17.17 и 17.18 изображены некоторые примеры  $(\{5, b\}, 3)$ -торов, обладающих свойством  $bR_4$  при  $b = 7, 8, 9$  и 10.

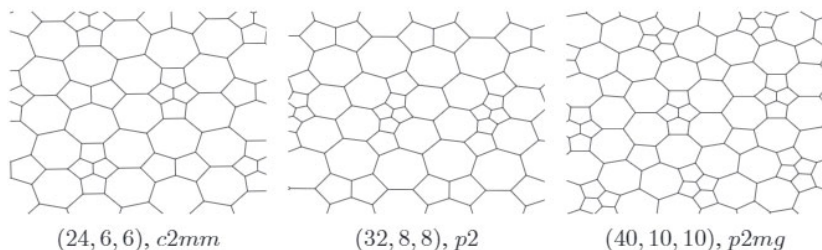
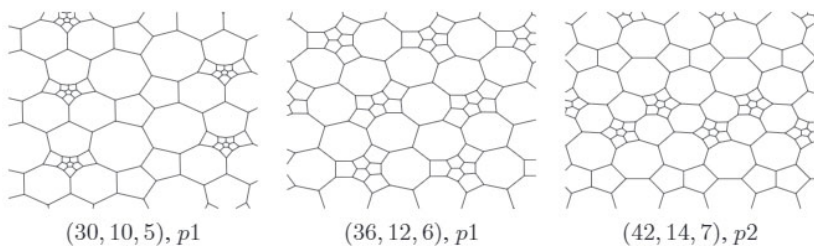
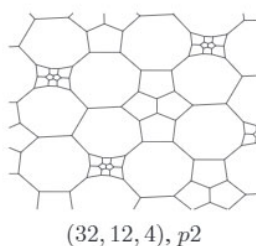
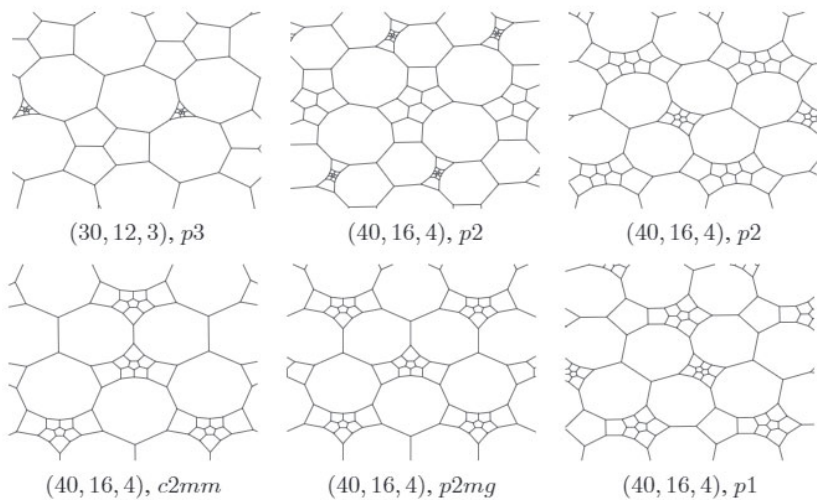


Рис. 17.15. Примеры  $(\{5, 7\}, 3)$ -торов со свойством  $7R_4$

Рис. 17.16. Примеры  $(\{5, 8\}, 3)$ -торов со свойством  $8R_4$ Рис. 17.17. Пример  $(\{5, 9\}, 3)$ -тора со свойством  $9R_4$ Рис. 17.18. Примеры  $(\{5, 10\}, 3)$ -торов со свойством  $10R_4$



## ГЛАВА 18

# Сферы и торы со свойством $bR_j$ при $j \geq 5$

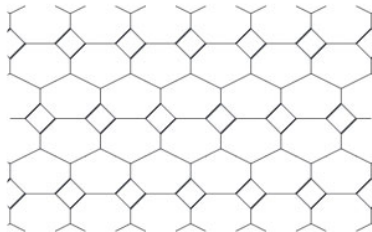
В этой главе мы приводим классификацию всех  $(\{a, b\}, 3)$ -сфер, обладающих свойством  $bR_j$ , при  $j \geq 5$ . Также в нескольких случаях мы находим минимальных представителей среди таких сфер.

### 18.1. Карты со свойством $bR_5$

#### Теорема 18.1.1.

- (i)  $(\{4, b\}, 3)$ -тор со свойством  $bR_5$  существует тогда и только тогда, когда  $b \geq 7$ .
- (ii) Каждый  $(\{4, 7\}, 3)$ -тор, обладающий свойством  $7R_5$ , обладает также свойством  $4R_0$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для доказательства части (i) возьмем следующую строгую регулярную  $(\{4, 7\}, 3)$ -плоскость со свойством  $7R_5$  (она принадлежит случаю 13 из таблицы 9.3).



Если заменить изолированные 4-угольники на  $(4, 3)$ -полициклы  $P_2 \times P_{2+n}$ , то получится  $(\{4, 7+n\}, 3)$ -тор со свойством  $(7+n)R_5$ . Таким образом, утверждение (i) доказано.

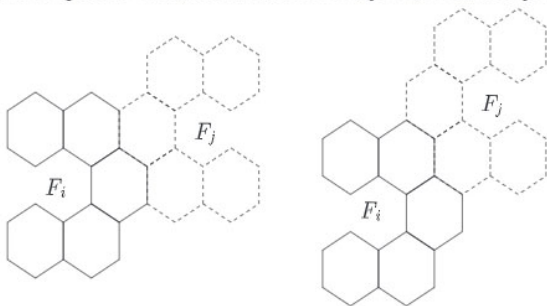
В случае  $(\{4, 7\}, 3)$ -торов со свойством  $7R_5$  прямым подсчетом получается равенство  $e_{4-4} = 0$ , из которого и следует требуемое. ■

Отметим, что существует  $(\{4, 7\}, 3)$ -тор, обладающий свойством  $4R_0$ , но не обладающий свойством  $7R_5$ .

**Лемма 18.1.2.** Пусть множество граней  $\mathcal{F}$  некоторой карты  $G$  разбито на два подмножества  $\mathcal{F}_1$  и  $\mathcal{F}_2$  так, что каждая грань  $F$  из  $\mathcal{F}_1$  является 6-угольной и граничит ровно с пятью другими гранями из  $\mathcal{F}_1$ . Тогда выполнено следующее.

- (i) Всякая грань  $F \in \mathcal{F}_2$  граничит только с гранями из  $\mathcal{F}_1$ .
- (ii) Существует 3-валентная карта  $G'$  такая, что  $G = GC_{2,1}(G')$  или  $G = GC_{1,2}(G')$  (см. раздел 2.1).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Утверждение (i) доказывается непосредственным перебором возможных корон граней. Для данной грани  $F \in \mathcal{F}_2$  обозначим через  $N(F)$  окрестность  $F$  в  $\mathcal{F}_1$  (т.е. множество всех граней из  $\mathcal{F}_1$ , смежных с гранью  $F$ ). Ясно, что множество  $\mathcal{F}_1$  разбивается на  $N(F_1), \dots, N(F_k)$ . Предположим, что два семейства  $N(F_i)$  и  $N(F_j)$  содержат смежные грани. Тогда возможны следующие два случая.



Оба эти случая соответствуют локальной структуре, возникающей при применении конструкции Гольдберга–Коксера (см. главу 2). Более того, выбор одной из двух локальных конфигураций однозначно определяет всю структуру, т.е. и глобально достаточно сделать один выбор.

Теперь определим карту  $G'$ , грани которой соответствуют множеству  $\mathcal{F}_2$ , ребра соответствуют парам  $N(F_i), N(F_j)$ , содержащим смежные грани, а вершины соответствуют тройкам окрестностей  $N(F_i), N(F_j), N(F_k)$ , каждая пара из которых имеет смежные грани. Карта  $G'$  — это 3-валентный плоский граф, и одна из карт  $GC_{2,1}(G')$  или  $GC_{1,2}(G')$  — изоморфна  $G$ . ■



**Лемма 18.1.3.** *Множество всех  $(5, 3)$ -полициклов с граничным кодом вида  $(23^h)^g$  состоит из:*

- элементарного  $(5, 3)$ -полицикла  $A_2$  ( $h = 3, g = 2$ ),
- элементарного  $(5, 3)$ -полицикла  $A_3$  ( $h = 2, g = 3$ ),
- элементарного  $(5, 3)$ -полицикла  $A_5$  ( $h = 1, g = 5$ ),
- элементарного  $(5, 3)$ -полицикла  $D$  ( $h = 0, g = 5$ ).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим  $(5, 3)$ -полицикл  $P$  с граничным кодом  $(23^h)^g$  и предположим, что он составлен из нескольких элементарных  $(5, 3)$ -полициклов.

Главный остов  $Ma_j(P)$ , образованный элементарными компонентами полицикла  $P$ , является деревом (см. теорему 8.0.1). Это дерево содержит хотя бы одну вершину степени 1. Эта вершина соответствует какому-то элементарному  $(5, 3)$ -полициклу, обозначим его через  $P_{el}$ .

Если в граничном коде полицикла  $P_{el}$  хотя бы дважды содержится участок 22, то  $h = 0$ , и доказательство окончено. Следовательно, можно считать, что участок 22 встречается в его граничном коде только один раз; тогда это может быть только полицикл  $B_2$  или  $B_3$  (см. рис. 7.2). Но оба они не подходят. Следовательно, возможны только элементарные  $(5, 3)$ -полициклы, перечисленные выше. ■

**Теорема 18.1.4.** *Рассмотрим  $(\{5, b\}, 3)$ -карту, обладающую свойством  $bR_5$ , в которой корона каждого  $b$ -угольника равна  $b^5 5^{b-5}$  и у которой граф  $b(G)$  связан.*

*Тогда это одна из следующих карт:*

- $GC_{2,1}(Dodecahedron)$ , т. е. строго регулярная карта № 55,
- $(\{5, 7\}, 3)$ -сфера со свойством  $7R_5$ , имеющая 260 вершин (такая сфера единственна, она изображена на рис. 18.2),
- $(\{5, 8\}, 3)$ -сфера со свойством  $8R_5$ , имеющая 92 вершин (такая сфера единственна, она изображена на рис. 18.1),
- $(\{5, 9\}, 3)$ -сфера со свойством  $9R_5$ , имеющая 68 вершин (такая сфера единственна, она изображена на рис. 18.1).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Из связности карты  $b(G)$  следует, что множество 5-угольных граней разбивается на  $(5, 3)$ -полициклы. Из условия на короны следует, что их граничные коды имеют вид  $(23^{b-6})^g$ . По лемме 18.1.3, величина  $g$  зависит только от  $b$ .

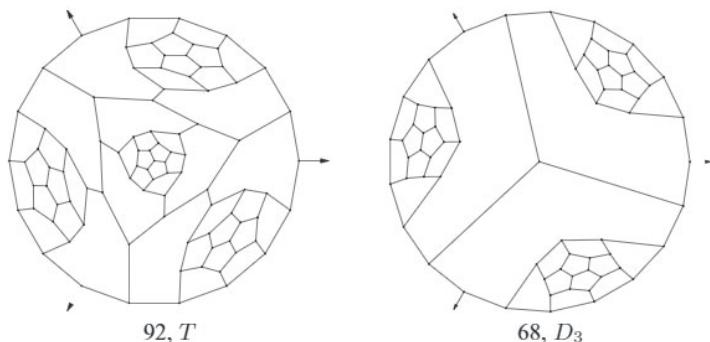


Рис. 18.1. Наименьшие  $(\{5, b\}, 3)$ -сферы со свойством  $bR_5$  для  $b = 8$  и  $9$

После замены этих  $(5, 3)$ -полициклов на  $b$ -угольники получим карту  $G$ , состоящую только из  $6$ - и  $g$ -угольников, причем  $g \leq 5$ . Значит, это карта на сфере; она удовлетворяет условиям леммы 18.1.2, откуда и получаем требуемое. ■

**Теорема 18.1.5.** *Наименьшая  $(\{5, 8\}, 3)$ -сфера со свойством  $8R_5$  изображена на рис. 18.1.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** По формуле Эйлера (1.1) для  $(\{5, 8\}, 3)$ -сферы выполняется соотношение  $12 = p_5 - 2p_8$ ; следовательно,  $e = 30 + 9p_8$  и  $v = 20 + 6p_8$ . Поскольку в приведенном выше примере сфера имеет 92 вершины, то далее можно считать, что  $p_8 \leq 12$ . Дальнейшие вычисления дают соотношения:

$$e_{5-5} = 3p_8, \quad e_{8-8} = 5p_8 \quad \text{и} \quad e_{5-5} = 30 + \left(3 + \frac{1}{2}\right)p_8.$$

Множество 5-угольных граней разбивается мостами на элементарные  $(5, 3)$ -полициклы.

Поскольку сфера обладает свойством  $8R_5$ , то каждый 8-угольник граничит ровно с тремя 5-угольниками; значит, среди элементарных  $(5, 3)$ -полициклов в нашем разложении могут встретиться только  $A_3, A_4, A_5, D, B_3, C_3, E_1, E_2, E_3, E_4$ . Обозначим через  $p_{A_3}, \dots$  количество этих полициклов, а через  $t$  — число пар элементарных  $(5, 3)$ -полициклов, граничащих между собой по своим открытым ребрам (число «смежностей» между элементарными полициклами).

Непосредственные вычисления дают равенства

$$\begin{cases} e_{5-8} = 9p_{A_3} + 10p_{A_4} + 10p_{A_5} + 5p_D + 11p_{B_3} + 12p_{C_3} + \\ \quad + 9p_{E_1} + 10p_{E_2} + 11p_{E_3} + 12p_{E_4} - 2t, \\ e_{5-5} = 18p_{A_3} + 15p_{A_4} + 10p_{A_5} + 12p_{B_3} + 6p_{C_3} + 3p_{E_1} + \\ \quad + 5p_{E_2} + 7p_{E_3} + 9p_{E_4} + t. \end{cases}$$

Далее, величина  $t$  удовлетворяет неравенству

$$2t \leq 2p_D + 3p_{E_1} + 2p_{E_2}.$$

Объединяя эти равенства и неравенства, получаем

$$\begin{cases} 2e_{5-8} - e_{5-5} = \frac{5}{2}p_8 - 30 = \frac{5}{2}(p_8 - 12) \leq 0, \\ 2e_{5-8} - e_{5-5} = 5p_{A_4} + 10p_{A_5} + 10p_D + 10p_{B_3} + 18p_{C_3} + \\ \quad + 15p_{E_1} + 15p_{E_2} + 15p_{E_3} + 15p_{E_4} - 5t \geq \\ \quad \geq 5p_{A_4} + 10p_{A_5} + 5p_D + 10p_{B_3} + 18p_{C_3} + \frac{15}{2}p_{E_1} + \\ \quad + 10p_{E_2} + 15p_{E_3} + 15p_{E_4} \geq 0. \end{cases}$$

Отсюда  $2e_{5-8} - e_{5-5} = 0$ ; значит,  $p_8 = 12$  и  $p_{A_4} = p_{A_5} = p_D = p_{B_3} = p_{C_3} = p_{E_i} = 0$ . Таким образом, в разложении может встречаться только полицикл  $A_3$ . А значит, по теореме 18.1.4, сфера получается из  $GC_{2,1}(Tetrahedron)$  заменой всех 3-угольников на полициклы  $A_3$ . ■

**Теорема 18.1.6.** При  $b = 8, 11, 14, 17, 20$  существует бесконечно много  $(\{5, b\}, 3)$ -сфер со свойством  $bR_5$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пример для  $b = 8$ , приведенный в теореме 18.1.5, содержит четыре  $(5, 3)$ -полицикла  $A_3$ . Для завершения доказательства остается применить теорему 11.0.2.

Чтобы получить доказательства для остальных значений  $b$ , нужны стартовые примеры. Граф  $GC_{2,1}(Tetrahedron)$  можно интерпретировать следующим образом. Если стянуть его треугольные грани в точки, то полученный граф будет додекаэдром, в котором отмечено множество  $\mathcal{S}$  из четырех вершин, соответствующих стянутым граням. Для каждого  $1 \leq t \leq 5$  существует множество  $\mathcal{S}_t$  из  $4t$  вершин додекаэдра такое, что каждая грань додекаэдра инцидентна  $t$  вершинам из этого множества.

- 1) При  $t = 0$  или 5 (додекаэдр или строго регулярная карта № 14) существует ровно одно подходящее множество, оно имеет группу симметрии  $I_h$ .
- 2) При  $t = 1$  или 4 (строго регулярные карты № 6 или № 13) существует ровно одно подходящее множество, оно имеет группу симметрии  $T$ .
- 3) При  $t = 2$  или 3 (строго регулярные карты № 8, 9 или 11, 12) существуют два подходящих множества, одно имеет группу симметрии  $D_3$ , а второе группу симметрии  $T_h$ .

Если применить 5-триакон к додекаэдру для этих множеств  $S_t$  (т. е. нужно усечь додекаэдр по этим вершинам и получившиеся 3-угольники заменить на  $(5, 3)$ -полициклы  $A_3$ ), то получится некоторая  $(\{5, 5 + 3t\}, 3)$ -сфера, обладающая свойством  $(5 + 3t)R_5$ . После этого доказательство бесконечности не отличается от случая  $b = 8$ . ■

Выше мы строили пример  $(\{5, 8\}, 3)$ -сферы, располагая сферы в цепочку. Если объединять сферы в циклы, то можно получать поверхности более высокого рода, обладающие свойством  $8R_5$ . Таким образом, для каждого  $g \geq 0$  существует бесконечно много ориентируемых  $(\{5, 8\}, 3)$ -карт рода  $g$ , обладающих свойством  $8R_5$ .

Далее, выше использовалась операция удаления вершины, после применения которой остается цикл из шести 5-угольников; т. е. выполняется свойство  $5R_2$ . Ясно, что если бы таким образом удалось превратить все  $(5, 3)$ -полициклы  $A_3$  в циклы, то получилась бы ориентируемая  $(\{5, 8\}, 3)$ -карта рода  $g$ , обладающая свойствами  $8R_5$  и  $5R_2$ . Такая структура может быть получена при всех  $g$ ,  $g \geq 2$ . Но при  $g = 1$  она не существует.

**Теорема 18.1.7.** *При  $b = 9, 12, 15, 18, 21$  существует бесконечно много  $(\{5, b\}, 3)$ -сфер, обладающих свойством  $bR_5$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Одной из таких сфер является сфера, изображенная на рис. 18.1. Она получается из карты  $GC_{2,1}(Bundle_3)$  (см. раздел 10.1) заменой каждого 2-угольника на  $(5, 3)$ -полицикл  $A_2$ . Для завершения доказательства при  $b = 9$  достаточно воспользоваться теоремой 11.0.2.

С другой стороны, если взять граф  $GC_{2,1}(Bundle_3)$  и удалить все 2-угольники, то получится куб. Для каждого  $0 \leq t \leq 4$  существуют множества  $S_t$  из  $2t$  вершин такие, что каждая грань куба инцидентна ровно  $t$  вершинам из  $S_t$ .

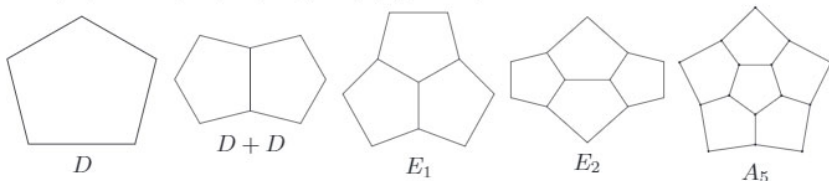


- 1) При  $t = 0$  или 4 (куб и строго регулярная карта № 10) существует одно такое множество, и оно имеет группу симметрии  $O_h$ .
- 2) При  $t = 1$  или 3 (строго регулярные карты № 2, № 7) существует одно такое множество, и оно имеет группу симметрии  $D_{3d}$ .
- 3) При  $t = 2$  (строго регулярные карты № 4, № 5) существуют два таких множества: одно имеет группу симметрии  $T_d$ , а второе — группу симметрии  $D_{2h}$ .

Таким образом, можно взять куб, усечь его вершины из множества  $S_t$  и заполнить  $(5, 3)$ -полициклами  $A_3$ . Кроме того, вставить три 2-угольника на ребра, соответствующие 2-угольникам исходной  $(\{5, 9\}, 3)$ -сферы со свойством  $9R_5$ . Бесконечность доказывается применением теоремы 11.0.2. ■

**Теорема 18.1.8.** Для всякой  $(\{5, b\}, 3)$ -сферы  $G$  со свойством  $bR_{b-2}$  выполнено следующее.

- (i) Граф  $b(G)$  связан.
- (ii) Множество 5-угольных граней принадлежит следующему множеству  $\{D, D + D, E_1, E_2, A_5\}$  из  $(5, 3)$ -полициклов:



- (iii)  $b \leq 7$ .
- (iv) При  $b = 6$  такие сферы перечислены в [DeGr01] и изображены на рис. 10.7.
- (v) При  $b = 7$  такие сферы имеют не менее 260 вершин. Сфера с 260 вершинами единственна и имеет группу симметрии  $I$  (см. рис. 18.2); остальные сферы имеют не менее 280 вершин.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предположим, что граф  $b(G)$  не связан. Это означает, что существует некоторое множество 5-угольных граней, на котором встречаются хотя бы две связные компоненты графа  $b(G)$  (пусть  $t$  компонент).



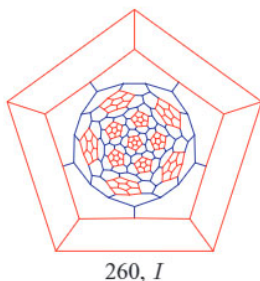


Рис. 18.2. Единственная отличная от додекаэдра  $\{5, 7, 3\}$ -сфера со свойством  $7R_5$ , имеющая менее 280 вершин

Поскольку каждый  $b$ -угольник граничит ровно с двумя 5-угольниками, то наборы из троек (т. е. подпоследовательности из троек, ограниченные двойками) в граничном коде  $(5, 3)$ -полицикла имеют длину не больше, чем один, т. е. каждая 3-валентная вершина окружена двумя 2-валентными вершинами. Отсюда следует, что  $v_3 \leq v_2$ , а значит, по теореме 11.0.3,  $p_5 \leq 0$ . Итак, часть (i) доказана.

Далее, из связности  $b(G)$ , множество всех 5-угольных граней образует  $(5, 3)$ -полициклы, т. е. для них выполняется  $t = 1$  и  $p_5 = 6 + v_3 - v_2 \leq 6$ . Именно множество всех  $(5, 3)$ -полициклов, удовлетворяющих условию, что каждый набор из троек имеет длину не больше, чем один, и указано выше.

Грани карты  $b(G)$  получаются из вершин  $G$ , инцидентных трем  $b$ -угольным граням (и значит, степень этих граней равна 3), и из  $(5, 3)$ -полициклов (эти грани имеют степень 5 или 6). Следовательно, по теореме 1.2.3 (ii), карта  $b(G)$  имеет вершину степени не более 5; значит,  $b - 2 \leq 5$  и утверждение (iii) верно.

Легко видеть, что верны следующие формулы:

$$p_5 = 12 + p_7, \quad e = 30 + 6p_7, \\ e_{7-7} = \frac{5}{2} p_7, \quad e_{5-7} = 2p_7 \quad \text{и} \quad e_{5-5} = 30 + \frac{3}{2} p_7.$$

Обозначим через  $n_D$ ,  $n_{D+D}$ ,  $n_{E_1}$ ,  $n_{E_2}$ ,  $n_{A_5}$  число соответствующих  $(5, 3)$ -полициклов, перечисленных в (ii).

Непосредственный подсчет дает соотношения

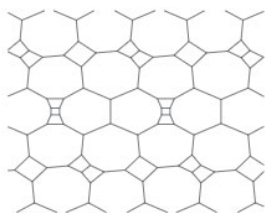
$$\begin{cases} 12 + p_7 = p_5 = n_D + 2n_{D+D} + 3n_{E_1} + 4n_{E_2} + 6n_{A_5}, \\ 30 + \frac{3}{2} p_7 = e_{5-5} = n_{D+D} + 3n_{E_1} + 5n_{E_2} + 10n_{A_5}. \end{cases}$$

Исключая  $n_{A_5}$ , получаем

$$60 - p_7 = -10n_D - 14n_{D+D} - 12n_{E_1} - 10n_{E_2},$$

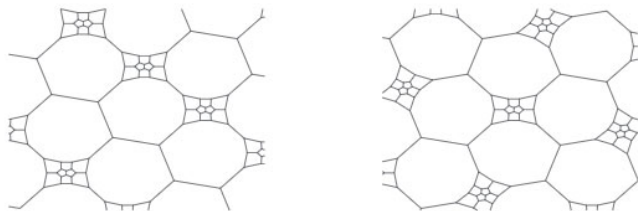
откуда  $p_7 \geq 60$ , т. е.  $(\{5, 7\}, 3)$ -сфера со свойством  $7R_5$  имеет не менее 260 вершин. Более того, такая сфера ровно с 260 вершинами содержит только элементарный  $(5, 3)$ -полицикл  $A_5$ , и для завершения доказательства остается воспользоваться теоремой 18.1.4. Если вершин больше 260, то  $n_i > 0$  для некоторого  $1 \leq i \leq 4$ , значит,  $60 - p_7 \leq -10$ , откуда вытекает требуемое. ■

Нижe изображен единственный известный нам  $(\{4, 8\}, 3)$ -тор, обладающий свойством  $8R_5$ , но не обладающий свойством  $4R_1$ .



$(24, 6, 6), p_2$

Далее, ниже изображены два  $(\{5, 10\}, 3)$ -тора со свойством  $10R_5$ .



## 18.2. Карты со свойством $bR_6$

### Теорема 18.2.1.

- (i) Каждый 3-связный  $(\{4, b\}, 3)$ -тор, обладающий свойством  $bR_6$ , обладает также и свойством  $4R_2$ .
- (ii) Все  $(\{4, 8\}, 3)$ -торы, обладающие свойством  $8R_6$ , обладают также и свойством  $4R_2$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** (i) Предположение 3-связности карты  $G$  исключает возможность существования  $(4, 3)$ -полицикла  $\{4, 3\} - e$  в множестве 4-угольников этого тора.

Это означает, что если мы рассмотрим соответствующую 6-валентную карту  $b(G)$ , то все ее грани будут 3-угольными (вершины или  $(4, 3)$ -полициклы  $\{4, 3\} - v$ ) или 4-угольными ( $(4, 3)$ -полициклы  $P_2 \times P_k$ ). Из формулы Эйлера ясно, что 4-угольники встречаться не могут, т.е. есть только полициклы  $\{4, 3\} - v$ , и карта обладает свойством  $4R_2$ .

(ii) В  $(\{4, 8\}, 3)$ -торе ни один 4-угольник не может граничить только с 4-угольниками, поскольку иначе это должен был бы быть куб. Если  $(\{4, 8\}, 3)$ -тор содержит 4-угольник, смежный с тремя 4-угольниками, то он содержит 8-угольник, смежный хотя бы с тремя 4-угольниками, т.е. не более чем с пятью 8-угольниками. Значит, в  $(\{4, 8\}, 3)$ -торе 4-угольники граничат не более чем с двумя другими 4-угольниками. После этого доказательство завершается с помощью обычного подсчета двумя способами и соображений положительности. ■

**Теорема 18.2.2.** При  $b \geq 8$  не существует  $(\{4, b\}, 3)$ -сфер со свойством  $bR_{b-2}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Каждая  $b$ -угольная грань такой сферы  $G$  должна была бы граничить ровно с двумя 4-угольниками. Это означает, что  $(4, 3)$ -полицикл  $\{4, 3\} - e$  не может встречаться в разложении множества 4-угольных граней. Следовательно, все грани сферы  $b(G)$  должны быть 3- или 4-угольными. Значит, для завершения доказательства можно применить теорему 1.2.3 (ii). ■

**Теорема 18.2.3.** Не существует  $(\{5, 8\}, 3)$ -торов со свойством  $8R_6$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Повторяя вычисления из теоремы 18.1.8 для  $b = 8$ , можно получить, что всякий  $(\{5, 8\}, 3)$ -тор  $G$  со свойством  $8R_6$  имеет связный граф  $8(G)$  и что множество его 5-угольных граней разбивается на  $(5, 3)$ -полициклы, указанные в теореме 18.1.8 (ii).

Таким образом, тор  $8(G)$  должен быть 6-валентным, а его грани должны быть 3-угольниками (пересечение трех 8-угольников), 5-угольниками и 6-угольниками.

Формула Эйлера (1.1) для 6-валентного тора имеет вид  $\sum_i (3 - i)p_i = 0$ . Значит, 5- и 6-угольных граней в  $8(G)$  нет. Тогда в  $G$  нет 5-угольников, но это невозможно. ■

**Теорема 18.2.4.** Если  $(\{5, b\}, 3)$ -сфера обладает свойством  $bR_j$ ,  $j \geq 6$  и карта  $b(G)$  связна, то  $j \leq b - 4$ .

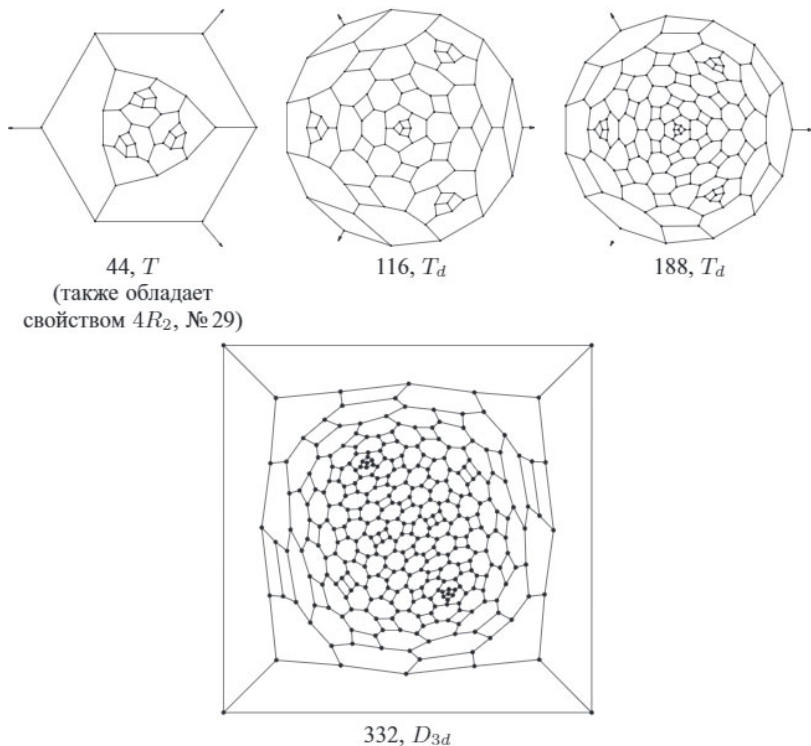


Рис. 18.3. Все известные  $(\{4, 7\}, 3)$ -сферы со свойством  $7R_5$ , за исключением куба

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** По теореме 1.2.3 (ii) карта  $b(G)$  для такой сферы  $G$  содержит хотя бы один 2-угольник. Легко видеть, что единственный  $(5, 3)$ -полицикл с двумя вершинами степени 2 на границе — это полицикл  $A_2$ . Значит,  $b$ -угольные грани, смежные с этим  $(5, 3)$ -полициклом  $A_2$ , граничат как минимум с четырьмя 5-угольными гранями. ■

Заметим, что можно построить примеры  $(\{5, 10\}, 3)$ -сфер со свойством  $10R_6$ . Возьмем додекаэдр и выберем множество  $S$  его ребер такое, что каждый 5-угольник имеет ровно одно ребро из этого множества. Заменив эти ребра на  $(5, 3)$ -полициклы  $A_2$ , мы получим такие сферы. С точностью до изоморфизма, существует пять таких множеств ребер в додекаэдре и они дают пять  $(\{5, 10\}, 3)$ -сфер со свойством  $10R_6$ , со 140 вершинами и группами симметрии  $D_{3d}$ ,  $C_2$ ,  $D_2$ ,  $D_3$ ,  $T_h$ .





## ГЛАВА 19

# Икосаэдральные фуллероиды

В этой главе, представляющей собой обработку статьи [DeDe00], рассматриваются *икосаэдральные фуллероиды* (или *I-фуллероиды*, или, более точно, *I(5, b)-фуллероиды*, т. е.  $(\{5, b\}, 3)$ -сферы с группой симметрии  $I$  или  $I_h$ ). Для некоторых значений  $b$  мы указываем наименьшие такие фуллероиды и доказываем их единственность. Кроме того, мы приводим несколько бесконечных серий таких фуллероидов.

Случай  $b = 6$  — это случай классических фуллеренов. По теореме 2.2.2 все  $I(5, 6)$ -фуллероиды, т. е. фуллерены с икосаэдральной симметрией, имеют вид  $GC_{k,l}(Dodecahedron)$ . На рис. 19.1 первые три из следующих наименьших икосаэдральных фуллеренов (помимо додекаэдра):

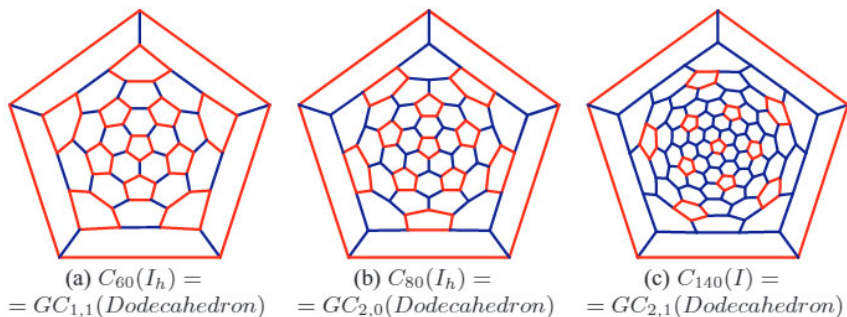
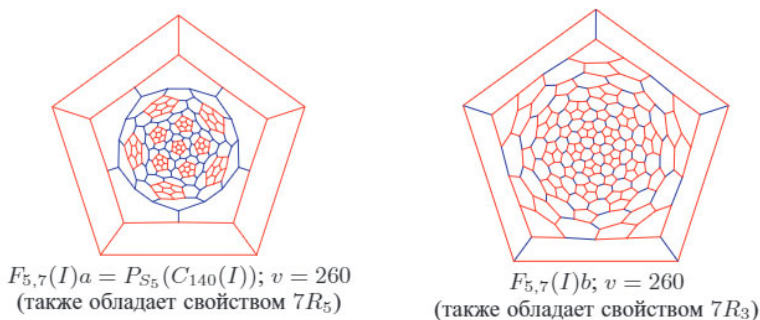
- $C_{60}(I_h)$ , бакминстерфуллерен,
- $C_{80}(I_h)$ , получается из додекаэдра в результате шамферинга,
- $C_{140}(I)$ , наименьший хиральный пример,
- $C_{180}(I_h)$ .

Здесь через  $C_v(G)$  обозначается  $(\{5, 6\}, 3)$ -сфера с  $v$  вершинами и группой симметрии  $G$ . Хотя это обозначение в общем случае неоднозначно, оно вполне подойдет для наших целей.

Оба наименьших  $I(5, 7)$ -фуллероида описаны в [DrBr96]; см. их изображения на рис. 19.2.

Все известные на данный момент  $I$ -фуллероиды и простые способы для их описания приведены в разделе 19.1; на основе этих результатов получено несколько бесконечных серий. В разделе 19.2 выведено необходимое условие на  $p$ -вектора, из которого следует, что среди новых  $I$ -фуллероидов пять являются минимальными для соответствующих значений  $v$ .

В таблице 19.1 указаны наименьшие возможные  $p$ -векторы при  $7 \leq b \leq 20$  в соответствии с леммой 19.2.3, приведенной ниже. В первых четырех столбцах таблицы записаны значения величин  $b$ ,  $p_5$ ,  $p_b$  (число 5-,

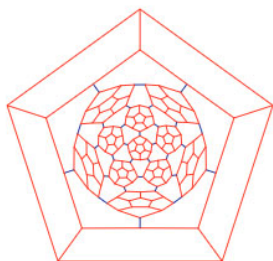
Рис. 19.1. Наименьшие  $I(5, 6)$ -фуллероиды (помимо додекаэдра)Рис. 19.2. Оба наименьших  $I(5, 7)$ -фуллероида.

$b$ -угольников) и число вершин  $v$ . Инварианты  $m_5$ ,  $m_b$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  и  $k_5$  описаны в разделе 19.2. В пятом столбце указан способ построения  $I$ -фуллероидов, а в последнем столбце приведены их названия. Эти названия имеют вид  $F_{5,b}(G)$ , где  $G$  — это группа симметрии, или вид  $F_b(1)$ , использующий обозначения, введенные в теореме 19.1.1. На рис. 19.3 изображены шесть фуллероидов  $F(5, b)(I_h)$  при  $b \geq 8$ .

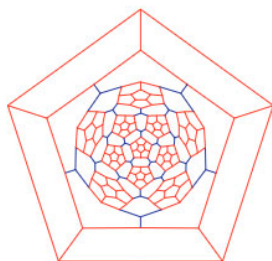
Заметим, что при  $b = 12$  наименьший  $p$ -вектор, удовлетворяющий условиям леммы 19.2.3, не реализуется.

## 19.1. Построение $I$ -фуллероидов и бесконечных серий

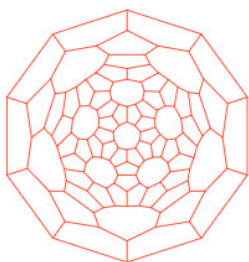
Восемь  $I$ -фуллероидов, которые изображены на рис. 19.2 и 19.3, были найдены с помощью систематического исследования всех возможных



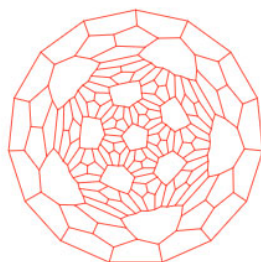
$F_{5,9}(I_h) = P_{S_5}(C_{60}(I_h)); v = 180$   
(также обладает свойством  $9R_3$ )



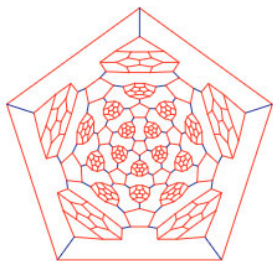
$F_{5,8}(I_h) = P_{S_5}(C_{80}(I_h)); v = 200$   
(также обладает свойством  $8R_4$ )



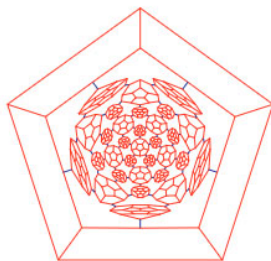
$F_{5,10}(I_h); v = 140$   
(также обладает свойством  $5R_3, 10R_0$ )



$F_{5,15}(I_h); v = 260$   
(также обладает свойством  $15R_0$ )



$F_{5,12}(I_h) = T_{S_3}(C_{80}(I_h)); v = 440$   
(также обладает свойством  $12R_4$ )



$P_{S_5}(T_{S_3}(C_{80}(I_h))) =$   
 $= T_{S_3}(P_{S_5}(C_{80}(I_h))) =$   
 $= F_{5,14}(I_h); v = 560$   
(также обладает свойством  $14R_4$ )

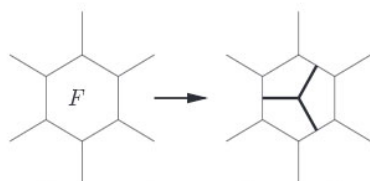
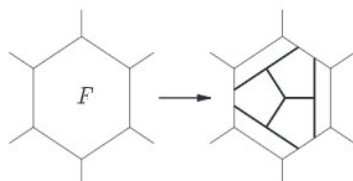
Рис. 19.3. Наименьшие  $I(5,b)$ -фуллероиды при  $b = 8, 9, 10, 12, 14, 15$ ; каждый из них — единственный для своего числа вершин  $v$

Таблица 19.1. Потенциальные  $p$ -вектора и инварианты для некоторых  $I(5, b)$ -фуллероидов

b	$p_5$	$p_b$	$v$	Построение	$m_5$	$m_b$	$k_2$	$k_3$	$k_5$	Число	Название
7	72	60	260	$A_{7,1}$	1	1	3	2	1	2	$F_{5,7}(I)_a$ $F_{5,7}(I)_b$
8	72	30	200	$A_{8,1}$	1	1	4	2	1	1	$F_{5,8}(I_h)$
9	72	20	180	$A_{9,1}$	1	0	3	3	1	1	$F_{5,9}(I_h)$
10	60	12	140	$B_{10,1}$	1	0	3	2	2	1	$F_{5,10}(I_h)$
11	312	60	740	$A_{11,5}$	5	1	3	2	1	$\geq 1$	$F_{11}(1)$
12	132	20	300	$A_{12,2}$	2	0	3	4	1	—	
12	192	30	440	$A_{12,3}$	3	0	6	3	1	1	$F_{5,12}(I_h)$
13	432	60	980	$A_{13,7}$	7	1	3	2	1	$\geq 1$	$F_{13}(1)$
14	252	30	560	$A_{14,4}$	4	0	7	2	1	1	$F_{5,14}(I_h)$
15	120	12	260	$B_{15,2}$	2	0	3	2	3	1	$F_{5,15}(I_h)$
16	312	30	680	$A_{16,5}$	5	0	8	2	1	?	
17	672	60	1460	$A_{17,11}$	11	1	3	2	1	$\geq 1$	$F_{17}(1)$
18	252	20	540	$A_{18,4}$	4	0	3	6	1	?	
19	792	60	1700	$A_{19,13}$	13	1	3	2	1	$\geq 1$	$F_{19}(1)$
20	180	12	380	$B_{20,3}$	3	0	3	2	4	?	

вариантов соединения 5-угольников и, например, 8-угольников для получения структуры с требуемыми свойствами. Подробнее это будет объяснено в разделе 19.3. Однако оказывается, что все эти восемь структур могут быть описаны как результаты декорирования  $(5, 3)$ -полициклами маленьких икосаэдральных фуллероидов. Операция пентакон  $P$  (см. раздел 1.6) применяется к множеству  $S_5$  из двенадцати 5-угольников, имеющему ось вращения пятого порядка. Операция 5-триакон (см. раздел 1.6) применяется к множеству  $S_3$  из 20 вершин, принадлежащих оси вращения третьего порядка.

$E_1$ - и  $C_3$ -замена 6-угольной грани  $F$  карты  $M$  состоит в замене 6-угольника на  $(5, 3)$ -полицикл  $E_1$  или  $C_3$  в соответствии со следующими схемами.

 $E_1$ -замена 6-угольной грани  $F$  $C_3$ -замена 6-угольной грани  $F$



Для каждой 6-угольной грани есть два способа сделать  $E_1$ - и  $C_3$ -замену этой грани. Поэтому мы фиксируем ориентации 6-угольных граней. Симметрия исходной карты необязательно сохраняется.

В результате применения операции пентакон  $P_{S_5}$  к  $GC_{k,l}(Dodecahedron)$  получается многогранник с 5-, 6- и 7-угольными гранями, за исключением трех случаев, изображенных на рис. 19.1, которые имеют только два типа граней.

Бесконечная серия  $I(5,7)$ -фуллероидов  $(H_n)_{n>0}$  с группой симметрии  $I$  получается из серии  $(GC_{2n+1,0}(Dodecahedron))_{n>0}$  с помощью  $E_1$ -замены в регулярном порядке четверти всех 6-угольников (вместо замены только тех 6-угольников, которые содержат ось вращения третьего порядка). Расположение заменяемых 6-угольников показано на рис. 19.4, вместе с фундаментальными областями для первых четырех  $I(5,7)$ -фуллероидов из этих серий. Фундаментальные области по форме напоминают воздушных змеев и представляют собой куски декорированного паркета  $\{6,3\}$  различных размеров. Оси вращения пятого и третьего порядка будут проходить соответственно через самую левую и самую правую вершины «воздушного змея». Заметим, что первый  $I(5,7)$ -фуллероид из этой серии,  $H_1$ , — это  $F_{5,7}(I)b$ . Для доказательства того, что этот метод работает, достаточно заметить, что, если мы повернем нашу фундаментальную область пять раз вокруг самой левой точки или три раза вокруг самой правой, то локально согласованность сохранится, а следовательно, она сохранится и глобально (см. [Dre87]).

Похожая серия  $(O_n)_{n>0}$   $I(5,8)$ -фуллероидов с группой симметрии  $I$  получается из серии  $(GC_{2n+1,0}(Dodecahedron))_{n>0}$  заменой 6-угольников на  $(5,3)$ -полициклы  $C_3$  в соответствии с той же схемой, что и на рис. 19.4.

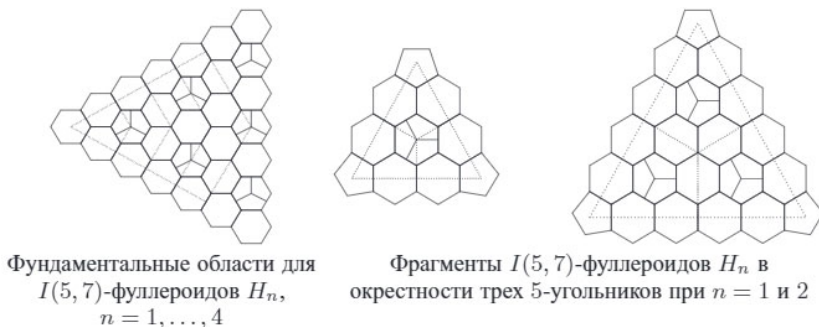


Рис. 19.4. Фрагменты  $I(5,7)$ -фуллероидов  $H_n$



Следующий общий результат был доказан в [JeTr01].

**Теорема 19.1.1.** Пусть даны некоторые целые числа  $b \geq 8$  и  $m \geq 1$ . Тогда существует  $I(5, b)$ -фуллероид  $F(m)$  такой, что  $p_b = 60m$  (и значит, имеющий  $v = 20 + 120m(b - 5)$  вершин).

Ясно, что из этой теоремы и теоремы 19.2.2, приведенной ниже, в частном случае, когда  $b$  не делится на 2, 3 и 5, следует, что  $F(1)$  имеет наименьшее возможное число вершин для  $I(5, b)$ -фуллероида. Именно эта величина,  $20(6b - 29)$ , встречалась в случаях  $b = 7, 11, 13, 17, 19$  в таблице 19.1.

## 19.2. Необходимые условия на $p$ -вектора

Для начала напомним формулу Эйлера для  $p$ -векторов 3-валентного плоского графа (см. теорему 1.2.3):

$$0 = 12 + \sum (i - 6)p_i.$$

Для паркетов с заданными симметриями можно получить гораздо более сильные условия на  $p$ -вектора, применяя некоторые элементарные приемы из теории групп. Пусть  $T$  — некоторый паркет на сфере  $S^2$  и пусть  $G$  — некоторая подгруппа его группы симметрии  $Aut(T)$ . Образ любой грани  $T$  под действием любого элемента группы  $G$  — это снова некоторая грань паркета  $T$ . Следовательно, можно считать, что группа  $G$  действует перестановками на множестве граней. По тем же соображениям  $G$  действует на множестве ребер и на множестве вершин. Напомним, что стабилизатором элемента  $x$  (грани, ребра или вершины) называется множество элементов группы  $G$ , которые переводят  $x$  в себя. Стабилизатор элемента  $x$  является подгруппой группы  $G$  и обозначается через  $Stab_G(x)$ . Орбита  $Gx$  элемента  $x$  — это множество образов  $x$  под действием всех элементов группы  $G$ . Очевидно, что множество всех элементов разбивается на орбиты, т.е., например, множество граней разбивается на орбиты под действием группы  $G$  и так далее. Следующее элементарное утверждение из теории групп показывает, сколько элементов может быть в таких орбитах.

**Лемма 19.2.1.** Если конечная группа  $G$  действует на конечном множестве  $S$  и  $x$  — произвольный элемент множества  $S$ , то  $|Gx| = \frac{|G|}{|Stab_G(x)|}$ .

Теперь рассмотрим паркет  $T$  с группой симметрии  $I$ . Все элементы  $I$  — это повороты. Если некоторый поворот переводит грань  $f$  в себя, то это

верно и для всех его степеней. Более того, никакие два вращения разного порядка не могут оставлять на месте одну и ту же грань. Таким образом, стабилизаторами граней могут быть только группы, порожденные вращениями порядка 2, 3 и 5.

Другой элементарный факт состоит в том, что стабилизаторы двух элементов одной орбиты сопряжены друг с другом, и, более того, если некоторая подгруппа  $H$  группы  $G$  сопряжена со стабилизатором  $Stab_G(x)$ , то  $H$  является стабилизатором некоторого элемента из орбиты  $x$ . Далее, поскольку в икосаэдральной группе  $I$  любые две подгруппы, порожденные вращениями одного и того же порядка, сопряжены, то выполняется следующее утверждение.

**Теорема 19.2.2.** *В  $I$ -фуллериоде может быть максимум по одной орбите граней с поворотными симметриями порядков 2, 3 и 5. Эти орбиты (в тех случаях, когда существуют) содержат ровно 30, 20 и 12 граней соответственно. Все остальные орбиты имеют тривиальные стабилизаторы и содержат ровно по 60 граней.*

В таблице 19.2 приведены сведения о возможных комбинациях орбит.

Таблица 19.2. Возможные орбиты  $I$ -фуллериоидов

Размер орбиты	60	30	20	12
Число орбит	любое	$\leq 1$	$\leq 1$	1
Степени граней	любые	$2t$	$3t$	$5t$

Далее, вращение порядка 2 не может оставлять на месте грань нечетной степени или вершину нечетной степени. Значит, в нашем случае оно должно оставлять на месте либо ребро, либо грань четной степени. Аналогично, вращение порядка 3 должно оставлять на месте вершину или ребро со степенью, делящейся на 3. А вращение порядка 5 должно оставлять на месте грань, поскольку ничто больше оно оставлять на месте в нашем случае не может. Можно разделить  $I(5, b)$ -фуллериоиды на два широких класса в зависимости от того, что оставляют на месте вращения пятого порядка, — 5-угольники или большие грани. В первом случае  $p$ -вектор будет иметь вид

$$A_{b,k}: (p_5, p_b) = \left(12 + 60k, \frac{60k}{b-6}\right),$$

где  $k \geq 1$ ,  $b \geq 7$ . Во втором случае он будет иметь вид

$$B_{b,k}: (p_5, p_b) = \left(60k, 12 \frac{5k-1}{b-6}\right),$$

где  $k \geq 1$ ,  $b \geq 10$ , 5 делит  $b$ . Ниже мы введем более удобную параметризацию для потенциальных  $p$ -векторов.

Для данного целого  $i$  будем обозначать через  $m_i$  число орбит граней степени  $i$ , которые не переходят в себя ни при каких симметриях, кроме тождественного преобразования. Из сказанного выше следует, что общее число таких граней равно  $60m_i$ . При  $j = 2, 3, 5$  положим  $k_j = k$ , если существует  $kj$ -угольник, который остается на месте под действием некоторых поворотов порядка  $j$ . Если для некоторого  $k$  таких граней не существует, то положим  $k_j = \frac{6}{j}$ .

**Лемма 19.2.3.** Для каждого  $I$ -фуллериода выполняется равенство

$$\sum_i m_i(i-6) + \sum_{j=2,3,5} k_j = 6.$$

**Доказательство.** Для каждой орбиты ее грани либо имеют тривиальный стабилизатор, либо остаются на месте под действием некоторого вращения порядка 2, 3 или 5. Если некоторая грань  $f$  степени  $m$  имеет стабилизатор порядка  $j = 2, 3, 5$ , то  $m = k_j j$ , и орбита грани  $f$  содержит ровно  $\frac{60}{j}$  граней. Отсюда с учетом формулы Эйлера (1.1) вытекает:

$$0 = \sum_i 60m_i(i-6) + \sum_{j=2,3,5} \frac{60}{j} (k_j j - 6) + 12.$$

Заметим, что это равенство остается верным и в том случае, когда для некоторого  $j$  не существует грани, которая бы оставалась на месте под действием вращения порядка  $j$ , поскольку в этом случае  $k_j = \frac{6}{j}$ , откуда  $k_j j - 6 = 0$ .

Разделим обе части на 60 и упростим вторую сумму следующим образом:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_i m_i(i-6) + \sum_{j=2,3,5} k_j - \sum_{j=2,3,5} \frac{6}{j} + \frac{1}{5} = \\ &= \sum_i m_i(i-6) + \sum_{j=2,3,5} k_j - \frac{6}{2} - \frac{6}{3} - \frac{6}{5} + \frac{1}{5} = \\ &= \sum_i m_i(i-6) + \sum_{j=2,3,5} k_j - 6. \end{aligned}$$



Теперь мы выведем формулы, по которым можно вычислять  $p$ -вектор и число вершин  $v$ , если известны значения инвариантов  $m_i$  и  $k_j$ . Поскольку эти инварианты не зависят от  $p_6$ , то предлагаемые уравнения выполняются тогда и только тогда, когда рассматриваемый  $I$ -фуллероид не содержит 6-угольников. Для  $p$ -вектора имеют место формулы

$$p_i = 60 \left( m_i + \sum_{jk_j=i} \frac{1}{j} \right).$$

А число вершин равно

$$v = \frac{1}{3} \sum_i ip_i = 20 \sum_i \left( im_i + \sum_{jk_j=i} \frac{i}{j} \right) = 20 \sum_i \left( im_i + \sum_{jk_j=i} k_j \right),$$

таким образом

$$v = 20 \left( \sum_i im_i + \sum_{jk_j \neq 6} k_j \right).$$

### 19.3. От $p$ -вектора к структуре

Здесь мы приводим общий метод для классификации  $I$ -фуллероидов с данными параметрами  $m_i$  и  $k_j$ . Недостающие доказательства можно найти в [DeDe00].

**Теорема 19.3.1.**  *$I$ -фуллероид  $F_{5,10}(I_h)$  — это единственный  $I$ -фуллероид с  $p$ -вектором  $(p_5, p_{10}) = (60, 12)$ , и, кроме того, это наименьший  $I(5, 10)$ -фуллероид.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Прежде всего, заметим, что 12 — это наименьшее из ненулевых значений, которые может принимать величина  $p_{10}$ ; оно соответствует параметрам  $m_{10} = 0$  и  $k_5 = 2$ . Это означает, что имеется ровно одна орбита из 10-угольников, каждый из которых остается на месте под действием некоторой группы вращений пятого порядка, и одна орбита 5-угольников, имеющих тривиальные стабилизаторы. Следовательно, все оси вращений порядка 2 проходят через ребра, а все оси порядка 3 проходят через вершины. Пусть  $v_0$  — одна из таких вершин, а  $F$  — грань, содержащая эту вершину.



Допустим, что  $F$  — это 10-угольник. Из-за поворотной симметрии пятого порядка, оставляющей  $F$  на месте, каждая вторая вершина грани  $F$  должна лежать на оси вращения порядка 3. Все три грани, содержащие такую вершину, должны быть 10-угольниками, потому что все они совмещаются вращениями. Это означает, что  $F$  окружена 10-угольниками со всех сторон, и все они лежат в той же орбите, что и  $F$ . По индукции можно показать, что все грани в связной компоненте, содержащей  $F$ , являются 10-угольниками. Но у нас всего одна связная компонента; значит, есть только 10-угольники, противоречие.

Мы заключаем, что вершина  $v_0$  должна принадлежать только 5-угольникам. Пусть  $v_1$  — вершина, принадлежащая некоторым двум из этих граней. Третья грань, инцидентная  $v_1$ , не может быть 5-угольником, поскольку этот 5-угольник был бы в той же орбите, что и  $F$ , и потому содержал бы образ вершины  $v_0$  при симметрии — некоторую вершину  $v_2$ , т. е. вершину, лежащую на оси вращения порядка 3. Есть три существенно различных варианта расположения вершины  $v_2$ . В каждом из этих случаев, применяя все симметрии, можно увидеть, что наша сфера должна быть додекаэдром.

Таким образом, третья грань, инцидентная вершине  $v_2$ , — это 10-угольник, а значит, искомым  $I$ -фуллероид должен содержать конфигурацию, изображенную на рис. 19.5, где центры вращений порядка 3 и 5 показаны маленькими треугольниками и 5-угольниками соответственно. Систематически применяя эти повороты, получаем структуру, изображенную на рис. 19.3. ■

Бесспорно, рассуждения в последнем доказательстве идут прямым, но довольно утомительным путем. Гораздо удобнее работать в *пространстве орбит* группы  $I$ . Пространство орбит некоторой группы  $G$  определяется как образ непрерывного отображения, переводящего две вершины  $p$  и  $q$

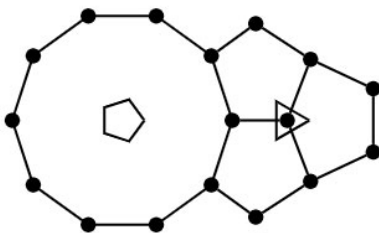


Рис. 19.5. Конфигурация, которая обязана содержаться в  $I$ -фуллероиде с  $p$ -вектором  $(p_5, p_{10}) = (60, 12)$



в одну и ту же вершину образа, если и только если найдется элемент группы  $G$ , отображающий  $p$  в  $q$ . Пространство орбит группы  $I$  топологически представляет собой просто сферу с тремя особыми вершинами, а именно, образами трех типов центров вращения — порядка 2, 3 и 5. Простой способ получать пространство орбит состоит в следующем: нужно взять фундаментальную область и склеить те точки границы, которые переходят друг в друга под действием некоторого элемента группы.

Степень образа грани в пространстве орбит зависит от стабилизатора этой грани. А именно,  $ij$ -угольник с центром вращения порядка  $j$  отображается в один  $i$ -угольник. Аналогично, вершины с нетривиальным стабилизатором отображаются в вершины соответствующей меньшей степени. Таким образом, в пространстве орбит нам приходится иметь дело с особыми объектами вроде 1-угольников и вершин степени 1. Еще более странным образом оказывается, что образ ребра со стабилизатором порядка 2 — это *полуребро*, имеющее только один конец. Ребро, образующее петлю, т. е. имеющее совпадающие концы, должно считаться дважды при определении степени вершины. Аналогично, при подсчете степени грани ребро, с обеих сторон граничащее с одной и той же гранью, должно считаться дважды. Однако полуребро в обоих случаях считается лишь один раз.

Не смотря на эти трудности, переход к пространству орбит позволяет существенно упростить доказательства. Образ паркета в пространстве орбит мы будем называть его *орбитальным паркетом*.

**Теорема 19.3.2.**  $I$ -фуллероид  $F_{5,8}(I_h)$  — это единственный  $I$ -фуллероид с  $p$ -вектором  $(p_5, p_8) = (72, 30)$ ; кроме того, это наименьший  $I(5, 8)$ -фуллероид.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Снова  $p_8 = 30$  — это наименьшее возможное значение  $p_8$ , поскольку 2 — это наибольший порядок вращения в  $I$ , который делит 8. Данный  $p$ -вектор  $(p_5, p_8) = (72, 30)$  соответствует следующим значениям параметров:

$$(m_5, m_8, k_2, k_3, k_5) = (1, 0, 4, 2, 1).$$

Соответствующий орбитальный паркет состоит из 1-угольника (это образ 5-угольника, содержащего ось симметрии порядка 5), из 5-угольника (образ несимметричного 5-угольника) и 4-угольника (образ 8-угольника с симметрией порядка 2). Образуется ровно одна вершина степени 1 и нет ни одного полуребра, поскольку имеются грани с симметрией порядка 2, но нет граней с симметрией порядка 3.

Упомянутый 1-угольник приводит к подграфу, изображенному на рис. 19.6,  $a$ , за счет того, что его вершина должна иметь степень 3. Ребро  $e$

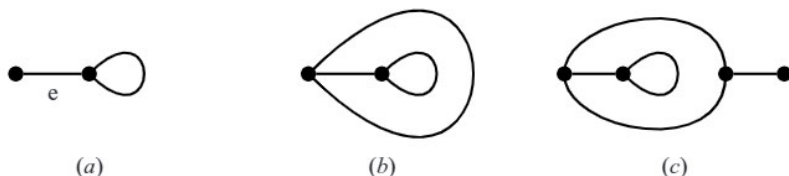


Рис. 19.6. Подструктуры, возникающие при попытке построить наименьший  $I(5, 8)$ -фуллероид

граничит с одной и той же гранью с обеих сторон. Значит, если эта грань является 4-угольником, то возникает конфигурация, изображенная на рис. 19.6, *b*. Но здесь обе вершины имеют степень 3 и поэтому эту конфигурацию невозможно продолжить. Мы заключаем, что 1-угольник должен граничить с 5-угольником, что приводит к конфигурации на рис. 19.6, *c*.

Теперь внешняя грань является 4-угольником, и имеется ровно одна вершина степени 1, как и требовалось. Как было показано, эта конфигурация единственна и соответствует  $I$ -фуллероиду  $F_{5,8}(I_h)$ . ■

**Теорема 19.3.3.**  $I$ -фуллероид  $F_{5,9}(I_h)$  — это единственный  $I$ -фуллероид с  $p$ -вектором  $(p_5, p_9) = (72, 20)$ ; кроме того, это наименьший  $I(5, 9)$ -фуллероид.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Так же, как выше, значение  $p_9 = 20$  — наименьшее возможное, а значения параметров однозначно определяются  $p$ -вектором. Орбитальный паркет состоит из 1-угольника и 5-угольника (таких же, как выше) и 3-угольника, соответствующего орбите 9-угольников с симметрией порядка 3. Нет ни одной вершины степени 1, но есть полуребро. Так же, как выше, 1-угольник должен граничить с 5-угольником, который в свою очередь должен граничить с 3-угольником. Возможна только конфигурация, изображенная на рис. 19.7, где полуребро изображено в виде буквы «Т»; напомним, что полуребро считается только один раз, поэтому внешняя грань — это именно 3-угольник. ■

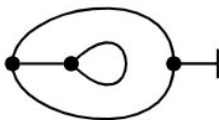


Рис. 19.7. Пространство орбит фуллероида  $F_{5,9}(I_h)$

**Теорема 19.3.4.**

- (i)  $I$ -фуллероид  $F_{5,12}(I_h)$  — это единственный  $I$ -фуллероид с  $p$ -вектором  $(p_5, p_{12}) = (192, 30)$ ; кроме того, это наименьший  $I(5, 12)$ -фуллероид.
- (ii)  $I$ -фуллероид  $F_{5,15}(I_h)$  — это единственный  $I$ -фуллероид с  $p$ -вектором  $(p_5, p_{15}) = (120, 12)$ ; кроме того, это наименьший  $I(5, 15)$ -фуллероид.
- (iii)  $I$ -фуллероид  $F_{5,14}(I_h)$  — это единственный  $I$ -фуллероид с  $p$ -вектором  $(p_5, p_{14}) = (252, 30)$ ; кроме того, это наименьший  $I(5, 14)$ -фуллероид.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [DeDe00] можно найти доказательство, основанное на использовании символов Делоне, которые описаны в [Dre84, Del80, DrBr96]. ■



# Предметный указатель

- $(R, k)$ -карта, 41
- $(R, q)_{gen}$ -полицикл, 103
- $(\{4, 3\} - v)$ -замена, 245
- $(\{a, b\}, k)$ -карта, 41
- $(\{a, b\}, k)$ -многогранник, 41
- $(\{a, b\}, k)$ -плоскость, 41
- $(\{a, b\}, k)$ -сфера, 41
- $(\{a, b\}, k)$ -тор, 41
- $(a-b)$ -ребро, 41
- $(r, q)$ -гелицен, 72
- $(r, q)$ -граф, 157
- $(r, q)$ -заполнение границы, 81
- $(r, q)$ -звезда, 92
- $(r, q)$ -карта, 79
- $(r, q)$ -полицикл, 65
- $(r, q)_{gen}$ -полицикл, 78
- 2-вложимый граф, 156
- 2-гомеоэдральный паркет, 181
- 2-изоэдральный многогранник, 163
- 2-периодичный плоский граф, 22
- 4-триагон, 39
- 5-триагон  $T$ , 39
- $APrism_m$ , 36
- $Bundle_m$ , 35
- $C_3$ -замена, 356
- $E_1$ -замена, 356
- $Prism_m$ , 35
- $k$ -валентный граф, 15
- $k$ -связный граф, 13
- $p$ -вектор карты, 15
- $v$ -вектор графа, 15
- Автоморфизм без неподвижной точки, 21
- Автоморфизм графа, 13
- Автоморфизм карт, 21
- Автоморфизм накрытия, 22
- Автоморфизм полицикла, 66
- Азуленойд, 42
- Альтернирующая зона, 157
- Архимедов многогранник, 37
- Архимедов паркет, 38
- Биполицикл, 41
- Бутылка Клейна  $\mathbb{K}^2$ , 19
- Вершина графа, 13
- Вершинно-разбитый икосаэдр, 70
- Вершинно-разбитый октаэдр, 70
- Взаимный полицикл, 68
- Внешне-двойственный граф полицикла, 66
- Внешнепланарный полицикл, 66
- Внешняя грань плоского графа, 14
- Внутренне-двойственный граф полицикла, 66
- Внутренняя вершина, 78
- Внутренняя грань, 15
- Вписать додекаэдр, 302
- Вполне элементарный полицикл, 116
- Выпуклый  $(r, q)$ -полицикл, 75
- Выпуклый разрез полицикла, 157
- Гелицен, 67



- Гиперболическая пара  $(r, q)$ , 66  
 Гиперкубе, 156  
 Главный остов полицикла, 139  
 Гомотопный путь, 20  
 Граница карты, 15  
 Граничат (границы), 14  
 Граничное ребро, 15  
 Граничный код полицикла, 81  
 Грань карты, 14  
 Граф, 13  
 Группа автоморфизмов, 13  
 Группа бордюра, 29  
 Группа гомологий, 23  
 Группа симметрии относительно плоскости, 28  
 Группа центральной симметрии, 28  
 Двойственная карта  $M^*$ , 16  
 Декорированный паркет  $\{r, q\}$ , 38  
 Дельтаэдр, 38  
 Дерево, 139  
 Диаграмма Шлегеля, 25  
 Додекаэдр  $\{5, 3\}$ , 35  
 Дорога в 3-валентном плоском графе, 52  
 Дорога в 4-валентном плоском графе, 52  
 Дырка полицикла, 78  
 Замкнутая карта, 15  
 Зигзаг в плоском графе, 51  
 Изогональный  $(r, q)$ -полицикл, 91  
 Изоморфизм карт, 21  
 Изотоксальный  $(r, q)$ -полицикл, 91  
 Изоздральный  $(r, q)$ -полицикл, 91  
 Икосаэдр  $\{3, 5\}$ , 35  
 Индуцированный подграф, 13  
 Индуцированный полицикл, 67  
 Инцидентность, 14  
 Капсид вируса, 46  
 Карта, 15  
 Карта Франка–Каспера, 273  
 Квадрат тора, 192  
 Квадратный паркет  $\{4, 4\}$ , 35  
 Клеточный гомоморфизм карт, 21  
 Конструкция Гольдберга–Коксетера  $GC_{k,l}$ , 46  
 Корона вершины, 41  
 Корона грани, 41  
 Кривизна поверхности, 25  
 Куб  $\{4, 3\}$ , 35  
 Курносая  $APrism_m$ , 37  
 Курносая  $Prism_m$ , 36  
 Курносый паркет  $\{b, 3\}$ , 101  
 Лента Мебиуса, 18  
 Ленточная группа, 29  
 Локально конечный плоский граф, 17  
 Локальный изоморфизм, 22  
 Минимальная поверхность, 182  
 Минимальный тор, 23  
 Многогранник, 24  
 Многогранники Каталана, 38  
 Модулярная группа  $PSL_2(\mathbb{Z})$ , 34  
 Мозаичный паркет, 38  
 Мост в полицикле, 104  
 Накрытие карты, 22  
 Нормальный плоский паркет, 183  
 Обхват графа, 73  
 Одиарное кольцо, 174  
 Односвязная карта, 20  
 Октаэдр  $\{3, 4\}$ , 35  
 Операция  $k$ -вспенивания, 49  
 Операция  $m$ -разделения, 39  
 Операция вытягивания, 39

- Операция приклейки шапочки, 38  
 Операция усечения, 38  
 Орбитальный паркет, 363  
 Ориентируемая карта, 18  
 Основной многоугольник, 47  
 Особое совершенное паросочетание  
 паркета  $\{3, 6\}$ , 195, 289  
 Остов многогранника, 24  
 Остов полицикла, 65  
 Открытое ребро полицикла, 104  
 Отождествление противоположных  
 точек, 18  
  
 Параболическая пара  $(r, q)$ , 66  
 Паркет Лавеса, 38  
 Паросочетание в графе, 14  
 Пентагон  $P$ , 39  
 Периметр полицикла, 141  
 Планарный граф, 14  
 Плоская кристаллографическая  
 группа, 30  
 Плоский граф, 14  
 Плоский двойственный граф, 15  
 Плотность полицикла, 140  
 Плотный 3-валентный плоский  
 граф, 52  
 Плотный 4-валентный плоский  
 граф, 52  
 Полиамонд, 68  
 Полигекс, 68  
 Полимино, 68  
 Полицикл, 65  
 Полициклический гидрокарбонат  
 $C_nH_m$ , 104  
 Полициклическое представление  
 графа, 65  
 Полиэдральный комплекс, 16, 65  
 Полный граф  $K_n$ , 14  
 Полуребро, 363  
  
 Правило изолированных 5-угольни-  
 ков, 214  
 Правильногранный многогранник,  
 37  
 Представление карты упаковкой  
 кругов, 26  
 Продолжаемый полицикл, 106  
 Проективная плоскость  $\mathbb{P}^2$ , 18  
 Простой граф, 13  
 Пространство орбит, 362  
 Прямо-двойственное круговое пред-  
 ставление, 26  
 Прямое произведение, 14  
 Путь  $P_n$ , 14  
  
 Расстояние по графу, 156  
 Расстояние Хэмминга, 156  
 Ребро графа, 13  
 Риманова поверхность, 25  
 Род карты, 19  
 Ручка поверхности, 18  
  
 Сбалансированный плоский паркет,  
 184  
 Связный граф, 13  
 Символьный код, 261  
 Склейка полициклов, 105  
 Скрещенный колпак поверхности,  
 19  
 Слабо регулярная  $(\{a, b\}, k)$ -карта,  
 227  
 Смежность вершин, 14  
 Смежность граней, 14  
 Собственный полицикл, 67  
 Совершенное паросочетание в гра-  
 фе, 14  
 Согласованная система разрезов,  
 193  
 Степень вершины, 13  
 Степень грани, 14

- Строго многоугольный граф, 80  
 Строго регулярная  $(\{a, b\}, k)$ -карта, 161  
 Сфера  $S^2$ , 16  
 Тетраэдр  $\{3, 3\}$ , 35  
 Тор  $T^2$ , 19  
 Точечная группа, 28  
 Треугольная группа  $T^*(l, m, n)$ , 32  
 Треугольная группа вращений  $T(l, m, n)$ , 33  
 Треугольный паркет  $\{3, 6\}$ , 35  
 Триангуляция, 47  
 Универсальная накрывающая карты, 22  
 Фактор-карта, 21  
 Флаг карты, 17  
 Флаг-регулярная карта, 34  
 Формула Эйлера для  $k$ -валентных карт, 24  
 Формула Эйлера для паркетов, 184  
 Фуллерен, 42  
 Фуллероид, 353  
 Фундаментальная группа, 20  
 Фундаментальная область, 32  
 Характеристика Эйлера–Пуанкаре, 23  
 Центральный цикл в эйлеровой карте, 52  
 Цикл  $C_n$ , 14  
 Шамферинг, 49  
 Шестиугольный паркет  $\{6, 3\}$ , 35  
 Эйлерова карта, 52  
 Эквивелярные многогранники, 80  
 Экстремальный полицикл, 140  
 Элементарный полицикл, 104  
 Эллиптическая пара  $(r, q)$ , 66  
 Ядерно-элементарный полицикл, 111  
 Ядро полицикла, 109

# Литература

- [Ale48] A. D. Alexandrov, *Vnutrennyaya Geometriya Vypuklykh Poverhnostei*, 1948 OGIZ, Moscow–Leningrad. Translated in English as *A. D. Alexandrov selected works. Part II. Intrinsic geometry of convex surfaces*, ed. by S. S. Kutateladze, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006.
- [Ale50] A. D. Alexandrov, *Vypuklie mnogogranniki*, 1950 GITL, Moscow. Translated in German as *Convexe Polyeder*, Akademie-Verlag, Berlin, 1958. Translated in English as *Convex polyhedra*, Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [Alt73] A. Altshuler, *Construction and enumeration of regular maps on the torus*, Discrete Mathematics **4** (1973) 201–217.
- [ArPe90] D. Archdeacon and M. Perkel, *Constructing Polygonal Graphs of Large Girth and Degree*, Congressus Numerantium **70** (1990) 81–85.
- [ArRi92] D. Archdeacon and R. B. Bruce, *The construction and classification of self-dual spherical polyhedra*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **54-1** (1992) 37–63.
- [Bal95] A. T. Balaban, *Chemical Graphs: Looking back and Glimpsing ahead*, Journal of Chemical Information and Computer Science **35** (1995) 339–350.
- [BBG03] J. Bornhöft, G. Brinkmann and J. Greinus, *Pentagon-Hexagon-Patches with short boundaries*, European Journal of Combinatorics **24-5** (2003) 517–529.
- [BCC92] J. Brunvoll, B. N. Cyvin and S. J. Cyvin, *Enumeration of benzenoid systems and other polyhexes*, Topics in Curr. Chem. **162** (1992) 65–180.
- [BCC96] J. Brunvoll, S. J. Cyvin and B. N. Cyvin, *Azulenoids*, MATCH **34** (1996) 91–108.
- [BCH02] G. Brinkmann, G. Caporossi and P. Hansen, *A constructive enumeration of fusenes and benzenoids*, Journal of Algorithms **45-2** (2002) 155–166.
- [BCH03] G. Brinkmann, G. Caporossi and P. Hansen, *A survey and new results on computer enumeration of polyhex and fusene hydrocarbons*, Journal of Chemical Information and Computer Science **43-3** (2003) 842–851.
- [BDDH97] G. Brinkmann, O. Delgado-Friedrichs, A. Dress and T. Harmuth, *CaGe — a virtual environment for studying some special classes of large molecules*, MATCH **36** (1997) 233–237.
- [BDvN06] G. Brinkmann, O. Delgado-Friedrichs and U. von Nathusius, *Numbers of faces and boundary encoding of patches*, Graphs and Discovery, ed. by S. Fajtlowicz, P. W. Fowler, P. Hansen, M. F. Janowitz and F. S. Roberts, AMS, 2006.

- [BeSi07] M. Beck and R. Sinai, *Computing the continuous discretely, Integer-point enumeration in Polyhedra*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, 2007.
- [BGGMTW05] G. Brinkmann, S. Greenberg, C. Greenhill, B. D. McKay, R. Thomas and P. Wollan, *Generation of simple quadrangulations of the sphere*, Discrete Mathematics **305-1&3** (2005) 33–54.
- [BGOR99] M. Bousquet-Mélou, A. J. Guttmann, W. P. Orrick and A. Rechnitzer, *Inversion Relations, Reciprocity and Polyominoes*, Annals of Combinatorics **3** (1999) 223–249.
- [BHH03] G. Brinkmann, T. Harmuth and O. Heidemeier, *The construction of cubic and quartic planar maps with prescribed face degrees*, Discrete Applied Mathematics **128-2&3** (2003) 541–554.
- [BoLi95] C. P. Bonnington, C. H. C. Little and Charles H. C., *The foundations of topological graph theory*, Springer-Verlag, 1995.
- [BrDe99] G. Brinkmann and M. Deza, *Tables of face-regular polyhedra*, Journal of Chemical Information and Computer Science **40-3** (1999) 530–541.
- [BrMK] G. Brinkmann and B. McKay, *The Plantri program*, <http://cs.anu.edu.au/people/bdm/plantri/>.
- [BrMK06] G. Brinkmann and B. D. McKay. *Fast generation of planar graphs*, MATCH **58-2** (2007) 333–367.
- [BrWi93] U. Brehm and J. M. Wills, *Polyhedral Manifolds*, chapter 16 in Handbook of Convex Geometry, ed. by P. M. Gruber and J. M. Wills, Elsevier Science Publishers, 1993.
- [CaHa98] G. Caporossi and P. Hansen, *Enumeration of polyhex hydrocarbons up to  $h = 21$* , Journal of Chemical Information and Computer Science **38** (1998) 610–619.
- [CaKl62] D. Caspar and A. Klug, *Physical Principles in the Construction of Regular Viruses*, Cold Spring Harbor Symp. Quant. Biol. **27** (1962) 1–24.
- [CBCL96] V. H. Crespi, L. X. Benedict, M. L. Cohen and S. G. Louie, *Prediction of a pure-carbon covalent metal*, Journal of Physics Review B **53** (1996) R13303–R13305.
- [CCBBZGT93] C. J. Cyvin, B. N. Cyvin, J. Brunvoll, E. Brendsdal, F. Zhang, X. Guo and R. Tosić, *Theory of Polygons*, Journal of Chemical Information and Computer Science **33** (1993) 466–474.
- [CDG97] V. Chepoi, M. Deza and V. P. Grishukhin, *Clin d’oeil on  $\ell_1$ -embeddable planar graphs*, Discrete Applied Mathematics **80** (1997) 3–19.
- [CDV06] V. Chepoi, F. Dragan and Y. Vaxes, *Distance and routing labelling schemes for non-positively curved plane graphs*, Journal of Algorithms **61-2** (2006) 60–88.



- [Cha89] D. Chavey, *Tilings by regular polygons — 2; a catalog of tilings*, Computers Math. Applic. **17** (1989) 147–165. Reprinted in *SYMMETRY 2*, ed. by I. Hargittai, Vol. 18, Int. Series Modern Applied Mathematics and Computer Science, Pergamon Press, 1989.
- [Chv83] V. Chvátal, *Linear Programming*, W. H. Freeman and Company, 1983.
- [Cla] B. Clair, *Frieze groups*, <http://euler.slu.edu/~clair/escher/friezehandout.pdf>
- [CoDo01] M. Conder and P. Dobcsányi, *Determination of all regular maps of small genus*, J. Combin. Theory Ser. B **81-2** (2001) 224–242.
- [CoDo02] M. Conder and P. Dobcsányi, *Trivalent symmetric graphs on up to 768 vertices*, J. Combin. Math. and Combin. Comput. **40** (2002) 41–63.
- [CoDo05] M. Conder and P. Dobcsányi, *Applications and adaptations of the low index subgroups procedure*, Math. Comp. **74** (2005) 485–497.
- [CoLa90] J. H. Conway and J. C. Lagarias, *Tilings with Polyominoes and Combinatorial Group Theory*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **53** (1990) 183–208.
- [Coo04] S. B. Cooper, *Computability theory*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2004.
- [Cox71] H. S. M. Coxeter, *Virus macromolecules and geodesic domes*, in *A spectrum of mathematics*, ed. by J. C. Butcher, Oxford University Press/Auckland University Press: Oxford, U. K./Auckland New Zealand, (1971) 98–107.
- [Cox73] H. S. M. Coxeter, *Regular Polytopes*, 3<sup>rd</sup> edition, Dover, 1973.
- [Cox98] H. S. M. Coxeter, *Non-Euclidean geometry*, Sixth edition. MAA Spectrum. Mathematical Association of America, Washington, 1998.
- [Cro97] P. R. Cromwell, *Polyhedra*, Cambridge University Press, 1997.
- [DDD10] M. Dutour Sikiric and O. Delgado-Friedrichs and M. Deza, *Space fullerenes: computer search for new Frank-Kasper structures*, Acta Crystallographica, **A66-5** (2010) 602–615.
- [DDE96] M. S. Dresselhaus, G. Dresselhaus and P. C. Eklund, *Science of Fullerenes and Carbon Nanotubes*, Academic Press, San Diego, 1996.
- [DDF09] M. Deza, M. Dutour Sikiric and P. W. Fowler, *The symmetries of cubic polyhedral graphs with face size no larger than 6* MATCH Commun. Math. Comput. Chem. **61-3** (2009) 589–602.
- [DDG98] A. Deza, M. Deza and V. P. Grishukhin, *Embeddings of fullerenes and coordination polyhedra into half-cubes*, Discrete Mathematics **192** (1998) 41–80.
- [DDS03] M. Deza, M. Dutour and M. I. Shtogrin, *4-valent plane graphs with 2-, 3- and 4-gonal faces*, «Advances in Algebra and Related Topics» (in memory of B. H. Neumann; Proceedings of ICM Satellite Conference on Algebra and Combinatorics, Hong Kong 2002), World Scientific Publ. Co. (2003) 73–97.

- [DDS05] M. Deza, M. Dutour and S. Shpectorov, *Graphs  $A_n$  that are isometrically embeddable in hypercubes*, Bulletin of South-East Asian Mathematical Society **29-3** (2005) 469–484.
- [DDS05b] M. Deza, M. Dutour and M. I. Shtogrin, *Elliptic polycycles with holes*, Uspechi Mat. Nauk. **60-2** (2005) 157–158 (in Russian). English translation in Russian Math. Surveys **60-2**, 349–351.
- [DDS08] M. Deza, M. Dutour and M. I. Shtogrin, *Filling of a given boundary by  $p$ -gons and related problems*, Proceedings of Int. Conference «General Theory of Information Transfer and Combinatorics» (Bielefeld, 2004), ed. by R. Ahlswede, L. Baumer, and N. Cai, Discrete Applied Mathematics, **156** (2008) 1 518–1 535.
- [DDS09] M. Deza, M. Dutour and M. I. Shtogrin, *Elementary elliptic  $(R, q)$ -polycycles*, a chapter in *Analysis of Complex Networks: From Biology to Linguistics*, ed. by M. Dehmer and F. Emmert-Streib, Wiley, 2009.
- [DDS12] M. Dutour Sikiric, M. Deza and M. Shtogrin, *Fullerene-like Spheres with Faces of Negative Curvature*, 2012, <http://arxiv.org/1112.3320>.
- [DeDe00] O. Delgado-Friedrichs and M. Deza, *More Icosahedral Fullerooids*, in DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science **51** (2000) 97–115.
- [DeDu05] M. Deza and M. Dutour, *Zigzag Structure of Simple Two-faced Polyhedra*, Combinatorics, Probability & Computing **14-1&2** (2005) 31–57.
- [DeDu11] M. Deza and M. Dutour Sikiric *Zigzags and central circuit structure of  $(\{1, 2, 3\}, 6)$ -spheres*, Taiwanese Journal of Mathematics, 2011.
- [DeDu11c] M. Deza and M. Dutour Sikiric, *Spheric analogs of fullerenes*, [http://www.fields.utoronto.ca/audio/11-12/conf\\_geomopt/deza/](http://www.fields.utoronto.ca/audio/11-12/conf_geomopt/deza/), 2011.
- [DeGr01] M. Deza and V. P. Grishukhin, *Face-regular bifaced polyhedra*, Journal of Statistical Planning and Inference **95-1&2**, Special Issue in honor of S. S. Shrikhande (2001) 175–195.
- [DeGr99] M. Deza and V. P. Grishukhin, *Hexagonal sequences*, in: Proceedings of the Conference on General Algebra and Discrete Mathematics, Potsdam 1998, ed. by K. Denecke and H.-J. Vogel, Aachen, Shaker-Verlag (1999) 47–68.
- [De180] M. S. Delaney, *Quasisymmetries of space group orbits*, MATCH **9** (1980) 73–80.
- [DeLa97] M. Deza and M. Laurent, *Geometry of Cuts and Metrics*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [DeSh96] M. Deza and S. Shpectorov, *Recognition of  $\ell_1$ -graphs with complexity  $O(nm)$ , or football in a hypercube*, European Journal of Combinatorics **17-2&3** (1996) 279–289.
- [Dez02] M. Deza, *Face-regular polyhedra and tilings with two combinatorial types of faces*, in «Codes and Designs», Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ. **10** (2002) 49–71.

- [DFG01] M. Deza, P. W. Fowler and V. P. Grishukhin, *Allowed boundary sequences for fused polycyclic patches, and related algorithmic problems*, Journal of Chemical Information and Computer science **41-2** (2001) 300–308.
- [DFRR00] M. Deza, P. W. Fowler, A. Rassat and K. M. Rogers, *Fullerenes as tilings of surfaces*, Journal of Chemical Information and Computer Science **40-3** (2000) 550–558.
- [DFSV00] M. Deza, P. W. Fowler, M. I. Shtogrin and K. Vietze, *Pentaheptite modifications of the graphite sheet*, Journal of Chemical Information and Computer Science **40-6** (2000) 1325–1332.
- [DGMŠ09] M. De Vos, L. Goddyn, B. Mohar, R. Šámal, *Cayley sum graphs and eigenvalues of  $(3, 6)$ -fullerenes*, Journal of Combinatorial Theory B **99-2** (2009) 358–369.
- [DGr02] M. Deza and V. P. Grishukhin, *Maps of  $p$ -gons with a ring of  $q$ -gons*, Bulletin of Institute of Combinatorics and its Applications **34** (2002) 99–110.
- [DGS04] M. Deza, V. P. Grishukhin and M. I. Shtogrin, *Scale-Isometric Polytopal Graphs in Hypercubes and Cubic Lattices*, World Scientific and Imperial College Press, 2004.
- [DHL02] M. Deza, T. Huang and K.-W. Lih, *Central Circuit Coverings of Octahedrites and Medial Polyhedra*, Journal of Math. Research and Exposition **22-1** (2002) 49–66.
- [DSS06] M. Deza, S. Shpectorov and M. I. Shtogrin, *Non-extendible elliptic  $(3, 5)$ -polycycles*, Izvestia of Russian Academy of Sciences, Sec. Math. **70-7** (2006) 3–17.
- [DeSt00a] M. Deza and M. I. Shtogrin, *Infinite primitive polycycles*, Uspechi Mat. Nauk. **55-1** (2000) 179–180 (in Russian). English translation in Russian Math. Surveys **55-1**, 169–170.
- [DeSt00b] M. Deza and M. I. Shtogrin, *Polycycles: Symmetry and Embeddability*, Uspechi Mat. Nauk. **55-6** (2000) 129–130 (in Russian). English translation in Russian Math. Surveys **55-6**, 1146–1147.
- [DeSt00c] M. Deza and M. I. Shtogrin, *Uniform partitions of 3-space, their relatives and embedding*, European Journal of Combinatorics **21-6** (2000) 807–814.
- [DeSt01] M. Deza and M. I. Shtogrin, *Clusters of cycles*, Journal of Geometry and Physics **40-3&4** (2001) 302–319.
- [DeSt02a] M. Deza and M. I. Shtogrin, *Criterion of embedding of  $(r, q)$ -polycycles*, Uspechi Mat. Nauk. **57-3** (2002) 149–150 (in Russian). English translation in Russian Math. Surveys **57-3**, 589–591.
- [DeSt02b] M. Deza and M. I. Shtogrin, *Extremal and non-extendible polycycles*, Proceedings of Steklov Mathematical Institute **239** (2002) 117–135. (Translated from Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V. A. Steklova) **239** (2002) 127–145.
- [DeSt02c] M. Deza and M. I. Shtogrin, *Mosaics, embeddable into cubic lattices*, Discrete Mathematics **244-1&3** (2002) 43–53.



- [DeSt03] M. Deza and M. I. Shtogrin, *Octahedrites*, Symmetry **11-1, 2, 3, 4**, Special Issue «Polyhedra in Science and Art» (2003) 27–34.
- [DeSt05] M. Deza and M. I. Shtogrin, *Metrics of constant curvature on polycycles*, Math. Notes **78-2** (2005) 223–233.
- [DeSt06] M. Deza and M. I. Shtogrin, *Types and boundary unicity of polypentagons*, Uspechi Mat. Nauk **61-6** (2006) 183–184 (in Russian). English translation in Russian Math. Surveys **61-6**, 1 170–1 172.
- [DeSt98] M. Deza and M. I. Shtogrin, *Polycycles*, Voronoi Conference on Analytic Number Theory and Space Tilings (Kyiv, September 7–14, 1998), Abstracts, Kyiv, 19–23.
- [DeSt99a] M. Deza and M. I. Shtogrin, *Primitive polycycles and helicenenes*, Uspechi Mat. Nauk. **54-6** (1999) 159–160 (in Russian). English translation in Russian Math. Surveys **54-6**, 1 238–1 239.
- [DeSt99b] M. Deza and M. I. Shtogrin, *Three, four and five-dimensional fullerenes*, Southeast Asian Bulletin of Mathematics **23** (1999) 9–18.
- [Dia88] J. R. Dias, *Handbook of polycyclic hydrocarbons. Part B: Polycyclic isomers and heteroatom analogs of benzenoid hydrocarbons*, Elsevier, Amsterdam, 1988.
- [Diu03] M. Diudea, *Capra — a leapfrog related map transformation*, Studia Universitatis Babes-Bolyai, Chemia **48** (2003) 3–21.
- [DrBr96] A. W. M. Dress and G. Brinkmann, *Phantasmagorical fulleroids*, MATCH **33** (1996) 87–100.
- [Dre84] A. W. M. Dress, *Regular polytopes and equivariant tessellations from a combinatorial point of view*, in Algebraic Topology, SLN 1172, Göttingen, (1984) 56–72.
- [Dre87] A. W. M. Dress, *Presentations of discrete groups, acting on simply connected manifolds, in terms of parametrized systems of Coxeter matrices — a systematic approach*, Advances in Mathematics **63-2** (1987) 196–212.
- [Du07] M. Dutour, *programs for this book*, [http://www.liga.ens.fr/~dutour/BOOK\\_Polycycle/](http://www.liga.ens.fr/~dutour/BOOK_Polycycle/), 2007.
- [DuDe03] M. Dutour and M. Deza, *Goldberg–Coxeter construction for 3- and 4-valent plane graphs*, Electronic Journal of Combinatorics **11-1** (2004) R20.
- [DuDe06] M. Dutour and M. Deza, *Face-regular 3-valent two-faced spheres and tori*, Research Memorandum Nr. 976 of Institute of Statistical Mathematics, 2006 (see also <http://www.liga.ens.fr/~dutour/>).
- [DuDe11] M. Dutour Sikiric and M. Deza, *4-regular and self-dual analogs of fullerenes*, a chapter pp. 103–116 in «Mathematics and Topology of Fullerenes» ed. by O. Ori, A. Graovac and F. Cataldo, Springer, 2011.
- [DuDe12] M. Dutour Sikiric and M. Deza, *Space fullerenes: computer search for new Frank–Kasper structures II*, Journal of Structural Chemistry **23-4** (2012) 1 103–1 114 (<http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs11224-012-0005-3>).

- [DuFo11] M. Dutour Sikiric and P. W. Fowler, *Cubic polyhedral Ramanujan graph with face size no larger than 6*, Journal of Mathematical Chemistry 49 (2011) 843–858.
- [Dut] S. Dutch, *Symmetry, Crystals and Polyhedra*, <http://www.uwgb.edu/dutchs/symmetry/symmetry.htm>
- [Dut02] M. Dutour, *PlanGraph, a GAP package for Planar Graphs*, <http://www.liga.ens.fr/~dutour/PlanGraph/>, 2002.
- [Dut03] M. Dutour, *l1emb*, a program for testing graphical  $l^1$ -embedding, <http://www.liga.ens.fr/~dutour/L1emb/>, 2003.
- [Dut04a] M. Dutour, *Point Groups*, <http://www.liga.ens.fr/~dutour/PointGroups/>, 2004
- [Dut04b] M. Dutour, *TorusDraw, a Matlab program for Toroidal maps*, <http://www.liga.ens.fr/~dutour/TorusDraw/>, 2004.
- [Ebe1891] V. Eberhard, *Zur Morphologie der Polyeder*, Teubner, 1891.
- [Egg05] A. Egging, *Kuerzeste Randlaengen von Patches mit Drei-, Vier-, Fuenf- und Sechsecken*, Diploma thesis, Bielefeld, 2005.
- [Eps00] D. Eppstein, *hyperbolic tilings*, <http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/hypertile.html>
- [Fa48] I. Fary, *On straight-line representation of planar graphs*, Acta Univ. Szeged. Sect. Sci. Math. **11** (1948) 229–233.
- [FCS88] P. W. Fowler, J. E. Cremona and J. I. Steer, *Systematics of bonding in non-icosahedral carbon clusters*, Theor. Chim. Acta **73** (1988) 1–26.
- [FeKu93] G. Fejes Tóth and W. Kuperberg, *Packings and coverings with convex sets*, Handbook of Convex Geometry, Vol A, B, 799–860, North Holland, 1993.
- [FeKuKu98] G. Fejes Tóth, G. Kuperberg and W. Kuperberg, *Highly saturated packings and reduced coverings*, Monatsh. Math. **125-2** (1998) 127–145.
- [FoCr97] P. W. Fowler and J. E. Cremona, *Fullerenes containing fused triples of pentagonal rings*, Journal of Chemical Society Faraday. Trans. **93-13** (1997) 2 255–2 262.
- [Fom] Фоменко А. Т., *Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы*, Редакция журнала «Регулярная и хаотическая динамика», Библиотека «Математика», том 3, Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999.
- [FoMa95] P. W. Fowler and D. E. Manolopoulos, *An Atlas of Fullerenes*, Clarendon Press, Oxford, 1995.
- [Fow93] P. W. Fowler, *Systematics of fullerenes and related clusters*, Phil. Trans. R. Soc. London A (1993) 39–51.
- [FYO95] M. Fujita, M. Yoshida and E. Osawa, *Morphology of New Fullerene Families with Negative Curvature*, Fullerene Science and Technology **3-1** (1995) 93–105.



- [GaHe93] Y-D. Gao and W. C. Herdon, *Fullerenes with four-membered rings*, Journal of American Chemical Society **115** (1993) 8459–8460.
- [GAP02] The GAP Group, *GAP — Groups, Algorithms, and Programming*, <http://www.gap-system.org>, Version 4.3; 2002.
- [GaSo01] E. Gallego and G. Solanes, *Perimeter, diameter and area of convex sets in the hyperbolic plane*, Journal London Mathematical Society **64-2** (2001) 161–178.
- [GHZ02] X. Guo, P. Hansen and M. Zheng, *Boundary uniqueness of fusenes*, Discrete Applied Mathematics **118-3** (2002) 209–222.
- [GLST85] B. Grünbaum, H.-D. Löckenhoff, G. C. Shephard and A. H. Temesvari, *The enumeration of normal 2-homeohedral tilings*, Geom. Dedicata **19** (1985) 109–174.
- [God71] C. Godbillon, *Éléments de topologie algébrique*, Hermann Paris, 1971.
- [Gol35] M. Goldberg, *An isoperimetric problem for polyhedra*, Tohoku Mathematical Journal **40** (1935) 226–236.
- [Gol37] M. Goldberg, *A class of multi-symmetric polyhedra*, Tohoku Mathematical Journal **43** (1937) 104–108.
- [Gra03] J. E. Graver, *The  $(m, k)$ -patch boundary code problem*, MATCH **48** (2003) 189–196.
- [Gra05] J. E. Graver, *Catalog of all fullerenes with ten or more symmetries*, Graphs and discovery, 167–188 DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., **69**, American Math Society, 2005.
- [Gre01] J. Greinus, *Patches mit minimaler Randlänge*, Diploma thesis, Bielefeld, 2001.
- [GrMo63] B. Grünbaum and T. S. Motzkin, *The number of hexagons and the simplicity of geodesics on certain polyhedra*, Canadian Journal of Mathematics **15** (1963) 744–751.
- [GrSh83] B. Grünbaum and G. C. Shephard, *The 2-Homeotoxal Tilings of the Plane and the 2-Sphere*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **34** (1983) 113–150.
- [GrSh87a] B. Grünbaum and G. C. Shephard, *Tilings and Patterns*, W. H. Freeman, 1987.
- [GrSh87b] B. Grünbaum and G. C. Shephard, *Edge-transitive planar graphs*, Journal of Graph Theory **11-2** (1987) 141–155.
- [GrTu87] J. L. Gross and T. W. Tucker, *Topological Graph Theory*, Hamilton, 1987.
- [Grü03] B. Grünbaum, *Are your polyhedra the same as my polyhedra?*, Discrete and Computational Geometry: The Goodman-Pollack Festschrift. ed. by B. Aronov, S. Basu, J. Pach and M. Sharir, Springer, 2003, 461–488.
- [Grü67] B. Grünbaum, *Convex Polytopes*, Interscience, 1967.
- [GrZa74] B. Grünbaum and J. Zaks, *The existence of certain planar maps*, Discrete Mathematics **10** (1974) 93–115.

- [HaHa76] F. Harary and H. Harborth, *Extremal animals*, Journal of Combinatorics, Information and System Sciences **1** (1976) 1–8.
- [Har] T. Harmuth, <http://people.freenet.de/thomas.harmuth/>
- [Har00] T. Harmuth, *personal communication*, June 2000.
- [HaSl96] R. H. Hardin and N. J. A. Sloane, *McLaren's improved Snub Cube and other new spherical designs in three dimensions*, Discrete and Computational Geometry **15** (1996) 429–441.
- [Hat01] A. Hatcher, *Algebraic topology*, <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html>
- [Har90] H. Harborth, *Some mosaic polyominoes*, Ars Combinatoria **29A** (1990) 5–12.
- [HeBr87] W. C. Herndon and A. J. Bruce, *Perimeter code for benzenoid aromatic hydrocarbons*, in: Graph theory and topology in chemistry, ed. by R. B. King and D. H. Rouvray, Studies in physical and theoretical chemistry **51** (1987) 491–513.
- [Hei98] O. Heidemeier, *Die Erzeugung von 4-regulären, planaren, simplen, zusammenhängenden Graphen mit vorgegebenen Flächentypen*, Diploma thesis, Bielefeld (1998).
- [HKS07] R. Hajduk, F. Kardos and R. Soták, *On the azulene-like structures with large ring of 5-gons*, manuscript, 2007, [http://www.cirm.univ-mrs.fr/videos/2007/programmes/conf13\\_Manoussakis.html](http://www.cirm.univ-mrs.fr/videos/2007/programmes/conf13_Manoussakis.html).
- [HLZ96] P. Hansen, C. Lebatteux and M. Zheng, *The boundary-edges code for polyhexes*, Journal of Molecular Structure (Theochem) **363** (1996) 237–247.
- [HoSh93] D. A. Holton and J. Sheehan, *The Petersen graph*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [Hum90] J. E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge University Press, 1990.
- [Hum96] J. F. Humphreys, *A course in group theory*, Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, 1996.
- [IPT] Иванов А. О., Птицына И. В., Тужилин А. А., *Классификация замкнутых минимальных сетей на плоских двумерных торах*, Матем. Сборник, 1992, т. 183, № 12, с. 3–44.
- [JeKa07] S. Jendrol and F. Kardos, *On octahedral fulleroids* Discrete Applied Mathematics **155** (2007) 2 181–2 186.
- [Jen90] S. Jendrol, *Convex 3-polytopes with Exactly Two Types of Edges*, Discrete Mathematics **84** (1990) 143–160.
- [JeTr01] S. Jendrol and M. Trenkler, *More icosahedral fulleroids*, Journal of Mathematical Chemistry **29** (2001) 235–243.
- [Joh66] N. W. Johnson, *Convex polyhedra with regular faces*, Canadian Journal of Mathematics **18** (1966) 169–200.

- [Jos06] J. Jost, *Compact Riemann surfaces. An introduction to contemporary mathematics*, 3<sup>rd</sup> edition. Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [JoSa09] P. E. John and H. Sachs, *Spectra of toroidal graphs* Discrete Mathematics **309-9** (2009) 2 663–2 681.
- [Ka07b] F. Kardos, *Tetrahedral fullerooids* Journal of Mathematical Chemistry **41-2** (2007) 101–111.
- [Ka10] F. Kardos *Fullerooids with dihedral symmetry* Discrete Mathematics **310-3** (2010) 652–661.
- [Kar07] F. Kardos, *Symmetry of fullerooids*, PhD thesis, Kosice University, 2007.
- [Kep1619] J. Kepler, *Harmonice Mundi*, 1619.
- [Ki00] R. B. King, *Unusual Permutation Groups in Negative Curvature Carbon and Boron Nitride Structures*, Croatia Chemica Acta **73-4** (2000) 993–1 015.
- [Kir94] E. C. Kirby, *On toroidal azulenoids and other shapes of fullerene cage*, Fullerene Science and Technology **2-4** (1994) 395–404.
- [Kir97] E. C. Kirby, *Recent works on toroidal and other exotic fullerene structures*, chapter 8 in *From Chemical Topology to 3-Dimensional Geometry*, ed. by A. T. Balaban, Plenum Press (1997) 263–296.
- [KlBa06] D. J. Klein and A. T. Balaban, *The Eight Classes of Positive-Curvature Graphitic Nanocones*, Journal of Chemical Information and Modeling **46-1** (2006) 307–320.
- [KlZh97] D. J. Klein and H. Zhu, *All-conjugated carbon species*, chapter 9 in *From Chemical Topology to 3-Dimensional Geometry*, ed. by A. T. Balaban, Plenum Press (1997) 297–341.
- [KoFi87] W. Fischer and E. Koch, *On 3-periodic minimal surfaces*, Z. Krist. **179-1&4** (1987) 31–52.
- [KoFi96] W. Fischer and E. Koch, *Spanning minimal surfaces*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A **354** (1996) 2 105–2 142.
- [Löc68] H.-D. Löckenhoff, *Über die Zerlegung der Ebene in zwei Arten topologisch verschiedener Flächen*, Inaugural Dissertation, Marburg, 1968.
- [LySc77] R. C. Lyndon, P. E. Schupp, *Combinatorial group theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 89, Springer-Verlag, 1977.
- [Mag07] The MAGMA Group, *Magma computer algebra system*, Sydney university, 2007.
- [Mag74] W. Magnus, *Non-Euclidean Tessellations and their Groups*, Academic Press, New York and London, 1974.
- [Mal70] J. Malkevitch, *Properties of planar graphs with uniform vertex and face structure*, Memoirs of the American Mathematical Society, 1970.

- [Man71] P. Mani, *Automorphismen von Polyhedrischen Graphen*, Mathematische Annalen **192** (1971) 279–303.
- [MaSh07] M. Marcusanu and S. Shpectorov, *The Classification of  $l_1$ -embeddable fullerenes*, manuscript, 2007.
- [MaSo07] T. Madaras and R. Soták, *More maps of  $p$ -gons with a ring of  $q$ -gons*, Ars Combinatorica, **85** (2007) 939–951.
- [McK98] B. D. McKay, *Isomorph-free exhaustive generation*, Journal of Algorithms **26** (1998) 306–324.
- [MiFo] Мищенко А. С., Фоменко А. Т., *Курс дифференциальной геометрии и топологии*, Москва: Факториал Пресс, 2000.
- [Moh97] B. Mohar, *Circle packing of map in polynomial time*, European Journal of Combinatorics **18** (1997) 785–805.
- [Mor97] J. F. Moran, *The growth rate and balance of homogeneous tilings in the hyperbolic plane*, Discrete Mathematics **173** (1997) 151–186.
- [MoTh01] B. Mohar and C. Thomassen, *Graphs on surfaces*, Johns Hopkins University Press, 2001.
- [Mun71] J. R. Munkres, *Topology*, 2<sup>nd</sup> edition, Prentice-Hall, 2000.
- [Nak90] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*, Graduate Student Series in Physics, Adam Hilger Ltd., 1990.
- [Nak96] A. Nakamoto, *Triangulations and quadrangulations of surfaces*, diploma thesis, Keio University, 1996.
- [Neg85] S. Negami, *Uniqueness and faithfulness of embedding of graphs into surfaces*, Doctor thesis, Tokyo Institute of Technology, 1985.
- [New72] M. Newman, *Integral Matrices*, Academic Press, 1972.
- [OKHy96] M. O’Keeffe and B. G. Hyde, *Crystal Structures I. Pattern and Symmetry*, Mineral. Soc. of America, Washington DC, 1996.
- [Oss69] R. Osserman, *A survey of minimal surfaces*, van Nostrand, 1969.
- [PaPi11] A. Paul and N. Pippenger, *A Census of Vertices by Generations in Regular Tessellations of the Plane*, The Electronic Journal of Combinatorics **18** (2011), № R87.
- [Par06] R. Parker, *Short Theorems with Long Proofs in Finitely Presented Groups*, Nikolaus Conference 2006, <http://www.math.rwth-aachen.de:8001/Nikolaus2006/prog.html>
- [PSC90] K. F. Prisacaru, P. S. Soltan and V. D. Chepoi, *On embeddings of planar graphs into hypercubes*, Proceedings of Moldavian Academy of Sciences, Mathematics **1** (1990) 43–50 (in Russian).



- [Pti] И. В. Птицына, *Классификация замкнутых локально минимальных сетей на плоских бутылках Клейна*, Вестник МГУ, серия «Матем. и механ.», 1995, № 2, с. 15–22.
- [Rot88] J. J. Rotman, *An introduction to algebraic topology*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1988.
- [Sah94] C. H. Sah, *A generalized leapfrog for fullerene structures*, Fullerenes Science and Technology **2-4** (1994) 445–458.
- [ScSw95] P. Schröder and W. Sweldens, *Spherical wavelets: Efficiently Representing Functions on the Sphere*, Proceedings of ACM Siggraph (1995) 161–172.
- [SeSe94] B. Servatius and H. Servatius, *Self-dual maps on the sphere*, Discrete Mathematics **134-1&3** (1994) 139–150.
- [SeSe95] B. Servatius and H. Servatius, *The 24 symmetry pairings of self-dual maps on the sphere*, Discrete Mathematics **140-1&3** (1995) 167–183.
- [SeSe96] B. Servatius and H. Servatius, *Self-dual graphs*, Discrete Mathematics **149-1&3** (1996) 223–232.
- [Sht00] M. I. Shtogrin, *Non-primitive polycycles and helicenes*, Uspechi Mat. Nauk. **55-2** (2000) 155–156 (in Russian). English translation in Russian Math. Surveys **55-2**, 358–360.
- [Sht99] M. I. Shtogrin, *Primitive polycycles: criterion*, Uspechi Mat. Nauk. **54-6** (1999) 177–178 (in Russian). English translation in Russian Math. Surveys **54-6**, 1 261–1 262.
- [Ste22] E. Steinitz, *Polyeder und Raumeinteilungen*, Enzykl. math. Wiss. **3** (1922) 1–139.
- [Thu98] W. P. Thurston, *Shapes of polyhedra and triangulations of the sphere*, in Geometry and Topology Monographs 1, The Eppstein Birthday Schrift, ed. by J. Rivin, C. Rourke and C. Series, Geom. Topol. Publ., Coventry (1998) 511–549.
- [Tut63] W. T. Tutte, *How to draw a graph*, Proc. London Math. Soc. **13** (1963) 743–768.
- [TuzFom] Тужилин А. А., Фоменко А. Т., *Элементы геометрии и топологии минимальных поверхностей*, Москва: Наука, 1991.
- [Wa36] K. Wagner, *Bemerkungen zum Vierfarbenproblem*, Jahresbericht. German. Math.-Verein **46** (1936) 26–32.
- [Zal69] V. A. Zalgaller, *Convex polyhedra with regular faces*, Seminar in Mathematics of Steklov Mathematical Institute, Leningrad 2 Consultants Bureau, 1969.
- [Zie95] G. Ziegler, *Lectures on polytopes*, Graduate text in mathematics, 152, Springer Verlag, 1995.



*Мишель Мари Деза  
Матье Дютур Сикирич*

## ГЕОМЕТРИЯ ХИМИЧЕСКИХ ГРАФОВ: ПОЛИЦИКЛЫ И БИПОЛИЦИКЛЫ

*Дизайнер А. А. Гурьянова  
Технический редактор А. В. Бакиев  
Компьютерный набор и верстка А. И. Ереметова  
Корректор Т. Н. Якушева*

---

Подписано в печать 11.02.2019. Формат 60 × 84<sup>1/16</sup>.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 22,32. Уч. изд. л. 23,89.

Гарнитура Таймс. Бумага офсетная № 1. Заказ № 19-50.

АНО «Ижевский институт компьютерных исследований»

426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

<http://shop.rcd.ru> E-mail: [mail@rcd.ru](mailto:mail@rcd.ru) Тел./факс: +7 (3412) 50-02-95

---