

В. М. ШАПОВАЛОВ

**ВАЛКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ  
НЕНЬЮТОНОВСКИХ  
ЖИДКОСТЕЙ**



Шаповалов В.М.

# Валковые течения неньютоновских жидкостей



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 532.135  
ББК 22.25  
Ш 24

Шаповалов В. М. **Валковые течения неньютоновских жидкостей.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. — 168 с. — ISBN 978-5-9221-1352-6.

В книге с единых позиций рассматриваются математические модели валковых течений аномально вязких и вязкопластических жидкостей. Анализируются стационарные и нестационарные течения с учетом проницаемости стенки и сил тяжести. Представлены результаты численного анализа течений различного типа и геометрии. Приведены аналитические решения новых нелинейных задач. Впервые рассмотрен режим валкового течения с отрицательной фрикцией. Обнаружены и описаны новые гидродинамические эффекты.

Предназначена научным сотрудникам, специалистам химической, машиностроительной и приборостроительной промышленности, может быть использована преподавателями вузов для составления курса лекций по теоретическим основам переработки полимеров.

---

Научное издание

*ШАПОВАЛОВ Владимир Михайлович*

## **ВАЛКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ**

Редактор *О. В. Салецкая*

Оригинал-макет: *В. В. Затекин*

Оформление переплета: *В. Ф. Киселев*

Подписано в печать 14.02.11. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 10,5. Уч.-изд. л. 11,55. Тираж 100 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»  
МАИК «Наука/Интерпериодика»  
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90  
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;  
<http://www.fml.ru>

Отпечатано с электронных носителей издательства  
в ООО «Чебоксарская типография № 1»  
428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, 15

ISBN 978-5-9221-1352-6



9 785922 113526

---

ISBN 978-5-9221-1352-6

© ФИЗМАТЛИТ, 2011

© В. М. Шаповалов, 2011

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение. . . . .	5
<b>Глава 1. Механика валкового течения неньютоновских жидкостей. . . . .</b>	<b>7</b>
1.1. Математическое моделирование течения неньютоновских жидкостей. . . . .	8
1.2. Гранулирование неньютоновских жидкостей . . . . .	10
1.2.1. Конструкции роторных грануляторов (11). 1.2.2. Анализ течения материала в рабочем зазоре (13). 1.2.3. Реологические свойства гранулируемых сред (15).	
1.3. Реологические эффекты, сопровождающие процесс валкового течения. . . . .	18
<b>Глава 2. Механика роторного гранулирования . . . . .</b>	<b>22</b>
2.1. Течение неньютоновской жидкости в зазоре между вращающимся цилиндром и проницаемой поверхностью . . . . .	22
2.2. Расчет потребляемой мощности . . . . .	26
2.3. Течение ньютоновской жидкости . . . . .	28
2.3.1. Анализ поля скоростей (29). 2.3.2. Интегральные характеристики гранулирования ньютоновской жидкости (31). 2.3.3. Скорость вращения свободного вала (32). 2.3.4. Грануляторы с неоднородной по длине вала фрикцией (33).	
2.4. Гранулирование неньютоновских жидкостей . . . . .	36
2.4.1. Случай равенства скоростей рабочих поверхностей (37). 2.4.2. Гранулирование при большой фрикции (39). 2.4.3. Общий случай течения (41). 2.4.4. Скорость вращения свободного вала (49). 2.4.5. Интегральные параметры гранулятора с неоднородной по длине вала фрикцией (51). 2.4.6. Влияние боковых стенок (трехмерное течение) (53).	
<b>Глава 3. Математические модели валкового течения тяжелых вязких и нелинейно-вязких жидкостей. . . . .</b>	<b>61</b>
3.1. Валковое течение тяжелой ньютоновской жидкости. . . . .	61
3.1.1. Постановка задачи (61). 3.1.2. Основные уравнения (62). 3.1.3. Анализ решения (67).	

3.2. Валковое течение среды Оствальда де Виля. . . . .	77
3.2.1. Постановка задачи (77). 3.2.2. Решение задачи (80).	
3.2.3. Анализ решения (81).	
3.3. Нестационарное валковое течение тяжелой вязкой жидкости	87
3.4. О валковом течении с отрицательной фрикцией. . . . .	99
3.5. Течение аномально вязкой жидкости в клинообразном зазоре с упругой стенкой. . . . .	110
3.6. Валковое течение аномально вязкой жидкости при значи- тельной фрикции. . . . .	115
3.7. Диссипативный нагрев при вальцевании волокнонаполнен- ных полимерных систем . . . . .	120
 Глава 4. <b>Математические модели валкового течения тяже-     лых вязкопластических сред.</b> . . . . .	126
4.1. Течение среды Шведова–Бингама . . . . .	126
4.1.1. Постановка задачи (126). 4.1.2. Решение зада- чи (134). 4.1.3. Анализ решения (136).	
4.2. Течение среды Гершеля–Балкли . . . . .	150
4.2.1. Постановка задачи (150). 4.2.2. Решение в безраз- мерной форме (152). 4.2.3. Анализ модели течения среды Гершеля–Балкли (154).	
4.3. Сравнение моделей . . . . .	158
4.4. Измерение давления в зазоре валковых машин сканирующим датчиком интегрирующего типа. . . . .	160
 Список литературы . . . . .	164

## Введение

Вследствие большой производительности современного перерабатывающего оборудования и высокой стоимости технологических линий и сырья проведение экспериментальных исследований реального процесса переработки сложных сред, даже выполненных с применением современных методов планирования, превращается в дорогостоящую и продолжительную работу. Производство новых полимерных материалов поставило серьезные задачи перед перерабатывающей промышленностью, поэтому усовершенствование существующих технологических процессов является необходимой мерой улучшения механических и других свойств конечных изделий.

Наиболее плодотворным в технологии переработки является сочетание инженерной практики с математическим моделированием закономерностей поведения неньютоновских сред в процессах изготовления изделий. Только при этом может быть обеспечено повышение эффективности производства и качества изделий, оптимизация существующих и разработка новых технологических процессов.

Неньютоновские жидкости, как правило, более «вязкие», чем обычные ньютоновские (в том смысле, что при сравнимых кинематических условиях в них развиваются большие внутренние напряжения), поэтому ползущие течения составляют наиболее интересную категорию течений полимерных жидкостей. Если в ползущих течениях ньютоновских жидкостей уравнения движения линейны (стоксово приближение), то в неньютоновском случае уравнения движения нелинейны. Это справедливо независимо от того, в какой форме принимается реологическое уравнение состояния, что существенно усложняет задачу математического моделирования.

В первой главе представлен обзор теоретических и экспериментальных исследований, посвященных моделированию технологических процессов, связанных с валковым течением полимеров. Рассмотрены общие подходы при анализе задач. Отмечается, что в большинстве работ силы тяжести жидкости не учитываются.

Особое внимание уделено интенсивно развивающемуся в последние годы подходу, связанному с понижением размерности задачи — описанием течения как одномерного или двумерного континуума. Такой подход ведет к существенным упрощениям и позволяет учесть ряд новых эффектов, в частности, аномалию реологического поведения и асимметрию граничных условий. Квазидвумерный подход (рейнольдсово приближение в теории смазки), значительно упрощая определяющие уравнения, обеспечивает достаточную точность результатов. Есть все основания систематически использовать этот подход при изучении валковых течений неньютоновских жидкостей.

Во второй главе в рамках квазиплоского приближения выполнен анализ течения неньютоновской жидкости степенного типа в зоне гидродинамического контакта роторных грануляторов.

В третьей главе представлены математические модели валкового течения тяжёлых вязких и нелинейно-вязких жидкостей. Обнаружен и подробно изучен эффект разряжения в зоне течения. Рассмотрено валковое течение с отрицательной фрикцией, а также течение аномально вязкой жидкости в клинообразном зазоре с упругой стенкой.

В четвёртой главе рассмотрены модели валкового течения тяжёлых вязкопластических жидкостей.

Из соображений экономии места, сведения о неньютоновской гидромеханике и реологии опущены. Для изучения этих вопросов можно рекомендовать оригинальные работы А. Я. Малкина, Д. М. Мак-Келви, Дж. Астарита и др., где общие принципы изложены исчерпывающим образом.

Автор признателен профессорам ВГУ Е. И. Васильеву и А. И. Иванову за полезное обсуждение научных результатов.

## **МЕХАНИКА ВАЛКОВОГО ТЕЧЕНИЯ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ**

... Пути научных исследований почти столь же разнообразны, как и человеческие характеры.

*Д. Уотсон*

Приведен анализ литературных источников по проблемам математического моделирования валковых течений неньютоновских сред. Представлен сравнительный анализ имеющихся математических моделей течений в роторных грануляторах и в рабочем зазоре валковых машин.

Проведение экспериментальных исследований реального процесса переработки полимеров, даже осуществленных с применением современных методов планирования, превращается в дорогостоящую и продолжительную работу. Поэтому целесообразно изучать особенность каждого конкретного процесса, рассматривая не только его технологическое, но и теоретическое описание методами математического моделирования. Наличие математической модели в определенной степени свидетельствует о изученности процесса и существенно облегчает задачу его практической реализации, оптимизации и автоматизации.

Выбор объектов исследования связан со следующими обстоятельствами. Для многих приложений, особенно для технологических процессов в химической, нефтехимической, пищевой, микробиологической и других отраслях промышленности, требуется все более точный расчет характеристик рабочих процессов. Это необходимо для поиска оптимальных конструкторских и технологических решений, направленных на повышение надежности, улучшения эксплуатационных характеристик машин и технологических аппаратов, снижения энергоемкости, повышения качества изделий.

Одним из широко распространенных технологических процессов является процесс течения реологически сложных систем



в зазоре между вращающимися валками. Валковое течение как вид переработки имеет ряд достоинств: высокая производительность, сравнительно простое конструктивное оформление, универсальность и относительно высокая экономическая эффективность.

Рассматриваемый вид течения реализуется в сушилках, дозаторах, смесителях, роторных грануляторах и пр. Многие отечественные и иностранные фирмы по изготовлению химического оборудования, имеют множество предложений в этой области, включая двух- и более валковые машины (сайт-каталог на германские фирмы «IndustryStock.com», АПОСТРОФ ПРИНТ (<http://www.apostrof-print.ru/catalog>), типография «Печатный Двор» (<http://www.p-dvor.ru>), сайт-каталог предприятий по производству и сбыту оборудования химической промышленности «Резиновый базар» (<http://www.reznik.com.ua>), ЗАО «Петрозаводскмаш» производит двух- и более валковые смесители, сушилки (<http://www.pbm.onego.ru>)).

### **1.1. Математическое моделирование течения неньютоновских жидкостей**

Математическое моделирование позволяет избежать дорогостоящих натуральных экспериментов, сократить сроки отработки технологических процессов и подготовки нового производства. Например, экспериментально трудно непосредственно измерить размеры пластического ядра при валковом течении вязкопластической среды.

Таким образом, валковое течение достаточно распространено в промышленности и совершенствование его математической модели — задача актуальная.

Современный математический аппарат позволяет решать широкий круг прикладных задач. Методы решения инженерных задач делятся на аналитические и численные; точные и приближенные; детерминированные и вероятностные. Широко применяются следующие детерминированные приближенные методы: вариационные (Рэля–Ритца, Бубнова–Галеркина, Лейбензона, Канторовича, Био и др.); операционные (конечных и бесконечных преобразований); возмущений (малого параметра); сведение к дифференциальным и интегральным уравнениям разных типов; подстановка готовых форм решения; метод теории размерности; линеаризации и другие. Подробное описание методов содержится в работах [1–7].

Выбор метода решения, как правило, связан с субъективными приоритетами исследователя, однако аналитическое решение всегда имеет непреходящую ценность. В теории теплопроводности и ньютоновской гидромеханике методы решения более систематизированы, чем в гидромеханике неньютоновских жидкостей. При разработке математической модели в задачу исследователя входит наибольшая корректность физической постановки и выбор метода решения, обеспечивающего приемлемую точность. Подобно совершенствованию и модернизации технологического оборудования математические модели соответствующих процессов претерпевают изменения (уточняются, учитывают новые факторы, эффекты).

Условно можно выделить различные уровни анализа: прикладной инженерный и фундаментальный. Целью прикладного инженерного анализа является разработка методики конструкторского расчета процесса. Примером такого подхода может служить работа [8]. Для фундаментального подхода характерен углубленный анализ модели, часто узко направленный. Целью анализа при этом обычно является выяснение фундаментальных особенностей задачи (режимы, особые точки, асимптотические свойства и др.), иногда не имеющих непосредственного прикладного значения. Фундаментальные результаты имеют универсальное значение и могут быть перенесены из одной области исследования на другую. Это правомерно при подобии основных дифференциальных уравнений. Результаты при этом могут носить, учитывая неточность в определении физических свойств веществ и схематичность постановки, чисто качественный характер. Однако, это позволяет предложить целенаправленную методику дополнительных экспериментальных исследований для уточнения выявленного эффекта. Таким образом, фундаментальные исследования являются стратегическими для прикладных исследований.

Различия в температурах, скоростях движения, производительности между лабораторными и производственными установками создают значительные трудности при определении режимов технологического процесса. Поэтому технологическое изыскание режимов обработки часто приходится переносить на этап наладочных работ уже при пуске оборудования, что, в свою очередь, удлиняет сроки ввода его в эксплуатацию, а иногда приводит к невозможности реализации заданного технологического режима.

Общей тенденцией математического моделирования является системный, многофакторный характер моделей и, соответственно, преимущественное применение численных методов анализа.

## 1.2. Гранулирование неньютоновских жидкостей

Применение в народном хозяйстве гранулированных материалов непрерывно расширяется. Они используются в сельском хозяйстве (удобрения, комбикорма); во многих отраслях промышленности — легкой (красители), резинотехнической (наполнители) и химической (катализаторы); в медицине (антибиотики и другие препараты); в быту (моющие средства); при производстве продуктов питания (дрожжи, чай) и т. д. Применение гранулированных материалов дает возможность улучшить условия транспортировки и условия труда. Использование таких материалов позволяет увеличивать насыпной вес, газопроницаемость слоя материала, сыпучесть, пористость, эффективность применения, поверхностный контакт со средой, сроки хранения готовых продуктов. При этом уменьшаются потери материала с пылью, склонность к слеживаемости, комкованию при растворении, зависанию и сводообразованию. Снижается расход материала при его применении и дальнейшей переработке. Обеспечивается возможность механизации погрузочно-разгрузочных работ, автоматического дозирования, утилизация отходов, возможность применения едких, токсичных, паста- и плавообразных материалов (использование которых в другом виде затруднено или невозможно), получения и применения комбинированных и сложных продуктов, псевдооживления в потоке жидкости или газа без значительных, связанных с уносом потерь материала.

Прочностные свойства гранулята зависят в значительной степени от величины усилий, а также физико-механических свойств вещества и процессов, происходящих в грануляте после его получения. Характерная особенность роторного гранулирования — возможность получения гранулята из любых сыпучих и пастообразных продуктов при производительности от килограммов до десятков тонн в час. К числу неоспоримых преимуществ роторных грануляторов относится только им присущая возможность реализации таких процессов гранулирования, в которых задаются особо жесткие требования к гранулам по геометрии, размерам и прочности. Роторные машины, совмещая в себе функции насоса и формующего устройства, характеризуются минимальной деформацией перерабатываемого материала и позволяют гранулировать высоконаполненные гетерогенные смеси.

Исходные данные конструирования грануляторов получают опытным путем, проводя экспериментальную проверку на лабораторных образцах, по масштабам, максимально приближающихся к реальной машине, и принимая во внимание рабочие параметры работающих промышленных образцов. Условием наибольшей достоверности получаемых при этом опытных данных должно быть обязательное использование в эксперименте реальной среды, для переработки которой создаются грануляторы в каждом конкретном случае.

**1.2.1. Конструкции роторных грануляторов.** Анализ конструктивных признаков роторных грануляторов учитывает следующие особенности: тип основного рабочего органа, количество рабочих органов, способ подачи материала и извлечения гранул, наличие режущего устройства (см. рис. 1.1.). Роторный гранулятор представляет собой машину для формирования исходной среды при помощи рабочих элементов, описывающих круговую траекторию, которые в процессе своего движения продавливают перерабатываемую среду через отверстия матрицы.



Рис. 1.1

Грануляторы могут быть выполнены с неподвижной или вращающейся вокруг главной оси машины фильерной решеткой — матрицей. На рис. 1.2. даны схемы роторных формователей с неподвижной фильерной решеткой. На схеме рис. 1.2а представлен ротор с планетарно вращающимися валками, которые продавливают гранулируемый материал через фильерные отверстия. На рис. 1.2б ротор имеет протирочные лопасти, наклоненные к поверхности фильерной решетки под некоторым углом и обеспечивающие протирку материала за счет действия сил в зазоре между лопастью и поверхностью фильерной решетки. Следует отметить, что обязательное условие нормальной работы указанных конструкций — наличие достаточно малого зазора между рабочим элементом ротора и поверхностью фильерной

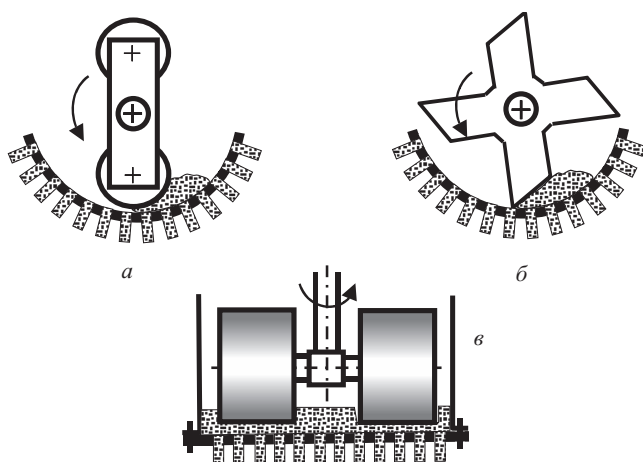


Рис. 1.2. Грануляторы с неподвижной матрицей

решетки. Грануляторы, выполненные по такой схеме, как правило, не снабжены устройствами для резки формируемых жгутов, и поэтому гранулы имеют значительный разброс по длине. Подобный гранулятор представлен на рис. 1.2в. В корпусе, с закрепленной на торце фильерной решеткой, вращается кривошип, на осях которого свободно вращаются валки.

В различных вариантах гранулятор выполняется с цилиндрическими или коническими валками, а также протирочными лопастями. В отдельных случаях валки выполняются гуммированными.

В качестве примера приведем схемы конструкций грануляторов с подвижной матрицей (рис. 1.3). Гранулятор (рис. 1.3а) представляет собой два валка, вращающихся встречно, один из которых сплошной, а другой перфорированный. Известны также конструкции с двумя перфорированными валками. Гранулы обра-

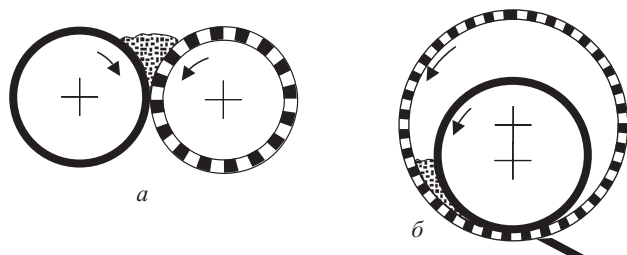


Рис. 1.3. Грануляторы с подвижной матрицей

зуются и в последующем удаляются в полости перфорированного вала. В машине (рис. 1.3б) сплошной валок находится внутри перфорированной цилиндрической матрицы (закреплен консольно) и гранулы образуются на наружной поверхности перфорированного вала.

Этот гранулятор может быть снабжен срезающим ножом, что обеспечивает постоянную длину гранул.

Во всех рассмотренных грануляторах давление, обеспечивающее формование гранул, создается за счет гидродинамических сил, возникающих при течении материала в клинообразном зазоре между сплошной и перфорированной поверхностями. Несмотря на конструктивные различия, рассмотренные грануляторы с точки зрения процессов, протекающих в зоне течения, можно свести к одной гидродинамической модели, базирующейся на уравнении Рейнольдса, которая широко используется при анализе подшипников скольжения.

Грануляторы, характеризующиеся другой картиной течения (принципом формования гранул), не рассматриваются. Подробная информация о принципе действия и конструкциях грануляторов различных типов содержится в работах [9–13].

**1.2.2. Анализ течения материала в рабочем зазоре.** Теоретические исследования по роторному гранулированию крайне немногочисленны, и в настоящее время отсутствуют инженерные методики их расчета. Большинство работ посвящено анализу конструкций и принципа действия или анализу экспериментально полученных результатов. Теоретическим вопросам течения перерабатываемого материала в роторных грануляторах посвящены работы [14–19]. Гидродинамическая теория роторного гранулирования базируется на рейнольдсовом подходе к анализу течения смазки в зазоре подшипника скольжения [14, 20], которая успешно была применена к анализу течения перерабатываемой среды в валковых машинах.

Теория течения в валковых машинах разрабатывалась зарубежными учеными Ардичвили, Гаскеллом, Бернхардтом, Мак-Келви и рядом советских ученых (С. М. Тарг, Р. В. Торнер и др.) [21–24]. В пределах этой теории широко распространен квазидвумерный подход, при котором давление изменяется только по длине зоны течения, а скорость характеризуется двумя компонентами. В начале зоны течения полагают атмосферное давление. Для конца зоны течения характерно не только нулевое давление, но и нулевой градиент давления. На рабочих поверхностях имеет место условие прилипания.

Поля скоростей и давления описываются тремя уравнениями: одномерным уравнением сохранения импульса, реологическим, определяющимся соотношением, и уравнением неразрывности. Задача является недоопределенной, поскольку для четырех неизвестных функций (давления, касательного напряжения и компонент скорости) имеется только три дифференциальных уравнения. Вследствие этой особенности невозможно получить однозначное решение для производительности и нельзя ее прогнозировать, что отмечалось еще Мак-Келви [23]. Решение лишь устанавливает однозначное соответствие между производительностью и распределением давления в рабочем зазоре (полем скоростей и касательных напряжений). Тем не менее, указанная постановка задачи показала хорошее соответствие с опытными результатами [23].

К преимуществам квазиплоского подхода можно отнести возможность получения в простых случаях аналитического решения, удобство анализа, наглядность. Двумерная постановка, когда давление является функцией не только продольной, но и поперечной координаты, требует дополнительных условий на входе зоны течения и, как правило, решается численно.

По Ардичвили [22] течение заканчивается в минимальном зазоре между валками, где полагают нулевое давление. Однако экспериментальные исследования показали существование так называемого напорного эффекта, сущность которого в том, что большой градиент давления в области минимального зазора создает напорное течение жидкости в области выхода и течение заканчивается за минимальным сечением [23, 24].

Согласно данным работы [25], для неньютоновских жидкостей, без учета упругих эффектов, имеет место подобие между кривой течения и законом проницаемости пористой среды (или перфорированной матрицы). Проницаемость матрицы не зависит от скорости ее поступательного движения и для «степенной» жидкости принимается степенная зависимость нормальной к перфорированной поверхности компоненты скорости от давления.

Таким образом, задача течения перерабатываемого материала в рабочем зазоре роторного гранулятора может быть описана системой уравнений, традиционных для валковых машин, дополненных условием проницаемости перфорированной стенки. Несмотря на наличие отверстий в матрице, для осевой компоненты скорости остается в силе условие прилипания.

Имеющиеся теоретические исследования по математическому моделированию течения перерабатываемого материала в грануляторах [15–17] содержат неточности в постановке краевой за-

дачи. Так, например, авторы указанных работ полагают нулевое давление в минимальном зазоре, что соответствует концепции Ардичвили [22] и Тарга [26] для валкового процесса. При этом игнорируется напорный эффект, обусловленный отрицательным градиентом давления в выходном сечении. Кроме того, форма полученных результатов малопригодна для разработки простых и доступных инженерных методик расчета грануляторов, в частности их интегральных характеристик. Так, Н. П. Сигаевым [15] для расчета потребляемой мощности предлагается предварительно экспериментально определить распределение давления и его градиента в зоне течения и далее использовать квадратурную формулу. Остается открытым вопрос определения окружной скорости свободного вала, что в существенной мере препятствует моделированию грануляторов типов, представленных на рис. 1.2 а, в.

В качестве примера экспериментального исследования работы роторного гранулятора следует указать работу В. Н. Пашенко [18]. Гранулятор представлял обечайку с плоским перфорированным днищем и передвигающимися по нему формующими рабочими органами. Исследовались три типа формующих органов, установленных под углом  $120^\circ$  друг к другу и передвигающихся по окружности: конические валки, протирающие лопасти и цилиндрические валки (см. рис. 1.2 в). Исследовалась зависимость производительности и удельной мощности от типа рабочего органа, давления формования, числа оборотов. Изучено распределение скорости истечения по радиусу фильеры. Установлено, что независимо от типа формующего органа производительность отверстий увеличивается с радиусом их расположения на фильере. Производительность отверстий увеличивается с давлением формования и числом оборотов. Большая производительность наблюдается у цилиндрического формующего вала по сравнению с коническим валком и протирающей лопастью. Удельная потребляемая мощность, независимо от типа формующего органа, с увеличением числа оборотов вала гранулятора уменьшается. Интенсивность этого изменения выше у цилиндрического формующего органа. С увеличением давления формования удельная мощность растет у конического формующего вала и незначительно снижается у цилиндрического вала.

**1.2.3. Реологические свойства гранулируемых сред.** Гранулированию подвергаются как гомо-, так и гетерогенные системы, имеющие существенно различающиеся реологические свойства. Если для большинства гомогенных систем правомерно применение степенного закона, ввиду отсутствия пластических



свойств, то для гетерогенных высоконаполненных систем характерно наличие предельного напряжения сдвига, ниже которого течение невозможно.

В работе [27] рассматривается неизотермическое течение упруговязкой среды в зазоре между вращающимися валками, с учетом изменения давления, как в продольном, так и в поперечном направлениях. Дается аналитическое решение уравнений движения. Распределения давления и скорости ищутся в виде разложений по степеням малого параметра. Расчеты показывают, что давление от поверхности валков к середине зазора уменьшается. Наибольшее уменьшение наблюдается в сечениях входа материала. Аналогичный результат дает также жидкость Ривлина–Эриксона [28]. Это приводит к увеличению градиента скорости движения жидкости по сравнению с результатами для степенной жидкости в области деформации на входе при однородном поперечном давлении. Изотермическое течение вязкоупругой жидкости в валковых машинах представлено в работе [29]. Используется нелинейное интегральное уравнение состояния. Поле давления двумерно.

Точность аналитических приближений для расчета реологических параметров высоконаполненных систем быстро уменьшается с увеличением концентрации. Показано [30], что течение системы при высоких скоростях сдвига носит сложный характер переходного от дилатантного к тиксотропному, причем вид кривых течения зависит от выбора начальных условий. При случайном начальном расположении частиц наблюдается резкий рост вязкости, величина которой имеет временную зависимость. При регулярном расположении увеличение вязкости имеет место только при значительных скоростях сдвига. На кривых течения может наблюдаться две дилатантные области, связанные с перестройкой системы при малых интенсивностях сдвига и межслойным взаимодействием при больших градиентах.

В работе [31] приведены результаты исследования реологических свойств ПЭВД, наполненного до 80% тонкодисперсными порошками железа, вольфрама, меди, никеля. Показано, что все исследованные металлонаполненные композиции (независимо от типа и количества наполнителя) подчиняются степенному закону Оствальда де Вилля. Аналогичный результат получен в работе [32].

Различные модели вязкопластичности для описания высоконаполненных полимерных систем (Гершеля–Балкли, Шульмана) предложено использовать в работах [33–35]. В работе [36] построена модель ползучести прессованных порошковых компози-

тов, учитывающая влияние первого инварианта тензора напряжений, анизотропию и пористость на закономерности накопления необратимых деформаций и ползучести.

В [37] исследовалась жизнеспособность высоконаполненного материала на основе комбинации каучуков ПФ-К и СКИ-1-КТР, наполненных стеклянными микросферами, асбестом и др. Жизнеспособность материала в условиях сдвиговой деформации описывается экспоненциальной зависимостью от температуры. На основании экспериментальных исследований [38] получены математические модели основных физико-механических свойств сыпучих материалов.

В работе [39] исследуются реологические свойства высококонцентрированных дисперсий, содержащих 65–80 % по объему твердой фазы с полидисперсными частицами. Показано, что, в зависимости от фракционного состава дисперсной фазы, вязкость дисперсии, даже при постоянном содержании твердой фазы, может меняться более чем в сто раз. Исследованные дисперсии на основе ньютоновских жидкостей проявляли при течении псевдопластичное поведение. При высоких напряжениях сдвига течение дисперсий сопровождалось пристенным эффектом. Вязкость определялась степенью удаления содержания твердой фазы в дисперсии от предельно возможной величины, соответствующей коэффициенту упаковки наполнителя.

Иногда в полимеры вводят добавки для получения новых эксплуатационных свойств. Например, вводится асбест с целью улучшения теплофизических свойств и т. п. Как показывает практика, подобное варьирование может приводить к аномальному протеканию процесса гранулирования. Это проявляется в отклонении размеров гранул, а в некоторых случаях приводит к закупорке фильера. Характерным при этом является наличие обугленного слоя на поверхности перерабатываемого материала, извлеченного из закупоренных фильер [40].

Авторами [40] выдвинуто предположение о том, что указанные аномалии связаны с изменением теплофизических свойств перерабатываемой среды. При течении в фильере реализуется интенсивный сдвиг на стенке ( $300\text{--}500\text{ с}^{-1}$ ) и экструдат обычно представляет достаточно вязкую среду, поэтому процесс течения сопровождается значительным саморазогревом материала. Введение в перерабатываемый материал добавок, подобных упомянутому выше, приводит к ухудшению отвода тепла из зоны разогрева, происходит его термодеструкция, которая может являться причиной закупорки фильеры.

Зарубежными исследователями предложены следующие феноменологические тензорные реологические определяющие соотношения для описания высоконаполненных систем. Дорейсвами [41] предложил реологическое соотношение, учитывающее наличие у концентрированных керамических суспензий как порогового напряжения, так и аномалии вязкости. При напряжениях больше предельных работает модель Гершеля, а меньших — Гука. Другая реологическая модель, феноменологически учитывающая перестройку внутренней структуры при течении керамических паст, предложена в работе [39]. Она представляет модель Шведова–Бингама, константы которой функционально зависят от параметра, учитывающего изменение структуры пасты во времени. Модель может описывать как тиксотропные, так и реопектические жидкости.

Развивается и микромеханический подход при построении реологических определяющих соотношений концентрированных суспензий. Одной из последних, достаточно разработанных теорий, является теория Ван ден Брuele [42]. Указанным автором на основе экспериментально наблюдаемой картины послойного расположения частиц в движущейся концентрированной суспензии вычислены компоненты девиатора тензора напряжений и получено тензорное реологическое определяющее соотношение. Открытым, однако, остается вопрос о связи геометрических параметров рассматриваемой структуры с полем скоростей деформаций. Без ответа на этот вопрос невозможно описать неньютоновское поведение концентрированных суспензий в условиях их деформации [43].

Характеристики реологических свойств различных продуктов, перерабатываемых на технологическом оборудовании, можно найти в соответствующей литературе. Так, например, реологические свойства глин и их растворов анализируются в монографии Маковей [44], а пищевых продуктов — в работах [45, 46].

### **1.3. Реологические эффекты, сопровождающие процесс валкового течения**

Процессы течения наполненных и полимерных систем в зазоре вращавшихся валков сопровождаются рядом реологических эффектов, например явлениями неустойчивого течения, эффектами дегазации, нормальных напряжений, пристенного скольжения и эластического восстановления.

Первое упоминание явления неустойчивого течения появилось в 1951 г., а уже в 1966 г., на основе обширных экспери-

ментальных данных Дж. Уайт и Н. Токита [47] классифицировали поведение эластомеров при вальцевании в зависимости от температуры переработки. Предложено условно выделить четыре области (рис. 1.4):

1. Область I — при низкой температуре эластомер остается, главным образом, в зоне загрузки с незначительной долей проходящего через валковый зазор материала.

2. Область II — при повышении температуры эластомер плотной, упругой лентой облегает передний тихоходный валок.

3. Область III — при дальнейшем увеличении температуры эластомер подвергается разрыву и грануляции в валковом зазоре, образуя так называемый «мешок».

4. Область IV — при высокой температуре эластомер представляет собой высоковязкую жидкость, которая в виде пленки покрывает тихоходный валок.

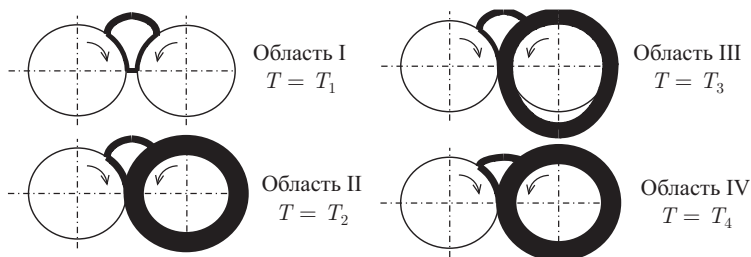


Рис. 1.4. Реологическое поведение полимеров при вальцевании ( $T > T > > T > T$ )

Следует иметь в виду, что не все эластомеры проявляют четыре области поведения при вальцевании. Так, например, натуральный каучук и эмульсионный стирол-бутадиеновый сополимер в широком диапазоне температур проявляют свойства, характерные для областей I и II, никогда не достигая области III. С другой стороны, полибутадиеновый и этилен-пропиленовый сополимеры проявляют свойства, характерные для всех четырех областей поведения.

Основное заключение, вытекающее из исследования Уайта–Токита, состоит в том, что переход из области IV в область III определяется критерием Вейссенберга:

$$We = \frac{t_m V}{H_0},$$

где  $t_m$  — максимальное время релаксации полимера, определяемое как

$$\frac{1}{t_m} = - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d[\ln(J(t))]}{dt}$$

где  $J(t)$  — релаксационный модуль сдвига (функциональная зависимость касательного напряжения, действующего в полимере во время релаксации).

Этот переход, связанный с неустойчивостью течения, подобен явлению эластической турбулентности и имеет место при критическом значении критерия Вейссенберга.

В более поздней работе Дж. Уайта и Н. Токита [48] показано, что для предотвращения перехода эластомера из области IV в область III необходимо: увеличивать температуру переработки, уменьшать скорость вращения валков или увеличивать зазор между валками.

Переход из области поведения II в область III обуславливается началом и ростом разрывов эластомера. Для количественного описания этого перехода авторы предлагают использовать гипотезу разрушения материала Рейнера–Вейссенберга–Торделла, суть которой состоит в том, что явление разрушения наступает тогда, когда локальное поглощение упругой энергии достигает критического значения для данного материала, то есть:  $E_{кр} = \tau_{кр}^2 / [2J(t)]$ , где  $\tau_{кр}$  — критическое касательное напряжение сдвига.

В работе М. Вагнера [49] сделана попытка использовать для количественного описания явления неустойчивого течения при вальцевании наполненных эластомеров метод анализа размерностей. В этой работе автор наблюдал вышеописанные области поведения наполненных эластомеров при постоянных значениях температуры переработки и фрикции, достигая перехода из области IV в I за счет уменьшения межвалкового зазора.

Механическая переработка наполненных и полимерных систем, содержащих влагу и летучие продукты, сопровождается появлением дегазационного эффекта. Сущность этого явления состоит в том, что полимер, находясь в зоне загрузки, совершает циркуляционное течение, при этом газовые пузырьки приводятся во вращательное движение по замкнутым траекториям и одновременно сливаются до тех пор, пока не окажутся на свободной поверхности, где происходит разрушение пузырьков газа.

Дегазационный эффект при переработке полимеров на валковых машинах не имеет количественного описания, хотя для его оценки могут оказаться полезными результаты исследований в области гидродинамики движения газовых пузырьков в неньютоновских жидкостях.

При деформационном течении полимеров в межвалковом зазоре вальцов и каландров наряду с касательным напряжением сдвига развиваются нормальные напряжения, которые оказывают

влияние на динамику процесса переработки. Качественно эффект нормальных напряжений объясняется высокоэластической природой полимерных систем, находящихся в вязкотекучем состоянии [50].

Эффект пристенного скольжения (П-эффект) имеет значение в технологических процессах переработки полимерных материалов. Это явление связано с тем, что энергия связи полимера с твердой поверхностью перерабатывающих машин (энергия адгезии) ниже энергии межмолекулярных связей в объеме полимера (энергия когезии).

Экспериментальные исследования явления пристенного скольжения при течении полимерных материалов, проведенные Г.В. Виноградовым с сотрудниками [51] и М. Муни [48], показывают, что скорость скольжения достигает десятков сантиметров в секунду, причем с повышением температуры этот эффект увеличивается. Исследования показали [52], что существенное значение П-эффект имеет при переработке пластифицированных поливинилхлоридных композиций.

Следует отметить, что предприняты попытки учесть П-эффект при каландровании полимеров, заимствуя опыт, достигнутый в области прокатки металлов [53, 54, 55]. Однако эти исследования носят лишь качественный характер, поскольку ограничиваются рассмотрением поля течения в межвалковом зазоре.

Известно, что каландрование полимеров сопровождается эффектом эластического восстановления («отскока») или усадки получаемых изделий, что аналогично явлению «разбухания» струи — эффекту Баруса [50], наблюдаемому при экструзии полимерных систем. Физическая сущность явления эластического восстановления, проявлявшегося в увеличении толщины каландрованного листа после выхода его из межвалкового зазора, связана с обратимыми высокоэластическими деформациями, развивающимися в полимере во время прохождения через формирующий валковый зазор каландра. Величина эластического восстановления зависит не только от технологического режима переработки, упруговязких свойств полимера, но и от условий и длительности так называемого «отдыха» материала.

Работа Т.Б. Чистякова с сотрудниками [56] посвящена вопросам математического моделирования релаксационных процессов в полимерных пленках для управления величинами параметров усадки/растяжения каландрованной пленки.

Необходимо отметить подробное освещение течения реологически сложных жидкостей в рабочих органах валковых машин, выполненное Ю.Б. Скробиным, Н.В. Тягиным [48].

## МЕХАНИКА РОТОРНОГО ГРАНУЛИРОВАНИЯ

Музыка — скрытое арифметическое упражнение души, не умеющей себя вычислить.

*Лейбниц*

В рамках квазиплоского приближения выполнен анализ течения неньютоновской жидкости в зоне гидродинамического контакта грануляторов роторного типа.

### **2.1. Течение неньютоновской жидкости в зазоре между вращающимся цилиндром и проницаемой поверхностью**

Схема течения перерабатываемой среды представлена на рис. 2.1. Материал подается в рабочую полость между ротором и матрицей, захватывается ими и продавливается через перфорационные отверстия матрицы. В общем случае окружная скорость вала  $u$  не равна скорости поступательного движения матрицы  $w$ . К указанной схеме можно свести как грануляторы с подвижной матрицей, так и грануляторы планетарного действия. При бесконечном радиусе кривизны матрицы формула для расчетного радиуса вала имеет вид  $R = R_0 R / |R \pm R_0|$ , в которой знак плюс соответствует случаю одностороннего расположения (относительно зоны течения) центров цилиндрических поверхностей, а знак минус — разностороннего.

Течение двумерное, ламинарное, установившееся. Среда несжимаема. Инерционные и массовые силы по сравнению с силами вязкого трения пренебрежимо малы. Диссипативный саморазогрев незначителен. Исходя из уравнения неразрывности, имеем следующие оценки для компонент скорости:  $v_x \sim u + w$ ,  $v_y \sim (u + w) h / L$ ,  $L \gg h$ , где  $L$  и  $h$  — характерные размеры вдоль осей  $x$  и  $y$ . Из уравнений движения имеем следующие оценки:  $\partial v_x / \partial x \sim (u + w) / L$ ,  $\partial v_x / \partial y \sim (u + w) / h$ ,

$\partial v_y / \partial x \sim (u + w) h / L^2$ . В поперечном направлении градиент давления отсутствует  $\partial P / \partial y = 0$ , следовательно  $P = P(x)$ . Более подробно оценка характеристик подобного течения представлена в гл. 3.

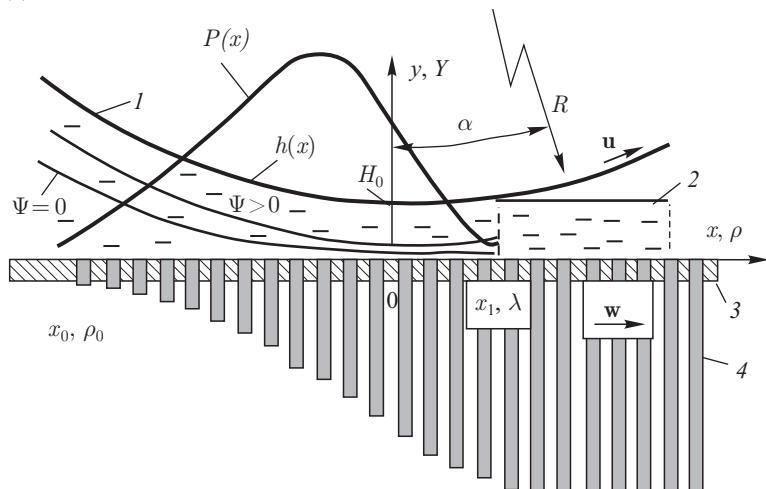


Рис. 2.1. Схема процесса роторного гранулирования: 1 — валок, 2 — перерабатываемый материал, 3 — матрица, 4 — гранулы

Скольжение на рабочих поверхностях отсутствует. Реологические свойства среды описываются моделью Освальда де Вилля:

$$\tau_{xy} = \eta_0 \left| \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Проницаемость матрицы не зависит от скорости ее движения и характеризуется эмпирической формулой [16, 17, 25]:  $y = 0$ ,  $v_y = -k P^{1/n}$ , где  $k$  — экспериментально определяемая константа (зависит от реологических свойств среды и геометрии перфораций). Действительно, по данным работы [25] для неньютоновских жидкостей, без учета упругих эффектов, имеет место подобие между кривой течения жидкости и законом проницаемости пористой среды. Оценка членов уравнений движения соответствует гидродинамической теории смазки [20].

С учетом принятых допущений течение материала в рабочем зазоре описывается уравнениями

$$\frac{dP}{dx} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad (2.2)$$



$$\tau_{xy} = \eta_0 \left| \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (2.3)$$

Граничные условия задачи следующие:

$$y = 0, \quad v_x = w, \quad v_y = -kP^{1/n}, \quad (2.4)$$

$$y = h(x), \quad v_x = u, \quad v_y = \frac{ux}{R} \quad (2.5)$$

$$x = x_0, \quad P = 0, \quad (2.6)$$

$$x = x_1, \quad P = \frac{dP}{dx} = 0. \quad (2.7)$$

Кинематическое условие для поверхности валка (2.5) получено в предположении следующих асимптотических соотношений для компонент скорости:  $v_y = u \sin \alpha = ux/R$ ,  $v_x = u \cos \alpha \approx u$ . Последнее соотношение правомерно при  $x/R \ll 1$ , так как при этом  $\sin \alpha = x/R$ ,  $\cos \alpha \approx 1$ .

Задача (2.1)–(2.7) является неопределенной, поскольку для трех неизвестных функций  $P(x)$ ,  $v_x(x, y)$ ,  $v_y(x, y)$  имеем только два уравнения, что отмечалось в [25]. Поэтому в решении координата границы зоны течения  $x_1$  рассматривается как свободный (априорный) параметр задачи и однозначно определяет координату точки  $x_0$ , а также вид искомых функций.

Квазиплоская постановка задачи (одномерная по давлению и двумерная по полю скорости) позволяет изменить форму управления неразрывности. Выделим в зоне течения криволинейную трапецию, ограниченную сечениями  $x$  и  $x_1$ . Снизу область ограничена линией  $y = 0$ , сверху — линией  $y = h(x)$ . Определим поток вектора скорости через замкнутый контур, проинтегрировав уравнение (2.2):

$$\begin{aligned} \int_0^{x_1} \int_0^h \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) dy dx = \\ = \int_x^{x_1} \int_0^h \frac{\partial v_x}{\partial x} dy dx + \int_x^{x_1} \left( u \sin \alpha + kP^{1/n} \right) dx = 0. \end{aligned}$$

Здесь учитывались граничные условия (2.4), (2.5). Далее, учитывая соотношения

$$\frac{d}{dx} \int_0^h v_x dy = \int_0^h \frac{\partial v_x}{\partial x} dy + \frac{dh}{dx} v_x(h), \quad \frac{dh}{dx} v_x(h) = u \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha,$$

получим интегральное уравнение неразрывности:

$$\int_0^{h(x_1)} v_x(x_1) dy - \int_0^h v_x dy + k \int_x^{x_1} P^{1/n} dx = 0. \quad (2.8)$$

Согласно полученному выражению объемный расход для вала единичной ширины  $Q = \int_0^h v_x dy$  в произвольном сечении  $x$  равен сумме расхода гранулята  $Q_1 = k \int_x^{x_1} P^{1/n} dx$  на участке от  $x$  до  $x_1$  и расхода на выходе зоны течения  $Q_2 = \int_0^{h(x_1)} v_x(x_1) dy$  (см. рис. 2.2).

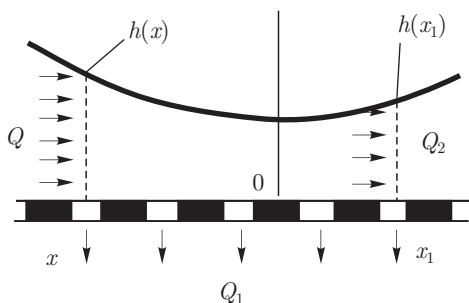


Рис. 2.2

Найдем расход на выходе  $Q_2$  в условиях фрикции  $u \neq w$ . С учетом условия (2.7) уравнение движения примет вид

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \left| \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = 0,$$

откуда  $\partial v_x / \partial y = \text{const}$ . Интегрирование этого уравнения с учетом (2.4), (2.5) дает

$$v_x(x_1) = w + \frac{u-w}{h(x_1)} y. \quad (2.9)$$

Подставляя (2.9) в (2.8), получим

$$w h(x_1) + \frac{(u-w)}{2} h(x_1) - \int_0^h v_x dy + k \int_x^{x_1} P^{1/n} dx = 0. \quad (2.10)$$

Интегрируя уравнение (2.1), получим выражение для касательного напряжения в рабочем зазоре

$$\tau_{xy} = \frac{dP}{dx}y + C(x). \quad (2.11)$$

Из совместного рассмотрения выражений (2.3) и (2.11) имеем для градиента скорости сдвига

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \left| \frac{y}{\eta} \frac{dP}{dx} + \frac{C}{\eta_0} \right|^{1/n} \operatorname{sign} \left( y \frac{dP}{dx} + C \right). \quad (2.12)$$

Форма решения зависит от соотношения скоростей  $u$  и  $w$ . Цель решения состоит в нахождении функции  $v_x$  путем интегрирования уравнения и совместного рассмотрения с уравнением (2.10). При этом вместо двух уравнений для  $P$  и  $v_x$  получим одно интегродифференциальное уравнение для  $P(x)$ . В ньютоновском случае форма решения не зависит от соотношения скоростей.

## 2.2. Расчет потребляемой мощности

Подводимая к гранулятору энергия затрачивается на деформацию перерабатываемого материала в рабочем зазоре и на его течение в формующих отверстиях матрицы. Получим расчетную формулу для общего случая течения степенной жидкости при различающихся скоростях рабочих поверхностей.

Выделим в зоне течения (см. рис. 2.1) участок протяженностью  $dx$ . Для вала единичной ширины элементарная потребляемая мощность определяется выражением

$$dN = \int_0^h \tau_{xy} \frac{\partial v_x}{\partial y} dy dx + P dQ. \quad (2.13)$$

Второе слагаемое в правой части характеризует потери энергии на трение в формующих каналах и написано для случая отсутствия противодавления. Формула предполагает доминирующей сдвиговую компоненту  $\partial v_x / \partial y \gg \partial v_y / \partial x$ .

Элементарный расход гранулята  $dQ = |v_y(y=0)| dx$  с учетом закона проницаемости (2.4) определяется выражением

$$dQ = kP^s dx, \quad (2.14)$$

где  $s = 1/n$ . Подставив (2.14) в (2.13), получим для элементарной мощности

$$dN = \int_0^h \tau_{xy} \frac{\partial v_x}{\partial y} dy dx + k P^{1+s} dx. \quad (2.15)$$

Интегрируя по частям первое слагаемое, можем записать

$$\int_0^h \tau_{xy} \frac{\partial v_x}{\partial y} dy = \tau_{xy} v_x \Big|_0^h - \int_0^h v_x \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy.$$

Проинтегрировав (2.15) по длине зоны течения, получим полную потребляемую мощность:

$$N = \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \tau_{xy} v_x \Big|_0^h - \int_0^h v_x \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy + k P^{1+s} \right\} dx. \quad (2.16)$$

Учитывая уравнение (2.1), второе слагаемое в (2.16) можно записать так:

$$J = - \int_{x_0}^{x_1} \int_0^h v_x \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy dx = - \int_{x_0}^{x_1} \frac{dP}{dx} \int_0^h v_x dy dx.$$

Выполним для этого слагаемого интегрирование по частям:

$$J = - \left( P \int_0^h v_x dy \right) \Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} P \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^h v_x dy \right) dx.$$

С учетом граничных условий для давления (2.6), (2.7) это выражение упрощается:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} P \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^h v_x dy \right) dx.$$

Применим для подынтегральной функции правило Лейбница:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^h v_x dy \right) = \int_0^h \frac{\partial v_x}{\partial x} dy + v_x(h) \frac{dh}{dx},$$

или, с учетом уравнения неразрывности (2.2), можем записать

$$J = \int_x^x P \left[ - \int_0^h \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_x(h) \frac{dh}{dx} \right] dx.$$

Используя полученный результат, для  $N$  имеем

$$N = \int_{x_0}^x \tau_{xy} v_x \Big|_0^h dx - \int_x^1 P \left( v_y \Big|_0^h \right) dx + \left( \int_0^x P v_x(h) \frac{dh}{dx} dx + k \int_x^x P^{+s} dx \right), \quad (2.17)$$

где  $v_y \Big|_0^h = u \frac{h}{R} + k P^s$ ,  $\frac{dh}{dx} = \frac{x}{R}$ ,  $v_x(h) = u$ . Последние выражения следуют из граничных условий. При этом формула (2.17) упрощается до вида

$$N = \int_x^x \tau_{xy} v_x \Big|_0^h dx, \quad (2.18)$$

или в развернутой форме

$$N = \int_x^x [u \tau_{xy}(y=h) - w \tau_{xy}(y=0)] dx.$$

### 2.3. Течение ньютоновской жидкости

Рассмотрим решение задачи для случая переработки ньютоновской жидкости. Повторное интегрирование уравнения (2.12) дает для осевой компоненты скорости

$$v_x = \frac{1}{2\eta} \frac{dP}{dx} y(y-h) + (u-w) \frac{y}{h} + w. \quad (2.19)$$

Здесь учитывались условия прилипания (2.4), (2.5).

Для высоты зазора примем параболическое приближение [23]

$$h = H \left( 1 + \frac{x}{2RH} \right). \quad (2.20)$$

Введем безразмерный параметр, соответствующий абсциссе окончания зоны течения:

$$\lambda = \frac{x}{\sqrt{2RH}} \quad (2.21)$$

что дает для высоты зазора (толщины наносимого материала) на выходе  $h(x) = H(1 + \lambda)$ .

Осевой расход в произвольном сечении, входящий в (2.10), найдем, проинтегрировав (2.19) по текущей высоте зазора:

$$\int_0^h v_x dy = -\frac{h^3}{12\eta} \frac{dP}{dx} + \frac{h}{2}(u + w). \quad (2.22)$$

Из совместного рассмотрения (2.10) и (2.22) получим интегродифференциальное уравнение для давления:

$$\frac{H}{2}(u + w)(1 + \lambda) + \frac{h}{12\eta} \frac{dP}{dx} - \frac{h}{2}(u + w) + k \int_x^x P dx = 0. \quad (2.23)$$

Перейдем к безразмерным переменным:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{x}{\sqrt{2RH}} & \rho &= \frac{x}{\sqrt{2} \frac{RH}{\rho_0}}, & \bar{P} &= \frac{2PH_0}{\eta w(1+f) \sqrt{2RH}} \\ \Gamma &= \frac{kR\eta}{H_0}, & Y &= \frac{y}{H(1+\rho)} & \bar{\psi} &= \frac{\psi}{wH} & f &= \frac{u}{w}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

В безразмерной форме уравнение (2.23) имеет вид

$$\lambda - \rho + \frac{1}{12}(1 + \rho) \frac{d\bar{P}}{d\rho} + \Gamma \int_{\rho}^{\lambda} \bar{P} d\rho = 0. \quad (2.25)$$

Граничные условия задачи:

$$\rho = \lambda, \quad P = \frac{dP}{d\rho} = 0; \quad \rho = \rho, \quad \bar{P} = 0. \quad (2.26)$$

Таким образом, безразмерное давление является функцией  $\rho$  и параметров  $\lambda, \Gamma$ . Важно отметить, что в представлении (2.24) безразмерное давление не зависит от фрикции. Задача не имеет аналитического решения.

**2.3.1. Анализ поля скоростей.** Для анализа поля скоростей используем функцию тока

$$v_x = \frac{d\psi}{dy}. \quad (2.27)$$

Принимаем для поверхности вала  $Y = 1$ ,  $\bar{\psi} = (1 + f)/2$ . Проинтегрировав (2.27) по высоте зазора:

$$\int_{\Psi}^{(1+\lambda^2)(f+1)/2} d\bar{\Psi} = \left(1 + \rho\right) \int_Y^1 \frac{v_x}{w} dY, \quad (2.28)$$

и используя (2.19), для компоненты скорости имеем

$$\frac{v_x}{w} = \frac{1}{4} (f + 1) \left(1 + \rho^2\right)^2 \frac{dP}{d\rho} (Y - 1) Y + (f - 1) Y + 1. \quad (2.29)$$

Подставив (2.29) в (2.28), получим

$$\begin{aligned} \bar{\psi} = \frac{1}{2} \left(1 + \lambda^2\right) (f + 1) - \\ - \left(1 + \rho^2\right) \left[ \frac{(f + 1)(1 + \rho^2)}{24} \frac{d\bar{P}}{d\rho} (3Y^2 - 2Y^3 - 1) + \right. \\ \left. + (f - 1) \frac{(1 - Y^2)}{2} + 1 - Y \right]. \quad (2.30) \end{aligned}$$

В точке с координатами  $\rho = \lambda$ ,  $Y = 0$  функция тока равна нулю, поэтому соответствующая линия тока разделяет всю область на область траекторий частиц, проходящих через матрицу ( $\bar{\psi} < 0$ ), и область траекторий частиц, остающихся на поверхности матрицы ( $\bar{\psi} > 0$ ). Для численного анализа необходимо (2.30) рассматривать совместно с (2.25), (2.26). Введем безразмерную скорость  $V = v_x/w$ . На участке  $\rho_0 < \rho < \rho_m$  эпюра  $V$  вогнутая, а на участке  $\rho_m < \rho < \lambda$  — выпуклая. В сечениях  $\rho_m$  и  $\lambda$  эпюры линейные, так как  $d\bar{P}/d\rho = 0$ .

Ординату точки экстремума скорости найдем из условия  $\partial V / \partial Y|_{Y_m} = 0$ . С учетом (2.29) можем записать

$$Y_m = \frac{1}{2} + \frac{2(1 - f)}{(f + 1)(1 + \rho^2)^2 d\bar{P}/d\rho}. \quad (2.31)$$

Из (2.31) видно, что при отсутствии фрикции ( $f = 1$ ) экстремум скорости имеет ординату  $Y_m = 0,5$ . При наличии фрикции ордината экстремума зависит от знака градиента давления, что поясняется табл. 2.1.

Таблица 2.1

**Положение точки экстремума профиля осевой скорости**

Фрикция ( $f$ )	Участок зоны течения	
	$\rho_0 < \rho < \rho_m$ ( $d\bar{P}/d\rho > 0$ )	$\rho_m < \rho < \lambda$ ( $d\bar{P}/d\rho < 0$ )
$f > 1$	$Y_m < 0,5$	$Y_m > 0,5$
$f < 1$	$Y_m > 0,5$	$Y_m < 0,5$
$f = 1$	$Y_m = 0,5$	$Y_m = 0,5$

Условие наличия циркуляции материала на входе зоны течения описывается так:  $Y = Y_m$ ,  $\rho = \rho$ ,  $V < 0$ . При этом из (2.29) и (2.31) имеем следующую определяющую систему:

$$Y_m = \frac{1}{2} + \frac{2(1-f)}{(f+1)(1+\rho) \frac{d\bar{P}(\rho)}{d\rho}} \quad (2.32)$$

$$\frac{(f+1)(1+\rho)}{4} \frac{dP(\rho)}{d\rho} Y_m(Y_m - 1) + (f-1)Y_m + 1 < 0.$$

Исключив из этой системы градиент давления, получим условие для фрикции:  $f < 1 + (1 - 2Y_m)/Y_m$ . Без фрикции циркуляция имеет место при выполнении условия  $\frac{d\bar{P}(\rho)}{d\rho} > > 8/(1+\rho)$ . В условиях фрикции заключение о наличии циркуляции можно сделать на основе совместного рассмотрения (2.32), (2.25), (2.26).

**2.3.2. Интегральные характеристики гранулирования ньютоновской жидкости.** К интегральным характеристикам относятся потребляемая мощность, распорное усилие и производительность. Рассмотрим случай, когда известны скорости рабочих поверхностей. Мощность, затрачиваемая на вязкое трение, находится по формуле (2.18). Касательное напряжение в зазоре определяется по формуле  $\tau_{xy} = \eta \partial v_x / \partial y$ . Учитывая формулу (2.19), для касательного напряжения можно записать

$$\tau_{xy} = \left(y - \frac{h}{2}\right) \frac{dP}{dx} + \frac{\eta}{h}(u - w). \quad (2.33)$$

Подставляя (2.33) в (2.18) с учетом условий (2.4), (2.5) для валка шириной  $B$ , получим

$$N = B \int_x^x \frac{(u+w)}{2} h \frac{dP}{dx} dx + B\eta(w-u) \int_x^x \frac{dx}{h}.$$

В безразмерной форме выражение для мощности имеет вид

$$\bar{N} = \frac{(f+1)}{2} I + (1-f) (\arctg \lambda - \arctg \rho), \quad (2.34)$$

где  $I = - \int \bar{P} \rho d\rho$ ,  $\bar{N} = \frac{NH}{B\eta w \sqrt{2RH}}$

Интеграл  $I$  зависит от безразмерной проницаемости  $\Gamma$  и протяженности зоны течения  $\lambda - \rho$ .



Объемную производительность можно определить как поток вектора скорости  $v_y$  через поверхность, ограниченную шириной вала  $B$  и размерами зоны течения:

$$Q = B \int_x^x |v_y(y=0)| dx = Bk \int_x^x P dx.$$

Здесь использовался закон проницаемости матрицы (2.4).

В безразмерной форме для производительности имеем

$$\bar{Q} = \Gamma I, \quad (2.35)$$

где  $\bar{Q} = \frac{Q}{BH w(f+1)}$   $I = \int_0^1 \bar{P} d\rho$ .

Распорное усилие (или подъемная сила, действующая на валок) определяется путем интегрирования эпюры давления:

$$F = B \int_x^x \left( -P + \eta \frac{\partial v_y}{\partial y} \Big|_{y=h} \right) dx = -B \int_x^1 P dx - B\eta \int_x^x dv_x, \\ v_x \Big|_x^1 = 0,$$

или в безразмерной форме

$$\bar{F} = \frac{-FH_0}{B\eta w R(1+f)} = I. \quad (2.36)$$

Таким образом, интегральные характеристики зависят от интегралов  $I, I$ . Из сопоставления (2.35) и (2.36) следует  $Q = 2kF$ , т. е. производительность гранулятора пропорциональна проницаемости матрицы и распорному усилию. Это соотношение можно использовать для экспериментального определения проницаемости матрицы  $k = Q/2F$ . Кроме того, из полученных выражений видно, что производительность и распорное усилие возрастают с увеличением фрикции. Производительность гранулятора с протирочными лопастями ( $u = 0, f = 0$ ) при прочих равных условиях в два раза меньше, чем гранулятора со свободно вращающимся валком и фрикцией, равной единице ( $u = w, f = 1$ ). Следовательно, повышение трения в подшипниках гранулятора планетарного типа снижает производительность.

**2.3.3. Скорость вращения свободного вала.** В грануляторах планетарного типа валки не имеют собственного привода и свободно катятся по перерабатываемому материалу, вдавливая его в формирующие отверстия матрицы. Окружная скорость вала

зависит от величины загрузки и других параметров. Для выполнения инженерных расчетов необходимо знать эту скорость.

Переход к расчетной схеме рис. 2.1 осуществляется привязкой системы координат к оси валка. При этом ордината направлена по радиусу матрицы и проходит через ось валка, а абсцисса лежит на поверхности матрицы. Трением в подшипниках валка пренебрегаем. Со стороны перерабатываемого материала на поверхность валка действует касательное напряжение. Поскольку результирующий крутящий момент на оси валка равен нулю, то результирующая сила от действующих касательных напряжений должна быть нулевой, что дает уравнение

$$\int_x^x \tau_{xy}(y = h) dx = 0.$$

С учетом (2.33) можем записать

$$\frac{1}{2} \int_x^x h \frac{dP}{dx} dx + \eta(u - w) \int_x^x \frac{dx}{h} = 0.$$

Интегрируя и перейдя к безразмерным переменным, получим

$$(f + 1)I + 2(f - 1)(\arctg \lambda - \arctg \rho) = 0,$$

где  $I$  определяется согласно (2.34). Скорость вынужденного вращения валка может быть охарактеризована фрикцией  $f_c$ . Величина фрикции, обеспечивающая тождество последнему выражению, суть

$$f_c = \frac{2(\arctg \lambda - \arctg \rho_0) - I_2}{2(\arctg \lambda - \arctg \rho) + I}.$$

Величины  $\lambda$ ,  $\rho$ ,  $I$  находятся из решения для давления в зоне течения. Анализ показывает, что с уменьшением зоны течения (или загрузки) имеет место равенство  $\lim_{\lambda - \rho \rightarrow 0} f_c =$

С увеличением зоны течения  $\lambda - \rho$  фрикция уменьшается, находясь в интервале  $0 < f_c < 1$ . Подставив (2.37) в (2.34) получим расчетное выражение для потребляемой мощности гранулятора с пассивным валком:  $\bar{N} = (f_c + 1)I$ .

Фрикции  $f_c$  соответствует минимальная потребляемая мощность. Аналогично, при использовании выражений (2.35), (2.36) необходимо заменить  $f$  величиной  $f_c$  из (2.37).

**2.3.4. Грануляторы с неоднородной по длине валка фрикцией.** Для грануляторов, работающих по схеме рис. 1.3, характерно неоднородное распределение фрикции по длине валка.

Задача состоит в определении угловой скорости вращения вала вокруг собственной оси или радиуса бесфрикционного качения.

Схема роторной машины представлена на рис. 2.3. Рабочий процесс осуществляется благодаря эффекту клина: при наличии вязких свойств материал увлекается в зазор между валком 1, совершающим планетарное движение под действием кривошипа 2, и плоским неподвижным основанием — матрицы. Движение анализируется в системе Лагранжа, связанной с горизонтальной осью кривошипа. Сдвиговая деформация определяется скоростью проскальзывания, которая возникает вследствие разности скорости «набегания» основания (или переносной скорости движения точек на поверхности вала в системе координат Эйлера)  $\omega_k r$ , линейно зависящей от радиуса рассматриваемого сечения по длине вала, и окружной (относительной) скорости поверхности вала  $\omega_b R$ , постоянной по длине вала в силу его сплошности. Если поместить наблюдателя (систему координат) на конце оси кривошипа, то он увидит, что валок вращается с постоянной скоростью  $\omega_b$ , а покрытая слоем перерабатываемого материала матрица набегают с постоянной угловой скоростью  $\omega_k$ , но меняющейся по длине вала окружной. Имеется сечение вала  $r_k$ , в котором окружная скорость матрицы равна окружной скорости вала.

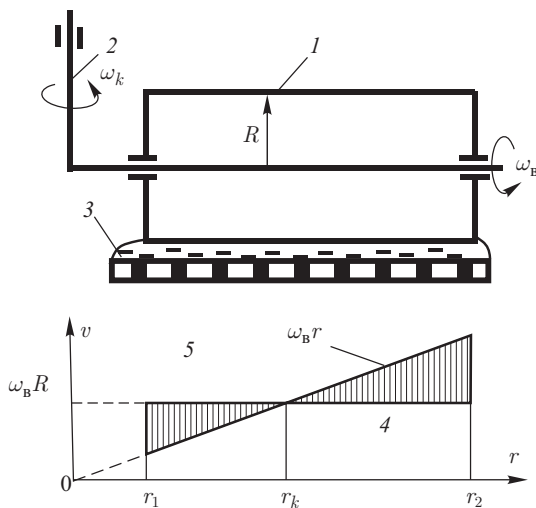


Рис. 2.3. Схема роторной машины: 1 — валок, 2 — кривошип, 3 — матрица, 4 — зона скольжения, 5 — зона торможения

Полагаем, что в зазоре имеет место двумерное течение и материал в радиальном направлении не перемещается. Угловая

скорость кривошипа  $\omega_k$ . Длина валка  $L = r_2 - r_1$ . На радиусе  $r_k$  имеет место чистое качение и  $f=1$ . Окружная скорость валка  $u = \omega_k r$ . Фрикция в произвольном сечении  $f = u/w = r_k/r$ . Для скорости матрицы имеем

$$w = r_k \omega_k / f. \quad (2.38)$$

Согласно (2.36) безразмерное давление и размеры зоны течения не зависят от фрикции. Следовательно, в ньютоновском случае ширина зоны течения постоянна по длине валка.

В рабочем зазоре машины имеет место диссипативное рассеивание подводимой механической энергии. Диссипируемую энергию можно определить интегралом

$$D = \int_{r_1}^{r_2} \int_{\rho_0}^{\lambda} \int_0^h \tau_{xy} \frac{\partial v_x}{\partial y} dy dx dr,$$

но, учитывая (2.13), (2.18), выражение можно упростить:

$$D = \int_{r_1}^{r_2} N dr. \quad (2.39)$$

Величина  $N$  зависит от фрикции, которая в свою очередь зависит от  $r$ . Поскольку фрикция однозначно связана с  $r_k$ , будем считать, что  $D$  является функцией параметра  $r_k$ . Согласно принципу Гельмгольца для обеспечения минимума диссипативной энергии параметр  $r_k$  должен доставлять экстремум функции  $D$ , т.е.  $\partial D / \partial r_k = 0$ . Заменяя в (2.34)  $B$  на  $dr$ , проинтегрировав согласно (2.39) и продифференцировав по  $r_k$ , получим для радиуса

$$r_k = f_c (r_1 + r_2) / 2, \quad (2.40)$$

где  $f_c$  определяется согласно (2.37). При малых нагрузках  $f_c=1$  и радиус качения находится в середине валка. С увеличением загрузки фрикция при свободном качении ( $f_c$ ) уменьшается, следовательно, радиус качения смещается к центру матрицы.

Интегрирование (2.39) дает значение потребляемой мощности гранулятора с неоднородной фрикцией:

$$N = \frac{\eta \omega_k^2 r_k^3 \sqrt{2RH_0}}{3H_0} \left\{ \frac{I_2}{2} \left[ (r'_2 + 1)^3 - (r'_1 + 1)^3 \right] + \right. \\ \left. + (\arctg \lambda - \arctg \rho_0) \left[ (r'_2 - 1)^3 + (1 - r'_1)^3 \right] \right\}, \quad (2.41)$$

где  $r'_1 = r_1 / r_k$ ,  $r'_2 = r_2 / r_k$ .

Элементарная производительность на участке вала длиной  $dr$  составит

$$dQ = \Gamma I H \omega r (1 + r_k/r) dr.$$

Проинтегрировав в пределах от  $r$  до  $r$ , получим

$$Q = 0,5 \Gamma I H \omega (r_2 - r_1) (f_c + 1). \quad (2.42)$$

Для участка вала  $dr$  элементарное распорное усилие с учетом выражения (2.36)

$$dF = \eta R \omega (r + r_k) I H_0^- dr.$$

Интегрируя по длине вала, найдем общее распорное усилие

$$F = 0,5 \eta R \omega I (r_2 - r_1) (1 + f_c) H_0^-. \quad (2.43)$$

Валок на кривошипе установлен консольно. Распорное усилие создает в сечении крепления изгибающий момент, с учетом которого выбирается сечение кривошипа. Распорное усилие можно рассматривать как неоднородную распределенную нагрузку, действующую на валок со стороны перерабатываемого материала. Найдем точку приложения эквивалентной сосредоточенной нагрузки. Элементарный момент от распорной нагрузки в сечении  $r$ :  $dM = r dF$ , где  $dF = (r + r_k) \eta R \omega I dr / H$ . Выполнив интегрирование по длине вала, получим

$$M = \frac{\eta R \omega I}{H_0} \left[ \frac{1}{3} (r_2 - r_1) + \frac{r_k}{2} (r_2 - r_1) \right].$$

Радиус приложения эквивалентной сосредоточенной силы можно найти с помощью выражения  $r_n = MF$ , т.е.

$$r_n = \frac{(r_2 - r_1) + 3r_k(r_2 - r_1)}{3(r - r)(r + r + 2r_k)}.$$

Расчетный изгибающий момент у основания кривошипа можно определить, умножив общее распорное усилие (2.43) на радиус приложения сосредоточенной эквивалентной силы.

## 2.4. Гранулирование неньютоновских жидкостей

Гранулируемые материалы в большинстве случаев представляют сложные в реологическом отношении системы. Иногда для улучшения текучести и качества гранул в перерабатываемый материал вводят добавки, существенно изменяющие реологические свойства. Аномально-вязкие свойства материала могут существенным образом изменить картину течения в зазоре и изменить интегральные характеристики течения. Анализируется течение

жидкости Оствальда де Вилия. Показано, что при переработке аномальных сред фрикция существенно влияет на течение и форму расчетных уравнений.

**2.4.1. Случай равенства скоростей рабочих поверхностей.** Рассматривается случай симметричного валкового течения. Для частного случая  $u = w$  условие симметрии профиля скорости имеет вид

$$y = h/2, \quad \partial v_x / \partial y = 0. \quad (2.44)$$

На линии  $y = h/2$  скорость принимает экстремальное значение. С учетом (2.44) выражение (2.12) имеет вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \left| \frac{1}{\eta} \frac{dP}{dx} \left( y - \frac{h}{2} \right) \right|^s \operatorname{sign} \left[ \frac{dP}{dx} \left( y - \frac{h}{2} \right) \right], \quad (2.45)$$

где  $s = 1/n$ . Перейдем к безразмерным переменным (2.24), но для давления и проницаемости примем

$$\bar{P} = \frac{PH_0}{\eta w^n} \frac{RH}{\sqrt{2} H_0}, \quad \Gamma = k \frac{2RH}{\sqrt{H_0}} \left( \eta \frac{\sqrt{2RH}}{H_0} \right)^s. \quad (2.46)$$

Интегрируя (2.45) с учетом (2.4), (2.5), (2.24), (2.46), получим выражение для осевой компоненты скорости:

$$\frac{v_x}{w} = 1 + A \left( |1 - 2Y|^{1+s} - 1 \right), \quad (2.47)$$

где  $A(\rho) = \frac{n}{n+1} \left( \frac{1+\rho}{2} \right)^{1+s} \frac{dP}{d\rho} \operatorname{sign} \left( \frac{d\bar{P}}{d\rho} \right)$ .

При  $A(\rho) > 0$  в зоне течения есть точка застоя, в которой  $v_x = 0$ , а на входе имеет место циркуляция жидкости. Используя методику раздела 2.3.2, можно получить следующее выражение для функции тока в неньютоновском случае:

$$\bar{\Psi} = 1 + \lambda - (1 + \rho) \left\{ \frac{A}{2(2+s)} \left[ 1 + |1 - 2Y|^{2+s} \operatorname{sign}(1 - 2Y) \right] + (1 - A)(1 - Y) \right\}.$$

Подставив (2.47) в (2.10) с учетом (2.46) и  $v_x(x) = w$ , получим нелинейное интегро-дифференциальное уравнение первого порядка для безразмерного давления в зоне течения:

$$\lambda - \rho + \frac{(1 + \rho)^{n+1}}{2(2+s)} \left| \frac{dP}{d\rho} \right|^s \operatorname{sign} \left( \frac{d\bar{P}}{d\rho} \right) + \Gamma \int_{\rho}^{\lambda} \bar{P}^s d\rho = 0. \quad (2.48)$$

Граничные условия для давления:

$$\bar{P}(\rho_0) = 0, \quad \bar{P}(\lambda) = d\bar{P}(\lambda)/d\rho = 0. \quad (2.49)$$

Численный анализ уравнений (2.48), (2.49) проводился методом Рунге–Кутты, начиная с точки  $\lambda$ . Результаты расчетов

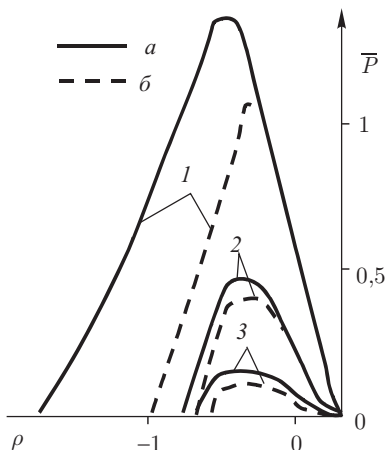


Рис. 2.4. Эпюры безразмерного давления:  $a - \Gamma = 0,2$ ;  $b - \Gamma = 0$ : 1 —  $n = 0,2$ , 2 — 1, 3 — 2

представлены на рис. 2.4. Из рисунка видно, что для получения идентичной толщины следа материала на матрице ( $\lambda = \text{const}$ ) протяженность зоны течения в случае псевдопластичной жидкости должна быть больше, чем ньютоновской и дилатантной жидкостей. С ростом проницаемости матрицы увеличивается размер зоны течения и повышается давление.

По аналогии с (2.34) определим объемную производительность:

$$\bar{Q} = \frac{Q}{BH_0w} = \Gamma \int_{\rho_0}^{\lambda} \bar{P}^s d\rho. \quad (2.50)$$

Аналогично выражению (2.35) для распорного усилия имеем

$$\bar{F} = \frac{F}{2BR\eta_0} \left( \frac{H_0}{w} \right)^n = \int_{\rho_0}^{\lambda} \bar{P} d\rho. \quad (2.51)$$

Учитывая (2.3), (2.45), (2.46) и формулу (2.18) найдем потребляемую мощность:

$$\bar{N} = \frac{NH_0^n}{B\eta_0 \sqrt{2RH_0} w^{n+1}} = -2 \int_{\rho_0}^{\lambda} \bar{P} \rho d\rho. \quad (2.52)$$

Для численных расчетов интегральных параметров система уравнений (2.48)–(2.52) была сведена к дифференциальным уравнениям первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{P}}{d\rho} &= \frac{2}{(1+\rho^2)^{2n+1}} \left[ 2(2+s) \left| \rho^2 - \lambda^2 - \bar{Q} \right|^n \text{sign}(\rho^2 - \lambda^2 - \bar{Q}) \right], \\ \frac{d\bar{Q}}{d\rho} &= -\Gamma \bar{P}^s, \quad \frac{d\bar{F}}{d\rho} = -\bar{P}, \quad \frac{d\bar{N}}{d\rho} = 2\rho \bar{P}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Граничные условия:

$$\rho = \lambda, \quad \bar{P} = d\bar{P}/d\rho = \bar{Q} = \bar{F} = \bar{N} = 0, \quad \bar{P}(\rho) = 0. \quad (2.54)$$

При шаге  $\Delta\rho = -0,05$  погрешность расчета  $\bar{P}$  не превышала 0,5%. Расчет заканчивался при  $\bar{P} < 0$ . Искомые значения  $\bar{Q}$ ,  $\bar{F}$ ,  $\bar{N}$  определялись интерполяцией. Исследовалась область  $\lambda - \rho < 7$ . Было установлено, что при  $\lambda - \rho < 1$  производительность незначительна. На участке  $1 < \lambda - \rho < 5$  имеет место резкий рост производительности. А на участке  $\lambda - \rho < 5$  наступает ее стабилизация. Таким образом, область оптимальной эксплуатации гранулятора является  $1 < \lambda - \rho < 7$ . Псевдопластичные жидкости обеспечивают более высокую производительность, чем дилатантные и ньютоновские. При малых размерах зоны течения ( $\lambda - \rho < 2$ ) эффекты неньютоновости мало влияют на производительность. Была выполнена аппроксимация численных результатов для  $\Gamma < 10$ ,  $1 < \lambda - \rho < 7$ ,  $0,25 < n < 1,5$ :

$$\bar{Q} = \frac{\Gamma \ln \left[ \frac{1}{0,0847s + 0,89} + \frac{\lambda - \rho}{0,11s + 3,85} \right]}{0,51 - 0,112s + [0,33 - 0,158 \ln(n)]\Gamma}.$$

Погрешность этого выражения не превышает 8%. Для распорного усилия

$$\begin{aligned} \bar{F} = 4,183 \cdot 0,559^n \exp \left[ \left( -0,3 - 0,13n \right) \Gamma^{\frac{n}{0,36 + 1,28n}} \right] \times \\ \times \left[ 0,091 + 0,033n + \frac{\Gamma}{0,0193s + \Gamma} \ln(\lambda - \rho) \right]. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Погрешность этого выражения не превышает 20%. Аналогично для потребляемой мощности аппроксимация

$$\begin{aligned} \bar{N} = \frac{11,44 \exp(-0,863n)}{1 + \left( 0,41^S - 0,83^{\Gamma^{0,584 + 0,17n}} \right)^{-1}} \ln \left[ 0,548 + 0,226n - \right. \\ \left. - 0,0019 \Gamma \exp\{0,65n\} + 0,292n \quad (\lambda - \rho) \right]. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Формулы (2.55)–(2.57) могут использоваться для инженерных расчетов грануляторов.

**2.4.2. Гранулирование при большой фрикции.** Рассматривается случай однородной по длине валка фрикции. Имеет место существенное различие окружных скоростей рабочих поверхностей. Данный режим используется, когда необходимо обеспечить интенсивное перемешивание материала.

Предложен способ решения задачи, позволяющий существенно упростить определяющие уравнения путем исключения па-



раметра фрикции  $f$ . Реологический закон Оствальда де Вилия, с учетом  $u \neq w$ , запишем в следующей форме:

$$\tau_{xy} = \eta_0 \left| \frac{u - w}{h} \right|^{n-1} \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (2.58)$$

Полагаем, что эффекты аномалии вязкости обусловлены чисто сдвиговой составляющей течения. Поскольку высота канала  $h$  изменяется по длине, то выражение (2.58) предполагает вязкость, однородную по высоте щели, но изменяющуюся по длине зоны течения. С учетом (2.20) выражение (2.58) можно записать так:

$$\tau_{xy} = \frac{\eta_s}{(1 + \rho^2)^{n-1}} \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad \eta_s = \eta_0 \left| \frac{u - w}{H_0} \right|^{n-1}.$$

Интегрирование уравнения (2.1) с учетом (2.4), (2.5), (2.58) дает для осевой скорости

$$v_x = \frac{(1 + \rho^2)^{n-1}}{2\eta_s} \frac{dP}{dx} y(y - h) + (u - w) \frac{y}{h} + w. \quad (2.59)$$

Рассматривая совместно (2.10), (2.59) и переходя к безразмерным переменным (2.24), но определяя  $\bar{P}$  и  $\Gamma$  следующим образом:

$$\bar{P} = \frac{2PH_0^2}{\eta_s(u - w)\sqrt{2RH_0}}, \quad \Gamma = \frac{2k\sqrt{2RH_0}}{H_0(u + w)} \left[ \frac{\eta_s(u + w)\sqrt{2RH_0}}{2H_0^2} \right]^s,$$

получим интегро-дифференциальное уравнение первого порядка для безразмерного давления:

$$\lambda^2 - \rho^2 + \frac{(1 + \rho^2)^{n+2}}{12} \frac{d\bar{P}}{d\rho} + \Gamma \int_{\rho}^{\lambda} \bar{P}^s d\rho = 0. \quad (2.60)$$

Граничные условия (2.49) остаются в силе. Полученное уравнение по форме близко к ньютоновскому случаю, но учитывает эффекты аномалии вязкости. Распределение касательного напряжения

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2} \frac{dP}{dx} (2y - h) + \frac{\eta_s(u - w)}{h(1 + \rho^2)^{n-1}}. \quad (2.61)$$

Найдем интегральные параметры. Подставляя (2.61) в (2.18), получим для мощности

$$N = \frac{B_s w^2 \eta_s \sqrt{2RH_0}}{H_0} \left[ \frac{(f + 1)}{2} \left( - \int_{\rho_0}^{\lambda} \bar{P} \rho d\rho \right) + (f - 1)^2 \int_{\rho_0}^{\lambda} \frac{d\rho}{(1 + \rho^2)^n} \right].$$

Методика определения производительности изложена в разделе 2.3.3. Расчетное выражение имеет вид

$$Q = \frac{B_v H (u + w) \Gamma}{2} \int_{\rho}^{\lambda} \overline{P}^s d\rho.$$

Аналогично для распорного усилия имеем

$$F = \frac{B_v \eta_a (u + w) R}{H} \int_{\rho}^{\lambda} \overline{P} d\rho.$$

Методика расчета интегралов, входящих в выражения для  $N$ ,  $Q$ ,  $F$ , подробно рассмотрена в разделе 2.3.3. Полученное решение неприменимо в случае равенства скоростей рабочих поверхностей. Варианты  $f$  и  $1/f$  эквивалентны, поскольку дают идентичное распределение давления и значения интегральных параметров. Решение неприменимо для анализа гранулятора с неоднородной по длине вала фрикцией, поскольку в сечении чистого качения имеет место разрыв вязкости (согласно (2.58) при  $w = u$  эффективная вязкость равна нулю). С увеличением фрикции точность полученного решения возрастает, поскольку при этом доминирует куэттовская составляющая течения.

**2.4.3. Общий случай течения.** При наличии фрикции выражение для осевой скорости, полученное путем интегрирования (2.12) с учетом (2.4), имеет вид

$$v_x = w + \left| \frac{h^{1+n}}{\eta} \frac{dP}{dx} \right|^s \operatorname{sign} \left( \frac{dP}{dx} \right) \int_0^Y |Y - C|^s \operatorname{sign}(Y - C) dY, \quad (2.62)$$

где  $C = -C / (h dP/dx)$ . Функция  $C(x)$  характеризует безразмерную ординату точки экстремума скорости. Выполнив интегрирование в (2.62), запишем

$$v_x = w + \frac{n}{n+1} \left| \frac{h^{1+n}}{\eta} \frac{dP}{dx} \right|^s \operatorname{sign} \left( \frac{dP}{dx} \right) (|Y - C|^{1+s} - |C|^{1+s}). \quad (2.63)$$

Используя условие (2.5) для (2.63) и переходя к безразмерным переменным (2.46), (2.24), получим уравнение

$$f - 1 = \frac{n}{n+1} B (1 + \rho)^{+s} \left| \frac{dP}{d\rho} \right|^s \operatorname{sign} \left( \frac{dP}{d\rho} \right), \quad (2.64)$$

где  $B(\rho) = |1 - C|^{1+s} - |C|^{1+s}$ . Уравнение (2.64) дает возможность из (2.63) исключить градиент давления:

$$v_x/w = 1 + B^{-1}(f - 1) \left( |Y - C|^{1+s} - |C|^{1+s} \right), \quad (2.65)$$

Учитывая профиль осевой скорости на выходе (2.9) и (2.65) для уравнения (2.10), получим уравнение для давления

$$\begin{aligned} H_0(1 + \lambda^2) \int_0^1 [w + (u - w)Y] dY - \\ - H_0 w \int_0^1 \left[ 1 + B^{-1}(f - 1)(|Y - C|^{1+s} - |C|^{1+s}) \right] (1 + \rho^2) dY + \\ + k \int_x^{x_1} P^s dx = 0. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Параметр  $C$  может принимать значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ , поэтому входящий в (2.66) интеграл необходимо рассматривать для трех случаев:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |Y - C|^{1+s} dY &= (2 + S)^{-1} (|1 - C|^{2+s} - |C|^{2+s}), \text{ для } C < 0, \\ \int_0^1 |Y - C|^{1+s} dY &= \begin{cases} (2 + S)^{-1} (|C|^{2+s} + |1 - C|^{2+s}), & \text{для } 0 < C < 1, \\ (2 + S)^{-1} (|C|^{2+s} + |1 - C|^{2+s}), & \text{для } C > 1, \end{cases} \end{aligned}$$

или в обобщенном виде (для любых значений  $C$ )

$$\int_0^1 |Y - C|^{1+s} dY = (2 + s)^{-1} \left[ C |C|^{1+s} - |C - 1|^{2+s} \text{sign}(C - 1) \right].$$

С учетом этого выражения уравнение (2.66) примет вид

$$0,5(1 + f)(1 + \lambda^2) - (1 + \rho^2) [1 + (f - 1)\Phi] + \Gamma \int_\rho^\lambda \bar{P}^s d\rho = 0, \quad (2.67)$$

где

$$\Phi = (2 + s)^{-1} B^{-1} \left[ |C|^{1+s} (C - 2 - s) - |C - 1|^{2+s} \text{sign}(C - 1) \right].$$

Функция  $\Phi(C)$  имеет две асимптоты:  $C = 0,5$  и  $\Phi = 0,5$ , а экстремумов и точек перегиба у нее нет (см. рис. 2.5). При  $-\infty < C < 0,5$  функция убывает от  $0,5$  до  $-\infty$ , при  $0,5 < C < +\infty$  убывает от  $+\infty$  до  $0,5$ . Характер изменения функции  $C$  зависит от фрикции. При  $f < 1$  ( $f > 1$ ) функция  $C$  растет (убывает) от  $C > 0,5$  ( $C < 0,5$ ) до  $+\infty$  ( $-\infty$ ), в точке максимума давления терпит бесконечный разрыв, переходит от  $-\infty$  к  $-\infty$  (от  $+\infty$  к  $+\infty$ ) через точку максимума (минимума), в которой  $C < 0,5$  ( $C > 0,5$ ). Описанный характер изменения функций  $\Phi$  и  $C$  необходимо учитывать при численном анализе.

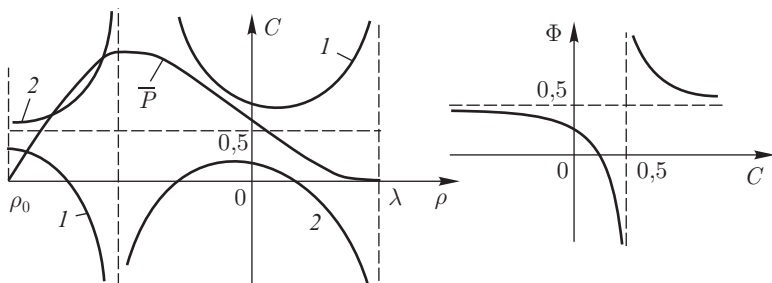


Рис. 2.5. Графики функций  $C(\rho)$  и  $\Phi(C)$ : 1 —  $f > 1$ ; 2 —  $f < 1$

Таким образом, для двух неизвестных функций  $C(\rho)$  и  $\bar{P}(\rho)$  имеем систему уравнений (2.64), (2.67) и граничные условия (2.26), которые необходимо дополнить начальным условием для  $C$ :

$$\rho = \lambda, \quad C = \infty \operatorname{sign}(f - 1). \quad (2.68)$$

В ньютоновском случае:  $n = 1$ ,  $\Phi = (1 - 3C)/3(1 - 2C)$ , из системы можно исключить  $C$  и получить уравнение (2.25).

При отсутствии фрикции в зоне течения имеется линия нулевых градиентов скорости сдвига  $y = h/2$ ,  $\partial v_x / \partial y = 0$ . Интервал градиента скорости сдвига  $[0 \div \sup(\partial v_x / \partial y)]$  может быть легко установлен. Точка  $\sup(\partial v_x / \partial y)$  может лежать на поверхности валка или матрицы в зонах наибольшего градиента давления. Для обоснованного выбора параметров реологической модели необходимо знать диапазон скорости деформации. Рассмотрим случай течения с фрикцией. Выражение для градиента скорости сдвига с учетом (2.63) имеет вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \left| \frac{1}{\eta} \frac{dP}{dx} \right| \left| y - C \cdot h \right|^s \operatorname{sign}(y - C \cdot h) \operatorname{sign} \left( \frac{dP}{dx} \right),$$

или, учитывая (2.64) и исключая градиент давления, имеем

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{w |Y - C|^s (f - 1)(1 + s)}{H B (1 + \rho)} \operatorname{sign}(Y - C).$$

Точка  $\sup(\partial v_x / \partial y)$  имеет координаты  $\rho = \rho$ ,  $y = 1$  для  $f > 1$  или  $y = 0$  для  $f < 1$ . Для определения  $\sup(\partial v_x / \partial y)$  и оценки наличия циркуляции материала на входе необходимо знать  $C(\rho)$ . Зоной наименьшего градиента скорости, при отсутствии циркуляции, является  $\rho = \lambda$ , где  $dP/d\rho = 0$  и имеет место чисто сдвиговое течение. Для  $f > 1$  справедливо соотношение  $\lim_{c \rightarrow \infty} |1 - C| (|1 - C|^{1+s} - |C|^{1+s})^{-1} = -1$ , следовательно

$$\operatorname{int}(\partial v_x / \partial y) = w(f - 1)(s + 1) / [H (1 + \rho_m)].$$

Полученное выражение правомерно и при  $f < 1$ , поскольку  $\lim (|C|^s / B) = -1$ . При наличии циркуляции на входе  $\operatorname{int}(\partial v_x / \partial y) = 0$  и условие циркуляции  $C(\rho) < C_*$  для  $f < 1$ ,  $C(\rho) > C_*$  для ( $f > 1$ ), где  $C_* = [1 + f^{1/(1+s)}]^{-1}$ .

В точке  $\rho_m$  функция  $C$  терпит разрыв второго рода, что существенно усложняет численный анализ. Трудно воспользоваться условием (2.68). Кроме того, с увеличением « $C$ » снижается точность расчета функции « $\Phi$ ». Решение уравнения (2.67) методом итераций дает плохую сходимость для значений  $f < 1$ , а при  $f > 1$  схема расходится.

Отметим, что В. Н. Красовским, Р. Г. Мирзоевым с сотрудниками [61, 62, 63], а также Н. В. Розе [64] получено приближенное решение несимметричной задачи, в основу которого положено разложение подынтегральной степенной функции в (2.66) в биномиальный ряд. При этом точность расчета энергосиловых параметров несимметричного процесса течения зависит от числа членов разложения и сходимости рядов.

При проведении численного анализа удобно перейти к функции

$$\xi = (C - 0,5)^{-}. \quad (2.69)$$

Эта функция на интервале  $[\rho, \lambda]$  не имеет разрывов и асимптот, а в точках  $\rho_m$ ,  $\lambda$  обращается в нуль. Из (2.64) для градиента давления имеем

$$\frac{dP}{d\rho} = |\xi|^{n+1} \left| \frac{(f-1)(1+s)}{B (1+\rho)^{+s}} \right|^n \operatorname{sign}[(f-1)B^*], \quad (2.70)$$

где  $B^* = |0,5\xi - 1|^{1+s} - |0,5\xi + 1|^{1+s}$

Продифференцировав (2.67) по  $\rho_0$ , получим уравнение для  $\xi$

$$\frac{d\xi}{d\rho} = -\frac{2\rho[1 + (f-1)\Phi] + \Gamma\bar{P}^s}{(1+\rho^2)(f-1)\Phi'}, \quad (2.71)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{(2+s)B^*\xi} \left\{ |0,5\xi + 1|^{1+s} [1 - \xi(1,5+s)] - \right. \\ &\quad \left. - |1 - 0,5\xi|^{2+s} \operatorname{sign}(1 - 0,5\xi) \right\}, \\ \Phi' &= \frac{d\Phi}{d\xi} = -\frac{(B^{*/}\xi + B^*)\Phi}{B^*\xi} + \frac{1}{2(2+s)B^*\xi} \left\{ (2+s) |1 - 0,5\xi|^{1+s} - \right. \\ &\quad \left. - |0,5\xi + 1|^s \operatorname{sign}(0,5\xi + 1) [2 + s + \xi(3 + 3,5s + s^2)] \right\}, \\ B^{*/} &= 0,5(1+s) [|0,5\xi - 1|^s \operatorname{sign}(0,5\xi - 1) - \\ &\quad - (0,5\xi + 1)^s \operatorname{sign}(0,5\xi + 1)]. \end{aligned}$$

В ньютоновском случае уравнения (2.70), (2.71) имеют вид

$$\frac{d\bar{P}}{d\rho} = -\frac{(f-1)\xi}{(1+\rho^2)^2}; \quad \frac{d\xi}{d\rho} = -\frac{4\{\rho[6 + (f-1)(3 + 0,5\xi)] + 3\Gamma\bar{P}\}}{(f-1)(1+\rho^2)}, \quad (2.72)$$

где  $\Phi = (0,5\xi + 3)/6$ ;  $\Phi' = 1/12$ ;  $B^* = -2\xi$ ;  $B^{*/} = -2$ .

Уравнения (2.72) необходимы при отладке вычислительной программы. Для (2.70)–(2.72) граничные условия

$$\bar{P}(\lambda) = \xi(\lambda) = 0, \quad \bar{P}(\rho_0) = 0. \quad (2.73)$$

Результаты анализа модели представлены на рисунках. Шаг по  $\rho = 0,05$  обеспечивал точность расчета давления в пяти значащих цифрах. Варьировались параметры  $f$  и  $n$ , а  $\lambda$  и  $\Gamma$  оставались постоянными. На рис. 2.6 а иллюстрируется влияние фрикции на давление для ньютоновской жидкости. С увеличением фрикции давление возрастает. Эпюры по ординате геометрически подобны, отличаясь множителем  $(f+1)/2$ , что соответствует результатам раздела 2.3.

Течение псевдопластичной жидкости представлено на рис. 2.6 б. При  $f \rightarrow 1$  давление максимально, поскольку жидкость имеет наибольшую вязкость. При  $f \neq 1$  размеры зоны течения уменьшаются. В случаях  $f$  и  $1/f$  размер зоны течения идентичен. Для дилатантной жидкости (рис. 2.6 в) размеры зоны течения уменьшаются, и при  $f \rightarrow 1$  давление понижается, что обусловлено снижением вязкости. С увеличением отклонения фрикции от единицы давление возрастает, и зона течения увеличивается.

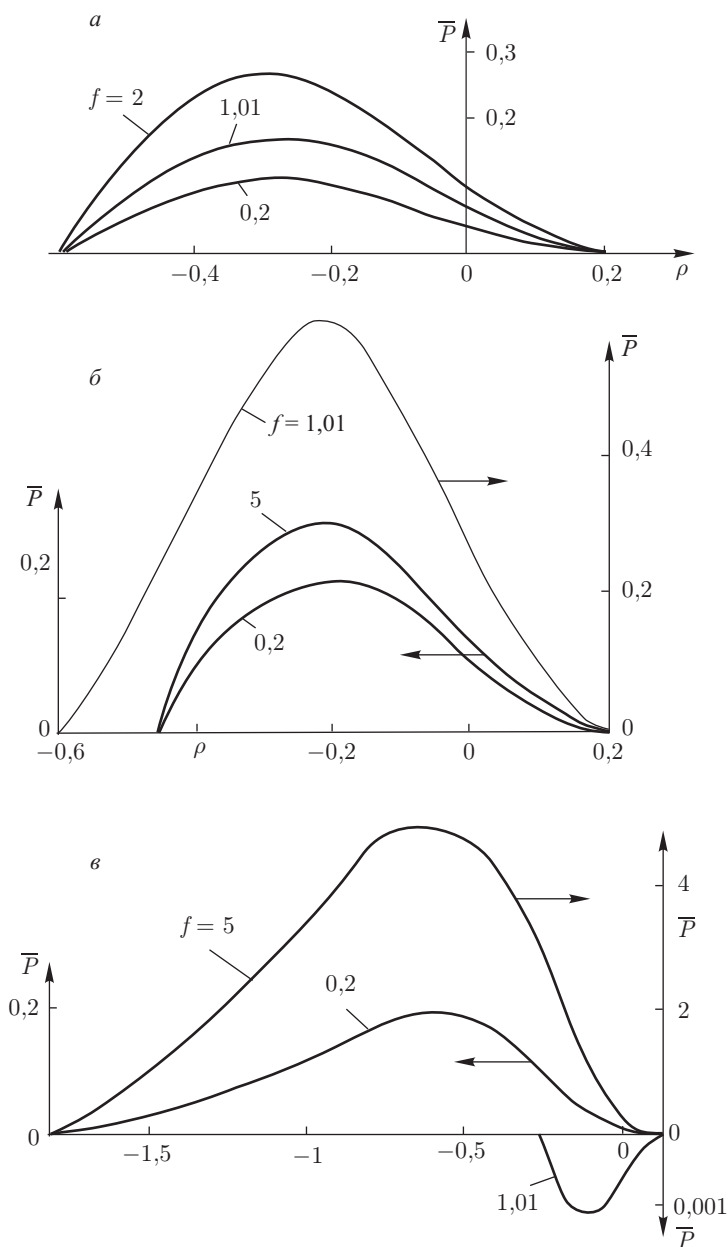


Рис. 2.6. Эпюры давления при гранулировании различных жидкостей: *a* —  $n = 1$ ,  $\Gamma = 1$ ,  $\lambda = 0,2$  (ньютоновская); *б* —  $n = 0,2$ ,  $\Gamma = 1$ ,  $\lambda = 0,2$  (псевдопластическая); *в* —  $n = 2$ ,  $\Gamma = 1$ ,  $\lambda = 0,1$  (дилатантная)

Профиль скорости описывается выражением

$$V = 1 + B_*^{-1}(f - 1) \left[ |\xi(Y - 0,5) - 1|^{1+s} - |0,5\xi + 1|^{1+s} \right]. \quad (2.74)$$

На поверхности матрицы  $V = 1$ , а валка —  $V = f$ .

Проанализируем влияние  $\xi$ ,  $n$ ,  $f$  на профиль скорости. Координату сечения определяет  $\xi$ . Результаты расчетов представлены на рис. 2.7. В ньютоновском случае эпюры имеют параболический вид. С увеличением  $\xi$  скорость возрастает, поскольку  $\xi$  однозначно связана с градиентом давления.

Случай  $\xi = 0$  соответствует безградиентным сечениям  $\lambda$  и  $\rho_m$ , в которых  $V = 1 + (f - 1)Y$ . При  $\xi < 1$  может появиться точка застоя, в которой  $V = 0$  или может возникнуть циркуляция жидкости (при  $V < 0$ ). Эпюры (б) соответствуют псевдопластичной жидкости. При  $\xi \rightarrow \pm\infty$  доминирует градиентное течение, и ордината экстремума составляет 0,2. В случае дилатантной жидкости (в) профиль скорости с увеличением  $n$  стремится к треугольной форме.

Проанализируем образование точки застоя и последующего развития циркуляционного характера течения. В точке застоя выполняется условие  $\xi = \xi_m$ ,  $V = 0$ ,  $\partial V / \partial Y = 0$ . Что приводит к системе

$$\begin{aligned} -B^* &= (f - 1) \left[ |\xi_m(Y_m - 0,5) - 1|^{1+s} - |0,5\xi_m + 1|^{1+s} \right], \\ -B^* &= -(f - 1) |0,5\xi_m + 1|^{1+s}. \end{aligned}$$

Из первого уравнения получаем условие связи  $Y_m = 0,5 + 1/\xi_m$ , а из второго получим зависимость для фрикции  $f = |(0,5\xi_m - 1)/(0,5\xi_m + 1)|^{s+1}$ , или, перейдя к безразмерной координате,

$$\xi_m = -2 \frac{f^{1/(1+s)} + 1}{f^{1/(1+s)} - 1}.$$

Необходимое условие для застоя или циркуляции  $0 < Y_m < 1$ . Если  $\xi_m$  соответствует началу зоны течения, то присутствует точка застоя. Если  $\xi_m$  находится внутри зоны течения, то имеет место циркуляция жидкости на входе.

Эпюры скорости имеют следующие свойства симметрии. Безразмерные профили для  $\xi$  и  $-\xi$  связаны так:

$$V(Y, \xi) - V_0(Y, \xi = 0) = -V(1 - Y, -\xi) + V_0(1 - Y, \xi = 0),$$

где  $V_0 = V(Y, \xi = 0) = 1 + (f - 1)Y$ . Если мы имеем эпюру, соответствующую фрикции  $f$ , то для фрикции  $1/f$  имеем  $V(Y, \xi, f) = fV(1 - Y, -\xi, 1/f)$ . Указанные соотношения



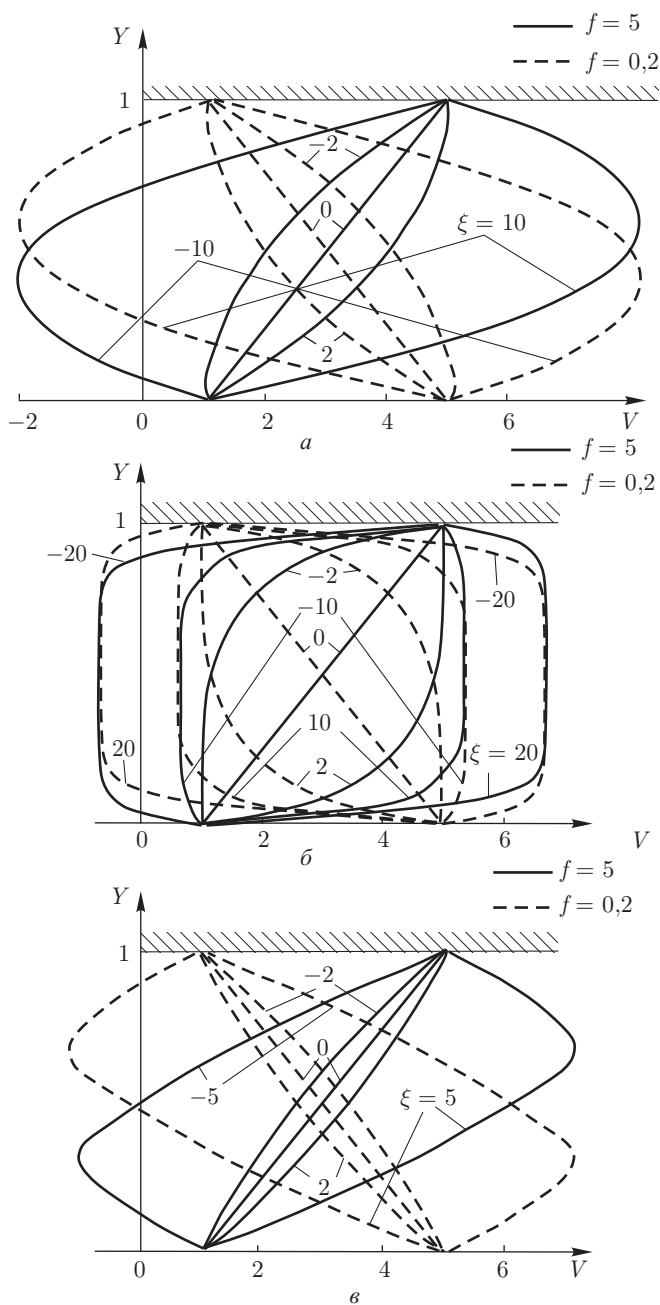


Рис. 2.7

можно получить алгебраическим путем, учитывая свойство  $B^*(-\xi) = -B^*(\xi)$ .

Запишем формулу для потребляемой мощности (2.18) в виде

$$N = B \int_{x_2}^x \left[ \eta \left| \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial v_x}{\partial y} v_x \right]_0^h dx. \quad (2.75)$$

Здесь  $B$  — ширина валька.

Подставляя в (2.75) выражение (2.65), получим

$$\begin{aligned} \bar{N} = \frac{N}{B_\eta \eta w \sqrt{2KH}} \left( \frac{H}{w} \right)^n &= |f - 1|^n (1 - s)^n \times \\ &\times \int_{\rho^0}^{\rho} B \left( 1 + \rho \right)^{-n} [(1 - C)f + C] \operatorname{sign} B(f - 1) d\rho. \end{aligned}$$

Методика расчета мощности была представлена в разделе 2.3.3. Совместно с уравнениями (2.70), (2.71), (2.73) необходимо рассматривать дифференциальное уравнение для мощности, которое с учетом (2.69) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dN}{d\rho} = - \left| \frac{\xi(f - 1)(1 + s)}{B(1 + \rho)} \right|^n \times \\ \times [f\xi - (f - 1)(0,5\xi + 1)] \cdot \operatorname{sign}[\xi B^*(f - 1)]. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Начальные условия:  $\bar{N}(\lambda) = 0$ . Значение  $\bar{N}(\rho)$  и есть искомая мощность. Уравнение (2.76) необходимо рассматривать совместно с уравнением (2.75). Формулы (2.50), (2.51) для производительности и распорного усилия могут быть распространены и на рассматриваемый случай. При расчетах необходимо учитывать свойство  $\lim_{\xi \rightarrow 0} B_* = -(1 + s)\xi$ .

$\xi \rightarrow$

**2.4.4. Скорость вращения свободного валька.** Принятые в 2.3.4 физические допущения распространим на неньютоновское течение. Скорость свободного валька находится из условия равенства нулю результирующего момента от действия на его поверхность касательных напряжений со стороны жидкости:

$$\int_x^x \tau_{xy}(y = h) dx = 0. \quad (2.77)$$

Касательное напряжение определяется выражением

$$\tau_{xy}(y = h) = \eta \left( w/H \right)^n (1 + \rho)^{-n} (1 - C) d\bar{P}/d\rho,$$

с учетом которого представим (2.77) в виде суммы

$$\int_{\rho_0}^{\lambda} (1 + \rho^2) d\bar{P} - \int_{\rho_0}^{\lambda} C (1 + \rho^2) \frac{d\bar{P}}{d\rho} d\rho = 0.$$

Выполнив для первого слагаемого интегрирование по частям, и учитывая равенства  $\bar{P}(\rho_0) = 0$ ,  $\bar{P}(\lambda) = 0$ , можем записать

$$-2 \int_{\rho_0}^{\lambda} \bar{P} \rho d\rho - \int_{\rho_0}^{\lambda} C (1 + \rho^2) \frac{d\bar{P}}{d\rho} d\rho = 0.$$

Если воспользоваться градиентом давления из (2.64), то для  $f_c$  получим выражение

$$f_c = 1 - \frac{n}{n+1} \left| 2 \frac{\int_{\rho_0}^{\lambda} \bar{P} \rho d\rho}{\int_{\rho_0}^{\lambda} C |B (1 + \rho^2)|^{-n} \text{sign}(B) d\rho} \right|^s. \quad (2.78)$$

Согласно (2.78) при  $\lambda \rightarrow 0$  (уменьшение размера зоны течения) фрикция свободного вала стремится к единице. При переработке жидкости с ярко выраженными псевдопластическими свойствами ( $n \ll 1$ ) фрикция приближается к единице. И, наоборот, для дилатантных жидкостей ( $n > 1$ ) характерно уменьшение фрикции ( $f_c < 1$ ), поскольку эти жидкости оказывают сильное тормозящее действие. Величина фрикции зависит от параметров  $n$ ,  $\lambda - \rho_0$ ,  $\Gamma$ . Подобно другим интегральным параметрам, вычисление фрикции по формуле (2.78) осуществляется совместно с уравнениями (2.64), (2.67). Полагая в последних уравнениях  $f = f_c$ , выполняются итерации. Этот метод показал хорошую сходимость при малых размерах зоны течения (когда  $f_c > 0,9$ ), но при  $f_c < 0,7$  устойчивость теряется. Более устойчивым явля-

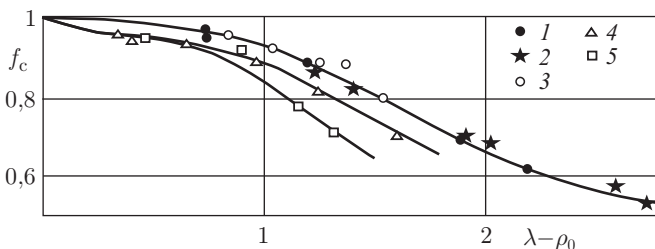


Рис. 2.8. Влияние параметров течения на фрикцию свободного вала: 1 —  $\Gamma = 0,1$ ;  $n = 0,5$ ; 2 —  $\Gamma = 0,3$ ;  $n = 0,5$ ; 3 —  $\Gamma = 1$ ;  $n = 0,5$ ; 4 —  $\Gamma = 0,1$ ;  $n = 2$ ; 5 —  $\Gamma = 0,3$ ;  $n = 2$

ется способ минимизации мощности путем варьирования параметра  $f$  в уравнении  $\partial \bar{N}(f_c^0) / \partial f = 0$ . Это условие реализуется путем постепенного уменьшения  $f$ , начиная с единицы. В точке  $f_c$  функция  $\bar{N}$  минимальна. Используется уравнение (2.76).

Некоторые численные результаты, полученные по указанной методике, представлены на рис. 2.8. С увеличением зоны течения  $f_c$  снижается, следовательно, увеличение загрузки тормозит вращение вала. Проницаемость матрицы не оказывает существенного влияния на  $f_c$ . С увеличением  $n$  фрикция снижается. Следует отметить важность исследования фрикции свободного вала, поскольку при этом гранулятор работает в оптимальном режиме с минимальной потребляемой мощностью.

**2.4.5. Интегральные параметры гранулятора с неоднородной по длине вала фрикцией.** Используем методику, подробно изложенную в разделе 2.3.4. В неньютоновском случае анализ существенно усложняется, поскольку снимается условие постоянства размера зоны течения по длине вала, которое следует из автомодельности размера зоны течения по фрикции. Используем расчетную схему рис. 2.3. Со стороны перерабатываемого материала на выделенный участок вала  $dr$  действует касательное напряжение, которое создает элементарный крутящий момент

$$dM = R \int_x^x \tau_{xy}(y=h) dx dr.$$

Проинтегрировав по длине вала, получим результирующий момент

$$M = R \int_r^r \int_x^x \tau_{xy}(y=h) dx dr.$$

Трение в подшипниках не учитываем, поэтому момент равен нулю:

$$\int_r^r \int_x^x \tau_{xy}(y=h) dx dr = 0. \quad (2.79)$$

Уравнение (2.79) содержит радиус качения как параметр. Используя (2.77), можем записать

$$\int_{r_1}^r 2 \int_{\rho}^{\lambda} \bar{P} \rho d\rho + \int_{\rho}^{\lambda} C \left| \frac{(f-1)(s+1)}{B(1+\rho)^{n+1}} \right| \text{sign}[B(f-1)] d\rho \Big|_n dr = 0. \quad (2.80)$$

Переменные этого уравнения находятся из (2.64), (2.67) в которых следует учитывать  $f = r_k/r_1$ . Решение задачи усложняется тем, что пределы интегрирования  $r$  и  $r$  в общем случае не заданы. Кроме того координаты зоны течения также являются функциями  $r$ .

Для расчета потребляемой мощности воспользуемся формулой (2.18), которая с учетом интегрирования по длине валка примет вид

$$N = u \int_r^r \int_x^x \tau_{xy} (y = h) dx dr - w \int_r^r \int_x^x \tau_{xy} (y = 0) dx dr.$$

Согласно (2.79) первое слагаемое равно нулю, поэтому имеем

$$N = \frac{\eta \sqrt{2RH} \cdot w^{n+1}}{H_0^n} \int_r^r \int_\rho^\lambda C \left| \frac{(f-1)(s+1)}{B(1+\rho)} \right|_{n+1}^0 \text{sign}[B(f-1)] d\rho dr.$$

Сопоставляя это выражение с (2.80), получим более простую формулу

$$N = -\frac{2\eta \sqrt{2RH} w^{n+1}}{H_0^n} \int_r^r \int_\rho^\lambda \bar{P} \rho d\rho dr. \quad (2.81)$$

Здесь внутренний интеграл является функцией параметра  $f$ , который в свою очередь зависит от  $r$ .

Производительность определяется путем интегрирования (2.34) по длине валка:

$$Q = k \int_r^r \int_x^x P^s dx dr,$$

или

$$Q = k \sqrt{2RH} \left( \frac{\eta \sqrt{2RH}}{H_0^{n+1}} \right)^s \int_r^r \int_\rho^\lambda \frac{ur}{r_k} \bar{P}^s d\rho dr. \quad (2.82)$$

Аналогично для распорного усилия имеем

$$F = 2\eta R \left( \frac{u}{H r_k} \right)^n \int_r^r r^n \int_\rho^\lambda \bar{P} d\rho dr. \quad (2.83)$$

Внутренний интеграл в (2.81)–(2.83) зависит от  $r$ , поэтому его следует рассматривать совместно с уравнениями (2.64), (2.67). Предварительно из (2.80) находится  $r_k$ .

#### 2.4.6. Влияние боковых стенок (трехмерное течение).

Рассматриваемая в этой главе задача, связана с течением перерабатываемого материала в роторном грануляторе, состоящем из двух одинаково вращающихся цилиндров, из которых внутренний сплошной установлен эксцентрически относительно наружного — перфорированного (внутренний контакт цилиндров) [17]. Один из цилиндров может иметь кольцевые проточки, а другой — кольцевые выступы. Кроме того, данное исследование может быть полезно при анализе течения в зазоре двухшнекового экструдера (внешний контакт непроницаемых цилиндров) [21]. Гидродинамический контакт бесконечного цилиндра с полупроницаемой плоскостью рассмотрен в [65].

Схема течения представлена на рис. 2.9. Заполненный вязкой жидкостью прямоугольный открытый канал с полупроницаемой нижней поверхностью шириной  $S$  движется поступательно со скоростью  $w$ . В канал погружен валок радиуса  $R$ . Окружная скорость цилиндрической поверхности  $u$ .

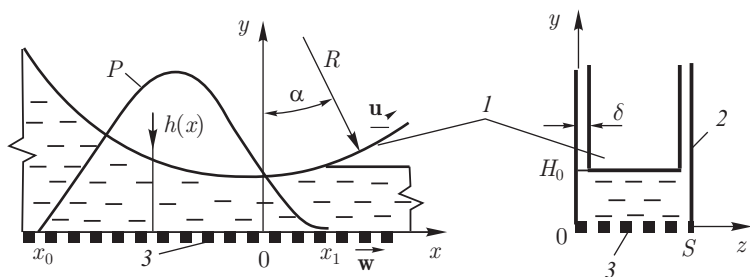


Рис. 2.9. Схема течения: 1 — валок; 2 — прямоугольный лоток; 3 — полупроницаемая стенка

Боковые зазоры между торцами валка и стенками канала  $\delta$  идентичны. Минимальный зазор  $H$  постоянен в направлении  $z$ . Ось  $x$  лежит на полупроницаемой поверхности. Ось  $y$  проходит через ось валка. Поток жидкости в торцевых зазорах не учитываем. Траектории частиц жидкости лежат в плоскостях перпендикулярных оси  $z$ , поэтому течение в этом направлении отсутствует:  $v_z = 0$ . При нулевых торцевых зазорах  $\delta = 0$  и различающихся скоростях  $u \neq w$  на линиях  $z = 0$ ,  $y = h$  и  $z = S$ ,  $y = h$  имеет место разрыв осевой скорости (бесконечный градиент скорости сдвига) и при определении потребляемой мощности

получаются расходящиеся ряды Фурье [66]. Поэтому в торцевых зазорах, конечной величины ( $\delta > 0$ ) предполагаем линейное распределение осевой скорости. При  $u = w$  можно положить  $\delta = 0$ .

На выходе зоны течения  $x$  для давления принимаем кавитационное условие  $\partial P / \partial x = 0$  [14]. В точках  $x$ ,  $x$  и под полупроницаемой поверхностью давление атмосферное, которое полагаем равным нулю. Для условий  $S, h \ll (x - x)$  в зазоре доминируют сдвиговые напряжения и давление однородно в поперечном сечении канала  $\partial P / \partial y = \partial P / \partial z = 0$ , но изменяется в продольном направлении  $P(x)$  [67, 68]. Проницаемость нижней стенки описывается эмпирической зависимостью  $v_y = -kP$  при  $y = 0$ . Среда несжимаема. Течение установившееся. Массовыми силами и силами инерции пренебрегаем.

С учетом принятых допущений, задача описывается системой уравнений

$$\frac{1}{\eta} \frac{dP}{dx} = \frac{\partial v^x}{\partial y} + \frac{\partial v^x}{\partial z} \quad (2.84)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (2.85)$$

$$y = 0, \quad v_x = w, \quad v_y = -kP, \quad (2.86)$$

$$y = h, \quad v_y = u \frac{x}{R}, \quad v_x = \begin{cases} w + \frac{(u-w)}{\delta} z, & 0 \leq z \leq \delta, \\ u, & \delta \leq z \leq S - \delta, \\ w + \frac{(u-w)}{\delta} (S - z), & S - \delta \leq z \leq S, \end{cases} \quad (2.87)$$

$$z = 0, \quad z = S, \quad v_y = 0, \quad v_x = w, \quad (2.88)$$

$$x = x, \quad P = 0; \quad x = x_1, \quad P = dP/dx = 0. \quad (2.89)$$

Условия (2.87) получены для случая  $\sin \alpha = x/R \ll 1$ , поскольку  $v_y = u \sin \alpha = ux/R$ ;  $v_x = u \cos \alpha \approx u$ .

Проинтегрируем (2.85) в области, ограниченной сечениями  $x$  и  $x$ , поверхностями  $y = 0$  и  $y = h(x)$  и стенками  $z = 0$  и  $z = S$ . Используя для  $v_y$  условия (2.85), (2.87), можем записать

$$\int_0^S \int_x^x \int_0^h \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dy dx dz + \int_0^S \int_x^x (u \sin \alpha + kP) dx dz = 0.$$

Далее, учитывая соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h v_x dy = \int_0^h \frac{\partial v_x}{\partial x} dy + \frac{dh}{dx} v_x(h), \quad \frac{dh}{dx} v_x(h) = u \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_0^h v_z dy = \int_0^h \frac{\partial v_z}{\partial z} dy + \frac{dh}{dz} v_z(h), \quad \frac{dh}{dz} = 0, \quad v_z = 0,$$

получим интегральную форму уравнения неразрывности:

$$\int_0^s \int_0^h v_x dy dz = \int_0^s \int_0^{h(x)} v_x(x) dy dz + S k_0 \int_x^x P dx. \quad (2.90)$$

В произвольном поперечном сечении уравнения (2.84), (2.86)–(2.88) описывают задачу Дирихле для уравнения Пуассона. Решение этой задачи, выполненное методом Фурье [7], дает профиль осевой скорости в произвольном сечении канала:

$$\begin{aligned} v_x = w + \frac{S}{\pi \eta} \frac{dP}{dx} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi n z}{S}\right)}{n^3} \cdot \left[ \frac{\operatorname{ch}\left[\frac{\pi n}{2S}(2y-h)\right]}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi n h}{2S}\right)} - 1 \right] + \\ + \frac{4S(u-w)}{\pi \delta} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi n z}{S}\right)}{n} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi n y}{\delta}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi n h}{\delta}\right)} \times \\ \times \left[ \sin\left(\frac{\pi n \delta}{S}\right) - 2\pi n \sin\left(\frac{\pi n \delta}{S}\right) \right]. \quad (2.91) \end{aligned}$$

При  $x = x$ ,  $z = S/2$ ,  $v_x < 0$  на входе зоны течения имеет место циркуляция жидкости.

Введем безразмерные переменные и параметры:

$$\begin{aligned} \{\rho, \lambda, \rho\} = \frac{\{x, x, x\}}{\sqrt{2} \frac{R H_0}{\eta}}, \quad \bar{P} = \frac{P H_0^2}{w \eta \sqrt{2 R H}}, \quad \Gamma = \frac{2 k \eta R}{H_0}, \\ f = \frac{u}{w}, \quad q = \frac{H}{S}, \quad \Delta = \frac{\delta}{S}. \end{aligned}$$

Подставив (2.91) в (2.90), получим уравнение для давления

$$\lambda - \rho + D \frac{dP}{d\rho} + (f - 1) B + \Gamma \int_{\rho}^{\lambda} \bar{P} d\rho = 0, \quad (2.92)$$

$$\text{где } D = \frac{1}{12 q^2} \left\{ 1 + \rho - \frac{192}{\pi q} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} n^{-1} \operatorname{th} \left[ \frac{\pi n}{2} q (1 + \rho) \right] \right\},$$

$$\begin{aligned} B = \frac{1}{\pi \Delta q} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} n^{-1} \left[ \sin(\pi n \Delta) - 2\pi n \cdot \sin\left(\frac{\pi n \Delta}{S}\right) \right] \times \\ \times \left\{ \operatorname{th} \left[ \frac{\pi n q}{2} (1 + \lambda) \right] - \operatorname{th} \left[ \frac{\pi n q}{2} (1 + \rho) \right] \right\}. \end{aligned}$$



В уравнении (2.92) использовалось приближение  $h = H_0(1 + \rho^2)$ .

Скорость истечения через полупроницаемую нижнюю поверхность однородна по ширине канала, поскольку  $\partial P / \partial z = 0$ . Поток жидкости через эту поверхность определяется интегралом

$$Q = Sk \int_{x_0}^{x_1} P dx = H_0 Sw \Gamma I_1, \quad I_1 = \int_{\rho_0}^{\lambda} \bar{P} d\rho.$$

Подъемная сила, действующая со стороны жидкости на валок:

$$F = S \int_{x_0}^{x_1} P dx = 2Sw\eta RH_0^{-1} I_1.$$

Из сопоставления выражений для  $Q$  и  $F$  следует соотношение, раскрывающее физический смысл проницаемости  $k = Q/F$ .

Потребляемую мощность можно определить по касательным напряжениям, действующим со стороны жидкости на стенки канала:

$$N = \eta \int_{x_0}^{x_1} \left[ \int_0^s v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} \bigg|_0^h dz + 2w \int_0^h \frac{\partial v_x(z=S)}{\partial z} dy \right] dx,$$

или с учетом (2.91)

$$\begin{aligned} \frac{NH_0}{2w^2\eta S\sqrt{2RH_0}} = \\ = I_2 + \int_{\rho_0}^{\lambda} \left\{ \frac{4(f-1)}{\pi^3 q} \frac{d\bar{P}}{d\rho} \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} n^{-3} \operatorname{th} \left[ \frac{\pi n q (1 + \rho^2)}{2} \right] + \frac{4(f-1)^2 q}{\pi^2 \Delta} \times \right. \\ \left. \times \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{cth}[\pi n q (1 + \rho^2)]}{n^2} \left[ \sin(\pi n \Delta) - 2\pi n \sin^2 \left( \frac{\pi n \Delta}{2} \right) \right] \right\} d\rho, \end{aligned}$$

где  $I_2 = - \int_{\rho_0}^{\lambda} \bar{P} \rho d\rho.$

Трение в зазорах между боковыми стенками канала и торцами вала игнорируем.

Ниже подробно анализируется случай равенства скоростей поверхностей  $u = w$  при нулевых боковых зазорах  $\Delta = 0$ . Рассматривая интегралы  $I_1$ ,  $I_2$  в выражениях  $Q$  и  $N$  как функции

нижнего предела интегрирования, получим для давления и указанных интегралов систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{P}}{d\rho} = (\rho^2 - \lambda^2 - \Gamma I_1) D^{-1}, \quad \frac{dI_1}{d\rho} = -\bar{P}, \quad \frac{dI_2}{d\rho} = -\bar{P}\rho \quad (2.93)$$

$$\rho = \lambda, \quad \bar{P} = I_1 = I_2 = 0; \quad \rho = \rho_0, \quad \bar{P} = 0.$$

Анализ (2.92) выполнен методом Рунге–Кутты. Расчеты начинались от априорно задаваемой точки  $\rho = \lambda$  и заканчивались в точке  $\rho < \rho_0$ , где функция давления принимала отрицательное значение. Шаг по  $\rho = 0,02$ . Значения  $\rho_0$ ,  $I_1$ ,  $I_2$  определялись интерполяцией давления в окрестности точки инверсии. Значение  $q = 0$  соответствует бесконечной ширине вала ( $S = \infty$ ) и имеет место соотношение  $\lim_{q \rightarrow 0} D = (1 + \rho^2)^3/12$ , что соответствует уравнению (2.25).

На рис. 2.10 представлены расчетные профили давления при различных значениях  $q$ ,  $\Gamma$  и идентичной длине зоны течения  $\lambda - \rho_0 \approx 3$ . В случае вала бесконечной ширины  $q = 0$  градиент давления и само давление в начале зоны течения незначительны. С увеличением  $q$  (сближение боковых стенок) градиент давления в начале зоны течения возрастает и повышается максимальное давление. Так при  $q = 1$ ,  $\Gamma = 0$  оно достигает  $P = 11$  (на рисунке не показано). Увеличение проницаемости нижней поверхности снижает давление. Трение жидкости о боковые стенки усиливает характерный для валковых течений напорный эффект, что проявляется в увеличении градиента давления в области минимального зазора и протяженности участка течения за минимальным зазором. Трение о боковые стенки увеличивает поток жидкости

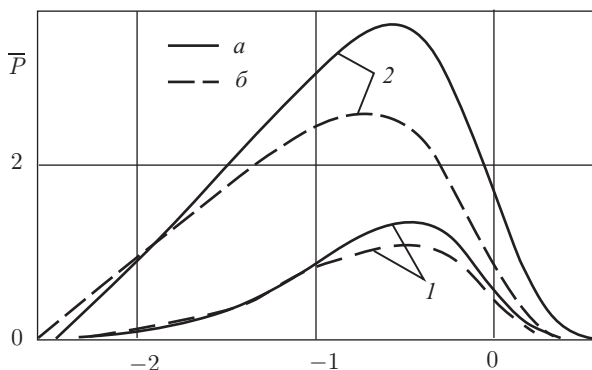


Рис. 2.10. Эпюры давления в канале:  $a - \Gamma = 0$ ;  $б - \Gamma = 0,2$ ;  $1 - q = 0$ ;  $2 - q = 0,4$

через полупроницаемую поверхность, поскольку он пропорционален площади эпюры давления. Кроме того, поток жидкости через нижнюю поверхность увеличивается с протяженностью зоны течения. Так при  $\Gamma = 0,1$ ;  $q = 0,2$  увеличение  $\lambda - \rho_0$  от 3,06 до 7,17 повышает  $I_1$  от 2,76 до 11,32. Соответственно, потребляемая мощность, характеризуемая  $I_2$ , возрастает от 3,38 до 24,2.

Рисунок 2.11 иллюстрирует влияние параметров  $q, \Gamma, \lambda - \rho_0$  на интегральную характеристику  $I_1$ , которая определяет расход гранулята и распорное усилие. Трение жидкости о боковые

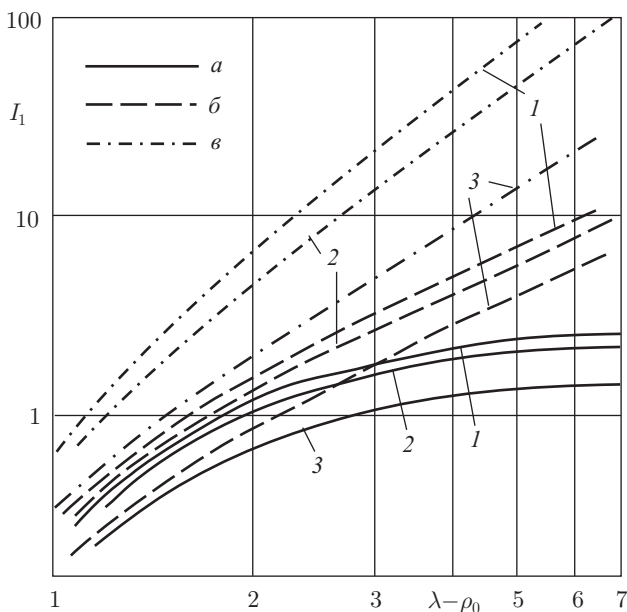


Рис. 2.11. Зависимость  $I_1$  от протяженности зоны течения:  $a - q = 0$ ;  $б - 0,2$ ;  $в - 1$ ;  $1 - \Gamma = 0$ ;  $2 - 0,1$ ;  $3 - 1,0$

стенки качественно изменяет характер зависимости. Для вала бесконечной ширины характерно существование предельного распорного усилия, производительности и потребляемой мощности, поскольку интенсивное течение локализовано в окрестности минимального зазора (см. рис. 2.10). При  $q > 0$  для  $I_1$  характерна монотонно-возрастающая зависимость от  $\lambda - \rho_0$ , поэтому, практически любое количество жидкости, подаваемое на вход канала, будет продавлено через проницаемую поверхность. Следовательно, распорное усилие пропорционально количеству

жидкости, подаваемой в рабочий зазор. Проницаемость нижней стенки не изменяет характер зависимости  $I_1$  от длины зоны течения.

Эффективность работы гранулятора можно определить отношением производительности к затрачиваемой мощности, или в безразмерном представлении  $I_1/I_2$ . Этот показатель при изменении  $\lambda-\rho_0$  от 1 до 7 уменьшается от 3 до  $\sim 0,9$  ( $q = 0$ ) и до  $\sim 0,4$  ( $q \leq 1$ ) для  $0 < \Gamma \leq 1$ , что иллюстрируется рис. 2.12. Следовательно, трение жидкости о боковые стенки снижает эффективность работы гранулятора.

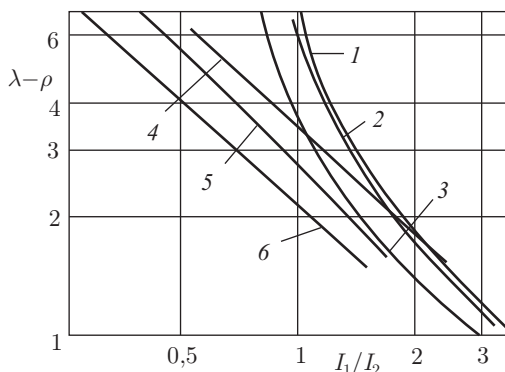


Рис. 2.12. Зависимость эффективности от размера зоны течения: 1 —  $q = 0$ ;  $\Gamma = 0$ ; 2 — 0; 0,1; 3 — 0; 1; 4 — 0,5; 0; 5 — 0,2; 1; 6 — 1; 1

Таким образом, гидродинамическое влияние боковых стенок канала проявляется в подавлении противотока жидкости на входе, повышении начального градиента давления, увеличении распорного усилия и расхода жидкости через полупроницаемую поверхность. Усиливается проявление напорного эффекта в конце зоны течения.

По результатам анализа течения жидкости в роторном грануляторе можно сделать следующие выводы. Анализ задачи течения неньютоновской жидкости в зазоре между вращающимся валком и полупроницаемой поверхностью показал высокую эффективность применения квазиодномерного приближения для давления.

Предложена расчетная схема, позволяющая свести ряд наиболее распространенных типов грануляторов к единой методике расчета. Привязка решения к входному сечению гидродинамического контакта позволила при выполнении численных расчетов избежать традиционно применяемого метода стрельбы.

Выведена расчетная формула для определения потребляемой мощности в условиях проницаемости одной из поверхностей и различающихся значений скорости их движения.

В ньютоновском случае протяженность зоны гидродинамического контакта не зависит от соотношения скоростей движения рабочих поверхностей.

Определены условия возникновения циркуляции жидкости на входе рабочего зазора. Для ньютоновских жидкостей характерна пропорциональная зависимость между производительностью и распорным усилием.

С увеличением загрузки скорость вращения свободного вала снижается. Грануляторы со свободным валком работают в оптимальном режиме и потребляют минимальную мощность. Впервые решена задача о скорости вращения свободного вала, совершающего круговое движение над полупроницаемой поверхностью, покрытой неньютоновской жидкостью. Проницаемость поверхности не оказывает существенного влияния на скорость вращения свободного вала. Оптимальное соотношение окружающих скоростей находится в интервале 0,5–1,2.

Впервые предложен способ анализа неньютоновского течения в зазоре в условиях существенно различающихся скоростей рабочих поверхностей, сущность которого состоит в предположении одномерного характера изменения вязкости.

Проанализировано влияние размера зоны течения на производительность. Наиболее резкий рост производительности имеет место при увеличении безразмерной зоны течения от 1 до 6. Для размера зоны течения больше 7 наступает стабилизация всех интегральных характеристик: производительности, распорного усилия и потребляемой мощности. Введенное понятие предельной загрузки значительно упрощает методику расчета технологических параметров роторных машин.

При прочих равных условиях псевдопластичные жидкости обеспечивают более высокую производительность по грануляту, чем дилатантные и ньютоновские.

# **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВАЛКОВОГО ТЕЧЕНИЯ ТЯЖЕЛЫХ ВЯЗКИХ И НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ**

Сущее не делится на разум  
без остатка.

*Гёте*

Линейному закону Ньютона хорошо повинуются однофазные низкомолекулярные, т.е. простые жидкости. Однако более сложные по структуре жидкости, например растворы и расплавы полимеров, дисперсные текучие системы (суспензии, эмульсии, пасты и др.), в большинстве случаев имеют кривую течения, отличную от ньютоновской. Это отличие для реостабильных текучих систем (реологические характеристики которых не зависят от времени) может выражаться в том, что кривая течения криволинейна, но проходит через начало отсчета; такие жидкости называются чисто вязкими, нелинейно-вязкими и аномально вязкими, часто неньютоновскими.

Построены модели течения вязкой и аномально вязкой жидкостей в валковом зазоре с учетом сил тяжести. Изучены основные закономерности течения. Указаны границы применимости полученных моделей. Проанализировано влияние сил инерции и тяжести на нестационарные режимы течения вязкой жидкости. Проанализирован случай течения с отрицательной фрикцией.

### **3.1. Валковое течение тяжелой ньютоновской жидкости**

**3.1.1. Постановка задачи.** Рассматривается процесс течения ньютоновской среды в зазоре вращающихся валков, причем физические свойства жидкости не зависят от температуры и давления. Также считаем силы вязкого трения соизмеримыми с силами тяжести жидкости. Гравитационное разделение в суспензии отсутствует ввиду малого времени ее пребывания и наличия цир-



Ось  $y$  направлена горизонтально, ось  $x$  — вертикально вниз. Уровень жидкости  $x = x_0$  постоянен. Объемный расход жидкости  $Q$ . Окружная скорость валков  $V$ , а их радиус  $R$ . Минимальный зазор между валками  $2H_0$ , а текущий  $2h$ .

Дифференциальные уравнения Навье–Стокса для описания стационарного движения вязкой несжимаемой жидкости имеют вид:

$$\begin{cases} \rho \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right); \\ \rho \left( v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right); \\ \rho \left( v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right). \end{cases} \quad (3.1)$$

Полное описание движения получают путем анализа уравнений Навье–Стокса совместно с уравнением неразрывности потока:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (3.2)$$

В направлении оси  $z$  течение отсутствует (квазиплоская задача), поэтому всеми функциями от  $z$  и производными по  $z$  в уравнениях (3.1) и (3.2) пренебрегаем.

Особенность задачи состоит в существенной (вертикальной) вытянутости зоны течения (ориентировочные значения геометрических характеристик:  $H_0 \approx 10^{-3}$  м,  $\ell \approx 0,3$  м). Это позволяет существенно упростить определяющие уравнения.

Выполним методом малого параметра оценку членов уравнений движения. Характерными размерами зоны течения (масштабами) являются: в направлении оси  $x$  — продольный размер  $\ell$ , в направлении  $y$  — минимальный зазор  $H_0$ . Введем параметры и безразмерные переменные

$$\varepsilon = H_0/\ell, \quad V_x = v_x/V, \quad V_y = v_y/V, \quad X = x/\ell, \quad Y = y/H_0.$$

При этом уравнения движения примут вид

$$\begin{cases} \rho V^2 \left( \frac{V_x}{\ell} \frac{\partial V_x}{\partial X} + \frac{V_y}{H_0} \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right) = -\rho g - \frac{1}{\ell} \frac{\partial p}{\partial X} + \eta V \left( \frac{1}{\ell^2} \frac{\partial^2 V_x}{\partial X^2} + \frac{1}{H_0^2} \frac{\partial^2 V_x}{\partial Y^2} \right), \\ \rho V^2 \left( \frac{V_x}{\ell} \frac{\partial V_y}{\partial X} + \frac{V_y}{H_0} \frac{\partial V_y}{\partial Y} \right) = -\frac{1}{H_0} \frac{\partial p}{\partial Y} + \eta V \left( \frac{1}{\ell^2} \frac{\partial^2 V_y}{\partial X^2} + \frac{1}{H_0^2} \frac{\partial^2 V_y}{\partial Y^2} \right). \end{cases}$$



Для поперечной скорости в конвективных слагаемых уравнений используем ее представление через осевую скорость из уравнения неразрывности. После деления всех членов уравнений на  $\eta V/H_0^2$  получим безразмерную форму уравнений движения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho V H_0}{\eta} \left( \varepsilon V_x \frac{\partial V_x}{\partial X} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right) = \\ \quad = -\frac{\rho g H_0^2}{\eta V} - \frac{H_0^2}{\eta V \ell} \frac{\partial p}{\partial X} + \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^2 V_x}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial Y^2} \right), \\ \frac{\rho V H_0}{\eta} \left( \varepsilon V_x \frac{\partial V_y}{\partial X} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial Y} \right) = -\frac{H_0}{\eta V} \frac{\partial p}{\partial Y} + \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^2 V_y}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial Y^2} \right). \end{array} \right.$$

Силы инерции значительно меньше сил вязкого трения. Введем рассмотрение задачи в рамках стоксова приближения ( $\text{Re} \ll 1$ ,  $\text{Re} = \varepsilon \rho V H_0 / \eta$ ). Оценка сил инерции представлена в разделе 3.1.1. Кроме того, в рассматриваемом случае ( $H_0 \approx 10^{-3}$  м,  $\ell \approx 0,3$  м) имеет место неравенство  $\varepsilon \ll 1$ . Слагаемыми, содержащими множитель  $\varepsilon^2$ , пренебрегаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\rho g H_0^2}{\eta V} - \frac{H_0^2}{\eta V \ell} \frac{\partial p}{\partial X} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial Y^2} = 0, \\ -\frac{H_0}{\eta V} \frac{\partial p}{\partial Y} + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial V_y}{\partial Y} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Согласно уравнению неразрывности (3.2), можем записать

$$\frac{\partial V_y}{\partial Y} = -\varepsilon \frac{\partial V_x}{\partial X}.$$

Обозначим комплекс в первом уравнении движения  $P = H_0^2 p / (\eta V \ell)$  как безразмерное давление. При этом уравнения движения примут вид

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\rho g H_0^2}{\eta V} - \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial Y^2} = 0, \\ -\frac{\partial P}{\partial Y} - \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial V_x}{\partial X} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Из полученных уравнений видно, что давление в поперечном направлении (по  $y$ ) является величиной порядка  $\varepsilon^2$  и им можно пренебречь. Для описания течения, с учетом принятых допущений, можно использовать первое уравнение движения, учитывающее силы тяжести, давления и вязкого трения. Поскольку давление изменяется только по длине канала, а поле скоростей двумерно, это приближение можно назвать квазиплоским.

Изменим форму уравнения неразрывности (3.2). Выделим в зоне течения криволинейную трапецию, ограниченную сече-

ниями  $x$  и  $x$ . Определим поток вектора скорости через замкнутый контур, проинтегрировав уравнение (3.2) по высоте зазора:

$$\int_0^h \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) dy = \int_0^h \frac{\partial v_x}{\partial x} dy + V \sin \alpha = 0.$$

Здесь учитывались граничные условия для поперечной скорости (см. рис. 3.3). Далее, учитывая соотношения

$$\frac{d}{dx} \int_0^h v_x dy = \int_0^h \frac{\partial v_x}{\partial x} dy + \frac{dh}{dx} v_x(h), \quad \frac{dh}{dx} v_x(h) = \operatorname{tg} \alpha \cdot V \cdot \cos \alpha,$$

получим интегральное уравнение неразрывности

$$\frac{d}{dx} \int_0^{h(x)} v_x(x) dy = 0,$$

или

$$Q = 2 \int_0^h v_x dy,$$

где  $Q$  — постоянная (объемный расход жидкости на один метр длины вала). Согласно полученному выражению объемный расход жидкости для вала единичной ширины  $Q$  постоянен по длине зоны течения.

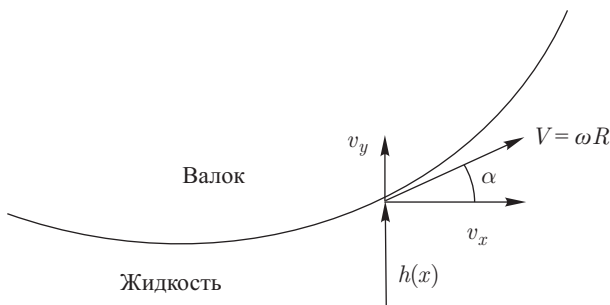


Рис. 3.3. Граничное условие на поверхности вала

С учетом принятых допущений течение описывается системой дифференциальных уравнений движения, неразрывности

и реологического состояния:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho g, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad Q = 2 \int_0^h v_x dy, \quad \tau = \eta \gamma, \quad (3.3)$$

где  $\gamma = \partial v_x / \partial y$ .

В выходном сечении  $x = x_1$  осевая скорость однородна по сечению:  $v_x = V$ . Согласно первому уравнению в (3.3) постоянная составляющая давления не оказывает влияние на течение. На входе  $x = x_0$  и на выходе  $x = x_1$  давление равно атмосферному и без снижения общности полагаем  $p = 0$ .

Уравнения (3.3) дополним следующими граничными условиями:

входное сечение

$$x = x_0, \quad p = 0, \quad (3.4)$$

условие прилипания

$$y = h, \quad v_x = V, \quad (3.5)$$

выходное сечение

$$x = x_1, \quad p = 0, \quad v_x = V, \quad \tau_{xy}(y = h) = 0, \quad (3.6)$$

условие симметричности

$$x_0 < x < x_1, \quad y = 0, \quad \gamma = 0, \quad \tau_{xy} = 0. \quad (3.7)$$

Кинематическое условие для поверхности валка (3.5) записано в предположении следующих соотношений для компонент скорости (рис. 3.3):  $v_x = V \cos \alpha \approx V$ ,  $v_y = V \sin \alpha \approx Vx/R$ . Учитывались асимптотические свойства:  $\sin \alpha = x/R$ ,  $\cos \alpha = 1$  при  $x/R \rightarrow 0$ . Согласно (3.6) течение заканчивается в сечении, в котором касательное напряжение на стенке будет равно нулю.

Следует отметить, что данная задача без учета сил тяжести изучена достаточно подробно. Однако присутствие дополнительного слагаемого, учитывающего силы тяжести, в уравнении движения (первое уравнение в (3.3)) существенно изменяет свойство решения. Что подтверждает последующий анализ.

Интегрируя уравнение движения из (3.3) с учетом условия (3.7), имеем

$$\tau_{xy} = \left( \frac{dp}{dx} - \rho g \right) y. \quad (3.8)$$

Согласно полученному выражению, условие окончания течения (3.6) эквивалентно условию для давления  $dp/dx - \rho g = 0$ . В безгравитационном случае ( $g = 0$ ) условие для давления переходит в известное условие Рейнольдса (или кавитационное усло-

вие) ( $dp/dx = 0$ ). Величина  $p/\rho g - x$  характеризует пьезометрический напор.

Рассматривая совместно (3.8) и уравнение состояния из (3.3), можем записать

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{1}{\eta} \left( \frac{dp}{dx} - \rho g \right) y. \quad (3.9)$$

Интегрируем (3.9), с учетом условия прилипания (3.5):

$$\int_0^y dv_x = \frac{1}{\eta} \left( \frac{dp}{dx} - \rho g \right) \int_0^y y dy,$$

получаем

$$v_x = V - \frac{1}{\eta} \left( \frac{dp}{dx} - \rho g \right) \frac{h^2 - y^2}{2}. \quad (3.10)$$

Выполнив интегрирование в (3.3) с учетом (3.10), имеем

$$Q = 2Vh - \frac{2}{3\eta} \left( \frac{dp}{dx} - \rho g \right) h^3. \quad (3.11)$$

Поскольку  $Q = \text{const}$ , из (3.11) запишем уравнение для давления:

$$\frac{dp}{dx} = \rho g + \frac{(2Vh - Q) 3\eta}{2h^3}. \quad (3.12)$$

**3.1.3. Анализ решения.** Найдем функцию тока для течения вязкой жидкости. Функция тока определяется соотношениями

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Выражение для осевой скорости (3.10) с учетом выражения для давления (3.12) примет вид

$$v_x = V - \frac{3}{2h} (2Vh - Q) \frac{h - y}{2}.$$

Используя граничное условие

$$y = 0, \quad \psi = 0,$$

найдем функцию тока

$$\psi = \int_0^y v_x dy = Vy - \frac{3}{4} \frac{(2Vh - Q)}{h^3} \left( h y - \frac{y^3}{3} \right).$$

Функция тока, для тонкого слоя жидкости, непосредственно смачивающего поверхность вала, отвечает следующему условию  $y = h$ :

$$\psi(y = h) = \frac{Q}{2}.$$

При выполнении численных расчетов удобно перейти к безразмерным переменным

$$\bar{\psi} = \frac{\psi}{VH_0}, \quad Y = \frac{y}{h}. \quad (3.13)$$

В этом случае выражение для функции тока примет вид

$$\bar{\psi} = Y - \frac{3}{4} \left( 2 - \frac{Q}{Vh} \right) \left( Y - \frac{Y^3}{3} \right).$$

Учитывая соотношения (3.14), (3.15), выражение для функции тока примет вид

$$\bar{\psi} = Y \left( 1 + \xi^2 \right) - \frac{3}{2} \left( \xi^2 - \lambda^2 \right) \left( Y - \frac{Y^3}{3} \right).$$

Имеем квадратичное относительно координаты  $\xi$  уравнение. Его можно разрешить относительно продольной координаты

$$\xi = \pm \sqrt{\frac{2(\bar{\psi}/Y - 1) + \lambda^2(Y^2 - 3)}{(Y^2 - 1)}}.$$

Функция тока изменяется в пределах  $0 < \bar{\psi} < 1 + \lambda^3$ . При этом, нижний предел соответствует оси  $x$ , а верхний — поверхности валка. Поперечная безразмерная координата  $Y$  изменяется в пределах  $0 < Y < 1$  (нижний предел соответствует оси  $x$ , а верхний — поверхности валка). Расчеты с помощью формулы для  $\xi$  выполняются в следующей последовательности. Задается значение функции  $\bar{\psi}$  из интервала  $0 < \bar{\psi} < 1 + \lambda^2$  (в процессе построения (рис. 3.5) конкретной линии тока заданное значение не изменяется). Далее, задавая значения координате  $Y$  из интервала  $0 < Y < 1$ , вычисляют с помощью формулы соответствующие значения  $\xi$ . Если расчетное значение  $\xi$  со стороны входа в зону течения превышает по абсолютной величине значение  $\xi_0$ , то это говорит о том, что расчетная точка линии тока находится за пределами зоны течения, и ее можно не учитывать. Представленная форма расчетного выражения и указанная последовательность расчета позволяет построить линии тока (рис. 3.4) даже при наличии циркуляции на входе.

Расчеты рис. 3.4 выполнены для условий:  $\rho = 1100 \text{ кг/м}^3$ ,  $m = 1$ ,  $H_0 = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ ,  $R = 0,6 \text{ м}$ ,  $\eta = 0,002 \text{ Па}\cdot\text{с}$ ,  $n = 10 \text{ мин}^{-1}$ ,  $V = 0,628 \text{ м/с}$ ,  $\lambda = 0,8$ , при этом  $\text{St} = 0,537$ ,  $\xi_0 = -1,81337$ ,  $\ell = 0,0314 \text{ м}$ . Тогда  $1 + \lambda^2 = 1,64$  и функция тока изменяется в пределах  $0 < \bar{\psi} < 1,64$ . Условие циркуляции (см. ниже)

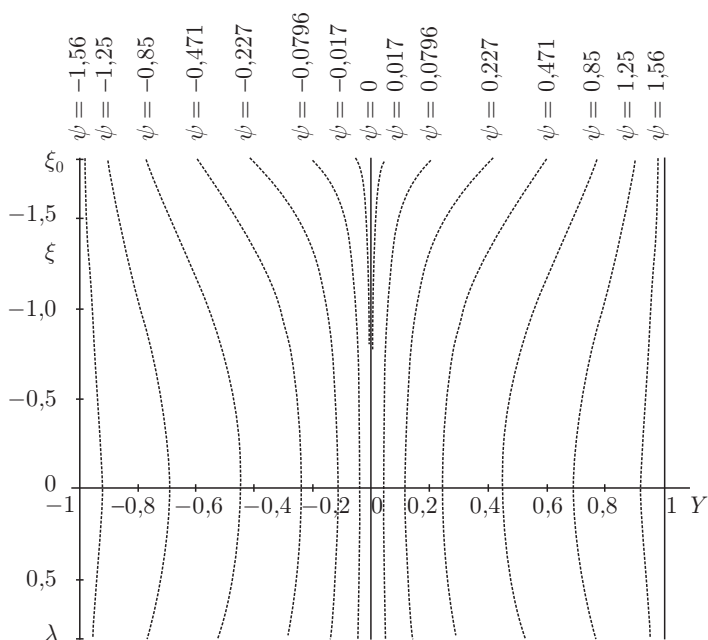


Рис. 3.4. Функции тока при отсутствии циркуляции

$\xi_0^2 = 3,288 < 3\lambda^2 + 2 = 3,921$  не выполняется. Прямые  $Y = \pm 1$  отвечают поверхностям валков.

Расчеты рис. 3.5 выполнены для условий:  $\rho = 1100 \text{ кг/м}^3$ ,  $m = 1$ ,  $H_0 = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ ,  $R = 0,6 \text{ м}$ ,  $\eta = 0,002 \text{ Па} \cdot \text{с}$ ,  $n = 10 \text{ мин}^{-1}$ ,  $V = 0,628 \text{ м/с}$ ,  $\lambda = 0,9$ , при этом  $\text{St} = 0,537$ ,  $\xi_0 = -2,66697$ ,  $\ell = 0,0462 \text{ м}$ . Тогда  $1 + \lambda^2 = 1,81$  и функция тока изменяется в пределах  $0 < \psi < 1,81$ . Условие циркуляции ( $\xi_0^2 = 7,113 > 3\lambda^2 + 2 = 4,430$ ) выполняется. В центре рисунка четко видна точка остановки течения (точка, в которой скорость равна нулю). Координаты точки остановки течения:  $Y = 0$ ,  $\xi_t = (3\lambda^2 + 2)^{1/2} = 2,105$ . Линии тока, лежащие выше этой точки, иллюстрируют циркуляцию жидкости на входе.

В любом поперечном сечении потока профиль осевой скорости параболический. Во входной зоне течения имеет место градиент противодавления ( $dp/dx > 0$ ) и профиль осевой скорости вогнут. В области прямотока профиль выпуклый. При определенных условиях организации течения возможно возникновение циркуляции жидкости во входной области. Циркуляция на входе интенсифицирует перемешивание жидкости (см. рис. 3.1, 3.5). Наличие циркуляции можно обнаружить по отрицательной ско-

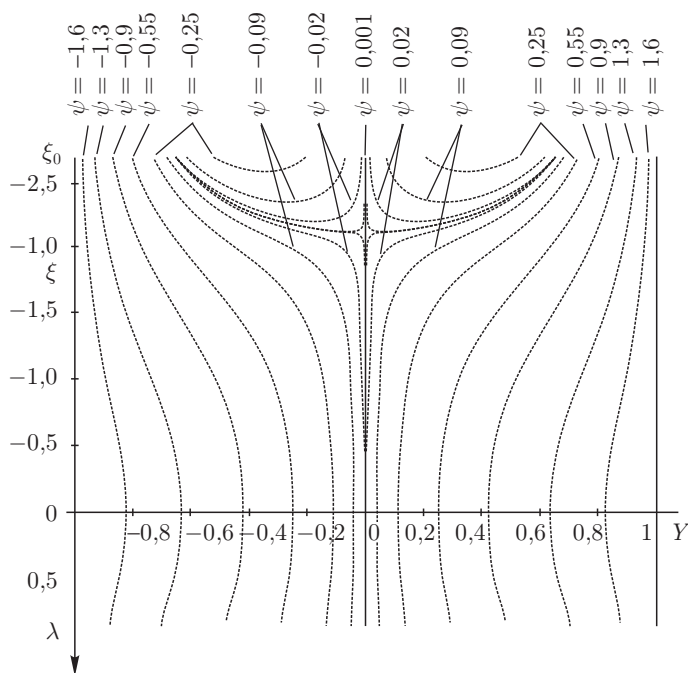


Рис. 3.5. Функции тока при циркуляции жидкости на входе

рости на оси потока. Предельное условие отсутствия циркуляции в зоне течения имеет вид:

$$y = 0, \quad x = x_0, \quad v_x = 0.$$

При этом, используя выражение для скорости, получим равенство

$$V - \frac{3}{4h(x_0)} [2Vh(x_0) - Q] = 0.$$

При выполнении этого равенства точка с нулевой скоростью находится в сечении начала течения. Для возникновения циркуляции во входной зоне течения точка нулевой скорости должна находиться внутри зоны течения (зоны противотока). При этом должно выполняться неравенство

$$Q < \frac{2}{3} V h(x_0).$$

Или в безразмерной форме

$$\xi_0^2 > 3\lambda^2 + 2.$$

При этом сама величина  $\xi_t^2 = 3\lambda^2 + 2$  характеризует безразмерную координату точки остановки течения  $\xi_t^2$ .

Для анализа полученного решения, введем безразмерные параметры и переменные:

$$\{\xi, \xi_0, \lambda\} = \frac{\{x, x_0, x_1\}}{\sqrt{2RH_0}}, \quad \text{St} = \frac{\rho g H_0^2}{\eta V}, \quad q = \frac{Q}{V H_0}, \quad \text{La} = \frac{p H_0^2}{\eta V \sqrt{2RH_0}}. \quad (3.14)$$

Критерий Стокса **St** является комбинацией критериев Рейнольдса и Фруда и характеризует соотношение сил тяжести и вязкости:

$$\text{Re} = \frac{V H_0 \rho}{\eta}, \quad \text{Fr} = \frac{V^2}{g H_0}, \quad \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} = \frac{\rho g H_0^2}{\eta V} = \text{St}.$$

Для решения уравнения (3.12) необходимо знать уравнение поверхности вала  $h(x)$ . Изменение высоты зазора по длине зоны течения описывается зависимостью, содержащей иррациональность (радикал):

$$h = R + H_0 - R \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}.$$

Иррациональность в уравнении границы создает существенные трудности при решении задачи. С учетом условия  $x \ll R$ , разложим последнее слагаемое правой части в ряд Маклорена в окрестности точки  $x = 0$ :

$$h = R + H_0 - R \left( 1 - \frac{x^2}{2R^2} - \frac{x^4}{2R^4} - \frac{x^6}{2R^6} + \dots \right).$$

Ограничиваясь первыми двумя членами разложения, можем записать

$$h = H_0 \left( 1 + \frac{x^2}{2RH_0} \right).$$

Переходя к переменной Гаскелла (3.14), получим

$$h = H_0 \left( 1 + \xi^2 \right). \quad (3.15)$$

Отметим высокую точность данного приближения: в пределах интересующей нас области ( $\pm 10$  мм перпендикулярно оси  $y$ ) отклонение от окружности не более 0,4 %, что вполне приемлемо для инженерных расчетов.



Выражение (3.12) с учетом (3.14), (3.15) примет вид:

$$\frac{d\text{La}}{d\xi} = \text{St} + \frac{6(1 + \xi^2) - 3q}{2(1 + \xi^2)^3}. \quad (3.16)$$

Разделим в уравнении (3.16) переменные и проинтегрируем:

$$\int d\text{La} = \int \text{St} d\xi + 3 \int \frac{d\xi}{(1 + \xi^2)^2} - \frac{3q}{2} \int \frac{d\xi}{(1 + \xi^2)^3} + C,$$

где  $C$  — постоянная.

Два интеграла в правой части равны:

$$\int \frac{d\xi}{(1 + \xi^2)^2} = \frac{\xi}{2(1 + \xi^2)} + \frac{1}{2} \arctg(\xi),$$

$$\int \frac{d\xi}{(1 + \xi^2)^3} = \frac{\xi}{4(1 + \xi^2)^2} + \frac{3\xi}{8(1 + \xi^2)} + \frac{3}{8} \arctg(\xi).$$

Распределение безразмерного давления описывается выражением

$$\begin{aligned} \text{La} = \text{St} \xi + 3 \left[ \frac{\xi}{2(1 + \xi^2)} + \frac{1}{2} \arctg(\xi) \right] - \\ - \frac{3q}{2} \left[ \frac{\xi}{4(1 + \xi^2)^2} + \frac{3\xi}{8(1 + \xi^2)} + \frac{3}{8} \arctg(\xi) \right] + C. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Выражение содержит два неизвестных параметра  $C$  и  $q$ . Кроме того, неизвестна координата входного сечения  $\xi_0$ . Координата выходного сечения  $\lambda$ , определяющая толщину наносимого слоя материала, тоже неизвестна.

Используем условия для давления (3.4) и (3.6). Причем последнее условие, с учетом выражения (3.8), имеет вид:

$$\frac{dp}{dx} - \rho g = 0.$$

В безразмерной форме условия имеют вид:

$$\xi = \lambda, \quad \text{La} = 0, \quad \frac{d\text{La}}{d\xi} - \text{St} = 0, \quad (3.18)$$

$$\xi = \xi_0, \quad \text{La} = 0. \quad (3.19)$$

Используем первое граничное условие в (3.18) для выражения (3.17):

$$0 = \text{St } \lambda + 3 \left( \frac{\lambda}{2(1+\lambda^2)} + \frac{1}{2} \arctg(\lambda) \right) - \\ - \frac{3q}{2} \left( \frac{\lambda}{4(1+\lambda^2)^2} + \frac{3\lambda}{8(1+\lambda^2)} + \frac{3}{8} \arctg(\lambda) \right) + C. \quad (3.20)$$

Второе условие в (3.18) и уравнение (3.16) приводит к равенству

$$q = 2(1+\lambda^2). \quad (3.21)$$

Используем условие (3.19) для выражения (3.17):

$$0 = \text{St } \xi_0 + 3 \left[ \frac{\xi_0}{2(1+\xi_0^2)} + \frac{1}{2} \arctg(\xi_0) \right] - \\ - \frac{3q}{2} \left[ \frac{\xi_0}{4(1+\xi_0^2)^2} + \frac{3\xi_0}{8(1+\xi_0^2)} + \frac{3}{8} \arctg(\xi_0) \right] + C. \quad (3.22)$$

Для четырех неизвестных  $(q, C, \lambda, \xi_0)$  имеем три уравнения (3.20), (3.21), (3.22). Следовательно, один из параметров необходимо задавать априорно. Преобразуем уравнения. Вычтем из выражения (3.20) выражение (3.22), тем самым исключим постоянную  $C$  и получим уравнение, связывающее входную координату начала течения  $(\xi_0)$  с выходной  $(\lambda)$ :

$$0 = \text{St } (\lambda - \xi_0) + \frac{3\lambda}{2(1+\lambda^2)} + \frac{3}{2} \arctg(\lambda) - \frac{3\xi_0}{2(1+\xi_0^2)} - \\ - \frac{3}{2} \arctg(\xi_0) - \frac{3q}{2} \left[ \frac{\lambda}{4(1+\lambda^2)^2} + \frac{3\lambda}{8(1+\lambda^2)} + \frac{3}{8} \arctg(\lambda) - \right. \\ \left. - \frac{\xi_0}{4(1+\xi_0^2)^2} - \frac{3\xi_0}{8(1+\xi_0^2)} - \frac{3}{8} \arctg(\xi_0) \right]. \quad (3.23)$$

Незамкнутость системы (необходимость априорного задания одного из параметров течения) является следствием недоопределенности исходной задачи. Под недоопределенностью понимается превышение числа неизвестных функций  $(v_x, v_y, p)$  числа уравнений (два — движения и неразрывности). Это известный

недостаток упрощенного (квазиплоского) подхода к анализу валкового течения.

**Последовательность расчета.** Задаем величину координаты выхода  $\lambda$ . Далее, с помощью уравнения (3.21) находим  $q$ . Подставив значения  $\lambda$  и  $q$  в уравнение (3.23), находим координату точки входа  $\xi_0$ . И, наконец, подставив  $\lambda$  и  $q$  в уравнение (3.20), находим постоянную  $C$ . Напомним, что для построения эпюры давления используется уравнение (3.17).

Оценка влияния гравитационных сил на процесс валкового течения ньютоновских жидкостей приведена на рис. 3.6 и 3.7. Для 50 % раствора глицерина при  $20^\circ\text{C}$   $\rho = 1100\text{ кг/м}^3$ ,  $\eta = 0,002\text{ Па}\cdot\text{с}$ ,  $n = 45\text{ мин}^{-1}$  и, соответственно,  $St = 0,119$ . Принимаем  $\lambda = 0,27$ .

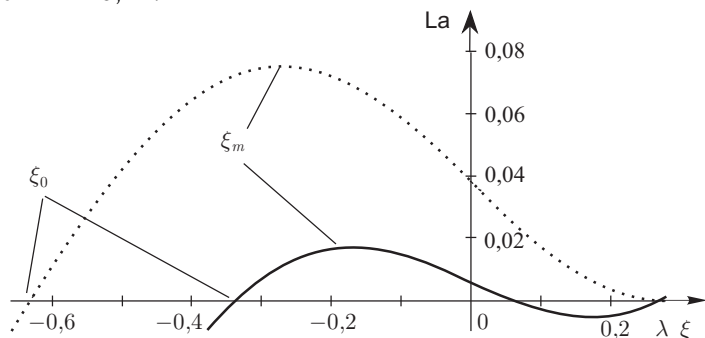


Рис. 3.6. Эпюры безразмерного давления при течении ньютоновской жидкости (50 % раствор глицерина) в валковом зазоре: с учетом сил тяжести (сплошная линия —  $St = 0,119$ ) и без учета (пунктирная линия —  $St = 0$ )

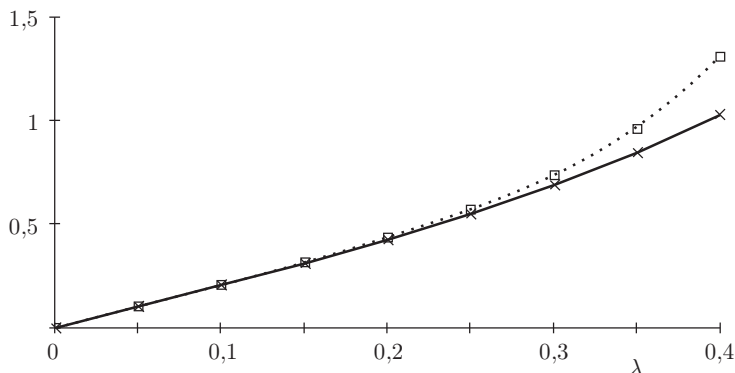


Рис. 3.7. Влияние гравитационных сил на валковое течение ньютоновской среды (50 % раствор глицерина): с учетом сил собственного веса (сплошная линия —  $St = 0,119$ ) и без учета (пунктирная линия —  $St = 0$ )

Из сравнения графических зависимостей рис. 3.6 и 3.7 видно, что силы тяжести существенно влияют на распределение давления и протяженность зоны течения. Расхождение увеличивается с ростом толщины наносимого на валки материала (увеличение  $\lambda$ ).

**О режимах течения вязкой жидкости.** Уравнение (3.16) с учетом выражения для расхода (3.21) примет вид

$$\frac{dLa}{d\xi} = St + \frac{3(\xi^2 - \lambda^2)}{(1 + \xi^2)^3}. \quad (3.24)$$

Запишем также выражение для второй производной от давления:

$$\frac{d^2La}{d\xi^2} = \frac{6\xi(1 + \xi^2)^2(1 - 2\xi^2 + 3\lambda^2)}{(1 + \xi^2)^6}. \quad (3.25)$$

По характеру распределения давления можно выделить два режима течения жидкости (рис. 3.8 иллюстрирует положение критических точек и диапазоны режимов на оси  $St$ ).

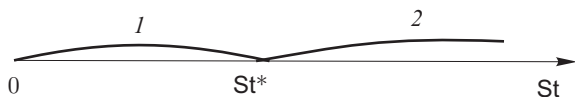


Рис. 3.8. Шкала  $St$  с указанием характерных областей течения: 1 — первый режим; 2 — второй режим

1. Первый режим — режим слабого влияния сил тяжести. Число Стокса находится в пределах  $0 < St < St^*$ . Граничное значение числа Стокса находится из условия  $\xi = 0$ ,  $dLa/d\xi|_{St=St^*} = 0$ . Согласно (3.24) имеем  $St^* = 3\lambda^3$ . В этом режиме на участке  $|\xi| < \lambda$  имеет место напорное течение ( $dLa/d\xi < 0$ ), функция давления имеет два симметрично расположенных относительно сечения  $\xi = 0$  экстремума. Причем, в окрестности  $\lambda$  — минимум, а в окрестности  $-\lambda$  — максимум. В окрестности  $\lambda$  имеет место разрежение ( $La < 0$ ) (рис. 3.6).

Согласно (3.25) точка перегиба имеет координату  $\xi = 0$ . Кроме того, уравнение (3.25) предполагает существование второй точки перегиба кривой давления в сечении  $\xi = -\sqrt{0,5(1 + 3\lambda^2)}$ . Координаты экстремумов  $\xi_m$  можно найти, положив в уравнении (3.24)  $\xi = \xi_m$ ,  $dLa/d\xi = 0$ . При этом получим кубическое

уравнение для  $\xi_m^2$ :

$$\text{St} + \frac{3(\xi_m^2 - \lambda^2)}{(1 + \xi_m^2)^3} = 0.$$

Его решение имеет вид

$$\xi_m = \pm \sqrt{\frac{2}{\sqrt{\text{St}}} \text{sh} \left\{ \frac{1}{3} \text{arcsch} \left[ \frac{3(1 + \lambda^2)}{2} \sqrt{\text{St}} \right] \right\}} - 1.$$

В частном (безгравитационном) случае имеет место предел  $\lim_{\text{St} \rightarrow 0} |\xi_m| = \lambda$ .

2. Второй режим характеризуется существенным влиянием сил тяжести. Число Стокса находится на интервале  $\text{St}^* < \text{St} < \infty$ , где  $\text{St}^* = 3\lambda^3$ . Эпюра давления — монотонно возрастающая функция ( $d\text{La}/d\xi > 0$ ). При этом может выполняться только одно граничное условие для давления — либо в начале зоны течения, либо — в конце. Например, если на выходе давление атмосферное ( $\text{La}(\xi = \lambda) = 0$ ), то для реализации второго режима на входе необходимо создать вакуумметрическое давление ( $\text{La}(\xi = \xi_0) < 0$ ). И наоборот, если на входе давление атмосферное ( $\text{La}(\xi = \xi_0) = 0$ ), то на выходе необходимо создать избыточное давление или противодавление ( $\text{La}(\xi = \lambda) > 0$ ). Последний случай имеет место в валковом экструдере, в котором противодавление создает формирующее устройство.

Свойства обнаруженных режимов сведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

**Режимы течения вязкой жидкости**

Режим	Границы		Свойства
	Нижняя	Верхняя	
Легкий	$\text{St} = 0$	$\text{St} = \text{St}^*,$ $\text{St}^* = 3\lambda^2$	На интервале $\xi_0 \leq \xi < -\lambda$ функция давления монотонно возрастает; на интервале $-\lambda < \xi \leq \lambda$ функция имеет два экстремума, расположенных симметрично относительно сечения минимального зазора ( $\xi = 0$ ). Минимум в окрестности $\xi = \lambda$ предполагает разрежение ( $\text{La} < 0$ ). В минимальном зазоре $\xi = 0$ , $d\text{La}/d\xi < 0$ .
Тяжелый	$\text{St} = \text{St}^*$	$\infty$	Монотонно возрастающая функция. В минимальном зазоре $\xi = 0$ , $d\text{La}/d\xi > 0$ . Для реализации режима необходимо вакуумирование на входе ( $\text{La}(\xi = \xi_0) < 0$ ).

Наконец, при значительном влиянии сил тяжести градиент давления на всем участке течения положителен (рис. 4.12) и граничное условие (3.3) для сечения входа  $\xi = \xi$ ,  $\mathbf{La} = 0$  не выполняется. Во всей области течения давление вакуумметрическое. Практически реализовать этот режим можно либо создавая пониженное давление над поверхностью жидкости на входе (при  $\xi = \xi$ ), либо создавая избыточное давление на выходе — в сечении  $\xi = \lambda$ . Проявляется насосный эффект валков, обусловленный силами вязкого трения среды. Он положен в основу работы, например, валкового экструдера, а также имеет место в процессе нанесения покрытия на твердую металлическую ленту.

## 3.2. Валковое течение среды Оствальда де Вилля

**3.2.1. Постановка задачи.** В декартовых координатах плоское стационарное движение несжимаемой неньютоновской жидкости описывается следующей системой:

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = \quad (3.26)$$

уравнения движения (переноса количества движения)

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= g_x + \frac{1}{\rho} \left( -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau^{xy}}{\partial y} \right), \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= g_y + \frac{1}{\rho} \left( -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau^{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau^{yy}}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Для модели Оствальда де Вилля компоненты напряжений определяются следующим образом:

$$\tau_{ij} = \eta A^{m-} \dot{e}_{ij} = B \dot{e}_{ij},$$

где  $\eta$ ,  $m$  — реологические константы,  $\dot{e}_{ij}$  — компоненты тензора скоростей деформаций.

Составляющие дивергента тензора напряжений вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2B \frac{\partial v_x}{\partial x} & \tau_{xy} &= B \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), & \tau_{yy} &= 2B \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ B &= \eta A^{m-}, & A &= \left[ 2 \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

где  $A$  — интенсивность скоростей деформаций.

Подставим компоненты напряжений в уравнения движения (с учетом  $g_y = 0$ ,  $g_x = g$ )

$$\begin{aligned} \rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \\ &= \rho g + \frac{\partial p}{\partial x} + \eta A^{m-} \left[ 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right], \\ \rho v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= \\ &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta A^{m-} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \right]. \end{aligned}$$

Выполним методом малого параметра оценку членов уравнений движения. Характерными размерами зоны течения (масштабами) являются: в направлении оси  $x$  — продольный размер  $\ell$ , в направлении  $y$  — минимальный зазор  $H$ . В рассматриваемом случае ( $H \approx 10^{-3}$  м,  $\ell \approx 0,3$  м) имеет место неравенство  $\varepsilon \ll 1$ .

Введем параметры и безразмерные переменные

$$\varepsilon = H / \ell, \quad V_x = v_x / V, \quad V_y = v_y / V, \quad X = x / \ell, \quad Y = y / H.$$

При этом уравнения движения примут вид

$$\begin{aligned} \rho V \left( \frac{V_x}{\ell} \frac{\partial V_x}{\partial X} + \frac{V_y}{H} \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right) &= \rho g + \frac{\partial p}{\partial X} + \\ &+ \eta A^{m-} V \left[ \frac{2}{\ell^2} \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial V_x}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{1}{H} \frac{\partial V_x}{\partial Y} + \frac{\partial V_y}{\ell \partial X} \right) \right], \\ \rho V \left( \frac{V_x}{\ell} \frac{\partial V_y}{\partial X} + \frac{V_y}{H} \frac{\partial V_y}{\partial Y} \right) &= -\frac{1}{H} \frac{\partial p}{\partial Y} + \\ &+ \eta A^{m-} V \left[ \frac{1}{\ell} \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{1}{H} \frac{\partial V_x}{\partial Y} + \frac{\partial V_y}{\ell \partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial V_y}{\partial Y} \right) \right]. \end{aligned}$$

Соответственно выражение для интенсивности скоростей деформаций

$$A = \frac{V}{H_0} \left[ 2\varepsilon^2 \left( \frac{\partial V_x}{\partial X} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial V_y}{\partial Y} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_x}{\partial Y} + \frac{\partial V_y}{\partial X} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Пренебрегая в полученном выражении величинами порядка  $\varepsilon$  и учитывая уравнение неразрывности  $\frac{\partial V_y}{\partial Y} = -\varepsilon \frac{\partial V_x}{\partial X}$ , можем записать

$$A = \frac{V}{H_0} \left\| \frac{\partial V}{\partial X} \right\|.$$

Подставим выражение для  $A$  в уравнения движения. Разделим все слагаемые уравнений движения на величину  $\eta V (V/H)^{m-} / H_0$ . Для поперечной скорости в конвективных слагаемых уравнений используем ее представление через осевую

скорость из уравнения неразрывности. Получим безразмерную форму уравнений движения

$$\begin{aligned} \frac{\rho V H}{\eta (V/H)^m} \varepsilon \left( V_x \frac{\partial V^x}{\partial X} - \frac{\partial V_x}{\partial Y} \int_0^Y \frac{\partial V_x}{\partial X} dY \right) = \\ = \frac{\rho g H}{\eta V (V/H)^m} - \frac{H}{\ell \eta V (V/H)^m} \frac{\partial p}{\partial X} + \\ + \left| \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right|^{m-1} \left[ 2\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial V_x}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial V_x}{\partial Y} + \varepsilon \frac{\partial V^y}{\partial X} \right) \right], \\ \frac{\rho V H}{\eta (V/H)^m} \varepsilon \left( V_x \frac{\partial V^y}{\partial X} - \frac{\partial V_y}{\partial Y} \int_0^Y \frac{\partial V_x}{\partial X} dY \right) = - \frac{1}{\eta V (V/H)^m} \frac{\partial p}{\partial Y} + \\ + \left| \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right|^{m-1} \left[ \varepsilon \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial V_x}{\partial Y} + \varepsilon \frac{\partial V^y}{\partial X} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial V_y}{\partial Y} \right) \right]. \end{aligned}$$

Безразмерный комплекс  $\mathbf{Re} = \varepsilon \rho V H / \left[ \eta (V/H)^m \right]$  является числом Рейнольдса для аномально вязкой жидкости. В стоковом приближении полагаем  $\mathbf{Re} \ll 1$ . Это одно из основных соотношений, определяющих область применения математической модели. Оценка сил инерции представлена в разделе 3.1.1.

За исключением давления игнорируем члены, содержащие множитель  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \frac{\rho g H}{\eta V (V/H)^m} - \frac{H}{\ell \eta V (V/H)^m} \frac{\partial p}{\partial X} + \left| \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right|^{m-1} \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right) = 0, \\ - \frac{1}{\eta V (V/H)^m} \frac{\partial p}{\partial Y} + \left| \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right|^{m-1} \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial V_y}{\partial Y} \right) = 0. \end{aligned}$$

Безразмерное давление обозначим так:

$$P = \frac{H p}{\ell \eta V (V/H)^m}.$$

Уравнения движения в этом случае примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\rho g H}{\eta V (V/H)^m} - \frac{\partial P}{\partial X} + \left| \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right|^{m-1} \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right) = 0, \\ - \frac{\partial P}{\partial Y} + \varepsilon \left| \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right|^{m-1} \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial V_y}{\partial Y} \right) = 0. \end{aligned}$$

Применяя уравнение неразрывности  $\partial V_y / \partial Y = -\varepsilon \partial V_x / \partial X$  для второго уравнения, можем записать

$$\begin{aligned} \frac{\rho g H}{\eta V (V/H)^m} - \frac{\partial P}{\partial X} + \left| \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right|^{m-1} \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right) = 0, \\ - \frac{\partial P}{\partial Y} - \varepsilon \left| \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right|^{m-1} \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial V_x}{\partial X} \right) = 0. \end{aligned}$$



Согласно второму уравнению изменение давления в поперечном направлении незначительно, поскольку имеет порядок  $\varepsilon$  и им можно пренебречь. Для анализа течения достаточно использовать первое уравнение, учитывающее силы тяжести, давление и силы вязкого трения.

В разделе 3.1.2 получен интеграл уравнения неразрывности (3.3). С учетом принятых допущений, движение жидкости описывается уравнениями

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho g, \quad Q = 2 \int_0^h v_x dy, \quad \tau_{xy} = \eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^m. \quad (3.28)$$

Уравнения (3.28) дополним следующими граничными условиями:

$$\text{входное сечение } x = x, \quad p = 0, \quad (3.29)$$

$$\text{условие прилипания } y = h, \quad v_x = V, \quad (3.30)$$

выходное сечение

$$x = x, \quad p = 0, \quad v_x = V, \quad \tau_{xy}(y = h) = 0, \quad (3.31)$$

условие симметрии

$$x < x < x, \quad y = 0, \quad \partial v_x / \partial y = 0, \quad \tau_{xy} = 0. \quad (3.32)$$

**3.2.2. Решение задачи.** Интегрируя первое уравнение из (3.28) с учетом условия (3.32), имеем

$$\tau_{xy} = \left( \frac{dp}{dx} - \rho g \right) y. \quad (3.33)$$

Рассматривая совместно (3.33) и уравнение состояния из (3.28), можем записать

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \left( \frac{1}{\eta} \left| \frac{dp}{dx} - \rho g \right| \right)^{1/m} \text{sign} \left( \frac{dp}{dx} - \rho g \right) y^{1/m}. \quad (3.34)$$

Интегрируем (3.34) с учетом условия прилипания (3.30), найдем скорость:

$$v_x = \frac{m}{1+m} \left( y^{1/m+1} - h^{1/m+1} \right) \left( \frac{1}{\eta} \left| \frac{dp}{dx} - \rho g \right| \right)^{1/m} \times \\ \times \text{sign} \left( \frac{dp}{dx} - \rho g \right) + V. \quad (3.35)$$

Найдем расход жидкости, подставив (3.35) во второе уравнение (3.28):

$$Q = - \frac{2^m h^{1/m+2}}{(1+2m)} \left( \frac{1}{\eta} \left| \frac{dp}{dx} - \rho g \right| \right)^{1/m} \text{sign} \left( \frac{dp}{dx} - \rho g \right) + 2Vh. \quad (3.36)$$

Выражение (3.36) позволяет из выражения (3.35) исключить давление:

$$v_x = \frac{(1+2m)(2Vh-Q)}{2(1+m)h^{1/m+1}} \left( y^{1/m+1} - h^{1/m+1} \right) + V. \quad (3.37)$$

Разрешим уравнение (3.36) относительно давления:

$$\frac{dp}{dx} = \rho g + \eta \left( \frac{1+2m}{2m} \right)^m \frac{|2Vh-Q|}{h^{1+m}} \operatorname{sign}(2Vh-G). \quad (3.38)$$

Используя условие остановки течения (3.31) и выражение для касательных напряжений (3.33), найдем уравнение связи расхода с координатой выхода:

$$Q = 2Vh(x). \quad (3.39)$$

Решение уравнения (3.38) не выражается через элементарные функции и возможно исключительно численными методами, например методом Рунге–Кутты или механических квадратур.

**3.2.3. Анализ решения.** Введем безразмерные переменные и параметры

$$\{\xi, \eta, \lambda\} = \frac{\{x, y, z\}}{\sqrt{2RH}}, \quad \operatorname{St}_{os} = \frac{\rho g H_0^2}{\eta (2VH)^m}, \quad q = \frac{Q}{2VH},$$

$$\operatorname{La}_{os} = \frac{\rho H^{1+2m}}{\eta \sqrt{2RH} (2VH)^m}.$$

При этом выражение (3.38) с учетом (3.39) примет вид:

$$\frac{d\operatorname{La}}{d\xi} = \operatorname{St} + \left( \frac{1+2m}{2m} \right)^m \frac{|\xi - \lambda|}{(1+\xi)^{1+2m}} \operatorname{sign}(\xi - \lambda). \quad (3.40)$$

Для численного решения уравнение (3.40) необходимо дополнить граничными условиями: входное сечение  $\xi = \xi_0$ ,  $\operatorname{La} = 0$ , выходное сечение  $\xi = \lambda$ ,  $\operatorname{La} = 0$ .

**О режимах течения жидкости Оствальда де Вилля.** Уравнение (3.40) предполагает два режима течения жидкости.

1. Первый режим — режим слабого влияния сил тяжести. Число Стокса находится в пределах  $0 < \operatorname{St}_{os} < \operatorname{St}_{os}^*$ . Граничное значение числа Стокса находится из условия  $\xi = 0$ ,  $d\operatorname{La}/d\xi|_{\xi=0} = 0$ . Согласно (3.40) имеем

$$\operatorname{St}_{os}^* = \left( \frac{1+2m}{2m} \right)^m \lambda^m.$$

В этом режиме на участке  $|\xi| < \lambda$  имеет место напорное течение ( $d\operatorname{La}/d\xi < 0$ ), а функция давления имеет два, симмет-

рично расположенных относительно сечения  $\xi = 0$ , экстремума. Причем, в окрестности  $\lambda$  — минимум, а в окрестности  $-\lambda$  — максимум. В окрестности  $\lambda$  имеет место разряжение ( $\text{La} < 0$ ). Точка перегиба имеет координату  $\xi = 0$ . Координаты экстремумов  $\xi_m$  можно найти, положив в уравнении (3.40)  $\xi = \xi_m$ ,  $d\text{La} / d\xi = 0$ . При этом приходим к трансцендентному уравнению

$$\text{St}_{\text{os}} + \left( \frac{+2m}{2m} \right)^m \frac{|\xi_m - \lambda|}{(1 + \xi_m)^{1+2m}} \text{sign}(\xi_m - \lambda) = 0.$$

В безгравитационном случае имеет место предел  $\lim_{\text{St}_{\text{os}}} |\xi_m| = \lambda$ .

2. Второй режим характеризуется существенным влиянием сил тяжести. Число Стокса находится на интервале  $\text{St}_{\text{os}}^* < \text{St}_{\text{os}} < \infty$ , где  $\text{St}^* = \left( \frac{1+2m}{2m} \right)^m \lambda^m$ . Эпюра давления — монотонно возрастающая функция ( $d\text{La} / d\xi > 0$ ). При этом может выполняться только одно граничное условие для давления — либо в начале зоны течения, либо — в конце. Например, если на выходе давление атмосферное ( $\text{La}_{\text{os}}(\xi = \lambda) = 0$ ), то для реализации второго режима на входе необходимо создать вакуумметрическое давление ( $\text{La}_{\text{os}}(\xi = \xi_*) < 0$ ). И наоборот, если на входе давление атмосферное ( $\text{La}_{\text{os}}(\xi = \xi_*) = 0$ ), то на выходе необходимо создать противодействие ( $\text{La}_{\text{os}}(\xi = \lambda) > 0$ ). Последний случай имеет место в валковом экструдере, в котором противодействие обусловлено гидравлическим сопротивлением формующего устройства. Свойства обнаруженных режимов сведены в табл. 3.2. Особенности режимов подобны ньютоновским (см. табл. 3.1).

Найдем функцию тока рассматриваемого течения по формуле (см. раздел 3.1.2)

$$\int_0^\psi d\psi = \int_0^y v_x dy.$$

С учетом выражения для скорости (3.37) получим выражение для функции тока:

$$\psi = \frac{(1+2m)(2Vh-Q)}{2(1+m)h^{1/m+1}} \left( \frac{1}{1+2} y^{1/m+2} - h^{1/m+1} y \right) + Vy.$$

С учетом соотношений  $Q = 2VH(1+\lambda)$ , (3.13), (3.15), выражение для безразмерной функции тока примет вид:

$$\bar{\psi} = \frac{(1+2m)(\xi - \lambda)}{(1+m)} \left( \frac{1}{1+2} Y^{1/m+2} - Y \right) + Y(1 + \xi).$$

Таблица 3.2

## Режимы течения жидкости Оствальда де Вилля

Режим	Границы		Свойства
	Нижняя	Верхняя	
Легкий	$St_{os} = 0$	$St_{os} < St^*$ , $St_{os} = m$ $= \left( \frac{+2m}{2m} \right) \lambda^m$	На интервале $\xi \leq \xi < -\lambda$ функция давления монотонно возрастает; на интервале $-\lambda < \xi \leq \lambda$ функция имеет два экстремума, расположенных симметрично относительно сечения минимального зазора ( $\xi = 0$ ). Минимум в окрестности $\xi = \lambda$ предполагает разрежение ( $La < 0$ ). В минимальном зазоре $\xi = 0$ , $dLa/d\xi < 0$ .
Тяжелый	0 $St_{os} < St^*$	$\infty$	Монотонно возрастающая функция. В минимальном зазоре $\xi = 0$ , $dLa/d\xi > 0$ . Для реализации режима необходимо вакуумирование на входе ( $La(\xi = \xi) < 0$ ).

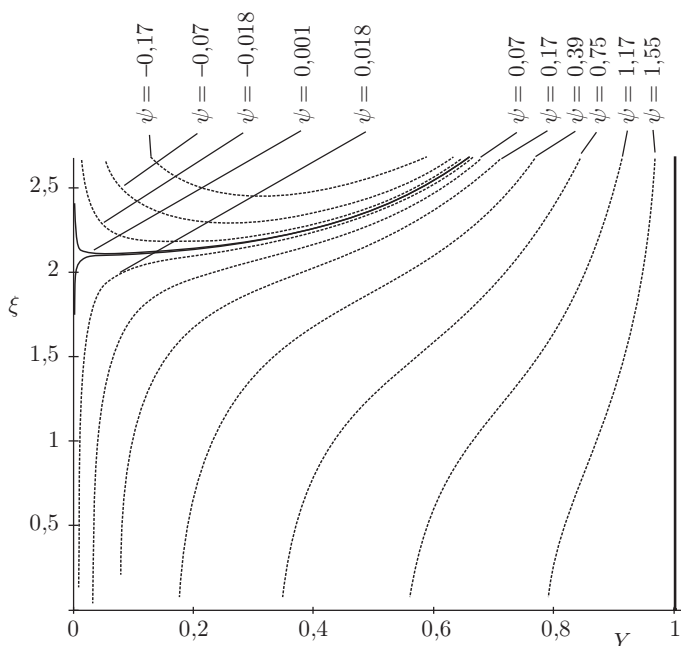
Полученное уравнение можно разрешить относительно продольной координаты

$$\xi = \pm \sqrt{\frac{(\bar{\psi}/Y - 1)(1+m) + \lambda(mY^{1/m+1} - 1 - 2m)}{m(Y^{1/m+1} - 1)}}.$$

Пределы изменения функций  $\bar{\psi}$  и  $Y$  идентичны ньютоновскому случаю. Методика расчета по полученной формуле и построение функции тока, включая случай циркуляции жидкости на входе, представлена выше в разделе 3.1.3.

Влияние степенного коэффициента  $m$  на картину течения в рабочем зазоре иллюстрируется рисунками 3.9–3.11. Расчеты выполнены для условий:  $\rho = 1100 \text{ кг/м}^3$ ,  $H = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ,  $R = 0,6 \text{ м}$ ,  $\eta = 0,002 \text{ Па} \cdot \text{с}$ ,  $n = 10 \text{ мин}^{-1}$ ,  $V = 0,628 \text{ м/с}$ ,  $\lambda = 0,9$ . При этом функция тока изменяется в пределах  $0 < \bar{\psi} < 1 + \lambda = 1,81$ . Прямая  $Y = 1$  — поверхность вала.

Расчеты рис. 3.9 выполнены для условий:  $m = 1$ ,  $St = 0,268$ ,  $\xi = -2,667$ ,  $\ell = 0,0462 \text{ м}$ . Условие циркуляции (см. ниже)  $\xi_0 = 7,113 > [(1+2m)\lambda + 1 + m]/m = 4,430$  выполняется. В центре рисунка четко видна точка остановки течения (точка, в которой скорость жидкости равна нулю). Линии тока, лежащие выше этой точки, показывают существование циркуляции жидкости на входе. Координата точки остановки течения  $\xi_t = 2,103$ . Расчеты рис. 3.10 выполнены для условий:

Рис. 3.9. Функции тока при  $m = 1$ 

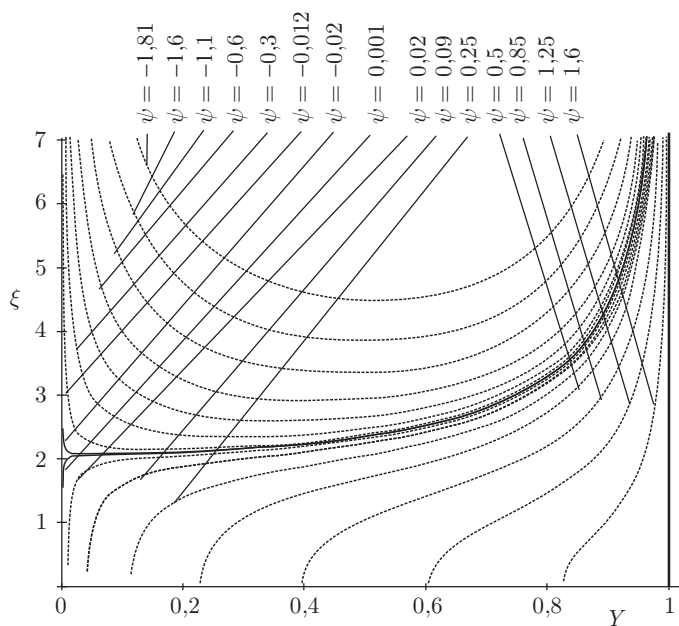
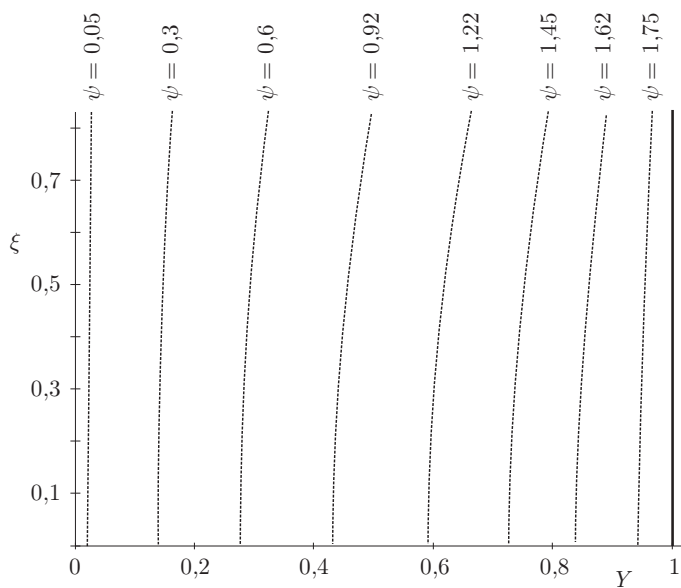
$m = 1,1$ ,  $St = 0,114$ ,  $\xi_0 = -7,006$ ,  $\ell = 0,1213$  м. Условие циркуляции  $\xi_0^2 = 49,084 > [(1 + 2m)\lambda^2 + 1 + m]/m = 4,265$  выполняется. Координата точки остановки течения  $\xi_t = 2,063$ . Расчеты рис. 3.11 выполнены для условий:  $m = 0,9$ ,  $St = 0,629$ ,  $\xi_0 = -0,827$ ,  $\ell = 0,0143$  м. Условие циркуляции  $\xi_0^2 = 0,68 < [(1 + 2m)\lambda^2 + 1 + m]/m = 4,631$  не выполняется. Координата точки остановки течения  $\xi_t = 2,152$  находится вне зоны течения.

Сопоставляя рис. 3.10 и 3.9, можно отметить, что дилатантные свойства жидкости ( $m = 1,1$ ) смещают зону интенсивных сдвиговых деформаций к поверхности валка, поэтому у поверхности валка функции тока расположены плотно. И наоборот, псевдопластические свойства жидкости (рис. 3.11,  $m = 0,9$ ) способствуют выравниванию поля скоростей и снижают градиент скорости сдвига у стенки.

Циркуляция жидкости на входе отсутствует, если точка с характеристиками  $y = 0$ ,  $v_x = 0$  находится вне зоны течения или совпадает с точкой  $x = x_0$ .

В последнем случае имеем условие

$$-\frac{(1 + 2m)(2Vh(x_0) - Q)}{2(1 + m)h(x_0)} + V = 0.$$

Рис. 3.10. Функции тока при  $m = 1,1$ Рис. 3.11. Функции тока при  $m = 0,9$

В случае циркуляции жидкости на входе зоны течения должно выполняться неравенство

$$-\frac{(1+2m)(2Vh(x_0)-Q)}{2(1+m)h(x_0)} + V < 0.$$

Или в безразмерной форме

$$\xi_0^2 > \xi_t^2, \quad \xi_t^2 = \left[ (1+2m)\lambda^2 + 1 + m \right] / m.$$

Величина  $\xi_t$  ( $\xi_t < 0$ ) характеризует безразмерную координату точки остановки течения (см. табл. 3.3).

Таблица 3.3

**Условия возникновения циркуляции при течении жидкостей  
Оствальда де Виле и ньютоновской**

Характер течения	Условие для жидкости	
	Оствальда де Виле	Ньютоновская
Без циркуляции	$\xi_0^2 > \xi_t^2,$ $\xi_t^2 = [(1+2m)\lambda^2 + 1 + m] / m$	$\xi_0^2 > \xi_t^2,$ $\xi_t^2 = 3\lambda^2 + 2$
С циркуляцией на входе	$\xi_0^2 < \xi_t^2$	$\xi_0^2 < \xi_t^2$

При этом точка с нулевой осевой скоростью ( $v_x(x, 0) = 0$ ) находится внутри зоны противотока (в зоне противотока выполняется неравенство  $dp/dx > 0$ ).

Найдем энергосиловые (интегральные) характеристики движения аномальной жидкости. Сила трения, действующая со стороны жидкости на поверхность вала единичной длины, с учетом соотношений (3.33), (3.34) определяется интегралом

$$\begin{aligned} F &= \int_{x_0}^{x_1} \tau_{xy}|_{y=h} dx = \eta \int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \Big|_{y=h} dx = \\ &= \eta \int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{dp}{dx} - \rho g \right) \Big|_{y=h} h dx. \end{aligned}$$

Выполнив частичное интегрирование, можем записать

$$F = -\eta H_0 \left\{ \frac{2}{\sqrt{2RH_0}} \int_{x_0}^{x_1} px dx + \rho g \left[ x_1 - x_0 + \frac{(x_1^3 - x_0^3)}{6RH_0} \right] \right\}.$$

Интеграл не выражается через элементарные функции, поэтому необходимо использовать методы механических квадратур.

Распорное усилие, действующее на поверхность валка единичной длины, определяется интегралом

$$W = \int_x^x \tau_{yy}|_{y=h} dx = \eta \int_{x_0}^x \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right|^m \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{y=h} dx. \quad (3.41)$$

Учитывались соотношения, записанные после уравнения (3.25), а также уравнение неразрывности в дифференциальной форме (3.24). С учетом соотношений (3.34)–(3.37) запишем выражения для подынтегральных функций:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=h} = \frac{(1+2m)(2Vh-Q)}{2mh}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} \Big|_{y=h} = -\frac{(1+2m)(2Vh-Q)}{2Rm} \frac{1}{h^2} x. \quad (3.42)$$

После подстановки выражений (3.42) в интеграл (3.41) получим

$$W = \frac{\eta}{R} \left( \frac{+2m}{2m} \right)^m \int \frac{|2Vh-Q|^m \operatorname{sign}(2Vh-G)}{h^m} x dx.$$

Интеграл не выражается через элементарные функции, поэтому необходимо привлечь методы механических квадратур.

### 3.3. Нестационарное валковое течение тяжелой вязкой жидкости

Как было показано выше (раздел. 3.1.2), силы инерции незначительны, и их в условиях стационарного течения можно не учитывать. Проанализируем влияние сил инерции на нестационарные режимы течения ньютоновской жидкости.

При неравномерной подаче жидкости в валковый зазор будет изменяться во времени координата начала зоны течения. Следует ожидать изменения во времени координаты окончания течения, которая, в частности, определяет толщину слоя жидкости на поверхности валка, что приведет к существенному изменению качественных показателей технологического процесса, например связанного с сушкой или нанесением покрытия. Кроме того, приложением рассматриваемой задачи может быть автоматическое управление технологическим процессом. Насколько известно автору, в научной литературе отсутствуют работы, учитывающие влияние сил инерции и тяжести на нестационарное течение в валковом зазоре. В настоящей работе предпринята попытка изучить влияние сил инерции на нестационарные режимы течения тяжелой вязкой жидкости.



Уравнения Навье–Стокса, описывающие плоское нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости, с учетом сил инерции и сил тяжести (течение сверху — вниз) имеют вид:

$$\begin{cases} \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \rho g - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right); \\ \rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right). \end{cases} \quad (3.43)$$

Уравнение неразрывности потока

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (3.44)$$

Выполним оценку членов уравнений, для чего предварительно перейдем к безразмерным параметрам и переменным:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{Vt}{\ell}, \quad \{\xi, \xi_0, \lambda, \varepsilon\} = \frac{\{x, x_0, x_1, H_0\}}{\sqrt{2RH_0}}, \\ Y &= \frac{y}{H_0}, \quad \text{St} = \frac{\rho g H_0^2}{\eta V}, \quad L = \frac{p H_0^2}{\sqrt{2RH_0} \eta V}, \\ V_x &= \frac{v_x}{V}, \quad V_y = \frac{v_y}{V}, \quad \varepsilon = \frac{H_0}{\sqrt{2RH_0}}, \quad \text{Re} = \frac{H_0 V \rho}{\eta}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Степень «вытянутости» зоны течения характеризует параметр  $\varepsilon$  ( $\varepsilon \ll 1$ ). В безразмерной форме уравнения (3.43), (3.44) имеют вид (величинами порядка  $\varepsilon^2$  пренебрегаем)

$$\begin{cases} \text{Re} \left( \frac{\partial V_x}{\partial \tau} + \varepsilon V_x \frac{\partial V_x}{\partial \xi} \right) + \text{Re} V_y \frac{\partial V_x}{\partial Y} = \text{St} - \frac{\partial L}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial Y^2}, \\ \varepsilon \text{Re} \left( \frac{\partial V_y}{\partial \tau} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial \xi} - V_y \frac{\partial V_x}{\partial \xi} \right) = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial Y} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial V_x}{\partial \xi} \right), \\ \frac{\partial V_y}{\partial Y} = -\varepsilon \frac{\partial V_x}{\partial \xi}. \end{cases}$$

Рассматриваем случай, когда величина зазора ( $H_0$ ) не изменяется во времени. Согласно второму уравнению изменение давления  $L$  по высоте зазора (в направлении  $y$ ) незначительно (порядка  $\varepsilon^2$ ) и им можно пренебречь. Остается только первое уравнение движения.

Таким образом, проекция уравнения движения на ось  $Y$  принимает вид  $\partial L / \partial Y = 0$ , т. е.  $\partial p / \partial y = 0$ . При этом, очевидно, что  $L = L(\xi)$ .

В задачу настоящего исследования входит оценка влияния сил инерции на динамические режимы валкового течения.

Нестационарное течение описывается системой уравнений

$$\varepsilon \frac{\partial V_x}{\partial \xi} + \frac{\partial V_y}{\partial Y} = 0, \quad (3.46)$$

$$\text{Re} \frac{\partial V_x}{\partial \tau} + \varepsilon \text{Re} V_x \frac{\partial V_x}{\partial \xi} + \text{Re} V_y \frac{\partial V_x}{\partial Y} = \text{St} - \frac{dL}{d\xi} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial Y^2}. \quad (3.47)$$

Начальные и граничные условия задачи

$$\tau = 0: \quad \xi_0(\tau) = \xi_{00}, \quad \lambda(\tau) = \lambda_0, \quad V_x = V_{x0}(\xi, Y), \quad (3.48)$$

$$V_y = V_{y0}(\xi, Y), \quad L = L_0(\xi),$$

$$\tau > 0: \quad \xi = \xi_0(t), \quad L = 0, \quad (3.49)$$

$$\xi = \lambda(t), \quad L = 0, \quad \left. \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right|_{Y=1+\lambda^2} = 0, \quad (3.50)$$

$$Y = 0, \quad \frac{\partial V_x}{\partial Y} = 0, \quad V_y = 0, \quad (3.51)$$

$$Y = \pm(1 + \xi^2), \quad V_x = 1, \quad V_y = 2\varepsilon\xi. \quad (3.52)$$

Согласно условиям (3.49), (3.50) давление на входе и выходе принято равным нулю. Второе условие в (3.50) указывает на прекращение сдвигового течения ( $\tau_{xy} = \eta \partial v_x / \partial y = 0$ ). Условия (3.51) — условия симметрии, (3.52) — условия прилипания жидкости к поверхности валков. Используется параболическая аппроксимация поверхностей валков  $h = \pm H_0(1 + \xi^2)$ .

Решение задачи (3.46)–(3.52) ищем в виде суммы стационарной и нестационарной составляющих течения:

$$\begin{aligned} V_x &= V_{x0}(\xi, Y) + V_{x1}(\xi, Y, \tau), \\ V_y &= V_{y0}(\xi, Y) + V_{y1}(\xi, Y, \tau), \\ L &= L_0(\xi) + L_1(\xi, \tau), \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1(\tau), \quad \xi_0 = \xi_{00} + \xi_{01}(\tau), \quad q = q_0 + q_1(\tau),$$

$$|v_0| \gg |v_1|, \quad |L_0| \gg |L_1|, \quad |\xi_{00}| \gg |\xi_{01}|, \quad |\xi_{10}| \gg |\xi_{11}|, \quad |q_0| \gg |q_1|.$$

Отметим, что попытка решить эту задачу методом малого параметра, путем прямого разложения по степеням числа Рейнольдса оказалась неудачной; полученное решение было неустойчивым.

С учетом (3.53) задача (3.46)–(3.52) примет вид

$$\begin{aligned} q_0 + q_1 &= 2 \int_0^{1+\xi^2} V_{x0} dY + 2 \int_0^{1+\xi^2} V_{x1} dY, \\ \varepsilon \frac{\partial (V_{x0} + V_{x1})}{\partial \xi} + \frac{\partial (V_{y0} + V_{y1})}{\partial Y} &= 0, \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \frac{\partial V_{x1}}{\partial \tau} + \operatorname{Re} \varepsilon (V_{x0} + V_{x1}) \left( \frac{\partial V_{x0}}{\partial \xi} + \frac{\partial V_{x1}}{\partial \xi} \right) + \\
+ \operatorname{Re} (V_{y0} + V_{y1}) \left( \frac{\partial V_{x0}}{\partial Y} + \frac{\partial V_{x1}}{\partial Y} \right) = \\
= \operatorname{St} - \frac{\partial L_0}{\partial \xi} - \frac{\partial L_1}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 V_{x0}}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V_{x1}}{\partial Y^2}, \quad (3.55)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau = 0 : \xi \quad 0 = \xi_{00}, \quad \xi_{01} = 0, \quad \lambda_1 = 0, \\
V_{x1} = 0, \quad V_{y1} = 0, \quad L_1 = 0, \quad (3.56)
\end{aligned}$$

$$\tau > 0 : \xi \quad 0 = \xi_{00} + \xi_{01}, \quad L_0(\xi_{00} + \xi_{01}) + L_1(\xi_{00} + \xi_{01}, \tau) = 0, \quad (3.57)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1, \quad L_0(\lambda_0 + \lambda_1) + L_1(\lambda_0 + \lambda_1, \tau) = 0,$$

$$\left. \frac{\partial V_{x0}}{\partial Y} \right|_{Y=1+(\lambda_0+\lambda_1)^2} + \left. \frac{\partial V_{x1}}{\partial Y} \right|_{Y=1+(\lambda_0+\lambda_1)^2} = 0, \quad (3.58)$$

$$Y = 0, \quad \frac{\partial V_{x0}}{\partial Y} + \frac{\partial V_{x1}}{\partial Y} = 0, \quad V_{y0} + V_{y1} = 0, \quad (3.59)$$

$$Y = \pm(1 + \xi^2), \quad V_{x0} + V_{x1} = 1, \quad V_{y0} + V_{y1} = 2\varepsilon\xi. \quad (3.60)$$

Учитывая соотношения (3.53) выполним линейризацию инерционных членов уравнения движения (3.55):

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \frac{\partial V_{x1}}{\partial \tau} + \operatorname{Re} \varepsilon \left( V_{x0} \frac{\partial V_{x0}}{\partial \xi} + V_{x0} \frac{\partial V_{x1}}{\partial \xi} + v_{x1} \frac{\partial V_{x0}}{\partial \xi} \right) + \\
+ \operatorname{Re} \left( V_{y0} \frac{\partial V_{x0}}{\partial Y} + V_{y0} \frac{\partial V_{x1}}{\partial Y} + V_{y1} \frac{\partial V_{x0}}{\partial Y} \right) = \\
= \operatorname{St} - \frac{\partial L_0}{\partial \xi} - \frac{\partial L_1}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 V_{x0}}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V_{x1}}{\partial Y^2}. \quad (3.61)
\end{aligned}$$

Граничные условия (3.57), (3.58), нелинейные, поскольку они содержат составной аргумент. Выполним линейризацию указанных граничных условий путем переноса граничных условий из точек  $\xi_{00} + \xi_{01}$  и  $\lambda_0 + \lambda_1$  в точки  $\xi_{00}$  и  $\lambda_0$ , соответственно, путем разложения функций в ряды Тейлора. При этом граничное условие для давления (3.57) примет вид

$$L_0(\xi_{00}) + L_1(\xi_{00}, \tau) + \xi_{01}(\tau) \left[ \frac{dL_0(\xi_{00})}{d\xi} + \frac{dL_1(\xi_{00}, \tau)}{d\xi} \right] + \dots = 0. \quad (3.62)$$

Соответственно условия (3.58) запишутся

$$L_0(\lambda_0) + L_1(\lambda_0, \tau) + \lambda_1(\tau) \left[ \frac{dL_0(\lambda_0)}{d\xi} + \frac{dL_1(\lambda_0, \tau)}{d\xi} \right] + \dots = 0, \quad (3.63)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial Y} \Big|_{Y=1+\lambda} + \frac{\partial V^x}{\partial Y} \Big|_{Y=1+\lambda} + \dots = 0.$$

$$+ \lambda (\tau) \left[ \frac{\partial^2 V_{x0}}{\partial Y \partial \xi} \Big|_{Y=1+\lambda} + \frac{\partial V^x}{\partial Y \partial \xi} \Big|_{Y=1+\lambda} \right] + \dots = 0.$$

С учетом (3.61)–(3.63) для стационарной составляющей течения имеем задачу

$$q = 2 \int_0^{1+\xi} V_x dY, \quad \varepsilon \frac{\partial V_{x1}}{\partial \xi} + \frac{\partial V^y}{\partial Y} = 0, \quad (3.64)$$

$$\text{Re } \varepsilon V_{x0} \frac{\partial V_x}{\partial \xi} + \text{Re } V_y \frac{\partial V_x}{\partial Y} = \text{St} - \frac{\partial L}{\partial \xi} + \frac{\partial V^x}{\partial Y} \quad (3.65)$$

$$\xi = \xi, \quad L(\xi) = 0, \quad (3.66)$$

$$\lambda = \lambda, \quad L(\lambda) = 0, \quad \frac{\partial V_{x0}}{\partial Y} \Big|_{Y=1+\lambda} = 0 \quad (3.67)$$

$$Y = 0, \quad \frac{\partial V_{x0}}{\partial Y} = 0, \quad V_y^0 = 0, \quad (3.68)$$

$$Y = \pm(1 + \xi), \quad V_x = 1, \quad V_y = 2\varepsilon\xi. \quad (3.69)$$

В выражениях (3.62), (3.63) используем два первых члена разложений. При этом нестационарная составляющая течения описывается задачей

$$q = 2 \int_0^{1+\xi} V_x dY, \quad \varepsilon \frac{\partial V_x}{\partial \xi} + \frac{\partial V^y}{\partial Y} = 0, \quad (3.70)$$

$$\text{Re } \frac{\partial V_x}{\partial \tau} + \text{Re } \varepsilon \left( V_{x0} \frac{\partial V_x}{\partial \xi} + v_x \frac{\partial V^x}{\partial \xi} \right) + \text{Re } \left( V_{y0} \frac{\partial V_x}{\partial Y} + V_y \frac{\partial V^x}{\partial Y} \right) = -\frac{\partial L_1}{\partial \xi} + \frac{\partial V^x}{\partial Y}, \quad (3.71)$$

$$\tau = 0 : \xi = 0, \quad \lambda = 0, \quad V_x = 0, \quad V_y = 0, \quad L = 0, \quad (3.72)$$

$$\tau > 0 : \xi = \xi + \xi,$$

$$L(\xi, \tau) + \xi(\tau) \left[ \frac{dL_0(\xi)}{d\xi} + \frac{\partial L(\xi, \tau)}{\partial \xi} \right] = 0, \quad (3.73)$$

$$\lambda = \lambda + \lambda, \quad L(\lambda, \tau) + \lambda(\tau) \left[ \frac{dL_0(\lambda)}{d\xi} + \frac{\partial L(\lambda, \tau)}{\partial \xi} \right] = 0, \quad (3.74)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial Y} \Big|_{Y=2+\lambda} + \lambda(\tau) \left[ \frac{\partial V_x}{\partial Y \partial \xi} \Big|_{Y=1+\lambda} + \frac{\partial V^x}{\partial Y \partial \xi} \Big|_{Y=1+\lambda} \right] =$$

$$Y = 0, \quad \frac{\partial V_x}{\partial Y} = 0, \quad V_y = 0, \quad 0 \quad (3.75)$$

$$Y = \pm(1 + \xi), \quad V_x = 0, \quad V_y = 0. \quad (3.76)$$

Из представленных уравнений видно, что для решения нестационарной задачи необходимо знать характеристики стационарного течения, т.е. предварительно необходимо решить стационарную задачу.

**Стационарное течение.** Для осевой скорости используем выражение, удовлетворяющее граничным условиям (3.68), (3.69)

$$V_x = 1 + f(\xi)[Y - (1 + \xi)]. \quad (3.77)$$

При этом полагаем, что в условиях стационарного течения силы инерции незначительны и несущественно искажают профиль скоростей.

Из уравнения неразрывности (второе в (3.64)) найдем поперечную составляющую скорости:

$$V_y = -\varepsilon \frac{df}{d\xi} \left[ \frac{Y^3}{3} - (1 + \xi)^2 Y \right] + 4\varepsilon f (1 + \xi) \xi Y. \quad (3.78)$$

Здесь учитывалось граничное условие (3.68).

Используя условие прилипания (3.69), получим уравнение для неизвестной функции  $f$ :

$$\frac{1}{3} (1 + \xi)^3 \frac{df}{d\xi} + 2 (1 + \xi)^2 \xi f = \xi.$$

Его решение имеет вид

$$f = \left( \frac{3\xi + C}{2(1 + \xi)} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (3.79)$$

Здесь  $C$  — постоянная интегрирования.

Выражение для скорости (3.77) должно удовлетворять условию остановки течения (3.67). При этом получим равенство:  $2f(\xi = \lambda)(1 + \lambda) = 0$ . Следовательно, значение постоянной интегрирования в (3.79)  $C = -3\lambda$ . При этом выражения для  $f$  и  $df/d\xi$  будут иметь вид

$$f = \frac{3(\xi - \lambda)}{2(1 + \xi)^{\frac{2}{3}}}, \quad \frac{df}{d\xi} = 3\xi \left( \frac{1 - 2\xi + 3\lambda}{(1 + \xi)^4} \right). \quad (3.80)$$

Уравнение движения (3.65) с учетом (3.77), (3.78) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \text{Re } \varepsilon \left\{ f \left[ Y^2 - \left( 1 + \xi^2 \right)^2 \right] + 1 \right\} \left\{ \frac{df}{d\xi} \left[ Y^2 - \left( 1 + \xi^2 \right)^2 \right] - \right. \\ \left. - 4f\xi \left( 1 + \xi^2 \right) \right\} + \text{Re } \varepsilon \left\{ -\frac{df}{d\xi} \left[ \frac{Y^3}{3} - \left( 1 + \xi^2 \right)^2 Y \right] + \right. \\ \left. + 4f\xi \left( 1 + \xi^2 \right) Y \right\} 2fY = \text{St} - \frac{dL_0}{d\xi} + 2f. \end{aligned}$$

Проинтегрируем это уравнение по  $Y$  в пределах от 0 до  $1 + \xi^2$ :

$$\begin{aligned} \frac{dL_0}{d\xi} = \text{St} + 2f - \text{Re } \varepsilon \left[ \frac{16}{15} f \frac{df}{d\xi} \left( 1 + \xi^2 \right)^4 + \right. \\ \left. + \frac{16}{3} f^2 \xi \left( 1 + \xi^2 \right)^3 - \frac{2}{3} \frac{df}{d\xi} \left( 1 + \xi^2 \right)^2 - 4f\xi \left( 1 + \xi^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Проинтегрировав это уравнение с учетом условия (3.66) и соотношений (3.80), получим выражение для стационарной составляющей давления:

$$\begin{aligned} L_0 = \text{St} (\xi - \xi_{00}) + 3 \int_{\xi_{00}}^{\xi} \frac{(\xi^2 - \lambda_0^2)}{(1 + \xi^2)^3} d\xi - \\ - \text{Re } \varepsilon \left[ \frac{12}{5} \int_{\xi_{00}}^{\xi} \frac{(\xi^2 - \lambda_0^2) (2 + \xi^2 + \lambda_0^2)}{(1 + \xi^2)^3} \xi d\xi - 2 \int_{\xi_{00}}^{\xi} \frac{\xi}{(1 + \xi^2)} d\xi \right]. \end{aligned}$$

Воспользовавшись условием (3.67), получим уравнение, связывающее координату начала зоны течения ( $\xi_{00}$ ) с координатой окончания течения ( $\lambda_0$ ):

$$\begin{aligned} \text{St} (\lambda_0 - \xi_{00}) + 3 \int_{\xi_{00}}^{\lambda_0} \frac{(\xi^2 - \lambda_0^2)}{(1 + \xi^2)^3} d\xi - \\ - \text{Re } \varepsilon \left[ \frac{12}{5} \int_{\xi_{00}}^{\lambda_0} \frac{(\xi^2 - \lambda_0^2) (2 + \xi^2 + \lambda_0^2)}{(1 + \xi^2)^3} \xi d\xi - 2 \int_{\xi_{00}}^{\lambda_0} \frac{\xi}{(1 + \xi^2)} d\xi \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Выражения для компонент скорости стационарной составляющей течения (3.77), (3.78) с учетом соотношений (3.80) имеют

вид

$$V_{x0} = 1 + \frac{3(\xi^2 - \lambda_0^2)}{2(1 + \xi^2)^3} [Y^2 - (1 + \xi^2)^2], \quad (3.82)$$

$$V_{y0} = -3\varepsilon \xi \frac{(1 - 2\xi^2 + 3\lambda_0^2)}{(1 + \xi^2)^4} \left[ \frac{Y^3}{3} - (1 + \xi^2)^2 Y \right] + 6\varepsilon \frac{(\xi^2 - \lambda_0^2)}{(1 + \xi^2)^2} \xi Y.$$

Согласно уравнению (3.64) с учетом выражений (3.82) расход стационарного течения жидкости составит  $q = 2(1 + \lambda_0^2)$ .

Анализ уравнения (3.81) показал, что силы инерции незначительно влияют на протяженность зоны течения. Так при  $\xi_{00} = -5$  и  $\text{Re} = 0$ ,  $\text{St} = 0$  координата окончания течения  $\lambda_0 = 0,47246$ , а при  $\text{Re} = 2 - \lambda_0 = 0,47291$ . С учетом влияния сил тяжести ( $\text{St} = 2,8$ ) при  $\text{Re} = 0$ ,  $\lambda_0 = 2,504$ , а при  $\text{Re} = 2 - \lambda_0 = 2,502$ . Изменения наблюдаются в четвертой значащей цифре.

**Нестационарная составляющая течения.** Рассмотрим случай низкочастотных возмущений течения, когда частота возмущений соизмерима (или не превышает) с обратным временем пребывания жидкости в зазоре валков. Это позволяет ограничиться первой модой. Ищем решение для нестационарной составляющей осевой скорости в форме, удовлетворяющей граничным условиям (3.75), (3.76):

$$V_{x0} = f_1(\xi, \tau) [Y^2 - (1 + \xi^2)^2]. \quad (3.83)$$

Интегрируя уравнение неразрывности (3.70) с учетом условия (3.75), находим

$$V_{y1} = -\varepsilon \frac{\partial f_1}{\partial \xi} \left[ \frac{Y^3}{3} - (1 + \xi^2)^2 Y \right] + 4\varepsilon f_1 (1 + \xi^2) \xi Y. \quad (3.84)$$

Потребовав от (3.84) выполнения условия (3.76), получим уравнение для неизвестной функции  $f_1$ :

$$\frac{1}{3} (1 + \xi^2) \frac{\partial f_1}{\partial \xi} + 2\xi f_1 = 0.$$

Его решение имеет вид

$$f_1 = \frac{C_2(\tau)}{(1 + \xi^2)^3}, \quad (3.85)$$

где  $C_2$  — неизвестная функция времени.

Подставим выражения (3.83), (3.84), (3.85) в уравнение (3.71) и проинтегрируем по  $Y$  в пределах от 0 до  $1 + \xi^2$ . В результате получим уравнение для нестационарной составляющей давления:

$$\frac{dL_1}{d\xi} = \frac{2 \operatorname{Re}}{3(1 + \xi^2)} \frac{dC_2(\tau)}{d\tau} + \frac{2C_2(\tau)}{(1 + \xi^2)^3} - \frac{16 \operatorname{Re} \varepsilon \xi (1 + \lambda_0^2) C_2(\tau)}{5(1 + \xi^2)^3}. \quad (3.86)$$

Проинтегрировав это уравнение, получим

$$L_1 = \frac{2}{3} \operatorname{Re} \frac{dC_2}{d\tau} \int_{\xi_{00}}^{\xi} \frac{d\xi}{(1 + \xi^2)} + 2C_2 \int_{\xi_{00}}^{\xi} \frac{d\xi}{(1 + \xi^2)^3} - \frac{16}{5} \operatorname{Re} \varepsilon (1 + \lambda_0^2) C_2 \int_{\xi_{00}}^{\xi} \frac{\xi d\xi}{(1 + \xi^2)^3} + C_3(\tau). \quad (3.87)$$

Здесь  $C_3$  неизвестная функция времени.

Граничное условие (3.73) с учетом (3.87) приводит к уравнению

$$C_3(\tau) + \xi_{01}(\tau) \left[ \frac{dL_0(\xi_{00})}{d\xi} + \frac{\partial L_1(\xi_{00}, \tau)}{\partial \xi} \right] = 0. \quad (3.88)$$

Аналогично первое условие в (3.75) с учетом (3.87) дает уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} \operatorname{Re} \frac{dC_2}{d\tau} \int_{\xi_{00}}^{\lambda_0} \frac{d\xi}{(1 + \xi^2)} + 2C_2 \int_{\xi_{00}}^{\lambda_0} \frac{d\xi}{(1 + \xi^2)^3} - \frac{16}{5} \operatorname{Re} \varepsilon (1 + \lambda_0^2) C_2 \times \\ & \times \int_{\xi_{00}}^{\lambda_0} \frac{\xi d\xi}{(1 + \xi^2)^3} + C_3(\tau) + \lambda_1(\tau) \left[ \frac{dL_0(\lambda_0)}{d\xi} + \frac{\partial L_1(\lambda_0, \tau)}{\partial \xi} \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Исключив из уравнений (3.88), (3.89) функцию  $C_3(\tau)$  получим уравнение, связывающее две неизвестные функции  $\lambda_1(\tau)$  и  $C_2(\tau)$  (полагаем, что функция возмущения уровня  $\xi_{01}(\tau)$  задана):

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} \operatorname{Re} \frac{dC_2}{d\tau} \int_{\xi_{00}}^{\lambda_0} \frac{d\xi}{(1 + \xi^2)} + 2C_2 \int_{\xi_{00}}^{\lambda_0} \frac{d\xi}{(1 + \xi^2)^3} - \\ & - \frac{16}{5} \operatorname{Re} \varepsilon (1 + \lambda_0^2) C_2 \int_{\xi_{00}}^{\lambda_0} \frac{\xi d\xi}{(1 + \xi^2)^3} + \lambda_1(\tau) \left[ \frac{dL_0(\lambda_0)}{d\xi} + \frac{\partial L_1(\lambda_0, \tau)}{\partial \xi} \right] - \\ & - \xi_{01}(\tau) \left[ \frac{dL_0(\xi_{00})}{d\xi} + \frac{\partial L_1(\xi_{00}, \tau)}{\partial \xi} \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.90)$$



Используя второе условие в (3.74), с учетом (3.83)–(3.85) получаем уравнение

$$C + \lambda(\tau) \left[ 3\lambda_0 - \frac{6\lambda_0}{(1+\lambda)^2} C \right] = 0, \quad (3.90)$$

откуда находим

$$\lambda(\tau) = - \frac{(1+\lambda_0)^2 C}{3\lambda_0(1+\lambda - 2C)}. \quad (3.91)$$

Используем начальное условие

$$\tau = 0: \quad \lambda = 0, \quad C = 0. \quad (3.92)$$

Соотношение (3.92) позволяет исключить из уравнения (3.90) неизвестную функцию  $\lambda$  и получить дифференциальное уравнение первого порядка для функции  $C$ . Это уравнение с учетом (3.80), (3.82)–(3.85) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dC}{d\tau} & \left[ \frac{2}{3} \operatorname{Re} \int_{\xi_{00}}^{\lambda} \frac{d\xi}{(1+\xi)^3} - \frac{2 \operatorname{Re} \xi(\tau)}{3(1+\xi_{00})} - \frac{2 \operatorname{Re} C}{9\lambda_0(1+\lambda - 2C)} \right] + \\ & + C \left[ 2 \int_{\xi_{00}}^{\lambda} \frac{d\xi}{(1+\xi)^3} - \frac{16}{5} \operatorname{Re} \varepsilon (1+\lambda) \int_{\xi_{00}}^{\lambda} \frac{\xi d\xi}{(1+\xi)^3} - \frac{2\xi(\tau)}{(1+\xi_{00})^3} + \right. \\ & + \left. \frac{16 \operatorname{Re} \varepsilon (1+\lambda) \xi(\tau)}{5(1+\xi_{00})^3} \right] + \frac{(1+\lambda)C}{3\lambda_0(1+\lambda - 2C)} \left[ \operatorname{St} + \frac{3 \operatorname{Re} \varepsilon \lambda_0}{(1+\lambda)} + \right. \\ & + \left. \frac{C}{(1+\lambda)^3} - \frac{16 \operatorname{Re} \varepsilon \lambda C}{5(1+\lambda)^2} \right] - \xi(\tau) \left\{ \operatorname{St} + \frac{3 \left( \xi_{00} - \lambda \right)}{(1+\xi_{00})^3} - \right. \\ & \left. - 2 \operatorname{Re} \varepsilon \xi \left[ \frac{6 \left( \xi_{00} - \lambda \right) (2 + \xi_{00} + \lambda)}{15(1+\xi_{00})^3} - \frac{1}{1+\xi_{00}} \right] \right\} = 0. \quad (3.93) \end{aligned}$$

Особенностью уравнения (3.93) является наличие малого параметра ( $\operatorname{Re}$ ) при старшей производной. Поэтому это уравнение не применимо для случая  $\operatorname{Re} = 0$ . В безынерционном случае ( $\operatorname{Re} = 0$ ) имеем алгебраическое (квадратичное) уравнение для функции  $C$

$$C \left[ 2 \int_{\xi_{00}}^{\lambda} \frac{d\xi}{(1+\xi)^3} - \frac{2\xi(\tau)}{(1+\xi_{00})^3} \right] + \\ + \frac{(1+\lambda)^C}{3\lambda_0(1+\lambda-2C)} \left[ \text{St} + \frac{C}{(1+\lambda)^3} \right] - \xi(\tau) \left[ \text{St} + \frac{3(\xi_{00}-\lambda)}{(1+\xi_{00})^3} \right] = 0.$$

В случае малых возмущений ( $|\zeta| \ll 1$ ) уравнение имеет асимптотическое решение

$$C = - \frac{(1+\lambda)^3 (\text{St} + 3\lambda F)}{2 - 6\lambda F (1+\lambda)^2}, \quad F = 2 \int_{\xi_{00}}^{\lambda} \frac{d\xi}{(1+\xi)^3} - \frac{2\xi(\tau)}{(1+\xi_{00})^3}.$$

Последовательность численного анализа следующая. Значения функции  $C$  находились путем решения дифференциального уравнения (3.93) с учетом начального условия (3.92). Далее, из соотношения (3.91) вычислялись соответствующие отклонения координаты выхода  $\lambda$ .

**О «собственной» частоте движения жидкости.** Среднее время пребывания жидкости в зоне течения определяется формулой  $t_* = V_a/Q$ , где  $V_a$  — объем жидкости в зазоре,  $Q$  — объемный расход. Величины  $V_a$  и  $Q$  для валка единичной длины находятся по формулам:

$$V_a = 2H \int_{x_0}^x \left( 1 + \frac{x}{2RH} \right) dx, \quad Q = 2VH_0 \left( 1 + \frac{x}{2RH} \right).$$

С учетом (3.45) можем записать

$$t_* = \frac{\sqrt{2RH} (3\lambda - 3\xi + \lambda - \xi_0)}{3V(1+\lambda)}.$$

Учитывая соотношение  $\omega = 2\pi/t_*$ , для безразмерной «собственной» частоты  $\Omega = 2\pi l/(Vt_*)$  получим соотношение

$$\Omega = \frac{6\pi l (1+\lambda)}{\sqrt{2RH} (3\lambda - 3\xi + \lambda - \xi_0)}.$$

Численно анализируем динамические режимы валкового течения ньютоновской жидкости. Допустим, изменяется во времени координата начала зоны течения, что обусловлено, например, неравномерностью подачи жидкости в валковый зазор. Найдём изменение во времени координаты окончания течения,

которая, в частности, определяет расход на выходе и толщину слоя жидкости на поверхности вала (толщину наносимого покрытия), т. е. качественные показатели технологического процесса.

Для условий:  $R = 0,2$  м,  $\eta = 0,05$  Па · с,  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $H_0 = 10^{-3}$  м,  $V = 0,084$  м/с,  $\ell = -x_0 = 0,1$  м. Находим:  $\varepsilon = 0,05$ ,  $St = 2,803$ ,  $\xi_{00} = -5$ ,  $\lambda_0 = 2,504$ ,  $\Omega = 4,198$ ,  $Re = 2,016$ . Пусть координата входа описывается функцией  $\xi_0 = \xi_{00} + \varepsilon_1 \sin \Omega \tau$ ,  $\xi_{01} = \varepsilon_1 \sin \Omega \tau$ , где  $\varepsilon_1$  — амплитуда возмущений начальной координаты ( $\varepsilon_1 \ll 1$ ). Стационарная составляющая координаты входа  $\xi_{00}$  задается априорно. Для определения стационарной составляющей координаты выхода ( $\lambda_0$ ) используем трансцендентное уравнение (3.81).

Анализ стационарного течения показывает, что число  $St$  существенно увеличивает протяженность зоны течения (смещает координату окончания течения  $\lambda_0$ ). Так  $\lambda_0 = 0,4725$  при  $St = 0$ .

Насколько известно автору, в научной литературе отсутствует информация о влиянии сил инерции на течение в рабочем зазоре даже ньютоновской жидкости. Учет сил инерции незначительно увеличивает протяженность зоны течения. Так при  $St = 0$  увеличение числа Рейнольдса от 0 до 2, приводит к смещению  $\lambda_0$  от 0,4725 до 0,4729.

Графики зависимости изменения выходной величины (отклонение координаты точки выхода  $\lambda_1$ , линия 2) и возмущения координаты входа (линия 1) от времени представлены на рис. 3.12. Расчеты выполнены для условий:  $\varepsilon = 0,01$ ,  $\Omega = 0,8$ ,  $\xi_{00} = -5$ ,  $Re = 2$ ,  $St = 0$ ,  $\xi_{01} = 0,01 \sin \Omega \tau$ . Число расчетных точек 100.

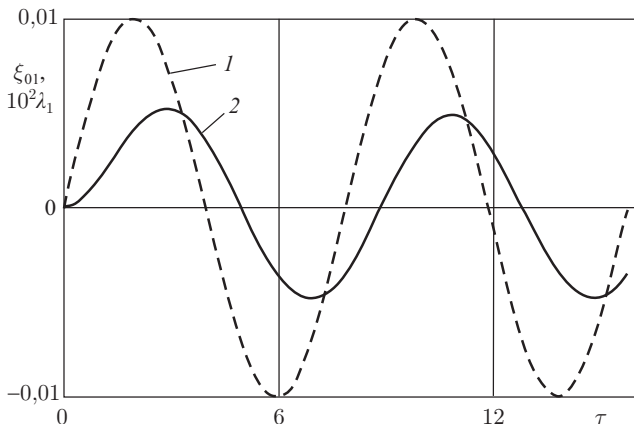


Рис. 3.12

Видно, что амплитуда выходного сигнала очень мала. Кроме того, имеет место запаздывание выходного сигнала, что обусловлено проявлением сил инерции. После первого периода форма выходного сигнала стабилизируется.

В результате анализа модели установлено, что резонансный всплеск отсутствует, что обусловлено существенным влиянием сил вязкого трения (ярко выраженная диссипативная система). С увеличением частоты амплитуда выходного сигнала уменьшается. Существует некоторое число Рейнольдса (из интервала от 0 до 2), при котором амплитуда колебаний выходной функции минимальна. С увеличением протяженности зоны течения (увеличение по абсолютной величине координаты входа) колебания координаты выходного сечения уменьшаются. Это объясняется уменьшением градиента касательных напряжений на стенке в окрестности входов сечения.

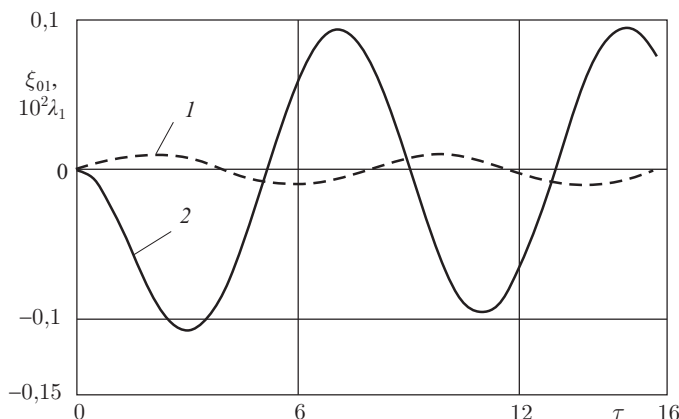


Рис. 3.13

Рисунок 3.13 иллюстрирует влияние сил тяжести на выходной сигнал. Расчеты выполнены для тех же значений параметров, что и на рис. 3.12, но для  $St = 2$ . Из сопоставления этого рисунка с рис. 3.12 видно, что значительно увеличивается амплитуда выходного сигнала, кроме того, меняется его фаза. После первого периода наступает стабилизация формы выходного сигнала.

### 3.4. О валковом течении с отрицательной фрикцией

Традиционно валки работают с положительной фрикцией, что обеспечивается разнонаправленным их вращением. При однонаправленном вращении валков следует вести речь об отрица-

тельной фрикции. Рассматриваемое течение может быть использовано в вискозиметрии или для перемешивания гетерогенных наполненных систем.

На рис. 3.14 представлены кинематические схемы устройства традиционной валковой машины с положительной фрикцией (а) и машины, в которой реализуется отрицательная фрикция (б). Валки имеют одинаковые диаметры, но отличаются окружной скоростью. Крутящий момент от привода (на рисунках не показан) на обеих схемах поступает на левый валок.

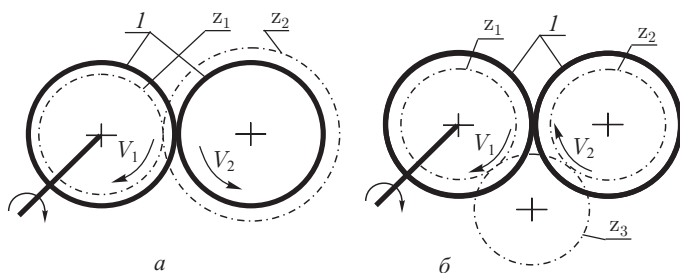


Рис. 3.14. Кинематические схемы традиционной валковой машины с положительной фрикцией (а) и машины с отрицательной фрикцией (б):  $I$  — валки,  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  — зубчатые колеса и шестерни

На рис. 3.14а позицией  $z_1$  указана делительная окружность зубчатого колеса приводного валка, а позицией  $z_2$  — делительная окружность зубчатой шестерни второго валка. Различный диаметр (число зубьев) зубчатых колес обеспечивает различную окружную скорость валков  $I$ . В случае равенства числа зубьев (диаметров) шестерен  $z_1$  и  $z_2$  фрикция равна единице.

На рис. 3.14б иллюстрируется один из возможных вариантов технической реализации валковой машины с отрицательной фрикцией. Позициями  $z_1$ ,  $z_2$  указаны делительные окружности зубчатых колес валков, а позицией  $z_2$  — зубчатая шестерня, изменяющая направление вращения второго валка. Таким образом, окружные скорости  $V_1$  и  $V_2$  в минимальном зазоре имеют встречное направление. В случае равенства числа зубьев (диаметров) шестерен  $z_1$  и  $z_2$  фрикция будет равна минус единице. Соответственно, в случае различия шестерен  $z_1$  и  $z_2$  фрикция, оставаясь отрицательной, будет отличаться от единицы. Насколько известно автору, работа валковых машин с отрицательной фрикцией в литературе не рассматривалась.

Схема рассматриваемого течения представлена на рис. 3.15. Валки имеют одинаковый радиус. Течение сосредоточено в вертикальном зазоре, заполненном вязкой жидкостью. Учитываем

силы тяжести и вязкого трения. Изменением давления в направлении оси  $y$  пренебрегаем. Оставляем в силе основные допущения, принятые в гл. 3. В общем случае валки имеют близкие, но незначительно различающиеся окружные скорости ( $V \neq V$ ). Объем жидкости, заключенной между валками, постоянен. Для выяснения основных гидродинамических закономерностей течения рассматривается ньютоновская жидкость. В случае аномальных жидкостей следует ожидать отличий в характере течения.

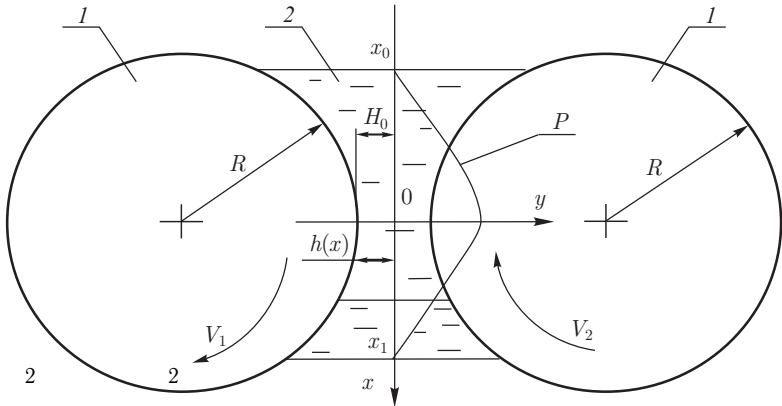


Рис. 3.15. Схема течения при отрицательной фрикции: 1 — валки, 2 — жидкость

Течение описывается системой уравнений

$$\frac{dp}{dx} = \eta \frac{\partial v^x}{\partial y} + \rho g, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (3.94)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad (3.95)$$

$$y = h, \quad v_x = V_1, \quad v_y = V x/R, \quad (3.96)$$

$$y = -h, \quad v_x = -V_2, \quad v_y = V x/R, \quad (3.97)$$

$$x = x, \quad p = 0, \quad (3.98)$$

$$x = x, \quad p = 0, \quad (3.99)$$

где  $\rho$ ,  $\eta$  — плотность и вязкость жидкости;  $x$ ,  $y$  — координаты;  $v_x$  — компонента скорости;  $p$  — давление;  $x$ ,  $x$  — координаты начала и конца зоны течения.

Кинематические условия для поверхностей валков записаны в предположении следующих соотношений для компонент скорости (см. рис. 3.3):  $y = h(x)$ ,  $v_x = V \cos \alpha \approx V$ ,  $v_y = V \sin \alpha \approx V x/R$ ;  $y = -h(x)$ ,  $v_x = -V \cos \alpha \approx -V$ ,  $v_y = V \sin \alpha \approx V x/R$ . Учитывались асимптотические свойства:

$\sin \alpha = x/R$ ,  $\cos \alpha = 1$  при  $|x/R| \ll 1$ . Согласно первому уравнению в (3.94) постоянная составляющая давления не оказывает влияние на течение. На верхней поверхности ( $x = x$ ) и на нижней ( $x = x$ ) давление равно атмосферному и без снижения общности в условиях (3.98), (3.99) полагаем  $p = 0$ . Вертикальные координаты ( $x = x$ ) и ( $x = x$ ) характеризуют положение свободных поверхностей жидкости. Они зависят от организации загрузки машины (см. рис. 3.14б) и объема жидкости. В первом приближении будем эти поверхности считать горизонтальными.

Проинтегрируем уравнение неразрывности (3.95) по высоте зазора, учитывая условия (3.96), (3.97)

$$\int_{-h}^h \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) dy = \int_{-h}^h \frac{\partial v_x}{\partial x} dy + v_y|_{-h} = 0.$$

Далее, учитывая соотношения

$$\frac{d}{dx} \int_{-h}^h v_x dy = \int_{-h}^h \frac{\partial v_x}{\partial x} dy + \frac{dh}{dx} v_x(h) - \frac{d(-h)}{dx} v_x(-h),$$

$$\frac{dh}{dx} = \sin \alpha = \frac{x}{R},$$

получим интегральное уравнение неразрывности:

$$\frac{d}{dx} \int_{-h}^h v_x(x) dy = 0,$$

или

$$Q = \int_{-h}^h v_x dy, \quad (3.100)$$

где  $Q$  — постоянная (объемный расход жидкости, приходящийся на один метр длины валка).

Проинтегрировав уравнение движения (3.94), с учетом условий (3.96), (3.97), получим выражение для осевой скорости

$$v_x = \left( \frac{dp}{dx} - \rho g \right) \frac{h^2 - y}{2\eta} + \frac{(V + V)}{2h} y + \frac{(V - V)}{2}. \quad (3.101)$$

Выполнив интегрирование в (3.100), с учетом (3.101) имеем

$$Q = (V - V) h - \frac{2h}{3\eta} \left( \frac{dp}{dx} - \rho g \right). \quad (3.102)$$

Поскольку  $Q = \text{const}$ , из (3.102) запишем уравнение для давления:

$$\frac{dp}{dx} = \rho g + \frac{3\eta(V_1 - V_2)}{2h^2} - \frac{3Q\eta}{2h^3}.$$

Проинтегрировав это уравнение с учетом условия (3.98), найдем выражение для давления:

$$p = \rho g(x - x_0) + \frac{3\eta(V_1 - V_2)}{2} \int_{x_0}^x \frac{dx}{h^2} - \frac{3Q\eta}{2} \int_{x_0}^x \frac{dx}{h^3}. \quad (3.103)$$

Рассматривая совместно условие (3.99) и выражение (3.103), получим уравнение для расхода:

$$Q = \frac{2\rho g(x_1 - x_0)}{3\eta} \left( \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{h^3} \right)^{-1} + (V_1 - V_2) \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{h^2} \left( \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{h^3} \right)^{-1}. \quad (3.104)$$

В рассматриваемом течении расход жидкости характеризует направление и скорость вертикального перемещения заключенного между валками объема жидкости. При нулевом расходе объем жидкости остается на одном уровне и координаты свободных поверхностей  $x_0$  и  $x_1$  сохраняют постоянное значение.

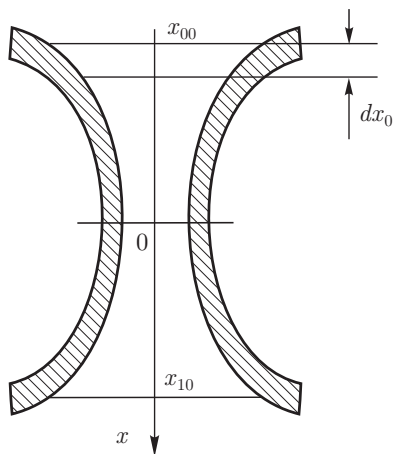
Согласно полученному выражению (3.104) расход жидкости складывается из гравитационной составляющей (первое слагаемое правой части выражения (3.104)) и кинематической — второе слагаемое. Численной характеристикой соотношения указанных составляющих служит критерий Стокса ( $\text{St} = \rho g H_0^2 / (\eta V_1)$ ). Так, если материал резина ( $\eta = 10^5$  Па · с,  $\rho = 1600$  кг/м<sup>3</sup>,  $H_0 = 2 \times 10^{-3}$  м,  $V_1 = 0,1$  м/с) то  $\text{St} = 6,4 \cdot 10^{-6}$ . Следовательно, проявление сил тяжести исчезающе мало, и их, в случае жидкостей типа резин, можно не учитывать. Кроме того, если окружные скорости валков равны ( $V_1 = V_2$ ), то согласно выражению (3.104) расход будет равен нулю, и жидкость будет оставаться на постоянном уровне. Кроме того, при этом, согласно выражению (3.103) давление в зазоре, а, следовательно, и распорное усилие, будут равны нулю. Указанное свойство принципиально отличает рассматриваемое течение от традиционного валкового течения с положительной фрикцией.

В рассматриваемом течении жидкость подвергается более интенсивному механическому воздействию, чем в обычных валках. Так, например, в случае  $V_1 = V_2$  время пребывания жидкости в зазоре бесконечно. При выполнении условия  $V_1 > V_2$ , жидкость перемещается вниз (см. рис. 3.15). Представляет интерес найти время пребывания жидкости в зазоре.



Рассмотрим кинетику процесса вертикального перемещения жидкости. Для анализа можно рассматривать эту задачу как задачу слива вязкой жидкости при переменном уровне из сосуда с криволинейными стенками. Объемом жидкости, наносимой на поверхность валков, пренебрегаем.

Расчетная схема представлена на рис. 3.16. Пусть в начальный момент времени ( $t = 0$ ) координата верхнего мениска жидкости составляет  $x_0 = x_{00}$ , соответственно в начальный момент координата нижнего мениска



Пусть за отрезок времени  $dt$  верхний уровень сместился на величину  $dx_0$ . Причем смещение возможно не только вниз, но и вверх. Объем выделенного элемента составит  $2h dx_0$ . Следовательно, можем записать условие сохранения объема жидкости

$$2h dx_0 = Q dt. \quad (3.105)$$

Начальное условие для дифференциального уравнения (3.105)

$$t = 0, \quad x_0 = x_{00}. \quad (3.106)$$

Рис. 3.16. Расчетная схема слива вязкой жидкости в валковом зазоре

Разделив переменные в уравнении (3.105) и проинтегрировав с учетом условия (3.106), получим зависимость времени от уровня жидкости:

$$\begin{aligned} t &= 2 \int_{x_{00}}^{x_0} \frac{h(x_0) dx_0}{Q} = \\ &= 2 \int_{x_{00}}^{x_0} \frac{\int_{x_0}^{x_1} dx / h^3}{2\rho g (x_1 - x_0) / (3\eta) + (V_1 - V_2) \int_{x_0}^{x_1} dx / h^2} h(x_0) dx_0. \end{aligned} \quad (3.107)$$

При этом нужно учитывать, что в процессе «слива» изменяется и нижний уровень жидкости, т.е.  $x_1(t)$ . Нижний уровень жидкости найдем из условия сохранения объема:

$$V_+ = 2 \int_{x_0}^{x_1} h(x) dx = \text{const}. \quad (3.108)$$

Согласно выражению (3.108)  $x_1 = x_1(x_0, V_+)$ .

Анализ показывает, что возможны три варианта поведения материала в рабочем зазоре:

1. Расход жидкости равен нулю ( $Q = 0$ ) и вертикальное положение жидкости не изменяется.

2. Силы тяжести преобладают над кинематическими силами вязкого трения, так что  $Q > 0$  и жидкость перемещается вниз.

3. Преобладает кинематическая «подъемная сила», так что  $Q < 0$  и жидкость перемещается вверх.

В частности, в первом варианте условие  $Q = 0$  может быть получено, если гравитационная и кинематическая составляющие течения равны по величине, но имеют разные знаки (см. выражение (3.104)).

Найдем поперечную составляющую скорости, воспользовавшись уравнением неразрывности в дифференциальной форме (3.95):

$$\int_{-h}^y dv_y = - \int_{-h}^y \frac{\partial v_x}{\partial x} dy.$$

Учитывая формулу Лейбница

$$\frac{d}{dx} \int_{-h}^y v_x dy = \int_{-h}^y \frac{\partial v_x}{\partial x} dy + \frac{dh}{dx} v_x(-h)$$

и условия (3.98), получим выражение для поперечной скорости:

$$v_y = \frac{x}{R} \left\{ \frac{(V_1 - V_2)}{2} \left( \frac{y^3}{h^3} + 1 \right) - \frac{Q}{4h} \left( \frac{y^3}{h^3} - 2 - 3\frac{y}{h} \right) + \right. \\ \left. + \frac{(V_1 + V_2)}{4} \left( \frac{y^2}{h^2} + 1 \right) - \frac{(V_1 - V_2)}{2} \right\}.$$

Найдем функцию тока рассматриваемого течения, используя граничное условие  $\psi = 0$  при  $y = 0$ :

$$\psi = \int_0^y v_x dy.$$

Выполнив интегрирование, с учетом (3.101), (3.102), получим

$$\psi = \frac{3(V_1 - V_2)}{4h^2} \left( \frac{y^3}{3} + h^2 y \right) + \frac{(V_1 + V_2)}{4h} y^2 + \frac{(V_1 - V_2)}{2} y.$$

На поверхностях валков функция тока принимает значения

$$\psi|_h = \psi|_{-h} = \frac{(V_1 + V_2)}{2} h,$$

следовательно, пределы ее изменения  $0 < \psi < 0,5 (V_1 + V_2) h$ .

Найдем касательные напряжения на поверхностях валков. Согласно закону Ньютона  $\tau_{xy} = \eta \partial v_x / \partial y$ . Учитывая выражения для осевой скорости (3.101) и давления (3.102), для поверхности «правого» валка (см. рис. 3.15) можем записать

$$\tau_{xy}|_h = \eta \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_h = \frac{\eta (2V_1 - V_2)}{h}.$$

Соответственно, для поверхности «левого» валка

$$\tau_{xy}|_{-h} = \eta \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{-h} = \frac{\eta (2V_2 - V_1)}{h}.$$

Крутящий момент, приходящийся на единицу длины «правого» валка

$$M_1 = R \int_{x_0}^{x_1} \tau_{xy}|_h dx = R\eta (2V_1 - V_2) \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{h}.$$

Соответственно, крутящий момент, приходящийся на единицу длины «левого» валка

$$M_2 = R \int_{x_0}^{x_1} \tau_{xy}|_{-h} dx = R\eta (2V_2 - V_1) \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{h}.$$

Потребляемая мощность рассчитывается по формулам:  $N_1 = M_1 V_1 / R$ ,  $N_2 = -M_2 V_2 / R$ .

Распорное усилие, действующее на единицу длины валков, можно найти по формуле

$$F = \int_{x_0}^{x_1} p dx,$$

в которой функция давления определяется согласно (3.103).

Для удобства анализа задачи, введем безразмерные параметры и переменные:

$$\begin{aligned} \{\xi, \xi_0, \xi_1\} &= \frac{\{x, x_0, x_1\}}{\sqrt{2RH_0}}, \quad f = -\frac{V_2}{V_1}, \quad \text{St} = \frac{\rho g H_0^2}{\eta V_1}, \\ q &= \frac{Q}{V_1 H_0}, \quad V_- = \frac{V_+}{H_0 \sqrt{2RH_0}}, \quad \text{La} = \frac{p H_0^2}{\eta V_1 \sqrt{2RH_0}}, \\ \{V_x, V_y\} &= \frac{\{v_x, v_y\}}{V_1}, \quad Y = \frac{y}{h}, \quad \tau = \frac{t V_1}{\sqrt{2RH_0}}. \end{aligned} \quad (3.109)$$

Для анализа необходимо знать уравнение поверхности валка  $h(x)$ . Используем параболическую аппроксимацию поверхностей

валков (см. подробности получения выражения (3.14))

$$h = H_0 (1 + \xi^2). \quad (3.110)$$

С учетом соотношений (3.109), (3.110) выражения для осевой и поперечной составляющих скорости примут вид

$$V_x = \frac{3}{4} (Y^2 - 1) \left[ 1 + f - \frac{q}{(1 + \xi^2)} \right] + \frac{(1 - f)}{2} Y + \frac{(1 + f)}{2},$$

$$V_y = \frac{\xi \sqrt{2RH_0}}{R} \left[ \frac{(1 + f)}{2} (Y^3 + 1) - \frac{q}{4} (Y^3 - 3Y - 2) + \right. \\ \left. + \frac{(1 - f)}{4} (Y^2 + 1) \right].$$

Выражение для безразмерного давления (3.103) с учетом выражения для безразмерного расхода

$$\text{La} = \text{St} (\xi - \xi_1) - \frac{3}{2} (1 + f) \int_{\xi}^{\xi_1} \frac{d\xi}{(1 + \xi^2)^2}.$$

Выражение для безразмерного расхода из (3.104)

$$q = \frac{2 \text{St} (\xi_1 - \xi_0)}{3} \left( \int_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{d\xi}{(1 + \xi^2)^3} \right)^{-1} + \\ + (1 + f) \int_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{d\xi}{(1 + \xi^2)^2} \left( \int_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{d\xi}{(1 + \xi^2)^3} \right)^{-1}.$$

Интегралы, входящие в расчетные формулы, выражаются через элементарные функции:

$$\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{(1 + \xi^2)^2} = \frac{\xi}{2(1 + \xi^2)} - \frac{\xi_0}{2(1 + \xi_0^2)} + \frac{1}{2} \arctg(\xi) - \frac{1}{2} \arctg(\xi_0),$$

$$\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{(1 + \xi^2)^3} = \frac{\xi}{4(1 + \xi^2)^2} + \frac{3\xi}{8(1 + \xi^2)} + \frac{3}{8} \arctg(\xi) - \\ - \frac{\xi_0}{4(1 + \xi_0^2)^2} - \frac{3\xi_0}{8(1 + \xi_0^2)} - \frac{3}{8} \arctg(\xi_0).$$

Выражение для времени слива (3.107) примет вид

$$\tau = 2 \int_{\xi_{00}}^{\xi_0} \frac{\int_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{d\xi}{(1 + \xi^2)^3}}{\left[ \frac{2 \operatorname{St} (\xi_1 - \xi_0)}{3} + (1 + f) \int_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{d\xi}{(1 + \xi^2)^2} \right]} (1 + \xi_0^2) d\xi_0. \quad (3.111)$$

Входящий в это выражение нижний уровень жидкости ( $\xi_1$ ), находится из условия сохранения объема (3.108):

$$V_- = 2 (\xi_1 - \xi_0) + \frac{2}{3} (\xi_1^3 - \xi_0^3).$$

Решение кубического уравнения имеет вид

$$\xi_1 = 2 \operatorname{sh} \left\{ \frac{1}{3} \operatorname{arcsch} \left[ \frac{1}{2} \left( 3\xi_0 + \xi_0^3 + \frac{3}{2} V_- \right) \right] \right\}.$$

**Численный анализ.** Как было показано выше, число Стокса для реальных условий имеет малое значение, поэтому силы тяжести не будем учитывать ( $\operatorname{St} = 0$ ). При этом выражение для времени слива (3.111) примет вид

$$\tau (1 + f) = 2 \int_{\xi_{00}}^{\xi_0} \frac{\int_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{d\xi}{(1 + \xi^2)^3}}{\int_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{d\xi}{(1 + \xi^2)^2}} (1 + \xi_0^2) d\xi_0.$$

Из полученного выражения видно, что для перемещения жидкости сверху вниз должно выполняться условие  $f > -1$ . Напомним, что при  $f = -1$  материал остается на одном уровне, и  $\tau \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим второй вариант перемещения жидкости, удобный при реализации, например, процесса перемешивания. Схема рассматриваемого варианта представлена на рис. 3.17. Жидкость перемещается сверху вниз ( $Q > 0$ ). В начальный момент жидкость занимает область выше минимального зазора, как показано на рис. 3.17 а. При этом начальное условие имеет вид

$$t = 0, \quad x_0 = x_{00}, \quad x_1 = x_{10} = 0.$$

Окончательное положение жидкости показано на рис. 3.17 б. При этом можно условно считать, что жидкость выпадает из зазора

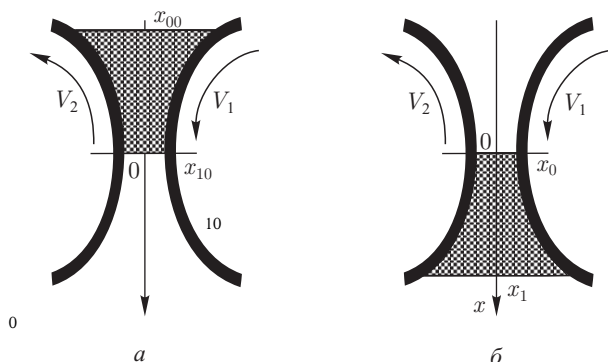


Рис. 3.17. Варианты вертикального положения жидкости: *а* — начальное, *б* — конечное

между валками под действием сил тяжести. Этому моменту времени  $t^*$  отвечает условие

$$t = t^*, \quad x = 0, \quad x = -x.$$

Последнее равенство следует из геометрической симметрии рабочего зазора между валками. Задача состоит в определении продолжительности технологического процесса перемешивания, т. е. времени  $t^*$ .

В безразмерной форме указанные условия имеют вид

$$\tau = 0, \quad \xi = \xi, \quad \xi = \xi = 0,$$

$$\tau = \tau^*, \quad \xi = 0, \quad \xi = -\xi,$$

где  $\{\xi, \xi\} = \frac{\{x_{00}, x_H\}}{\sqrt{2} \frac{RH}{0}}$ ,  $\tau^* = \frac{t^* V}{\sqrt{2} RH}$

При этом объем жидкости, вычисленный для начального момента времени, составит

$$V_- = -2\xi - \frac{2}{3}\xi_{00}.$$

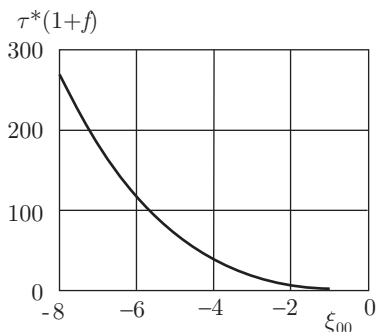


Рис. 3.18. Зависимость продолжительности «слива» от начального уровня жидкости

На рис. 3.18 представлены результаты расчета зависимости продолжительности «слива» от начального уровня жидкости. Под временем слива (или временем пребывания) понимается время, необходимое для перехода жидкости из состояния загрузки, иллюстрируемого рис. 3.17 *а*, к состоянию, соответствующего моменту рис. 3.17 *б*. Из графика видно, что с уменьшением

начального уровня время «слива» сокращается. Например, для  $\xi = -4$  время слива  $\tau^*(1+f) = 40$ . При условиях  $f = -0,95$ ;  $R = 0,1$  м;  $H = 10^{-3}$  м;  $V = 0,1$  м/с размерное время «слива» составит порядка двух минут:

$$t^* = \frac{\tau \sqrt{2RH}}{V} \frac{1}{(1+f)} = \frac{2 * 0,1 * 10^{-3}}{\sqrt{0,1 * 0,05}} = 112,8 \text{ с.}$$

### 3.5. Течение аномально вязкой жидкости в клинообразном зазоре с упругой стенкой

Рассматриваемое течение имеет место при нанесении составов на поверхность, в том числе в пленочных сушилках. Течение обусловлено не перепадом давления, а относительным движением стенок жидкостного канала. Имеется большое разнообразие конструктивного выполнения одной из стенок (лопасти, ножа). Лопастей бывают неподвижные, подвижные, сплошные, составные, металлические, резиновые и т.п. Случай течения вязкой жидкости при постоянном зазоре между лопастью и плоскостью рассмотрен в работе [77].

В настоящей работе рассмотрено стационарное течение жидкости Оствальда–де Вилля в клинообразном зазоре с подвижной, подпружиненной стенкой (лопастью). Подобная задача о качении тяжелого цилиндра по горизонтальной поверхности, покрытой слоем вязкой жидкости, была рассмотрена в 1953 г. П. Л. Капицей [78].

Расчетная схема с принятой декартовой системой координат представлена на рис. 3.19. Ось  $x$  лежит на непроницаемой горизонтальной поверхности, движущейся вдоль оси  $x$  со скоростью  $V$ . Ось  $y$  направлена вертикально вверх и соприкасается с передней кромкой лопасти. Верхняя, наклонная пластина

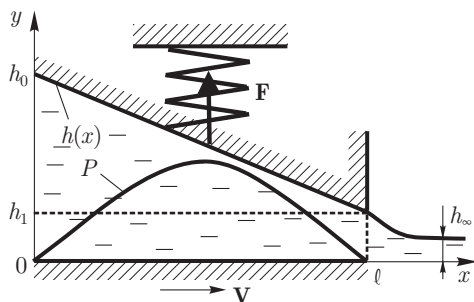


Рис. 3.19. Расчетная схема

(лопасть) механически связана с пружиной и имеет возможность вертикального перемещения, сохраняя свой угол наклона ( $h_0 - h_1 = \text{const}$ ). Величина начального зазора  $h_0$ , конечного —  $h_1$ . Протяженность зоны течения (ширина лопасти)  $\ell$ , длина лопасти  $B$ , толщина наносимого покрытия  $h_\infty$ . Требуется найти распределение давления по длине зазора, толщину наносимого покрытия  $h_\infty$ , расход жидкости, равновесное положение верхней пластины ( $h_1$ ).

Рассмотрим изотермическое двумерное течение несжимаемой жидкости Оствальда–де Вилля. Капиллярные силы, упругие эффекты, силы тяжести и инерции не учитываем. Приняв  $(h_0 - h_1)/\ell \ll 1$ , считаем давление однородным по высоте зазора  $\partial p/\partial y = 0$ . Течение в зазоре описывается уравнением движения, состояния и условием неразрывности:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = \mu \left| \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad Q = B \int_0^h v_x dy. \quad (3.112)$$

где  $x, y$  — декартовы координаты,  $p$  — давление,  $v_x$  — осевая компонента скорости,  $\tau_{xy}$  — касательное напряжение,  $Q$  — объемный расход,  $\mu, n$  — реологические постоянные.

Граничные условия для скорости — условие прилипания жидкости к ограничивающим поверхностям

$$y = 0, \quad v_x = V; \quad y = h(x), \quad v_x = 0, \quad (3.113)$$

где  $h(x)$  — уравнение поверхности лопасти.

Давление на входе и на выходе канала атмосферное. Без снижения общности положим давление равным нулю:

$$x = 0, \quad p = 0; \quad x = \ell, \quad p = 0. \quad (3.114)$$

Решение задачи с представленным в (3.112) уравнением состояния достаточно громоздко и сложно, в частности приводит к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка для давления. Для упрощения задачи примем, что эффекты аномалии вязкости обусловлены чисто сдвиговой составляющей течения, а уравнение состояния запишем так:

$$\tau_{xy} = \mu \left| \frac{V}{h} \right|^{n-1} \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (3.115)$$

Поскольку высота канала  $h$  изменяется по длине выражение (3.115) предполагает однородную вязкость по высоте и изменяющуюся по длине зоны течения.



Проинтегрировав уравнение движения в (3.112) с учетом (3.115) и граничных условий (3.113), найдем выражение для осевой скорости:

$$v_x = \frac{1}{2\mu} \left( \frac{h}{V} \right)^{n-1} \frac{dp}{dx} (y^2 - hy) + V \left( 1 - \frac{y}{h} \right). \quad (3.116)$$

Расход жидкости в любом поперечном сечении канала постоянен:  $Q = \text{const}$ , но пока неизвестен. Проинтегрировав выражение (3.116) согласно второму уравнению в (3.112), найдем расход жидкости

$$\frac{Q}{B} = -\frac{h^3}{12} \left( \frac{h}{V} \right)^{n-1} \frac{dp}{dx} + \frac{Vh}{2}. \quad (3.117)$$

Согласно выражению (3.117) уравнение для давления

$$\frac{dp}{dx} = \frac{6\mu V^n}{h^{n+1}} - \frac{12Q\mu V^{n-1}}{Bh^{n+2}}. \quad (3.118)$$

Высота зазора описывается линейной функцией (см. рис. 3.21)

$$h = h_0 - ax, \quad a = \frac{h_0 - h_1}{\ell}. \quad (3.119)$$

Разделив переменные в уравнении (3.118) и проинтегрировав с учетом соотношения (3.119) и граничного условия для давления в начале зоны течения (3.114), получим выражение для давления в зазоре:

$$p = \frac{6\mu V^n}{an} [(h_0 - ax)^{-n} - h_0^{-n}] - \frac{12\mu Q V^{n-1}}{aB(n+1)} [(h_0 - ax)^{-n-1} - h_0^{-n-1}]. \quad (3.120)$$

Согласно выражению (3.120) рассматриваемое течение имеет свойство  $\lim_{h_1 \rightarrow 0} p = \infty$ . Поэтому при любой конечной жесткости крепления лопасти в условиях течения всегда выполняется соотношение  $h_1 > 0$ .

Значение расхода найдем, воспользовавшись граничным условием для давления в конце зоны течения (3.114)

$$Q = \frac{BV(n+1)(h_1^{-n} - h_0^{-n})}{2n(h_1^{-n-1} - h_0^{-n-1})}. \quad (3.121)$$

Расход жидкости в покрытии на большом удалении от лопасти  $Q = BVh_\infty$ . Рассматривая совместно это выражение и

выражение (3.121), находим толщину покрытия

$$h_{\infty} = \frac{(n+1)(h_1^{-n} - h_0^{-n})}{2n(h_1^{-n-1} - h_0^{-n-1})}. \quad (3.122)$$

В ньютоновском случае  $n = 1$ ,  $h_{\infty} = h_1 h_0 / (h_1 + h_0)$ .

Введем безразмерные переменные и параметры

$$\Delta = \frac{h_{\infty}}{h_1}, \quad \delta = \frac{h_1}{h_0 - h_1}, \quad f_0 = \frac{F_0 a (a\ell)^n n}{6B\mu\ell V^n}, \quad C = \frac{ca^2 (a\ell)^n n}{6B\mu V^n}. \quad (3.123)$$

При этом  $h_1 = a\ell\delta$ ,  $h_0 = a\ell(1 + \delta)$ .

В безразмерной форме выражение (3.122) имеет вид

$$\Delta = \frac{(n+1)[\delta^{-n} - (1+\delta)^{-n}]}{2n\delta[\delta^{-n-1} - (1+\delta)^{-n-1}]}. \quad (3.124)$$

Согласно выражению (3.124) толщина покрытия не зависит от протяженности зоны течения  $\ell$ , но зависит от соотношения высот входного и выходного зазоров (угла наклона лопасти) и индекса течения.

Асимптотические свойства выражения (3.124):  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \Delta = (1+n)/2n$ ,  $\lim_{\delta \rightarrow \infty} \Delta = 0,5$ .

В частности, при  $h_1 = h_0$  (параллельная лопасть) толщина покрытия  $h_{\infty} = h_0/2$ . Для ньютоновских сред толщина покрытия находится в интервале  $h_1/2 \leq h_{\infty} < h_1$ . Результаты анализа формулы (3.124) представлены на рис. 3.20. Согласно рисунку для псевдопластиков ( $n < 1$ ) при малых  $\delta$  толщина покрытия превышает зазор на выходе ( $h_{\infty} > h_1$ ). Имеет место «разбухание», традиционно характерное для упругих жидкостей.

Для дилатантных сред ( $n > 1$ ) характерно ( $h_{\infty} < h_1$ ).

Согласно схеме, представленной на рис. 3.19, гидродинамическая подъемная сила, действующая со стороны жидкости на лопасть, уравнивается силой упругости пружины. Сила, действующая со стороны пружины, зависит от степени ее сжатия. Допустим, сила сжатия пружины  $F$  описывается линейной зависимостью

$$F = F_0 + ch_1, \quad (3.125)$$

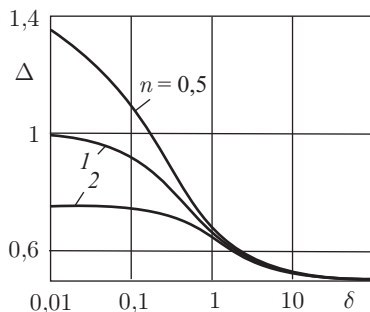


Рис. 3.20. Зависимость безразмерной толщины покрытия ( $\Delta$ ) от индекса течения ( $n$ ) и параметра размера зоны течения ( $\delta$ )

где  $c$  — жесткость пружины,  $F_0$  — предварительный натяг пружины (усилие при  $h_1 = 0$  и неподвижной нижней поверхности).

Если в формуле (3.125) положить  $c = 0$ , а под  $F_0$  понимать массу лопасти, то задача переходит в задачу о гидродинамическом равновесии тяжелой лопасти. Ввиду отмеченного выше свойства выражения (3.120) под упругостью можно понимать упругость конструкции, соединяющей лопасть с горизонтальной поверхностью. Поэтому, даже жестко закрепленная лопасть имеет конечную упругость. Так в соответствующих условиях распорное усилие может вызвать прогиб горизонтальной поверхности.

Гидродинамическая подъемная сила определяется интегралом

$$F = B \int_0^{\ell} p(x) dx. \quad (3.126)$$

Рассматривая совместно выражения (3.120), (3.123), (3.125), (3.126), выполнив интегрирование, получим уравнение, связывающее высоту подъема лопасти  $\delta$ , жесткость пружины  $C$  и ее предварительный натяг  $f_0$ :

$$f_0 + C\delta = \frac{1}{1-n} \left[ (1+\delta)^{-n+1} - \delta^{-n+1} - (1-n)(1+\delta)^{-n} \right] - \frac{[\delta^{-n} - (1+\delta)^{-n}] [\delta^{-n} - (1+\delta)^{-n} - n(1+\delta)^{-n-1}]}{n [\delta^{-n-1} - (1+\delta)^{-n-1}]}, \quad n \neq 1, \quad (3.127)$$

$$f_0 + C\delta = \ln \left( \frac{1+\delta}{\delta} \right) - \frac{2}{1+2\delta}, \quad n = 1.$$

Результаты численного анализа выражения (3.127) представлены на рис. 3.21. Видно, что без предварительного нагружения пружины (кривые при  $f_0 = 0$ ) зависимости имеют монотонно убывающий характер. При предварительном нагружении пружины (кривые при  $f_0 = 0,15$ ) существует предельное значение безразмерной высоты зазора на выходе ( $\delta$ ), выше которого течение невозможно, поскольку при этом жесткость пружины равна нулю. По физическому смыслу указанные вертикальные ветви кривых отвечают случаю тяжелой лопасти. При этом под параметром  $f_0$  следует понимать безразмерную массу лопасти. Двойная логарифмическая анаморфоза графика рис. 3.21 не дает возможности проанализировать поведение системы в окрестности малых жесткостей пружины.

На рис. 3.22 представлен фрагмент графика рис. 3.21 в окрестности нулевой жесткости с линейной вертикальной

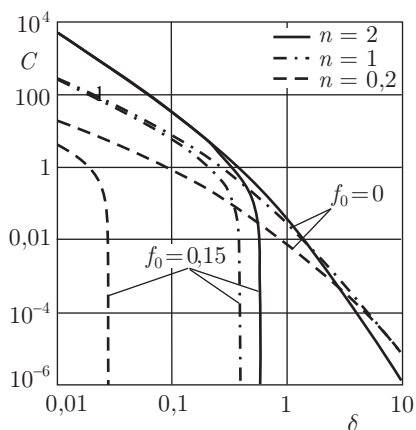


Рис. 3.21. Зависимость безразмерной жесткости  $C$  от безразмерной высоты зазора  $\delta$  и параметров  $n$  и  $f$

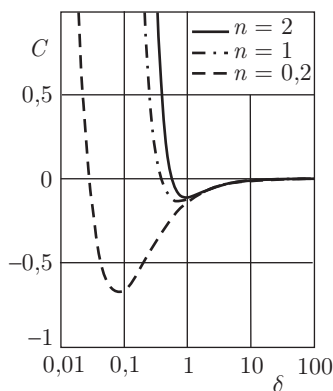


Рис. 3.22. Зависимость  $C$  от  $\delta$  в окрестности нуля при  $f = 0,15$

шкалой жесткости пружины. Видно, что зависимости носят экстремальный характер. Причем в окрестности экстремума жесткость пружины отрицательная. Следовательно, для реализации этого режима необходимо использовать тяжелую лопасть, а пружина (см. рис. 3.19) должна работать на растяжение. Анализ выражения (3.126) показал, что распорное усилие при любых параметрах  $n$  и  $\delta$  положительно ( $F > 0$ ).

### 3.6. Валковое течение аномально вязкой жидкости при значительной фрикции

Рассматривается работа валковой машины в режиме перемешивания. Для интенсификации процесса перемешивания используют режим работы со значительной фрикцией. Реологические свойства значительной части полимеров и резин можно описать «степенным законом» или законом Освальда де Вилля. Однако непосредственное использование степенного закона приводит к значительным техническим трудностям при получении аналитического решения задачи. В данной работе предпринята попытка использовать асимптотическое приближение, значительно упрощающее задачу.

Схема течения представлена на рис. 3.23. Валки имеют одинаковые радиусы ( $R$ ), но различную окружную скорость  $u$  и  $u$  ( $u \gg u$ ). Начало координат помещено в середине сечения минимального зазора. Начало зоны течения характеризует

координата  $x$ , окончание —  $x_1$ . Текущая полувысота зазора  $h(x)$ . Минимальный зазор  $2H$ . Течение плоское, изотермическое. Среда несжимаемая. Давление однородно по высоте зазора ( $\partial p / \partial y = 0$ ), следовательно,  $p = p(x)$ .

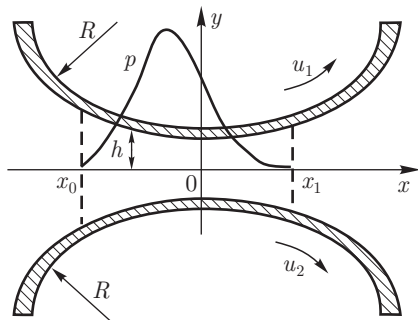


Рис. 3.23. Схема течения

Течение описывается системой уравнений

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = \mu_0 \left[ \frac{(\Delta : \Delta)}{2} \right]^{\frac{n-1}{2}} \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad (3.128)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad (3.129)$$

$$y = h, \quad v_x = u_1, \quad (3.130)$$

$$y = -h, \quad v_x = u_2, \quad (3.131)$$

$$x = x_0, \quad p = 0, \quad (3.132)$$

$$x = x_1, \quad p = 0, \quad \frac{dp}{dx} = 0, \quad (3.133)$$

где  $p$  — давление;  $x, y$  — координаты;  $\tau_{xy}$  — касательное напряжение;  $v_x, v_y$  — компоненты скорости;  $\mu_0, n$  — реологические константы. Здесь (3.128) — уравнения движения и состояния, (3.129) — уравнение неразрывности, (3.130), (3.131) — условия прилипания, (3.132), (3.133) — условия для давления (в концепции Гаскелла).

Входящий в уравнение состояния (3.128) второй инвариант тензора скоростей деформации с учетом соотношений

$$v_z = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} \gg \frac{\partial v_y}{\partial x}, \quad h \ll x_1 - x_0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} \gg \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

и уравнения (3.130), имеет вид

$$\frac{(\Delta : \Delta)}{2} = \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2. \quad (3.134)$$

С учетом соотношения (3.134) уравнение состояния (3.128) примет вид

$$\tau_{xy} = \mu_0 \left| \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (3.135)$$

Представим осевую скорость в виде суммы

$$v_x = \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_1 - u_2}{2h} y + v_x^*(x, y). \quad (3.136)$$

Первые два слагаемых правой части характеризуют простое сдвиговое течение, обусловленное фрикцией, а третье — неоднородностью давления. Задача сводится к определению функции  $v_x^*(x, y)$ . При этом считаем правомерной оценку

$$\frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_1 - u_2}{2h} y \gg v_x^*(x, y). \quad (3.137)$$

Подставив выражение (3.136) в (3.135), с учетом оценки (3.137) запишем выражение для касательного напряжения в форме

$$\tau_{xy} = \mu_0 \left| \frac{u_1 + u_2}{2h} \right|^{n-1} \left( \frac{u_1 - u_2}{2h} + \frac{\partial v_x^*}{\partial y} \right). \quad (3.138)$$

Согласно (3.138) эффекты аномалии вязкости обусловлены простой сдвиговой компонентой течения. Эффективная вязкость  $\mu_0 |(u_1 + u_2)/(2h)|^{n-1}$  однородна по высоте зазора, но изменяется по его длине.

Из граничных условий (3.130), (3.131) с учетом (3.136) получим условия для функции  $v_x^* : y = \pm h, v_x^* = 0$ .

Дважды проинтегрируем уравнение движения (3.128), с учетом выражения (3.138) и граничных условий для функции  $v_x^*$ . При этом получим

$$v_x^* = \frac{1}{2\mu_0} \left| \frac{u_1 - u_2}{2h} \right|^{1-n} \frac{dp}{dx} (y^2 - h^2). \quad (3.139)$$

Найдем осевой расход жидкости по формуле

$$Q = \int_{-h}^h v_x dy, \quad Q = \text{const.}$$

Проинтегрировав с учетом (3.136), (3.139), получим

$$Q = (u_1 - u_2) h - \frac{2h^3}{3\mu_0} \left| \frac{u_1 - u_2}{2h} \right|^{1-n} \frac{dp}{dx}. \quad (3.140)$$

С учетом граничного условия (3.133) определим расход

$$Q = (u_1 - u_2) h_1, \quad h_1 = h(x_1). \quad (3.141)$$

Уравнение для давления<sup>0</sup> (3.140) с учетом (3.141) запишем так:

$$\frac{dp^1}{dx} = 3\mu \left| \frac{u_1 - u}{2} \right|^n \left( \frac{1}{1+n} - \frac{h}{h^{2+n}} \right). \quad (3.142)$$

Примем параболическую аппроксимацию поверхностей валков  $h = H(1 + \xi)$  и перейдем к безразмерным переменным

$$\{\xi, \xi, \xi\} = \left\{ \frac{x}{\sqrt{2RH}}, \frac{x}{\sqrt{2RH}}, \frac{x}{\sqrt{2RH}} \right\}, \quad P = \frac{p_{H_1+h_0}}{3\mu \sqrt{2RH}} \left| \frac{u_1 - u}{2} \right|^{-n} \quad (u \neq u). \quad (3.143)$$

С учетом соотношений (3.143) уравнение (3.142) примет вид

$$\frac{dP}{d\xi} = \frac{1}{(1 + \xi)^1} - \frac{1 + \xi_1}{(1 + \xi)^2} \quad (3.144)$$

Известно соотношение

$$\int \frac{d\xi}{(1 + \xi)^{2+n}} = \frac{\xi}{2(1+n)(1 + \xi)^{1+n}} + \frac{2n+1}{2(1+n)} \int \frac{d\xi}{(1 + \xi)^1}$$

Разделив переменные в (3.144) и проинтегрировав с учетом последнего соотношения и граничного условия (3.132) в форме  $\xi = \xi$ ,  $P = 0$ , получим выражение для безразмерного давления

$$P = \left[ 1 - (1 + \xi_1) \frac{2n+1}{2(1+n)} \right] \int_{\xi}^{\xi} \frac{d\xi}{(1 + \xi)^1} - \frac{(1 + \xi_1)}{2(1+n)} \left[ \frac{\xi}{(1 + \xi)^1} - \frac{\xi}{(1 + \xi_0)^{1+n}} \right]. \quad (3.145)$$

Условие (3.133) в безразмерной форме имеет вид  $\xi = \xi$ ,  $P = 0$ . Используя это условие для (3.145), получим уравнение, связывающее параметры  $\xi$ ,  $\xi$ :

$$\left[ 1 - (1 + \xi_1) \frac{2n+1}{2(1+n)} \right] \int_{\xi}^{\xi} \frac{d\xi}{(1 + \xi)^1} - \frac{(1 + \xi_1)}{2(1+n)} \left[ \frac{\xi}{(1 + \xi_1)^1} - \frac{\xi}{(1 + \xi_0)^{1+n}} \right] = 0. \quad (3.146)$$

Параметры  $\xi$ ,  $\xi$  характеризуют безразмерные границы зоны течения. Согласно (3.146) их численные значения зависят от индекса течения  $n$ , но не зависят от трения.

Из полученных расчетных выражений (3.145), (3.146) видно, что использованный способ выделения доминирующей компоненты скорости (простой сдвиг) к рассматриваемой задаче позволяет значительно упростить расчетные выражения. Расчетные выражения по форме близки к расчетным выражениям, характерным для ньютоновской жидкости.

Рассматриваемая задача недоопределенная, поскольку число неизвестных функций превышает количество уравнений. Ввиду этого анализ задачи проводим в следующей последовательности. Задаем значение  $\xi_0$  из интервала  $[-7; -1]$ , далее с помощью уравнения (3.146) находим соответствующее значение  $\xi_1$ . Расчеты выполнены для  $n$  в интервале  $[0,2; 2]$ .

Результаты расчета представлены на рис. 3.24. Из рисунка видно, что протяженность зоны течения на входе ( $\xi_0$ ) ограничена, причем с увеличением численного значения индекса течения размер зоны течения уменьшается. Например, для  $n = 2$  предельное значение входной зоны составляет  $-2$  и при дальнейшем ее увеличении расход жидкости практически не увеличивается, поскольку стабилизируется значение параметра  $\xi_1$ . В случае ярко выраженных псевдопластиков ( $n = 0,2$ ) с увеличением зоны входа расход продолжает расти, даже при  $\xi_0 = -7$ . Результаты, представленные на рис. 3.24 вполне согласуются с известными результатами, полученными при точном решении данной задачи.

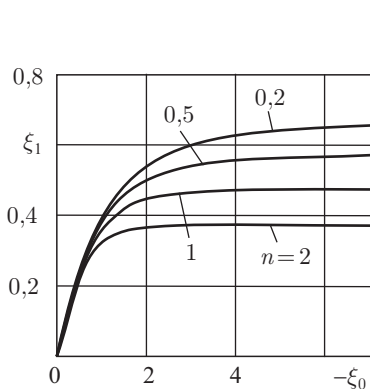


Рис. 3.24

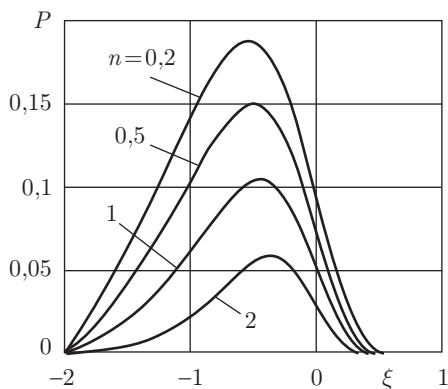


Рис. 3.25

На рис. 3.25 представлены эпюры давления для  $n = 0,2; 0,5; 1; 2$  при фиксированном размере зоны входа  $\xi_0 = -2$ . Из рисунка видно, что с ростом индекса течения расход жидкости снижается, поскольку уменьшается величина  $\xi_1$ . Точки экстре-



муна давления и окончания течения равноудалены от сечения минимального зазора. С увеличением индекса течения величина безразмерного давления снижается.

### 3.7. Диссипативный нагрев при вальцевании волоконнаполненных полимерных систем

Представлен теоретический анализ диссипативного нагрева матрицы в окрестности поверхности волокна. С использованием преобразования Ханкеля получено аналитическое решение задачи для вязкой и аномально-вязкой матрицы. Представлены результаты численного анализа модели.

Известно, что эффективная вязкость наполненных систем всегда выше вязкости дисперсионной среды. Это обусловлено появлением дополнительных касательных напряжений на поверхности частиц наполнителя и связанных с этим затрат энергии. Поскольку вязкость дисперсионной среды обычно высока (для резины  $\mu \approx 10 \text{ Па} \cdot \text{с}$ ), можно предполагать в условиях переработки и перемешивания интенсивное тепловыделение у поверхности волокон. Это может вызвать деструкцию термочувствительных компонентов системы и, следовательно, повлиять на качественные показатели готового изделия. Кроме того, инструментальными методами измерить локальную температуру диссипативного разогрева практически невозможно. В большинстве исследований перерабатываемую среду рассматривают как однородный континуум.

Целью настоящего рассмотрения является инженерная оценка диссипативного тепловыделения у поверхности волокна.

В процессе течения волоконнаполненной системы в общем случае имеет место наклонное нестационарное обтекание волокна дисперсионной средой. В данном рассмотрении ограничимся продольной составляющей стационарного течения.

Отдельное волокно топологически ограничено другими волокнами, поэтому считаем, что оно находится в некоторой трубке с полупроницаемыми стенками. Радиус трубки  $R$  связан со средним расстоянием между волокнами и может быть найден по формуле [79]:  $R = d/(2,1\sqrt{c})$ , где  $d$  — диаметр волокна,  $c$  — объемная концентрация волокон. В качестве оценки скорости осевого перемещения волокна относительно стенок трубки примем  $V \approx \dot{\gamma}\ell$ , где  $\dot{\gamma}$  — скорость деформации наполненной системы,  $2\ell$  — длина волокна. Течение и теплообмен имеет осевую симметрию.

Схема течения и система координат представлены на рис. 3.26. Предварительно рассматривается задача о медленном ( $Re \gg 1$ ) сдвиговом течении аномально-вязкой несжимаемой жидкости. На поверхности волокна ( $r = \alpha R$ ,  $\alpha < 1$ ) выполняется

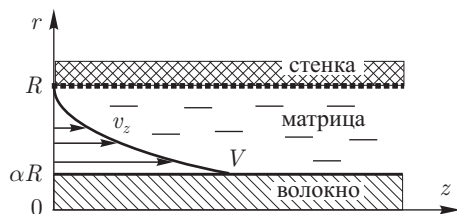


Рис. 3.26. Схема течения

условие прилипания. В качестве граничного условия на пористой стенке используется условие скольжения Саффмана [80]. Реологические свойства жидкости, как и теплофизические характеристики, не зависят от температуры. Для жидкости Оствальда де Вилля [ $\tau = \mu (dv_z/dr)^n$ ] течение описывается системой уравнений

$$\frac{d}{dr} \left[ r \left( \frac{dv_z}{dr} \right)^n \right] = 0, \quad (3.147)$$

$$r = \alpha R, \quad v_z = V,$$

$$r = R, \quad v_z = \frac{\sqrt{k}}{A} \frac{dv_z}{dr},$$

где  $r, z$  — цилиндрические координаты,  $\tau$  — касательное напряжение,  $v_z$  — осевая компонента скорости,  $A$  — коэффициент скольжения,  $k$  — коэффициент проницаемости пористой среды,  $\mu, n$  — реологические постоянные,  $\alpha$  — отношение радиуса поверхности волокна к радиусу трубки. Анализ показывает, что скольжение у стенки не влияет на качественную картину диссипативного разогрева, поэтому, для упрощения выражений, далее полагаем  $k = 0$ .

Из решения задачи (3.147) находим осевую компоненту скорости и градиент скорости сдвига для аномальной и вязкой жидкости:

$$v_z = \frac{V \left[ (r/R)^{(n-1)/n} - 1 \right]}{\alpha^{(n-1)/n} - 1}, \quad \frac{dv_z}{dr} = \frac{V(n-1)}{Rn(r/R)^{1/n} \left( \alpha^{(n-1)/n} - 1 \right)}, \quad n \neq 1, \quad (3.148)$$

$$v_z = \frac{V \ln(r/R)}{\ln \alpha}, \quad \frac{dv_z}{dr} = \frac{V}{r \ln \alpha}, \quad n = 1.$$

С точки зрения теплообмена имеем систему двух неограниченных цилиндров (см. рис. 3.26). Поток тепла вдоль оси  $z$  отсутствует, поэтому учитываем только радиальный поток. В наружном цилиндре (жидкость) действуют непрерывные источники тепла (диссипативное тепловыделение). Имеем задачу нестационарной теплопроводности с граничным условием четвертого рода на поверхности волокна. На поверхности внешнего цилиндра ( $r = R$ ) принимаем условие адиабатичности ( $\partial T / \partial r = 0$ ), поскольку за поверхностью рассматриваемой «трубки» находится подобная «трубка» с идентичной картиной течения. При этом теплоотвод за счет охлаждения стенок смесительной камеры и ротора не учитываем, считая, что рассматриваемая область находится в середине перемешиваемой среды. Теплофизические свойства волокна, например капронового, близки к теплофизическим свойствам жидкости (резины), поэтому для упрощения задачи принимаем идентичность теплофизических свойств матрицы и волокна. Начальную температуру системы примем равной нулю, поскольку ищется превышение температуры над начальной. Диаметр волокна не изменяется.

С учетом принятых допущений и соотношений (3.148) задача нестационарной теплопроводности описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial F} &= \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) + \Phi(\xi), \\ F_0 &= 0, \quad \theta = 0, \\ \xi &= 1, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 0, \\ \xi &= 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 0, \quad \theta < \infty, \end{aligned} \quad (3.149)$$

где  $\xi = r/R$  — безразмерный радиус,  $F = at/R$  — число Фурье,  $a$  — коэффициент температуропроводности,  $t$  — время,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности,  $\theta(\xi, F)$  — безразмерная температура (форма выражения зависит от индекса течения),  $\Phi(\xi)$  — безразмерная диссипативная функция (форма выражения зависит от индекса течения),

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{T\lambda}{\mu} \left[ \frac{Rn \left( \alpha^{(n-1)/n} - \right)}{V(n-1)} \right]^{n+1}, \quad \Phi = \begin{cases} \frac{1}{\xi^{(n+1)/n}} & \alpha < \xi < \\ 0, & 0 \leq \xi \leq \alpha \\ & \text{для } n \neq 1, \end{cases} \\ \theta &= \frac{T\lambda \ln \alpha}{\mu V} \quad \Phi = \begin{cases} \frac{1}{\xi^2}, & \alpha < \xi < 1 \\ 0, & 0 \leq \xi \leq \alpha \end{cases}, \quad \text{для } n = 1. \end{aligned}$$

Для решения задачи (3.149) используем интегральное преобразование Ханкеля [6]. При этом в области изображений имеем

$$\frac{\partial \Theta}{\partial} = -\mu_k \Theta + f_k, \quad (3.150)$$

$$F_0 = 0, \quad \Theta = 0,$$

где  $\Theta = \int_0^1 \theta J(\mu_k \xi) \xi d\xi$  — изображение безразмерной температуры,  $f_k = \int_0^1 \Phi(\xi) J(\mu_k \xi) \xi d\xi$  — изображение диссипативной функции,  $J(\mu_k \xi)$  — функция Бесселя нулевого порядка,  $\mu_k$  — корни уравнения  $J(\mu_k) = 0$ .

Решение задачи (3.150) в области изображений имеет вид

$$\Theta = f F \quad \text{для } \mu_k = 0,$$

$$\Theta = \frac{f_k}{\mu_k} \left[ 1 - \exp(-\mu_k F) \right] \quad \text{для } \mu_k > 0.$$

Здесь трансформация диссипативной функции имеет вид

$$f = \begin{cases} -\ln \alpha, & n = 1 \\ \frac{n(1 - \alpha^{-1/n})}{n-1}, & n \neq 1 \end{cases}, \quad f_k = \begin{cases} \int_{\alpha}^1 \frac{1}{\xi} J(\mu_k \xi) d\xi, & n = 1 \\ \int_{\alpha}^1 \frac{1}{\xi^{1/n}} J(\mu_k \xi) d\xi, & n \neq 1 \end{cases}. \quad (3.151)$$

Применив формулу обращения, перейдем к оригиналу температуры:

$$\theta = 2f F + 2 \sum_{k=1}^{\infty} f_k \frac{J(\mu_k \xi)}{\mu_k J_k(\mu_k)} \left[ 1 - \exp(-\mu_k F) \right]. \quad (3.152)$$

Согласно первому слагаемому в правой части выражения (3.152) температура растет неограниченно во времени. При численном анализе выражений (3.151), (3.152) учитывались первые 20 членов ряда. Собственные числа задачи:  $\mu = 3,8317, \dots, \mu = 63,61136$ . Интегралы  $f_k$  целесообразно вычислять методом механических квадратур, поскольку при их представлении в виде рядов имеет место плохая сходимость, особенно для больших значений  $\mu_k$ . На рис. 3.27 представлены расчетные эпюры температур, выполненные для  $\alpha=0,2$  и  $n=1$ . Координата  $\xi = \alpha = 0,2$  характеризует положение поверхности волокна (показано вертикальной штриховой линией). Соот-

ветственно, зона  $0,2 \leq \xi < 1$  отвечает жидкости. Видно, что наиболее резко температура растет в начальный момент времени. При этом радиальное распределение температур подобно распределению осевой скорости. Однако экстремум температуры находится не на поверхности волокна (как это имеет место для градиента скорости), а смещен в сторону жидкости. Вероятно, это связано с отводом тепла поверхностью волокна. Следовательно, наиболее интенсивную термическую деструкцию термочувствительных компонентов матрицы следует ожидать не на поверхности волокна, а на некотором удалении, т.е. внутри матрицы. С течением времени наблюдается равномерный рост температуры, а радиальный градиент температуры уменьшается. Анализ показал, что для аномально-вязкой жидкости, не смотря на количественное отличие, характер изменения температур подобен представленному на рис. 3.27.

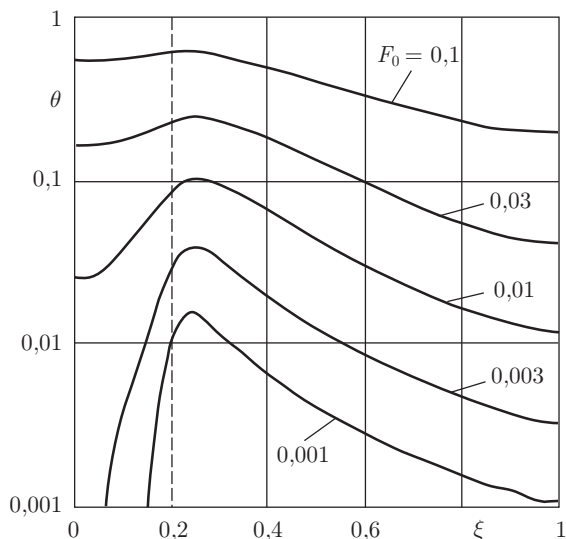


Рис. 3.27. Эволюция температурного поля при  $\alpha = 0,2$

На рис. 3.28 представлена зависимость максимальной безразмерной температуры  $\theta_m = \max[\theta(r, F)]$  от числа Фурье и безразмерного параметра  $\alpha$ . Видно что зависимости носят монотонно возрастающий характер. С уменьшением относительного диаметра волокна максимальная температура повышается.

Выполним оценку диссипативного саморазогрева при перемешивании капроновых волокон с резиновой матрицей на смесителе «Вернер–Пфляйдерер». Объем камеры смешения  $V = 330$  л,

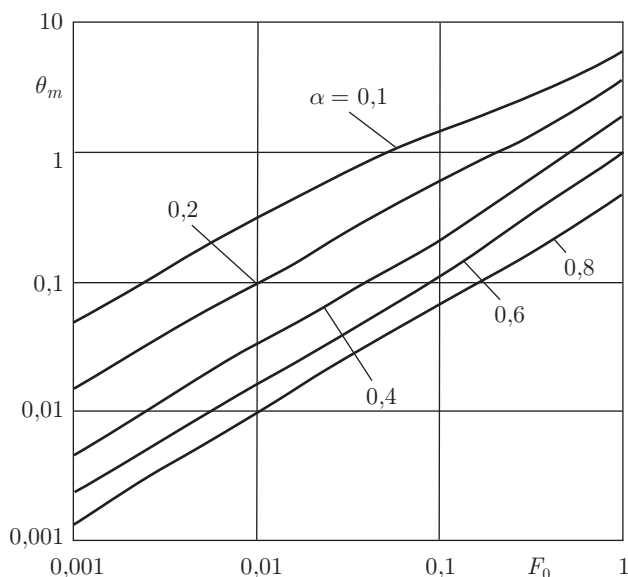


Рис. 3.28. Зависимость максимальной температуры  $\theta_m$  от числа Фурье при различных значениях  $\alpha$

мощность привода —  $N = 1870$  кВт. Без учета потерь мощности средний градиент скорости сдвига составляет  $\dot{\gamma} = N/(\rho CV) = 3,42 \text{ с}^{-1}$ , где  $\rho$  — плотность ( $\rho = 1200 \text{ кг/м}^3$ ),  $C$  — теплоемкость ( $C = 1380 \text{ Дж/кгК}$ ). Диаметр волокна  $d = 30 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ . Следовательно, радиус «трубки»  $R = d/\alpha = 150 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ . Длина волокна  $2\ell = 0,01 \text{ м}$ . Скорость осевого перемещения волокна относительно стенок трубки  $V \approx \dot{\gamma}\ell = 0,0171 \text{ м/с}$ . Коэффициент температуропроводности резины  $a = 9 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ . Если протяженность интенсивной деформации 1 см, то при окружной скорости гребня ротора 0,5 м/с время пребывания волокна составит 0,02 с. Соответствующее значение числа Фурье  $F_0 = 0,08$ . Согласно формулам (3.151), (3.152) или номограммы, представленной на рис. 3.28, расчетное значение максимальной безразмерной температуры равно  $\theta = 0,51$ . Повышение размерной температуры найдем по формуле  $T = \frac{\theta \mu V}{\lambda \ln_2 \alpha}$ . Оно составляет  $T = 38,4 \text{ К}$ . Отметим, что оценка выполнена достаточно грубо, но и из нее уже видно, что повышение температуры может быть весьма значительным.

## **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВАЛКОВОГО ТЕЧЕНИЯ ТЯЖЕЛЫХ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД**

В главе рассмотрено движение в валковом зазоре двух типов вязкопластичных сред — Шведова–Бингама и Гершеля–Балкли. Сохраняются основные допущения, принятые для рассматриваемого вида течения в гл. 3. Определены основные характеристики течений. Проведен анализ особенностей течений. Указаны границы применимости полученных математических моделей течения. Алгоритм решений задач течения вязкопластичных сред существенно отличается от вышерассмотренного решения задач течения вязких и аномально вязких жидкостей. В частности, эпюра давления имеет излом (разрыв первой производной) на стыке зон прямотока и противотока.

### **4.1. Течение среды Шведова–Бингама**

**4.1.1. Постановка задачи.** Для процесса нанесения составов типа паст или густых суспензий возникающие усилия сравнительно невелики, и основным технологическим параметром процесса является толщина материала, получающаяся на поверхности валков после выхода из рабочего зазора. При этом силы вязкого трения соизмеримы с силами тяжести.

Полагаем, что валки имеют достаточную длину, пренебрегая тем самым течением материала вдоль валков (задача плоская,  $\partial/\partial z = 0$ ). Физические свойства жидкости не зависят от температуры и давления.

Схема течения и принятая система координат представлены на рис. 4.1 Начало декартовой системы координат помещено в середине сечения минимального зазора. Ось  $y$  направлена горизонтально, ось  $x$  — вертикально вниз. Уровень жидкости  $x = x_0$  постоянен. Объемный расход жидкости  $Q$ . Окружная скорость

валков  $V$ , а их радиус  $R$ . Минимальный зазор между валками  $2H_0$ , а текущий  $2h$ . Текущая толщина квазитвердого ядра  $2h_0$ .

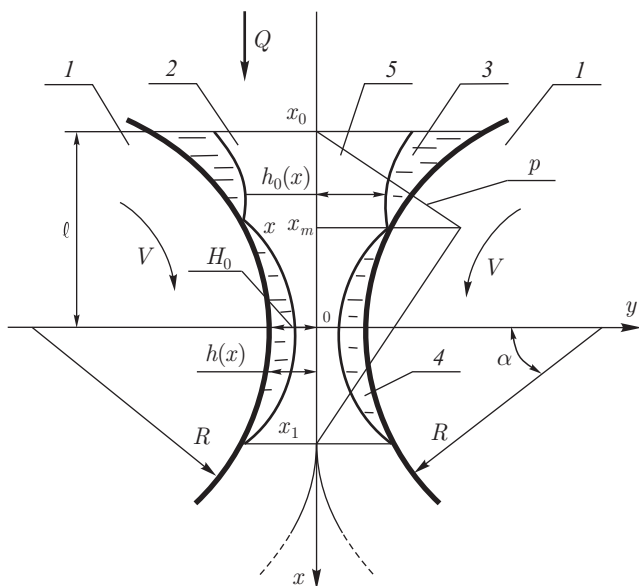


Рис. 4.1. Схема течения вязкопластической среды в вертикальном зазоре между валками: 1 — валки, 2 — жидкость, 3, 4 — первая (противотока) и вторая (прямотока) зоны вязкопластического сдвигового течения, 5 — квазитвердое ядро

Рассмотрим основные уравнения, описывающие течение вязкопластичной тяжелой жидкости в валковом зазоре. Течение стационарное ( $\partial/\partial t=0$ ). В декартовых координатах движение несжимаемой сплошной среды описывается следующей системой: уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

уравнения движения

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= g_x + \frac{1}{\rho} \left( -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right), \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= g_y + \frac{1}{\rho} \left( -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

где  $g_x, g_y$  — составляющие ускорения (массовой силы:  $g_x = g, g_y = 0$ );  $p$  — изотропное давление;  $\tau_{ij}$  — компоненты напряжений;  $v_x, v_y$  — компоненты скорости.



Для асимптотической оценки членов уравнения движения используем реологическую модель вязкопластической жидкости Гершеля–Балкли ( $\tau = \tau_0 + \eta \dot{\gamma}^m$ ), которая как частный случай ( $m = 1$ ) включает модель Шведова–Бингама.

Составляющие девиатора тензора напряжений вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= 2B \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \tau_{xy} = B \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \quad \tau_{yy} = 2B \frac{\partial v_y}{\partial y}, \\ B &= \left( \frac{\tau_0}{A^m} + \eta \right) A^{m-1}, \\ A &= \left[ 2 \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2}.\end{aligned}$$

Непосредственное решение задачи возможно исключительно численными методами. При этом, однако, следует учитывать, что задача содержит внутреннюю и внешнюю нелинейность, что существенно затрудняет построение разностной схемы. Внутренняя нелинейность обусловлена нелинейными реологическими свойствами среды и неизвестной границей квазитвердого ядра, внутри которого напряжения не превышают  $\tau_0$ , а на его границе выполняются условия Генки–Мизеса и непрерывность скорости жидкости (задача с неизвестной границей). Внешняя нелинейность обусловлена криволинейной подвижной границей течения — поверхностями валков. В свете сказанного представляется целесообразным выполнить упрощения задачи, базирующиеся на сильной вытянутости зоны течения, и привести рассматриваемую задачу к задаче контактной гидродинамики.

Характерными размерами зоны течения (масштабами) являются: в направлении оси  $x$  — продольный размер  $\ell$ , в направлении  $y$  — минимальный зазор  $H_0$ .

Введем параметры и безразмерные переменные:

$$\varepsilon = H_0/\ell, \quad V_x = v_x/V, \quad V_y = v_y/V, \quad X = x/\ell, \quad Y = y/H_0.$$

Составляющие девиатора тензора напряжений примут вид:

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= 2B \frac{V}{\ell} \frac{\partial V_x}{\partial X}, \quad \tau_{xy} = BV \left( \frac{1}{H_0} \frac{\partial V_x}{\partial Y} + \frac{1}{\ell} \frac{\partial V_y}{\partial X} \right), \quad \tau_{yy} = 2B \frac{V}{H_0} \frac{\partial V_y}{\partial Y}, \\ B &= \left( \frac{\tau_0}{A^m} + \eta \right) A^{m-1}, \\ A &= \frac{V}{H_0} \left[ 2\varepsilon^2 \left( \frac{\partial V_x}{\partial X} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial V_y}{\partial Y} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_x}{\partial Y} + \frac{\partial V_y}{\partial X} \right)^2 \right]^{1/2}.\end{aligned}$$

Рассматриваем случай, когда имеет место неравенство  $\varepsilon \ll 1$ . Пренебрегая в выражении для  $A$  величинами порядка  $\varepsilon$  и выше

и учитывая уравнение неразрывности  $\partial V_y / \partial Y = -\varepsilon \partial V_x / \partial X$ , можем записать асимптотическую оценку для  $A$ :

$$A = \frac{V}{H_0} \left| \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right|.$$

Подставив выражения для  $A$  и  $B$  в компоненты напряжений, получим

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= 2 \left[ \frac{\tau_0}{\frac{V}{H_0} \left| \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right|} + \eta \left( \frac{V}{H_0} \right)^{m-1} \left| \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right|^{m-1} \right] \frac{V}{\ell} \frac{\partial V_x}{\partial X}, \\ \tau_{xy} &= V \left[ \frac{\tau_0}{\frac{V}{H_0} \left| \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right|} + \eta \left( \frac{V}{H_0} \right)^{m-1} \left| \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right|^{m-1} \right] \left( \frac{1}{H_0} \frac{\partial V_x}{\partial Y} + \frac{1}{\ell} \frac{\partial V_y}{\partial X} \right), \\ \tau_{yy} &= 2 \left[ \frac{\tau_0}{\frac{V}{H_0} \left| \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right|} + \eta \left( \frac{V}{H_0} \right)^{m-1} \left| \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right|^{m-1} \right] \frac{V}{H_0} \frac{\partial V_y}{\partial Y}.\end{aligned}$$

Подставим найденные компоненты напряжений в уравнения движения

$$\begin{aligned}\rho V^2 \left( \frac{V_x}{\ell} \frac{\partial V_x}{\partial X} + \frac{V_y}{H_0} \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right) &= \\ &= 2 \frac{V}{\ell^2} \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \left[ \frac{\tau_0}{\frac{V}{H_0} \left| \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right|} + \eta \left( \frac{V}{H_0} \right)^{m-1} \left| \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right|^{m-1} \right] \frac{\partial V_x}{\partial X} \right\} + \\ &+ \frac{V}{H_0^2} \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \left[ \frac{\tau_0}{\frac{V}{H_0} \left| \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right|} + \eta \left( \frac{V}{H_0} \right)^{m-1} \left| \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right|^{m-1} \right] \left( \frac{\partial V_x}{\partial Y} + \varepsilon \frac{\partial V_y}{\partial X} \right) \right\} + \\ &\quad + \rho g - \frac{1}{\ell} \frac{\partial p}{\partial X},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho V^2 \left( \frac{V_x}{\ell} \frac{\partial V_y}{\partial X} + \frac{V_y}{H_0} \frac{\partial V_y}{\partial Y} \right) &= \\ &= \frac{V}{\ell H_0} \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \left[ \frac{\tau_0}{\frac{V}{H_0} \left| \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right|} + \eta \left( \frac{V}{H_0} \right)^{m-1} \left| \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right|^{m-1} \right] \left( \frac{\partial V_x}{\partial Y} + \varepsilon \frac{\partial V_y}{\partial X} \right) \right\} + \\ &+ 2 \frac{V}{H_0^2} \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \left[ \frac{\tau_0}{\frac{V}{H_0} \left| \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right|} + \eta \left( \frac{V}{H_0} \right)^{m-1} \left| \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right|^{m-1} \right] \frac{\partial V_y}{\partial Y} \right\} - \frac{1}{H_0} \frac{\partial p}{\partial Y}.\end{aligned}$$

Введем обозначения (см. также (4.46), (4.47))

$$\mathbf{St}^* = \frac{\rho g H_0}{\eta} \left( \frac{H_0}{V} \right)^m, \quad S^* = \frac{H_0}{V} \left( \frac{\tau_0}{\eta} \right)^{1/m}.$$

Для поперечной скорости в конвективных слагаемых уравнений используем ее представление через осевую скорость из уравнения неразрывности. Разделим все слагаемые уравнений движения на комплекс  $\eta(V/H_0)^m/H_0$ :

$$\begin{aligned} \frac{\rho V^2}{\eta(V/H_0)^m} \varepsilon \left( V_x \frac{\partial V_x}{\partial X} - \frac{\partial V_x}{\partial Y} \int_0^Y \frac{\partial V_x}{\partial X} dY \right) = \\ = 2\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \left[ \frac{S^{*m}}{|\partial V_x / \partial Y|} + \left| \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right|^{m-1} \right] \frac{\partial V_x}{\partial X} \right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \left[ \frac{S^{*m}}{|\partial V_x / \partial Y|} + \left| \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right|^{m-1} \right] \left( \frac{\partial V_x}{\partial Y} + \varepsilon \frac{\partial V_y}{\partial X} \right) \right\} + \\ + \mathbf{St}^* - \frac{H_0}{\ell \eta (V/H_0)^m} \frac{\partial p}{\partial X}, \\ \frac{\rho V^2}{\eta(V/H_0)^m} \varepsilon \left( V_x \frac{\partial V_y}{\partial X} - \frac{\partial V_y}{\partial Y} \int_0^Y \frac{\partial V_x}{\partial X} dY \right) = \\ = -\frac{1}{\eta(V/H_0)^m} \frac{\partial p}{\partial Y} + 2 \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \left[ \frac{S^{*m}}{|\partial V_x / \partial Y|} + \left| \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right|^{m-1} \right] \frac{\partial V_y}{\partial Y} \right\}. \end{aligned}$$

Уравнения содержат множитель при конвективных членах  $\frac{\rho V^2}{\eta(V/H_0)^m} \varepsilon$ , который представляет число Рейнольдса для рассматриваемого течения. Для ньютоновской жидкости и среды Шведова–Бингама ( $m = 1$ ) критерий Рейнольдса  $\mathbf{Re} = \frac{\rho V H_0}{\eta} \varepsilon$ . В стоксовом приближении условием применимости модели служит неравенство  $\mathbf{Re} \ll 1$ . Далее, отбрасываем слагаемые, содержащие множителем малый параметр:

$$\begin{aligned} \mathbf{St}^* - \frac{H_0}{\ell \eta (V/H_0)^m} \frac{\partial p}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \left[ \frac{S^{*m}}{|\partial V_x / \partial Y|} + \left| \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right|^{m-1} \right] \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right\} = 0, \\ -\frac{1}{\eta(V/H_0)^m} \frac{\partial p}{\partial Y} + 2 \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \left[ \frac{S^{*m}}{|\partial V_x / \partial Y|} + \left| \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right|^{m-1} \right] \frac{\partial V_y}{\partial Y} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Для давления введем обозначение  $\mathbf{La}^* = \frac{p H_0}{\eta \ell} \left( \frac{H_0}{V} \right)^m$ . Кроме того, используем уравнение неразрывности  $\frac{\partial V_y}{\partial Y} = -\varepsilon \frac{\partial V_x}{\partial X}$ . При

этом уравнения движения примут вид

$$\begin{aligned} \text{St}^* - \frac{\partial \text{La}^*}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \left[ \frac{S^{*m}}{|\partial V_x / \partial Y|} + \left| \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right|^{m-1} \right] \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right\} &= 0, \\ - \frac{\partial \text{La}^*}{\partial Y} + 2\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \left[ \frac{S^{*m}}{|\partial V_x / \partial Y|} + \left| \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right|^{m-1} \right] \frac{\partial V_x}{\partial X} \right\} &= 0. \end{aligned}$$

Из второго уравнения следует, что изменение давления в поперечном сечении является величиной второго порядка малости ( $\varepsilon^2$ ), поэтому вторым уравнением можно пренебречь, считая давление функцией продольной координаты.

Для анализа используем первое уравнение движения (проекция на ось  $x$ ), учитывающее силы тяжести, давление и силы вязкого трения:

$$\text{St}^* - \frac{\partial \text{La}^*}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \left[ \frac{S^{*m}}{|\partial V_x / \partial Y|} + \left| \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right|^{m-1} \right] \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right\} = 0.$$

Выполним оценку для валковой сушилки со следующими характеристиками:  $\rho = 965 \text{ кг/м}^3$ ,  $m = 1$ ,  $\ell = 0,3 \text{ м}$ ,  $H_0 = 10^{-3} \text{ м}$ ,  $R = 0,6 \text{ м}$ ,  $\tau_0 = 4 \text{ Па}$ ,  $\eta = 0,026 \text{ Па} \cdot \text{с}$ ,  $n = 4 \text{ мин}^{-1}$ ,  $V = 0,251 \text{ м/с}$ .

Число Рейнольдса составляет

$$\text{Re} = \frac{\rho V^2}{\eta (V/H_0)^m} \varepsilon = \frac{965 \cdot 0,251^2}{0,026 \cdot (0,251/10^{-3})^1} \cdot 0,0033 = 0,0152.$$

Оценка сил тяжести жидкости

$$\text{St}^* = \frac{\rho g H_0}{\eta} \left( \frac{H_0}{V} \right)^m = \frac{965 \cdot 9,81 \cdot 10^{-3}}{0,026} \cdot (10^{-3}/0,251)^1 = 1,4506.$$

Видно, что силы тяжести жидкости следует учитывать, поскольку они соизмеримы с силами вязкого трения и на два порядка превосходят силы инерции.

На рис. 4.2 представлены зависимости числа Рейнольдса (рис. 4.2 а) и комплекса, характеризующего влияние сил тяжести (рис. 4.2 б) от частоты вращения валков для сред различной вязкости. С увеличением вязкости среды и понижением числа оборотов проявление сил инерции снижается. Влияние сил тяжести снижается с увеличением числа оборотов валков.

С учетом выполненных оценок приходим к следующей системе уравнений движения среды Гершеля–Балкли в зазоре вращающихся валков:

$$\begin{aligned} - \frac{dp}{dx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho g &= 0, & \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0, \\ \begin{cases} \gamma = 0, & |\tau_{xy}| < \tau_0, \\ \tau_{xy} = s\tau_0 + \eta \gamma^m, & |\tau_{xy}| \geq \tau_0. \end{cases} & \end{aligned} \quad (4.1)$$

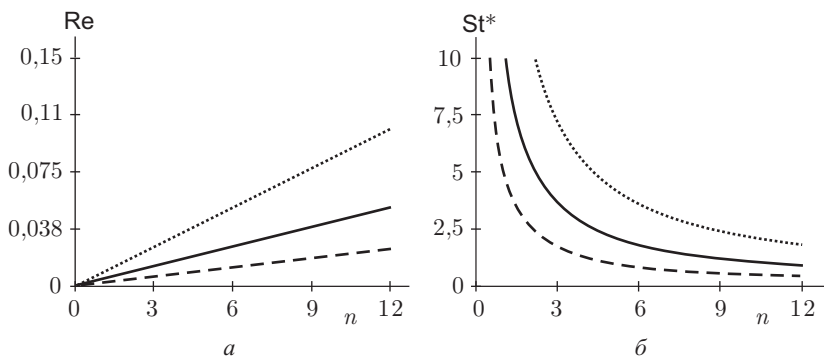


Рис. 4.2. Зависимость числа Рейнольдса (а) и сил собственного веса (б) от частоты вращения валков при различной вязкости жидкости  $\eta = 0,007 \text{ Па} \cdot \text{с}$  (пунктир),  $\eta = 0,014 \text{ Па} \cdot \text{с}$  (сплошная),  $\eta = 0,03 \text{ Па} \cdot \text{с}$  (штриховая линия)

Соответственно, уравнения для среды Шведова–Бингама имеют вид

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho g, \quad Q = 2 \int_0^h v_x dy, \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} \gamma = 0, & |\tau_{xy}| < \tau_0, \\ \tau_{xy} = s\tau_0 + \eta\gamma, & |\tau_{xy}| \geq \tau_0, \end{cases}$$

где  $s = \text{sign}(\gamma)$ ,  $\gamma = \partial v_x / \partial y$ .

Всю область течения в межвалковом зазоре, по характеру изменения градиента давления и скорости, можно разбить на две зоны (см. рис. 4.1 и рис. 4.3):

в первой ( $x_0 < x < x_m$ ) градиент давления положителен ( $dp/dx > 0$ ), а в зоне вязкопластического течения ( $h_0 < y < h$ ) осевая скорость квазитвердого ядра меньше окружной скорости поверхности валков ( $v_x < V$ , условно назовем ее зоной противотока);

во второй ( $x_m < x < x_1$ ) градиент давления отрицателен ( $dp/dx < 0$ ), а в зоне вязкопла-

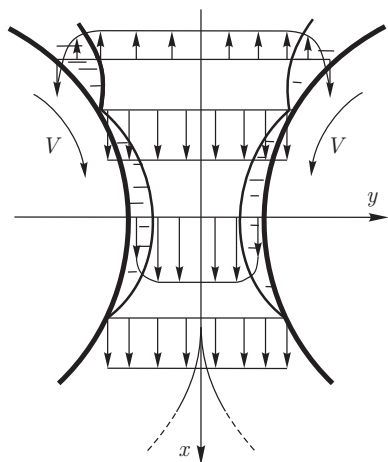


Рис. 4.3. Эпюры осевой скорости в различных сечениях при течении вязкопластической среды

стического течения ( $h_0 < y < h$ ) скорость квазитвердого ядра превышает скорость валков ( $v_x > V$ , условно назовем ее зоной прямотока).

На стыке зон ( $x = x_m$ ,  $h_0 = h$ ) осевая скорость квазитвердого ядра равна окружной скорости валков ( $v_x = V$ ), а эпюра давления в общем случае ( $\tau_0 \neq 0$ ) имеет излом ( $dp/dx|_{x=x_m-0} \neq dp/dx|_{x=x_m+0}$ ). В выходном сечении  $x = x_1$  квазитвердое ядро касается поверхностей валков ( $h_0 = h$ ), а осевая скорость однородна по сечению ( $v_x = V$ ). На входе  $x = x_0$  и на выходе  $x = x_1$  давление равно атмосферному и без снижения общности полагаем  $p = 0$ .

В произвольном поперечном сечении выполняется граничное условие прилипания среды на непроницаемой поверхности, а также условие текучести Генки–Мизеса (рис. 4.4) и непрерывности скорости на границе квазитвердого ядра.

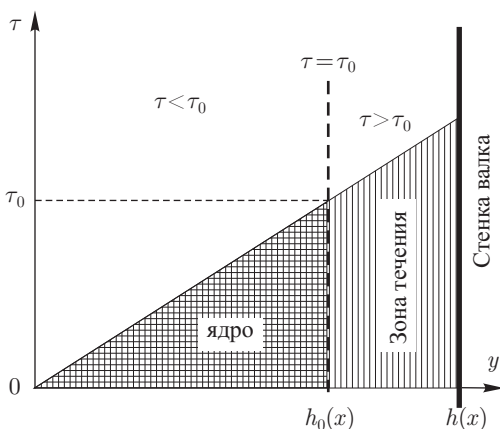


Рис. 4.4. Условие Генки–Мизеса

Таким образом, уравнения (4.2) следует дополнить следующими граничными условиями:

входное сечение

$$x = x_0, \quad p = 0, \quad (4.3)$$

первая зона (противотока)  $x_0 < x < x_m$ :

условие прилипания

$$y = h, \quad v_x = V, \quad (4.4)$$

на границе ядра

$$y = h_0, \quad \gamma = 0, \quad |\tau_{xy}| = \tau_0, \quad v_x = v_0, \quad (4.5)$$

стык зон противотока и прямотока

$$x = x_m, \quad v_x = V, \quad h = h, \quad (4.6)$$

вторая зона (прямотока)  $x_m < x < x$  :

условие прилипания

$$y = h, \quad v_x = V, \quad (4.7)$$

на границе ядра

$$y = h, \quad \gamma = 0, \quad |\tau_{xy}| = \tau_0, \quad v_x = v_0, \quad (4.8)$$

выходное сечение

$$x = x, \quad p = 0, \quad v_x = V, \quad \tau_{xy}(y=h) = 0, \quad (4.9)$$

условие симметричности

$$x < x < x, \quad y = 0, \gamma = 0, \quad \tau_{xy} = 0. \quad (4.10)$$

Необходимо отметить особенность граничных условий (см. условие (4.9)). Так называемое кавитационное (рейнольдсово) граничное условие ( $dp/dx = 0$ ) в данной задаче неприемлемо. Поэтому предложено использовать в качестве условия остановки течения равенство нулю касательного напряжения на стенке вала.

**4.1.2. Решение задачи.** Проинтегрируем уравнение движения из (4.2):

$$\tau_{xy} = \left( \frac{dp}{dx} - \rho g \right) y + C,$$

с учетом условия симметрии (4.10)  $C = 0$  и, окончательно, имеем:

$$\tau_{xy} = \left( \frac{dp}{dx} - \rho g \right) y. \quad (4.11)$$

Распределение напряжений сдвига по ширине зазора линейно. Имеется симметричная область относительно оси  $x$ , в которой  $|\tau_{xy}| \leq \tau$ , в ней среда Шведова–Бингама ведет себя подобно твердому телу (однако в квазитвердом ядре  $\partial v_x / \partial x \neq 0$ ). С учетом однородности осевой скорости по поперечному сечению квазитвердого тела предположительный тип его деформации — чистый сдвиг. Текущий размер квазитвердого ядра  $h$  определяется из уравнения (4.11) с учетом (4.5) и (4.8):

$$s\tau = \left( \frac{dp}{dx} - \rho g \right) h. \quad (4.12)$$

Здесь и ниже знак  $s$  указывает на принадлежность выражения к первой ( $s = +1$ ) или второй зоне ( $s = -1$ ).

Рассматривая совместно (4.11) и уравнение состояния из (4.2), можем записать

$$s\tau_0 + \eta\gamma = \left(\frac{dp}{dx} - \rho g\right)y,$$

или, учитывая (4.12),

$$\left(\frac{dp}{dx} - \rho g\right) = \frac{s\tau_0}{h_0}.$$

С другой стороны

$$\left(\frac{dp}{dx} - \rho g\right) = \frac{s\tau_0 + \eta\gamma}{y}.$$

Исключая из двух последних выражений давление, можем записать

$$\frac{s\tau_0}{h_0} = \frac{s\tau_0 + \eta\frac{\partial v_x}{\partial y}}{y}.$$

Откуда получаем уравнение для скорости в зоне градиентного течения

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{s\tau_0}{\eta} \left(\frac{y}{h_0} - 1\right). \quad (4.13)$$

Разделим переменные и проинтегрируем (4.13):

$$v_x = \frac{s\tau_0}{\eta} \left(\frac{y^2}{2h_0} - \frac{h^2}{2h_0} - y + h\right) + C_1.$$

Постоянную  $C_1$  находим из условия прилипания (4.4) и (4.7)  $C_1 = V$ . Получим выражение для осевой скорости в зоне градиентного течения:

$$v_x = \frac{s\tau_0}{\eta} \left(\frac{y^2 - h^2}{2h_0} - y + h\right) + V. \quad (4.14)$$

Осевая скорость квазитвердого ядра  $v_0$  находится из условий (4.5), (4.8):

$$v_0 = \frac{s\tau_0}{\eta} \left(\frac{h_0^2 - h^2}{2h_0} - h_0 + h\right) + V,$$

но учитывая соотношения

$$\frac{h_0^2 - h^2}{2h_0} - h_0 + h = \frac{h_0^2 - h^2 - 2h_0^2 + 2hh_0}{2h_0} = -\frac{(h_0 - h)^2}{2h_0},$$

можем записать более компактно:

$$v_0 = -\frac{s\tau_0(h_0 - h)^2}{2\eta h_0} + V. \quad (4.15)$$



Расход жидкости в (4.2) складывается из осевого расхода квазитвердого ядра и расхода в зонах вязкопластического течения :

$$Q = 2Vh + 2 \int_h^h v_x dy.$$

Выполнив интегрирование с учетом (4.14) и (4.15), получим выражение для расхода:

$$Q = 2Vh + \frac{s\tau}{3\eta h} (h - h_0) \left( h_0 + hh_0 - 2h^2 \right). \quad (4.16)$$

**4.1.3. Анализ решения.** Для анализа поля скоростей можно использовать функцию тока, аналогично как это было показано выше (см. раздел 2.1.2). Однако при этом необходимо учитывать составной характер зоны течения вязкопластичной жидкости.

В области квазитвердого ядра ( $y < h_0$ ) функция тока с учетом условия  $y = 0, \psi = 0$  находится следующим образом:

$$\int_0^y d\psi = \int_0^y v dy, \quad \psi = v y.$$

Скорость ядра определена выражением (4.15). На границе ядра функция тока  $\psi = v h_0$ .

В зонах градиентного течения с учетом условия  $y = h, \psi = v h$ , можем записать

$$\int_{v h_0}^{\psi} d\psi = \int_{h_0}^y v_x dy.$$

Интегрируя с учетом выражения (4.14), получим

$$\psi = v h_0 + \frac{s\tau_0}{\eta} \left[ \left( \frac{y^3 - h_0^3}{6h_0} - \frac{h_0(y - h_0)}{2h_0} - \right. \right. \\ \left. \left. - h_0(y - h_0) + h_0(y - h_0) \right] + V(y - h_0).$$

С учетом обозначений (4.17) и соотношений (2.13), (2.15), запишем выражение для безразмерной функции тока в зонах градиентного течения:

$$\bar{\psi} = Y (1 + \xi) + sS (1 + \xi)^2 \left[ - \frac{\zeta - 1}{2} + \left( \frac{Y^3 - \zeta}{6\zeta} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(Y - \zeta)}{2\zeta} + (1 - \zeta)(Y - \zeta) \right] \right].$$

**Предельные свойства функции тока в зонах градиентного течения.** На поверхности вала ( $Y = 1$ ) функция  $\bar{\psi}$  принимает значение

$$\bar{\psi} = 1 + \xi^2 - \frac{sS \left(1 + \xi^2\right)^2 (1 - \zeta)^3}{3\zeta}.$$

Соответственно, на поверхности ядра ( $Y = \zeta$ )

$$\bar{\psi} = \zeta \left(1 + \xi^2\right) - sS \left(1 + \xi^2\right)^2 \frac{(\zeta - 1)^2}{2}.$$

В пределах ядра безразмерная функция изменяется линейно:

$$\bar{\psi} = \left(1 + \xi^2\right) Y - sS \left(1 + \xi^2\right)^2 \frac{(\zeta - 1)^2}{2\zeta} Y.$$

В этих выражениях функция  $\zeta(\xi)$  определяется согласно (4.26).

Условие циркуляции жидкости на входе определяется по скорости движения ядра. Применяя условие  $s = +1$ ,  $y = 0$ ,  $x = x_0$ ,  $v_0 < 0$  к выражению (4.15), получим неравенство

$$-\frac{\tau_0}{2\eta h_0} (h_0 - h)^2 + V < 0,$$

или, переходя к обозначениям (4.17),

$$-\frac{S}{2} \left(1 + \xi_0^2\right) [\zeta(\xi_0) - 1]^2 + 1 < 0.$$

Следовательно, циркуляция имеет место, если для координаты входа выполняется условие

$$\xi_0^2 > \frac{2}{S [1 - \zeta(\xi_0)]^2} - 1.$$

Здесь функция  $\zeta(\xi)$  определяется согласно (4.26). Величина  $\xi_t$ , определяемая выражением  $\xi_t^2 = 2S^{-1} [1 - \zeta(\xi_0)]^{-2} - 1$ , характеризует координату точки остановки течения. В случае циркуляции жидкости выполняется условие  $\xi_0^2 > \xi_t^2$ .

В безразмерной форме решение имеет более компактный вид, что значительно упрощает анализ. Введем безразмерные параметры и переменные:

$$\begin{aligned} \{\xi, \xi_0, \xi_m, \lambda\} &= \frac{\{x, x_0, x_m, x_1\}}{\sqrt{2RH_0}}, \quad \text{St} = \frac{\rho g H_0^2}{\eta V}, \quad q = \frac{Q}{V H_0}, \\ \text{La} &= \frac{p H_0^2}{\eta V \sqrt{2RH_0}}, \quad S = \frac{\tau_0 H_0}{\eta V}, \quad \zeta(\xi) = \frac{h_0(x)}{h(x)}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Для анализа решения необходимо знать конкретные значения геометрических характеристик и физических свойств об-

рабатываемой среды. В качестве примера рассмотрим течение пасты в валковой вакуумной сушилке при сушке ксантогената калия. Условия переработки и свойства пасты следующие:  $2R = 1,2$  м;  $n = 4$  об/мин;  $\tau_0 = 4$  Па;  $\eta = 0,026$  Па·с;  $\rho = 965$  кг/м<sup>3</sup>;  $H_0 = 5 \cdot 10^{-4}$  м. При этом окружная скорость валков  $V = \pi n R / 30 = 0,251$  м/с;  $St = 0,362$ ;  $S = 0,306$ . Полученный результат ( $St$  и  $S$  величины одного порядка) подтверждает необходимость учета сил тяжести в уравнении сохранения импульса (4.2).

Выполним оценку пределов изменения  $St$  и  $S$ . Вязкопластическими свойствами обладает довольно широкий ряд жидкостей и растворов, поэтому выберем две из них, обладающие максимальными и минимальными реологическими характеристиками на заданном диапазоне: раствор, близкий к ксантогенату калия, и раствор цемента. Согласно этому выбору, диапазон изменения реологических параметров следующий: касательное напряжение  $\tau_0 = 1 \div 40$  Па, вязкость  $\eta = 0,01 \div 0,1$  Па·с, плотность  $\rho = 900 \div 1800$  кг/м<sup>3</sup>. Механические параметры аппарата следующие: минимальный зазор между валками  $H_0 = 0,00025 \div 0,0015$ , количество оборотов в минуту каждого валка изменяется вариа-  
тором в пределах  $n = 4 \div 12$  об/мин.

В соответствии с принятыми предельными значениями параметров пределы изменения  $St = 0,007 \div 15,8$ ,  $S = 0,003 \div 23,9$ .

Для поверхности валка принимаем параболическое приближение (3.15).

Представим безразмерные переменные (4.17) следующим образом:

$$h_0(x) = \zeta h(x), \quad \tau_0 = \frac{S\eta V}{H_0}. \quad (4.18)$$

Учитывая (4.18), запишем выражение расхода (4.16) в безразмерной форме

$$q = \frac{2Vh}{VH_0} + \frac{sS\eta V}{3\eta\zeta hVH_0^2} (h - \zeta h) (\zeta^2 h^2 + \zeta h^2 - 2h^2),$$

где  $h$  определяется согласно (3.15).

Преобразовав это выражение, получим

$$q = 2 \left( 1 + \xi^2 \right) + sS \frac{(3\zeta - \zeta^3 - 2)}{3\zeta} \left( 1 + \xi^2 \right)^2. \quad (4.19)$$

Кубическое относительно  $\zeta$  уравнение (4.19) описывает распределение безразмерной ширины квазитвердого ядра  $\zeta$  по длине зоны течения  $\xi$ .

Соответственно находим уравнение для давления (4.12) в безразмерных переменных (4.17). Остаются в силе преобразования (4.18) и уравнение (2.15), но они представлены в виде:

$$x = \xi \sqrt{2RH_0}, \quad p = \frac{\text{La} \eta V \sqrt{2RH_0}}{H_0^2}, \quad \rho g = \frac{\text{St} \eta V}{H_0^2}. \quad (4.20)$$

Учитывая (4.20), запишем уравнение (4.12) в безразмерном виде:

$$\frac{d\text{La}}{d\xi} = \text{St} + \frac{sS}{\zeta(1+\xi^2)}. \quad (4.21)$$

В выходном сечении  $\xi = \lambda$ ,  $\zeta = 1$  и в соответствии с (4.19)  $q = 2(1 + \lambda^2)$ , а из (4.21) следует граничное значение градиента давления  $\frac{d\text{La}}{d\xi} = \text{St} - \frac{S}{\zeta(1+\lambda^2)}$  при  $\xi = \lambda$ . С другой стороны, в сечении  $\xi = \xi_m$  квазитвердое ядро также касается поверхностей валков ( $\zeta = 1$ ) и согласно (4.15) скорость ядра  $v_0 = V$ . При этом для расхода из (4.19) имеем  $q = 2(1 + \xi_m^2)$ . Сопоставляя выражения расхода в сечениях  $\xi = \lambda$  и  $\xi = \xi_m$ , получим  $\xi_m = -\lambda$ . Зона прямого тока симметрична относительно минимального зазора.

Решаем уравнения (4.19), (4.21) с учетом граничного условия (4.9) и равенства:

$$s = -\text{sign}(\xi + \lambda), \quad (4.22)$$

учитывающего знак скорости сдвига.

Разделяем переменные и интегрируем выражение (4.21) с учетом условия (4.3):

$$\text{La} = \text{St}(\xi - \lambda) - S \int_{\lambda}^{\xi} \frac{\text{sign}(\xi + \lambda)}{(1 + \xi^2)\zeta} d\xi, \quad (4.23)$$

где  $\zeta$  — корень кубического уравнения (4.19).

Решение кубического уравнения (4.19) ищется с учетом следующего граничного условия: при  $\xi = \lambda$ ,  $\zeta = 1$ , тогда

$$q = 2(1 + \lambda^2). \quad (4.24)$$

Подставим выражение (4.24) в (4.19) и приводим к виду

$$-\frac{sS}{3}(1 + \xi^2)^2 \zeta^3 + \left[ 2(\xi^2 - \lambda^2) + sS(1 + \xi^2)^2 \right] \zeta - \frac{2sS}{3}(1 + \xi^2)^2 = 0.$$

Кубическое уравнение имеет вид

$$\zeta^3 + u\zeta + w = 0, \quad u = -\frac{6(\xi^2 - \lambda^2)}{sS(1 + \xi^2)^2} - 3, \quad w = 2. \quad (4.25)$$

Анализ показывает, что дискриминант уравнения (4.25) всегда отрицателен. Действительный корень уравнения

$$\zeta = 2z \cos \left[ \frac{\pi + \arccos(1/z^3)}{3} \right], \quad z = \sqrt{\left| -1 - \frac{2|\xi^2 - \lambda^2|}{S(1 + \xi^2)^2} \right|}. \quad (4.26)$$

Функция  $\zeta(\xi)$ , построенная по уравнению (4.34), представлена на рис. 4.5. В частности, расчетная зависимость подтверждает полученный выше результат о симметрии зоны прямотока.

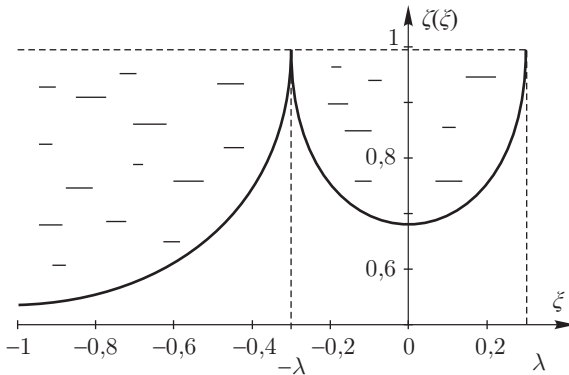


Рис. 4.5. Распределение безразмерной ширины квазитвердого ядра  $\zeta$  по длине зоны течения  $\xi$

Возвращаясь к уравнению (4.23) и учитывая условие (4.3), получим следующее интегральное уравнение для расчета координаты входного сечения  $\xi_0$ :

$$\text{St}(\xi_0 - \lambda) = S \int_{\lambda}^{\xi_0} \frac{\text{sign}(\xi_0 + \lambda)}{(1 + \xi_0^2) \zeta} d\xi. \quad (4.27)$$

Для выяснения характера распределения давления в зоне гидродинамического контакта анализ уравнения (4.21) удобно представить графически.

При течении жидкости между валками, при различных значениях реологических параметров, можно выделить несколько

режимов течения. Находим граничные значения параметра  $St$  при заданном параметре  $S$ . Параметр  $S$  определяет вязкопластические свойства жидкости — чем он больше, тем более ярко выражены пластические свойства жидкости (при  $S = 0$ , мы имеем дело с ньютоновской жидкостью). В свою очередь, параметр  $St$  характеризует влияние гравитационных сил на процесс валкового течения — чем параметр больше, тем в большей степени искажается характер течения жидкости в зазоре. При  $St = 0$  сила тяжести не оказывает влияния на течение.

Границы режимов валкового течения находятся из граничных условий. Учитывая условие (4.19) из (4.21) получаем границу первого режима  $B$  ( $0 < St < B$ ):

$$B = \frac{S}{1 + \lambda^2}. \quad (4.28)$$

Граница второго режима — критическое значение числа Стокса  $St^{кр}$ , определяется из (4.21), (4.34) с учетом условия:  $\xi = 0$ ,  $dLa/d\xi = 0$ . После несложных преобразований имеем

$$St^{кр} = \frac{S}{\zeta^*}, \quad \zeta^* = 2z^* \cos \frac{\pi + \arccos [1/(z^*)^3]}{3}, \quad z^* = \sqrt{1 + \frac{2\lambda^2}{S}}. \quad (4.29)$$

Таким образом, второй режим имеет место, если число Стокса находится в интервале  $B < St < St^{кр}$ . Соответственно третий режим наступает при  $St > St^{кр}$ .

Первый режим течения, условно названный «легким», характеризуется малым влиянием силы тяжести на процесс течения, а поведение жидкости близко к ньютоновским жидкостям. Реальная сушилка работает в режиме, близком к первому.

Второй режим течения, условно названный средним, характеризуется существенным влиянием силы тяжести и вязкопластических свойств жидкости на процесс течения. Именно в этом режиме проявляется эффект разряжения в окрестности выхода жидкости из зазора валков.

Тяжелый режим течения характеризуется значительным влиянием гравитационных сил и высоковязкопластических свойств жидкости. Его трудно реализовать практически — для этого необходимо герметично отделить верхнюю часть валков от нижней.

Рисунок 4.6 иллюстрирует положение критических точек и диапазоны режимов на оси  $St$ .

Отметим, что зависимость критического числа  $St^{кр}$  от координаты точки выхода  $\lambda$ , при различных значениях  $S$ , нелинейна

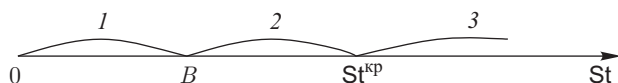


Рис. 4.6. Шкала  $St$  с указанием характерных областей течения: 1 — легкий; 2 — средний; 3 — тяжелый режимы валкового течения

(рис. 4.7). Как видно из выражения (4.29) при  $S = 0$  (ньютоновский случай) происходит деление на ноль, поэтому для расчета было принято близкое к нулю значение  $S = 0,001$ .

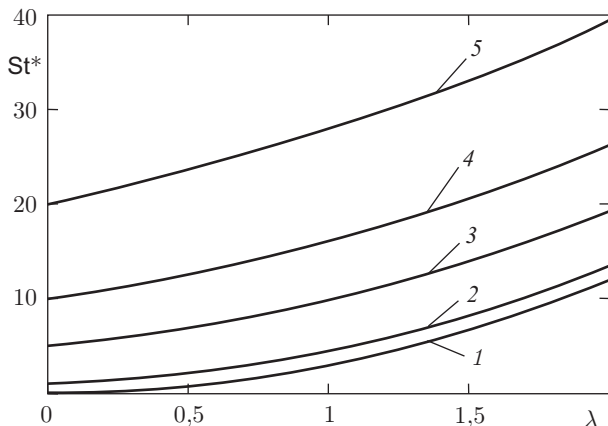


Рис. 4.7. Зависимость координаты точки выхода  $\lambda$  от  $St^*$ : при 1 —  $S = 0,001$ , 2 —  $S = 1$ , 3 —  $S = 5$ , 4 —  $S = 10$ , 5 —  $S = 20$

Для суспензии ксантогената калия и заданной сушилки расчетные значения границ областей течения следующие:  $B = 0,281$ ,  $St^{кр} = 0,700$ . При этом значения  $St$  в серединах соответствующих диапазонов: для легкого режима  $St = 0,165$ , для среднего режима  $St = 0,490$ , для тяжелого режима возьмем точку  $St = 0,8$ .

На рис. 4.8–4.12 схематически изображены распределения  $dLa/d\xi$  и  $La$  по длине зоны течения при различных режимах течения в зависимости от соотношения параметров  $St$ ,  $S$  и  $\lambda$ .

Нелинейность модели Шведова–Бингама проявляется в том, что эпюра безразмерного давления имеет точку излома на границе областей прямотока и противотока. Это создает значительные вычислительные трудности, а модель Гершеля–Балкли возможно рассчитать только численными методами, например, методом Рунге–Кутты.

На схеме рис. 4.8 представлено распределение градиента давления по длине зоны течения без учета сил тяжести ( $St = 0$ ).

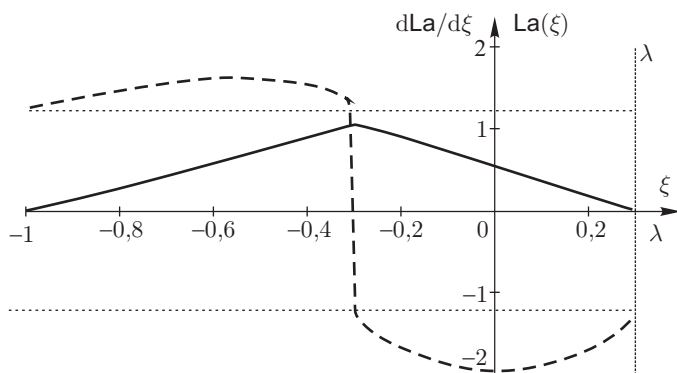


Рис. 4.8. Распределения градиента давления  $dLa/d\xi$  (штриховая линия) и безразмерного давления  $La$  (сплошная) по длине зоны течения без учета сил собственного веса ( $St = 0$ ). Пунктирные линии — функции  $\pm B$

Течение вязкопластической жидкости возможно, если градиент давления отвечает одному из условий:

$$dLa/d\xi > +B \text{ на интервале } \xi_0 < \xi < -\lambda;$$

$$dLa/d\xi < -B \text{ на интервале } -\lambda < \xi < \lambda.$$

Если  $|dLa/d\xi| < B$ , то  $\zeta = 1$ , квазитвердое ядро занимает весь зазор и течение не возможно. В сечении  $\xi = -\lambda$  функция  $dLa/d\xi$  терпит разрыв, а эпюра давления имеет излом, так как  $dLa/d\xi = -B$  при  $\xi > -\lambda$  и  $dLa/d\xi = B$  при  $\xi < -\lambda$ . В случае вязкой жидкости ( $S = 0$  и  $B = 0$ ) излом эпюры давления (или скачок градиента давления) отсутствует. В выходном сечении  $\xi = \lambda$  градиент давления не равен нулю и кавитационное условие  $dLa/d\xi = 0$ , правомерное для вязкой жидкости, заменяется условием остановки течения вязкопластической жидкости  $dLa/d\xi = -B$ . На участке  $|\xi| < \lambda$  функция  $dLa/d\xi$  симметрична относительно вертикальной линии  $\xi = 0$ , что следует из четности функций  $dLa/d\xi$  и  $\zeta$  в (4.19) и (4.26).

На рис. 4.9 показан случай слабого влияния сил тяжести ( $St < B$ ). Проявление сил тяжести заключается в подъеме «пластического прямоугольника», ограниченного линиями  $-\lambda$ ,  $\lambda$ ,  $+B$ ,  $-B$ , на величину  $St$  по оси  $dLa/d\xi$  (в новом положении он ограничен линиями  $-\lambda$ ,  $\lambda$ ,  $St+B$ ,  $St-B$ ). Распределение давления качественно мало отличается от первого случая: на участке  $\xi_0 < \xi < -\lambda$ ,  $dLa/d\xi \geq St+B$ , а на участке  $|\xi| < \lambda$ ,  $dLa/d\xi \leq St-B$ .

Схема для случая  $St > B$  показана на рис. 4.10, и 4.11. Видно, что на участке  $|\xi| < \lambda$ , функция  $La$  имеет два экстремума,



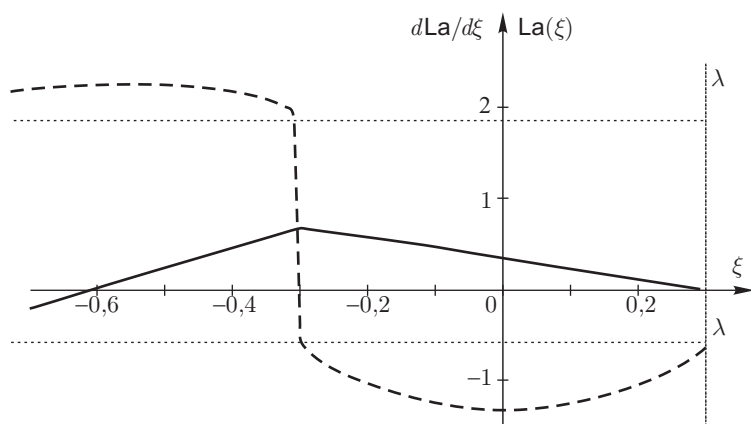


Рис. 4.9. Распределения градиента давления  $dLa/d\xi$  (штриховая линия) и безразмерного давления  $La$  (сплошная) по длине зоны течения при  $St = 0,162$ .  
Пунктирные линии — функции  $St \pm B$

расположенных симметрично относительно сечения минимального зазора  $\xi = 0$ . Причем, минимум в окрестности  $\xi = \lambda$  предполагает разрежение  $La \rightarrow 0$ . В ньютоновском случае ( $S = 0$ ) или без учета силы тяжести ( $St = 0$ ) отмеченный эффект исчезает. Максимум давления из точки  $\xi = -\lambda$  смещается к выходному сечению.

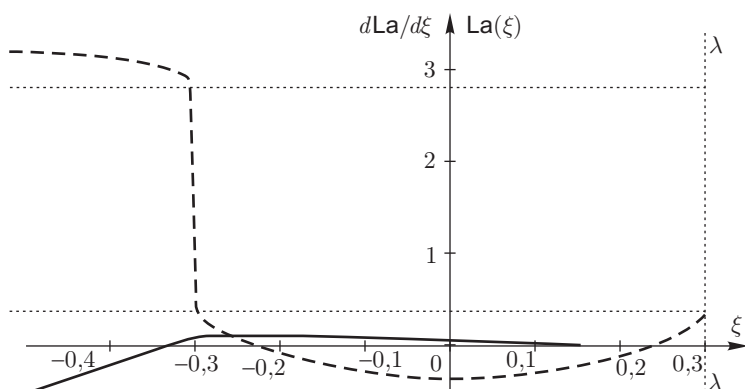


Рис. 4.10. Распределения градиента давления  $dLa/d\xi$  (штриховая линия) и безразмерного давления  $La$  (сплошная) по длине зоны течения при  $St = 0,490$ .  
Пунктирные линии — функции  $St \pm B$

Границей между случаями легкого и среднего режимов является касание нижней стороной «пластического прямоугольника»

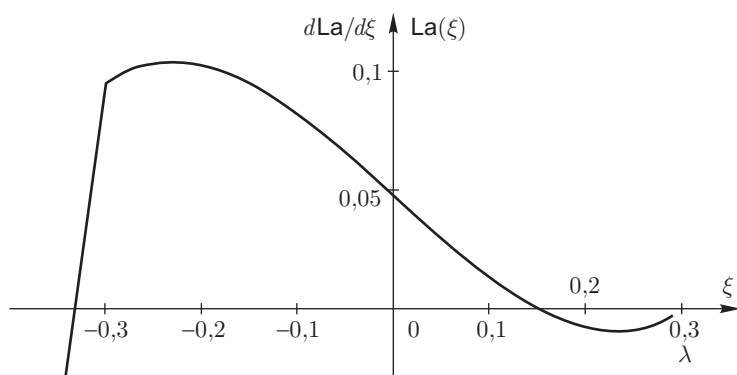


Рис. 4.11. Распределения безразмерного давления  $\text{La}$  по длине зоны течения при  $\text{St} = 0,490$

оси  $\xi$ . При этом, положив в (4.26)  $\zeta = 1$ ,  $\xi = \lambda$ ,  $d\text{La}/d\xi = 0$ ,  $s = -1$ , получим  $\text{St} = B$ . В точках  $\xi = \pm \lambda$   $d\text{La}/d\xi = 0$ , а на интервале  $|\xi| < \lambda$   $d\text{La}/d\xi < 0$ .

Наконец, при значительном влиянии сил тяжести градиент давления на всем участке течения положителен (рис. 4.12) и граничное условие (4.3) для сечения входа  $\xi = \xi$ ,  $\text{La} = 0$  не выполняется. Во всей области течения давление вакуумметрическое.

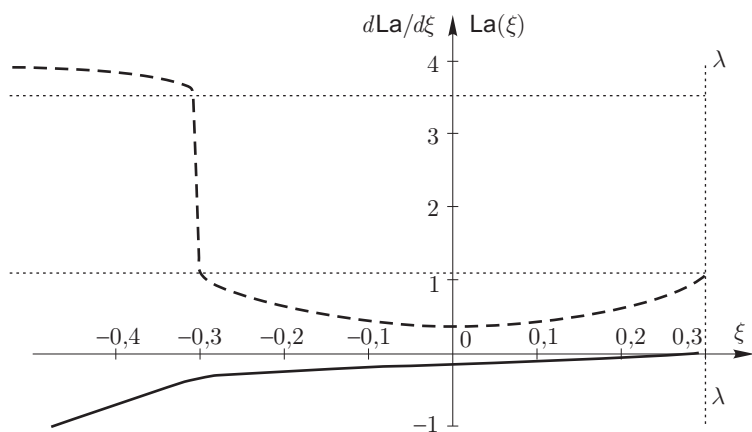


Рис. 4.12. Распределения градиента давления  $d\text{La}/d\xi$  (штриховая линия) и безразмерного давления  $\text{La}$  (сплошная) по длине зоны течения при  $\text{St} = 0,8$ .

Пунктирные линии — функции  $\text{St} \pm B$

Практически реализовать этот режим можно либо создавая пониженное давление над поверхностью жидкости на входе (при  $\xi = \xi$ ), либо создавая избыточное давление на выходе — в сече-

нии  $\xi = \lambda$ . Проявляется наносной эффект валков, обусловленный силами вязкого трения среды, который положен в основу работы, например, валкового экструдера, а также имеет место в процессе нанесения покрытия на твердую металлическую ленту.

Свойства режимов среды Шведова–Бингама сведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Режим	Границы		Свойства
	Нижняя	Верхняя	
Легкий	$St = 0$	$St = B$	<p>На интервале <math>\xi \leq \xi &lt; -\lambda</math> функция монотонно возрастает; на интервале <math>-\lambda &lt; \xi \leq \lambda</math> функция монотонно убывает; в сечении <math>\xi = -\lambda</math> функция <math>dLa/d\xi</math> терпит конечный разрыв, а эпюра давления имеет излом. Течение возможно, при условиях:  <math>dLa/d\xi &gt; +B</math> на интервале <math>\xi &lt; \xi &lt; -\lambda</math>;  <math>dLa/d\xi &lt; -B</math> на интервале <math>-\lambda &lt; \xi &lt; \lambda</math>.          Если <math> dLa/d\xi  &lt; B</math>, то <math>\zeta = 1</math>, т.е. квазитвердое ядро занимает весь зазор и течение не возможно.          В выходном сечении <math>\xi = \lambda</math>, <math>dLa/d\xi \neq 0</math>.          Условие остановки течения вязкопластической жидкости <math>dLa/d\xi = -B</math>.</p>
Средний	$St = B$	$St = St$	<p>На участке <math> \xi  &lt; \lambda</math> функция <math>La</math> имеет два экстремума, расположенных симметрично относительно сечения минимального зазора (<math>\xi = 0</math>); минимум в окрестности <math>\xi = \lambda</math> предполагает разряжение (<math>La &lt; 0</math>).  <math>dLa/d\xi &lt; 0</math> на интервале <math> \xi  &lt; \lambda</math>.</p>
Тяжелый	$St = St$	$\infty$	<p>Монотонно возрастающая функция (<math>dLa/d\xi &gt; 0</math>); излом в точке <math>-\lambda</math>; на входе необходимо вакуумирование (<math>La(\xi = \xi) &lt; 0</math>).</p>

Необходимо отметить, что во всех описанных режимах характер поля скоростей сохраняется: квазитвердое ядро в сечениях  $|\xi| = \lambda$  касается поверхности валков, а в зонах вязкопластического течения выполняются неравенства  $\xi < \xi < -\lambda$ ,  $\partial v_x / \partial y > 0$  — в области противотока,  $|\xi| < \lambda$ ,  $\partial v_x / \partial y < 0$  — в области прямотока.

Анализ может быть распространен и на случай  $St = 0$ , который имел бы место, если в схеме рис. 4.1 направление вращения валков изменить на противоположное, а материал подавать снизу. В частности, следует ожидать смещения координаты максимума давления к области входа.

Оценка влияния гравитационных сил на процесс валкового течения вязкопластической жидкости приведен на рис. 4.13. Из рисунка видно, что для достижения идентичной толщины материала на выходе, характеризующегося величиной  $\lambda$ , в случае тяжелой жидкости требуется меньший уровень жидкости в валковом зазоре.

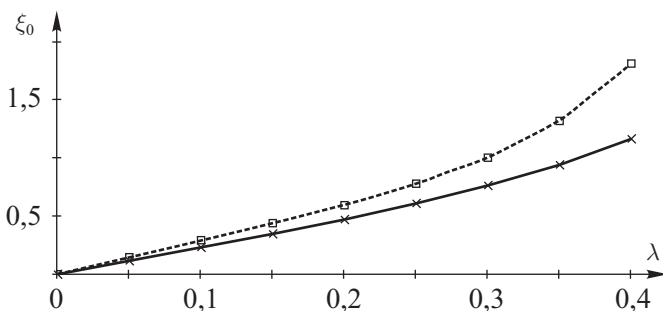


Рис. 4.13. Графическая оценка влияния гравитационных сил на процесс валкового течения вязкопластической среды: с учетом сил собственного веса (сплошная линия —  $St = 0,362$ ); без учета силы тяжести (пунктирная линия —  $St = 0$ )

Математическая модель позволяет определить характерные диапазоны скоростей и напряжений сдвига, необходимые при определении реологических констант. Наименьшее касательное напряжение и скорость сдвига имеют место на оси течения  $y = 0$ ,  $\text{int}(\tau_{xy}) = 0$ ,  $\text{int}(\gamma) = 0$ . Соответственно, наибольшее касательное напряжение  $\text{sup}(\tau_{xy})$  и скорость сдвига  $\text{sup}(\gamma)$  имеют место в точках  $x = 0$ ,  $y = \pm H$  (или  $\xi = 0$ ,  $\zeta = \pm h / H$ ). Используя уравнения (4.12) и уравнение состояния из (4.2), с учетом (2.15), (4.17), (4.21), (4.34), можем записать:

$$\text{sup}(\gamma) = \frac{\tau}{\eta} \left( \zeta^* - \right), \quad \text{sup}(\tau_{xy}) = \frac{\tau}{\zeta^*}$$

где  $\zeta^*$  определяется согласно (4.29).

Найдем интегральные параметры течения.

Сила трения, действующая со стороны жидкости на поверхность вала единичной длины с учетом (4.11), (4.12), (4.17), определяется интегралом

$$F = \int_x^x \tau_{xy} \Big|_{y=h} dx \cos(\alpha) dx,$$

С учетом соотношений  $\cos \alpha = (1 + \operatorname{tg} \alpha)^{-1/2}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = dh/dx = x/R$ ,  $\cos(\alpha) \approx 1 - 0,5x/R$ ,  $x \ll R$ ,  $\tau_{xy}|_{y=h} = s\tau/\zeta$ , можем записать

$$F = -\tau \sqrt{2RH} \int_{\xi}^{\lambda} \frac{\operatorname{sign}(\xi + \lambda) d\xi}{\zeta(\xi)}$$

где функция  $\zeta(\xi)$  описывается соотношениями (4.26). Крутящий момент вала можно вычислить по формуле  $M = FR$ .

Оценка влияния гравитационных сил на силу трения, действующую со стороны жидкости на поверхность вала, дана на рис. 4.14. Видно, что при прочих равных условиях, в частности для нанесения на поверхность вала слоя идентичной толщины, силы тяжести снижают величину трения жидкости о поверхность вала.

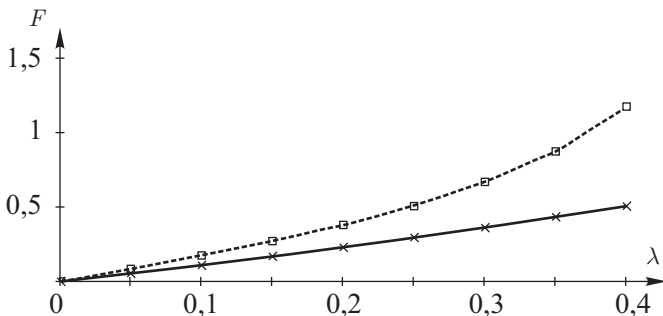


Рис. 4.14. Графическая оценка влияния гравитационных сил на силу трения, действующую со стороны жидкости на поверхность вала: с учетом сил собственного веса (сплошная линия —  $St = 0,362$ ); без учета силы тяжести (пунктирная линия —  $St = 0$ )

При работе машины возникают распорные (расклинивающие) усилия, которые воспринимаются подшипниками валков. Величина распорного усилия, приходящаяся на единицу рабочей длины вала, определяется суммой нормальных напряжений, действующих на поверхность вала:

$$W = \int_x^x \tau_{yy}|_{y=h} dx.$$

Согласно соотношениям, записанным после уравнений (4.1):

$$\tau_{yy}|_{y=h} = 2B \frac{\partial v_y}{\partial y} = 2h \left( \frac{dp}{dx} - \rho g \right),$$

следовательно, интеграл можно записать так:

$$W = 2 \int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{dp}{dx} - \rho g \right) h dx.$$

Перейдем к безразмерным переменным (4.17):

$$W = \frac{2V\eta\sqrt{2RH_0}}{H_0} \int_{\xi_0}^{\lambda} \left( \frac{dLa}{d\xi} - St \right) (1 + \xi^2) d\xi.$$

С учетом уравнения (2.24) можем записать

$$W = -2\tau_0\sqrt{2RH_0} \int_{\xi_0}^{\lambda} \frac{\text{sign}(\xi + \lambda)}{\zeta(\xi)} d\xi,$$

где функция  $\zeta(\xi)$  описывается соотношениями (4.26). Из сопоставления выражений для  $F$  и  $W$  видно, что эти силы описываются идентичными зависимостями, но распорное усилие в два раза больше силы трения.

Оценка влияния гравитационных сил на величину распорного усилия представлена на рис. 4.15. Видно, что силы тяжести жидкости способствуют уменьшению распорного усилия.

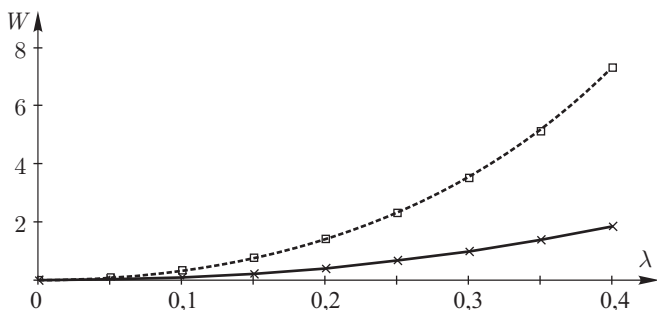


Рис. 4.15. Влияние гравитационных сил на величину распорного усилия: с учетом сил собственного веса (сплошная линия —  $St = 0,362$ ); без учета силы тяжести (пунктирная линия —  $St = 0$ )

Как видим, влияние гравитационных сил на процесс валкового течения вязкопластической жидкости значительно, причем, это влияние усиливается с ростом толщины наносимого на валки материала.

Технологическая мощность процесса, отнесенная к единице рабочей длины вала, рассчитывается по формуле  $N = 2VF$ .

Следовательно, силы тяжести уменьшают потребляемую мощность привода валков (см. рис. 4.15). В рассмотренном случае потребляемая мощность уменьшается почти в два раза.

## 4.2. Течение среды Гершеля–Балкли

**4.2.1. Постановка задачи.** Рассматривается процесс течения высоконаполненной суспензии в зазоре встречно вращающихся валков. Это решение является более общим случаем валкового течения вязкопластической среды, поскольку частными случаями являются течения жидкостей ньютоновской, Шведова–Бингама, Оствальда де–Вилля.

Остаются в силе схема течения, система координат представленная на рис. 4.1, все обозначения, а также все допущения, принятые при решении задачи валкового течения среды Шведова–Бингама. Однако среда описывается реологической моделью Гершеля–Балкли ( $\tau = \tau_0 + \eta \dot{\gamma}^m$ ).

Остается в силе система дифференциальных уравнений движения (включая гравитационный член) и реологического состояния, описывающих течение, изменяется только уравнение состояния:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\partial \tau^{xy}}{\partial y} + \rho g, \quad Q = 2 \int_0^h v_x dy, \quad \begin{cases} \dot{\gamma} = 0, \\ \tau_{xy} = s\tau_0 + \eta \dot{\gamma}^m, \end{cases} \quad \begin{cases} |\tau^{xy}| < \tau_0, \\ |\tau_{xy}| \geq \tau_0, \end{cases} \quad (4.30)$$

где  $s = \text{sign}(\dot{\gamma})$ ,  $\dot{\gamma} = \partial v_x / \partial y$ .

Остаются в силе граничные условия (4.3)–(4.10).

Интегрируем уравнение движения из (4.30) с учетом условия (4.10):

$$\tau_{xy} = \left( \frac{dp}{dx} - \rho g \right) y. \quad (4.31)$$

Как и в случае среды Шведова–Бингама, распределение напряжений сдвига по ширине зазора линейно. Имеется симметричная область относительно оси  $x$ , в которой  $|\tau_{xy}| \leq \tau_0$  и жидкость ведет себя подобно твердому телу (однако в квазитвердом ядре  $\partial v_x / \partial x \neq 0$ ). С учетом однородности осевой скорости по сечению квазитвердого тела предположительный тип его деформации — чистый сдвиг. Текущий размер квазитвердого ядра  $h$  определяется из уравнения (4.31) с учетом (4.5) и (4.8):

$$s\tau_0 = \left( \frac{dp}{dx} - \rho g \right) h. \quad (4.32)$$

Рассматривая совместно (4.31) и уравнение состояния из (4.30), можем записать

$$s\tau_0 + \eta\gamma^m = \left(\frac{dp}{dx} - \rho g\right)y.$$

Запишем выражение (4.32) так:

$$\left(\frac{dp}{dx} - \rho g\right) = \frac{s\tau_0}{h_0},$$

но с другой стороны

$$\left(\frac{dp}{dx} - \rho g\right) = \frac{s\tau_0 + \eta\gamma^m}{y}.$$

Исключая из последних двух выражений давление, получим

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = s \left(\frac{\tau_0}{\eta}\right)^{1/m} \left(\frac{y}{h_0} - 1\right)^{1/m}. \quad (4.33)$$

Разделим переменные и проинтегрируем уравнение (4.33) с учетом граничных условий:

$$v_x = V + \frac{sm}{m+1} \left(\frac{\tau_0}{\eta}\right)^{1/m} h_0 \left[ \left(\frac{y}{h_0} - 1\right)^{1/m+1} - \left(\frac{h}{h_0} - 1\right)^{1/m+1} \right]. \quad (4.34)$$

Осевая скорость квазитвердого ядра  $v_0$  находится из условий (4.5), (4.8)

$$v_0 = V - \frac{sm}{m+1} h_0 \left(\frac{\tau_0}{\eta}\right)^{1/m} \left(\frac{h}{h_0} - 1\right)^{1/m+1}. \quad (4.35)$$

Функция тока для модели Гершеля–Балкли определяется по методике, представленной в разделе 4.1.4. Для квазитвердого ядра функция тока имеет вид

$$\psi = v_0 y.$$

На границе ядра

$$\psi = v_0 h_0.$$

В зонах градиентного течения

$$\begin{aligned} \psi - v_0 h_0 &= V(h - h_0) + \frac{smh_0}{m+1} \left(\frac{\tau_0}{\eta}\right)^{1/m} \times \\ &\times \left[ h_0 \frac{m}{2m+1} \left(\frac{y}{h_0} - 1\right)^{1/m+2} - \left(\frac{h}{h_0} - 1\right)^{1/m+1} (y - h_0) \right]. \end{aligned}$$

Циркуляция жидкости на входе имеет место при условии

$$V - \frac{mh_0}{m+1} \left(\frac{\tau_0}{\eta}\right)^{1/m} \left(\frac{h}{h_0} - 1\right)^{1/m+1} \Big|_{x=x_0} < 0.$$



В безразмерной форме условие наличия циркуляции на входе имеет вид

$$\xi_0 > \frac{(m+1)}{mS^*} \left[ \frac{1}{\zeta(\xi)} - \right]^{-1/m-1} - 1.$$

Здесь значение  $\zeta(\xi)$  находится из уравнения (4.38).

Расход жидкости в (4.30) складывается из осевого расхода квазитвердого ядра и расхода в зонах вязкопластического течения.

Выполнив интегрирование с учетом (4.34) и (4.35), имеем

$$Q = 2v h + 2 \int_h^h v_x dy,$$

$$Q = 2v h + 2 \left\{ V(h - h_0) + \frac{smh_0}{m+1} \left( \frac{\tau}{\eta} \right)^{1/m} \times \right. \\ \left. \times \left[ h \frac{m}{2m+1} \left( \frac{h}{h_0} - 1 \right)^{1/m+2} - \left( \frac{h}{h_0} - 1 \right)^{1/m+1} (h - h_0) \right] \right\},$$

где  $v$  определяется согласно (4.35). Тогда

$$Q = 2Vh - 2smh \left( \frac{\tau_0}{\eta} \right)^{1/m} \left( \frac{h}{h_0} - 1 \right)^{1/m+1} \frac{(h/m + h/m + h)}{(m+1)(2m+1)}. \quad (4.36)$$

**4.2.2. Решение в безразмерной форме.** Остаются в силе безразмерные параметры и переменные (4.17) и параболическое приближение для поверхности валка (3.15).

Представим безразмерные переменные (4.17) в виде (4.18).

Теперь, учитывая (4.18), приведем выражение расхода (4.36) к безразмерному виду

$$q = 2 \left( 1 + \xi \right) - \\ - \frac{2sm\zeta H}{V} \left( 1 + \xi \right)^2 \left( \frac{\tau}{\eta} \right)^{1/m} \left( \bar{\zeta} - 1 \right)^{1/m+1} \frac{(\zeta m + m + 1)}{(m+1)(2m+1)}.$$

Введем новый параметр  $S^*$  — число Ильюшина для среды Гершеля–Балкли:

$$S^* = \frac{H}{V} \left( \frac{\tau}{\eta} \right)^{1/m}. \quad (4.37)$$

При этом выражение для расхода примет вид

$$q = 2 \left( 1 + \xi \right) - 2sm\zeta S^* \left( 1 + \xi \right)^2 \left( \frac{1}{\bar{\zeta}} - \right)^{1/m+1} \frac{(\zeta m + m + 1)}{(m+1)(2m+1)}. \quad (4.38)$$

Уравнение (4.38) описывает распределение безразмерной ширины квазитвердого ядра  $\zeta$  по длине зоны течения  $\xi$ .

Введем новые обозначения:

$$\text{St}^* = \frac{\rho g H_0}{\eta} \left( \frac{H_0}{V} \right)^m, \quad (4.39)$$

$$\text{La}^* = \frac{p H_0}{\eta \sqrt{2 R H_0}} \left( \frac{H_0}{V} \right)^m. \quad (4.40)$$

Учитывая (4.17), (4.39), (4.40), приведем уравнение для давления (4.32) к безразмерному виду:

$$\frac{d \text{La}^*}{d \xi} = \text{St}^* + \frac{s S^{*m}}{\zeta (1 + \xi^2)}. \quad (4.41)$$

Остается в силе симметричность зоны прямотока относительно минимального зазора.

Решаем уравнения (4.38), (4.41) с учетом граничного условия (4.19) и равенства (4.22).

Интегрируем выражение (4.41):

$$\text{La}^* = \text{St}^* (\xi - \lambda) - S^{*m} \int_{\lambda}^{\xi} \frac{\text{sign}(\xi + \lambda)}{\zeta(\xi) (1 + \xi^2)} d\xi, \quad (4.42)$$

где  $\zeta(\xi)$  является корнем уравнения (4.38).

Решение уравнения (4.38) ищется с учетом граничного условия:  $\zeta = 1$ , при  $\xi = \lambda$ , тогда

$$q = 2(1 + \lambda^2). \quad (4.43)$$

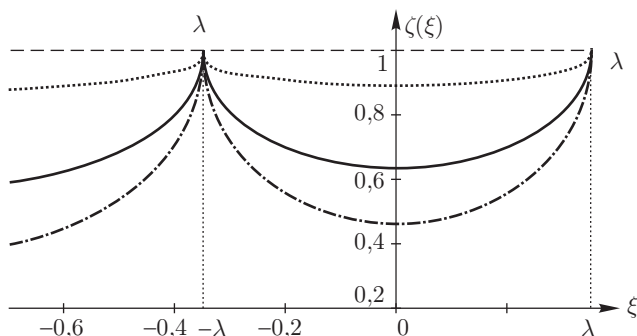


Рис. 4.16. Профиль квазитвердого ядра  $\zeta(\xi)$ : при  $\lambda = 0,35$ ,  $m = 1$  (сплошная линия),  $m = 0,6$  (мелкий пунктир),  $m = 1,2$  (штрих-пунктир)

Подставляем уравнение (4.43) в (4.38) и приводим к виду  $f(x) = 0$ :

$$2 \left(1 + \xi^2\right) - 2sm \left(1 + \xi^2\right)^2 \zeta S^* \left(\frac{1}{\zeta} - 1\right)^{1/m+1} \times \\ \times \frac{(\zeta m + m + 1)}{(m + 1)(2m + 1)} - 2 \left(1 + \lambda^2\right) = 0. \quad (4.44)$$

Полученное уравнение является трансцендентным и его решение имеет вид  $\zeta = \zeta(S^*, \lambda, m, \xi)$ . Графический вид решения представлен на рис. 4.16 (примерные значения степенного коэффициента:  $m \approx 0,6-0,8$  для цемента;  $m \approx 1$  для ксантогената калия,  $m \approx 1,01-1,15$  для мокрого песка). Из рисунка видно, что эффекты аномалии вязкости существенно влияют на поперечные размеры квазитвердого ядра, при этом соответственно изменяются и зоны градиентного течения.

#### 4.2.3. Анализ модели течения среды Гершеля–Балкли.

Для среды Шведова–Бингама, задача сводилась к интегрированию выражения для давления, содержащего функцию  $\zeta(\xi)$ , которая имела сравнительно простое аналитическое представление, поскольку являлась корнем кубического уравнения.

В случае среды Гершеля–Балкли задача интегрирования существенно усложняется, поскольку зависимость  $\zeta(\xi)$  описывается трансцендентным уравнением (4.38), ввиду чего получение его аналитического решения невозможно, и, соответственно, компьютер неспособен разрешить подынтегральное выражение в уравнении (4.42). Поэтому для удобства численного анализа перейдем от интегрирования к решению системы дифференциальных уравнений. При этом отпадает необходимость искать корень трансцендентного уравнения.

Для давления имеем уравнение (4.41).

Преобразуем уравнение, связывающее  $\zeta$  и  $\xi$  (4.44):

$$F(\zeta, \xi) = \left(\xi^2 - \lambda^2\right) - 2sm \left(1 + \xi^2\right)^2 \zeta S^* \times \\ \times \left(\frac{1}{\zeta} - 1\right)^{1/m+1} \frac{(\zeta m + m + 1)}{(m + 1)(2m + 1)}. \quad (4.45)$$

Используем правило дифференцирования неявной функции:

$$\frac{d\zeta}{d\xi} = - \frac{dF(\zeta, \xi)/d\xi}{dF(\zeta, \xi)/d\zeta}. \quad (4.46)$$

Выполним дифференцирование:

$$\frac{dF(\zeta, \xi)}{d\xi} = 2\xi - 8sm(1 + \xi^2)\zeta S^* \left(\frac{1}{\zeta} - 1\right)^{1/m+1} \frac{\zeta m + m + 1}{(m+1)(1+2m)} \xi, \quad (4.47)$$

$$\frac{dF(\zeta, \xi)}{d\zeta} = -2s \left(1 + \xi^2\right)^2 S^* \left(\frac{1}{\zeta} - 1\right)^{1/m+1} \frac{2\zeta^2 m^2 + m + 2\zeta m + 1}{(m+1)(1+2m)(\zeta-1)}. \quad (4.48)$$

Таким образом, получаем из (4.46) с учетом (4.47) и (4.48)

$$\frac{d\zeta}{d\xi} = \frac{\xi - 4sm(1 + \xi^2)\zeta S^* \left(\frac{1}{\zeta} - 1\right)^{1/m+1} \frac{\zeta m + m + 1}{(m+1)(1+2m)} \xi}{s \left(1 + \xi^2\right)^2 S^* \left(\frac{1}{\zeta} - 1\right)^{1/m+1} \frac{2\zeta^2 m^2 + m + 2\zeta m + 1}{(m+1)(1+2m)(\zeta-1)}}. \quad (4.49)$$

Имеем систему дифференциальных уравнений первого порядка (4.41) и (4.49) для функций  $\mathbf{La}$  и  $\zeta$ . Ее необходимо дополнить граничным условием:

$$\xi = \lambda, \quad \zeta = 1, \quad \mathbf{La} = 0. \quad (4.50)$$

Расчет ведется методом Рунге–Кутты от выходного сечения (4.50) к входному, для которого граничное условие имеет вид:

$$\xi = \xi_0, \quad \mathbf{La} = 0. \quad (4.51)$$

Отметим, что шаг вычислений по  $\xi$  отрицательный. Кроме того, при расчетах выявились две критические точки по  $\xi$ :  $-\lambda$  и  $\lambda$ . В этих точках касательная к кривой  $\zeta(\xi)$  превращается в вертикальную асимптоту и возникает ошибка вычислений. Чтобы обойти это ограничение, расчет ведется около этих точек, исключая их. Точность задания расчетной области порядка  $10^{-15}$ , то есть влияние этих точек на расчет несущественно.

Необходимо упомянуть, что такая высокая точность является необходимой для правильного расчета, так как при меньшей происходит накопление ошибок и даже при этой точности, если степенной коэффициент  $m < 0,7$ , происходит уже визуальное искажение зависимости  $\zeta(\xi)$ . Для корректного расчета для  $m < 0,7$  необходимо увеличивать точность вычислений. При  $m > 1$ , точность расчетов оказывает значительно меньшее значение и минимальной является  $\sim 10^{-2}$ .

Очевидно, что свойства решения сохраняются такими же как для случая валкового течения среды Шведова–Бингама. Изменится лишь вид самих кривых давления. На рис. 4.17 представ-

лены, в качестве примера, графические зависимости для валкового течения тяжелой вязкопластической среды Гершеля–Балкли при различных значениях степенного показателя  $m$ .

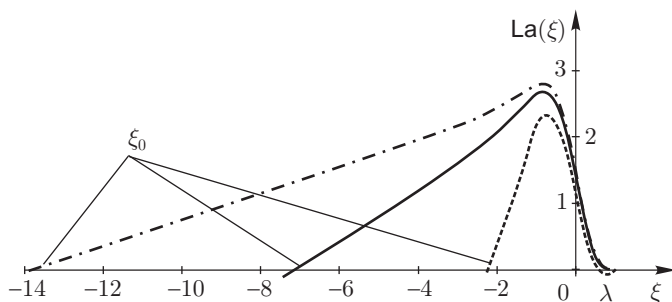


Рис. 4.17. Влияние аномалии вязкости на распределение давления:  $m = 1$  — сплошная линия; 0,8 — пунктир; 1,1 — штрих-пунктир

Как видно по графической зависимости, степенной показатель  $m$  оказывает незначительное влияние на величину давления в валковом зазоре, а основное влияние — на расход обрабатываемого материала. Значительнее на расход суспензии и величину давления в валковом зазоре влияет толщина наносимого на валки материала (рис. 4.18).

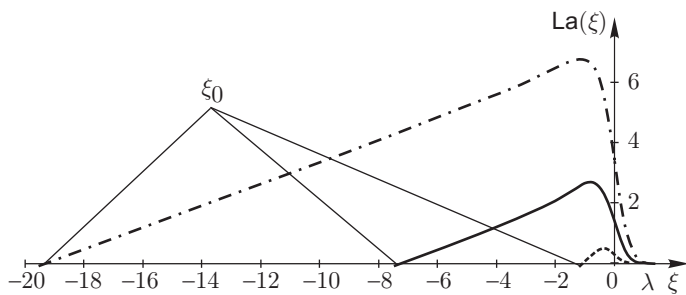


Рис. 4.18. Вид кривых безразмерного давления в зависимости от координаты выхода:  $\lambda = 1$  — сплошная линия; 0,5 — пунктир; 1,5 — штрих-пунктир

Границы режимов валкового течения находятся аналогично случаю течения среды Шведова–Бингама. Граница первого режима  $B$  ( $0 < St < B$ ) представлена в виде (4.28).

Граница второго режима — критическое значение числа Стокса  $St^{кр*}$ , определяется из (4.21), (4.34) с учетом условия:  $\xi = 0$ ,  $dLa/d\xi = 0$ .

После несложных преобразований имеем

$$\text{St}^{\text{кр}*} = \frac{S^{*m}}{\zeta^*},$$

где  $\zeta^*$  находим из трансцендентного уравнения (4.44) при условии  $\xi = 0$ :

$$2 - 2sm\zeta S^* \left( \frac{1}{\zeta^*} - 1 \right)^{1/m+1} \frac{(\zeta^* m + m + 1)}{(m+1)(2m+1)} - 2(1 + \lambda^2) = 0,$$

тогда

$$\zeta^* = \zeta^*(S^*, \lambda, m).$$

Таким образом, режим имеет место на интервале  $B < \text{St} < \text{St}^{\text{кр}}$ . Соответственно третий режим наступает при  $\text{St} > \text{St}^{\text{кр}}$ .

Математическая модель позволяет определить характерные диапазоны скоростей и напряжений сдвига, необходимые при определении реологических констант. Наименьшее касательное напряжение и скорость сдвига имеют место на оси течения  $y = 0$ ,  $\text{int}(\tau_{xy}) = 0$ ,  $\text{int}(\gamma) = 0$ . Соответственно, наибольшее касательное напряжение  $\sup(\tau_{xy})$  и скорость сдвига  $\sup(\gamma)$  имеют место в точках  $x = 0$ ,  $y = \pm H_0$  (или  $\xi = 0$ ,  $\zeta = \pm h_0/H_0$ ). Используя уравнения (4.32) и уравнение состояния из (4.30), с учетом выражений (2.15), (4.17), (4.37), (4.39), (4.40), (4.41), можем записать:

$$\sup(\gamma) = \left[ \frac{\tau_0}{\eta} \left( \frac{1}{\zeta^*} - 1 \right) \right]^{1/m}, \quad \sup(\tau_{xy}) = \frac{\tau_0}{\zeta^*},$$

где  $\zeta^*$  находим из трансцендентного уравнения (4.44) при условии  $\xi = 0$ .

Найдем интегральные параметры течения. Сила трения, действующая со стороны жидкости на поверхность вала единичной длины с учетом выражений (4.31), (4.32), (4.17), (4.37), (4.39), (4.40), определяется интегралом

$$F = \int_{x_0}^{x_1} \tau_{xy}|_{y=h} \cos(\alpha) dx = -\tau_0 \sqrt{2RH_0} \int_{\xi_0}^{\lambda} \frac{\text{sign}(\xi + \lambda) d\xi}{\zeta(\xi)},$$

где функция  $\zeta(\xi)$  описывается соотношениями (4.42).

Величина распорного усилия, рассчитанная на единицу рабочей длины вала, с учетом выражений (4.37), (4.39), (4.40), (4.41) находится путем интегрирования по частям:

$$W = \int_{x_0}^{x_1} \tau_{yy}|_{y=h} dx = -2\tau_0 \sqrt{2RH_0} \int_{\xi_0}^{\lambda} \frac{\text{sign}(\xi + \lambda)}{\zeta(\xi)} d\xi.$$

### 4.3. Сравнение моделей

Существующие реологические модели не могут претендовать на абсолютно точное моделирование реальных жидкостей. И любую жидкую среду можно с определенной точностью описать различными реологическими моделями — все зависит от требуемой точности конечного результата. Например, вода — это вязкопластическая жидкость ( $\tau = \tau_0 + \eta\dot{\gamma}$ ) с  $\tau_0 \approx 10^{-3}$  Па, но для инженерных расчетов она хорошо аппроксимируется ньютоновской моделью ( $\tau = \eta\dot{\gamma}$ ). Или дилатантные ( $m > 1$ ) и псевдопластические ( $m < 1$ ) среды ( $\tau = \eta\dot{\gamma}^m$ ) при малых отклонениях реологической константы  $m$  от 1 также удовлетворительно описываются ньютоновской моделью.

Усложнение реологической модели ведет к громоздкости расчетных выражений. При этом возрастает вероятность получения ошибки в расчетах.

Возникает вопрос: во-первых, о целесообразности использования сложных реологических моделей, во-вторых, об оценке увеличения степени точности разработанных математических моделей относительно существующих.

На рис. 4.19 представлены зависимости безразмерного давления  $La(\xi)$  от безразмерной координаты  $\xi$  для вязкопластической среды Гершеля–Балкли при различных граничных значениях

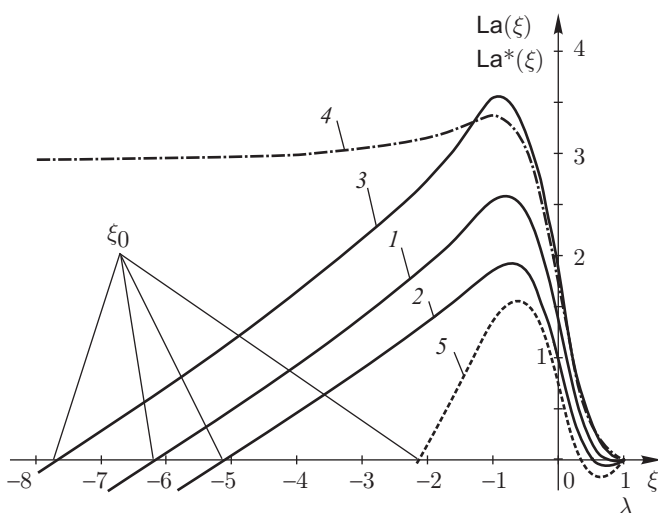


Рис. 4.19. Распределение безразмерного давления  $La(\xi)$  по длине зоны течения при различных значениях реологических параметров

реологических параметров  $\tau$ ,  $m$  и безразмерного критерия  $St$ . Расчеты выполнены для условий:  $\rho = 965 \text{ кг/м}^3$ ,  $H = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ,  $R = 0,6 \text{ м}$ ,  $\eta = 0,026 \text{ Па} \cdot \text{с}$ ,  $n = 4 \text{ мин}^{-1}$ ,  $V = 0,251 \text{ м/с}$ ,  $\lambda = 1$ .

Кривая 1 отвечает условиям:  $\tau = 4 \text{ Па}$ ,  $m = 1$ ,  $S = 0,306$ ,  $St = 0,362$ .

При пренебрежении значением предельного касательного напряжения ( $\tau = 0 \text{ Па}$ ,  $m = 1$ ,  $S = 0$ ,  $St = 0,362$ ) аппроксимируем жидкость ньютоновской моделью ( $\tau = \eta\gamma$ ) (рис. 4.19, кривая 2). Отметим, что кривая 2 построена по модели Гершеля–Балкли, но и расчеты по ньютоновской модели дают идентичный результат. Величина максимального давления в валковом зазоре  $La_{\max}$  уменьшается на 34 %, а на выходе из валков вакуумирование возрастает в 4 раза. При большом значении предельного касательного напряжения ( $\tau = 10 \text{ Па}$ ,  $m = 1$ ,  $S = 0,765$ ,  $St = 0,362$ ), величина максимального давления в валковом зазоре  $La_{\max}$  увеличивается на 39 % (рис. 4.19, кривая 3), пропорционально увеличиваются и распорные усилия. Следовательно, вязкопластические свойства жидкости оказывают значительное влияние на валковое течение и аппроксимация вязкопластических жидкостей вязкими и нелинейно-вязкими реологическими моделями возможна лишь при незначительных ( $\tau < 10$ ) отклонениях реологических констант от аналогичных параметров ньютоновских и неньютоновских жидкостей.

Степенной коэффициент  $m$  более влияет на расход, чем на величину максимального давления в валковом зазоре  $La_{\max}$  (рис. 4.17), поэтому аппроксимация нелинейно-вязких жидкостей возможна только при небольших отклонениях  $m$  от 1 — порядка 10 % (величина расхода является важнейшей в технологическом расчете любого аппарата).

Безразмерный критерий  $St$  оказывает значительное влияние на процесс валкового течения. При  $St = 0$  (рис. 4.19, кривая 4), кривая безразмерного давления асимптотически приближается к оси  $\xi$ , т.е. пренебрегая силой тяжести мы получим увеличение расчетного расхода над действительным значением. Увеличение  $St$  уменьшает расчетный расход, потому что сила тяжести способствует процессу валкового течения (рис. 4.19, кривая 5,  $St = 1$ ). За счет уменьшения расхода жидкости, уменьшается максимальное давление в валковом зазоре  $La_{\max}$  и распорные усилия (и другие энергетические характеристики), но в несколько раз увеличивается вакуумирование на выходе из валков.

Основные результаты 3 и 4 глав опубликованы в работах [69–73].



#### 4.4. Измерение давления в зазоре валковых машин сканирующим датчиком интегрирующего типа

В экспериментальных исследованиях переработки высоковязких материалов на валковых машинах и роторных грануляторах широко используются плунжерные (игольчатые) динамические датчики давления, встроенные в тело валака. Распределение давления в рабочем зазоре зависит от реологических свойств перерабатываемого материала и условий течения. Результаты исследований зависят от точности измерения. Давление, неоднородное по длине зоны течения, воздействуя на круглую торцевую поверхность плунжера, создает осевую силу, которая вызывает упругую деформацию чувствительного элемента сканирующего датчика.

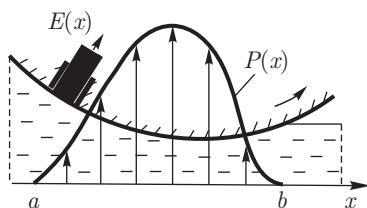


Рис. 4.20. Схема измерения давления в рабочем зазоре гранулятора

Процедура сканирования поясняется на рис. 4.20. В качестве чувствительного элемента применяются как тензорезисторные, так и пьезоэлектрические преобразователи. Точность измерения зависит от конструкции датчика и размеров измерительной поверхности. Уменьшение диаметра плунжера способствует локализации участка измерения,

и как следствие — повышению точности измерения, поскольку возрастает разрешающая способность датчика. Однако при этом уменьшается осевое усилие, и возрастают нелинейные эффекты, обусловленные нелинейностью начального участка статической характеристики, трением в плунжерной паре и т. д. Конечные размеры измерительной поверхности сканирующего датчика вносят систематическую погрешность в результаты измерения.

При ряде упрощающих допущений составим математическую модель сканирующего датчика, что позволит разработать методику восстановления истинного распределения давления в рабочей зоне валковых машин [74, 75, 76]. Имеем задачу редукции к идеальному датчику.

Размер измерительной поверхности датчика меньше протяженности зоны течения. Ось  $x$  направлена вдоль зоны течения (см. рис. 4.20). Пусть на участке  $a, b$  истинное распределение давлений характеризуется функцией  $P(x)$ , а регистрируемое  $E(x)$ . Пренебрегаем силами инерции и трением плунжерной пары.

На рис. 4.21 представлена схема торцевой поверхности плунжера. Радиус плунжера  $R$ . Текущая координата центра измерительной поверхности  $x$ . Введем локальную абсциссу  $s \in [-R, R]$ , соответствующую направлению  $x$ . На расстоянии  $s$  выделим

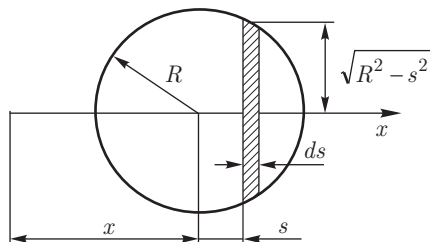


Рис. 4.21. Схема чувствительной поверхности датчика

элементарную площадку шириной  $ds$ . Если в точке  $x$  значение давления  $P(x)$ , то на выделенную площадку воздействует давление  $P(x + s)$ . Элементарная результирующая сила, действующая на площадку:

$$dF = 2P(x + s)\sqrt{R^2 - s^2} ds.$$

Для измеренного в точке  $x$  среднеинтегрального давления можем записать

$$E(x) = \frac{1}{\pi R^2} \int_{-R}^R dF,$$

или в развернутой форме

$$E(x) = \frac{2}{\pi R^2} \int_{-R}^R P(x + s)\sqrt{R^2 - s^2} ds. \quad (4.52)$$

Таким образом, зависимость входного сигнала  $P(x)$  и выходного  $E(x)$  описывается линейным интегральным уравнением Фредгольма первого рода.

Задача редукции к идеальному датчику (восстановления сигнала) состоит в нахождении функций  $P(x)$  по известной, определенной из опытов, функции  $E(x)$ . Для решения уравнения (4.52) разложим функцию  $P(x + s)$  в окрестности точки  $x$  в ряд Тейлора:

$$P(x + s) = P(x) + sP'(x) + \frac{s^2}{2!}P''(x) + \dots + \frac{s^n}{n!}P^n(x). \quad (4.53)$$

Здесь штрих означает производную по  $x$ . Подставив ряд (4.53) в (4.52) и почленно проинтегрировав, получим дифференциальное уравнение бесконечного порядка для давления:

$$E(x) = P + \frac{R^2}{8} P'' + \frac{R^4}{192} P^{IV} + \dots \quad (4.54)$$

Из уравнения видно, что искажения сигнала обусловлены исключительно четными производными от  $P$ . В точках перегиба функции  $P$  (в которых выполняется равенство  $P'' = 0$ ) искажения минимальны. Уменьшение размера чувствительной поверхности уменьшает искажения и имеет место равенство  $\lim_{R \rightarrow 0} E(x) = P(x)$ .

Ограничиваясь двумя первыми членами уравнения (4.54), получим для функции  $P(x)$  неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка, которое является приближенным решением уравнения Фредгольма

$$P'' + \frac{8}{R^2} P = \frac{8}{R^2} E(x). \quad (4.55)$$

Для приближенного уравнения (4.55) запишем регуляризующие условия. Если постоянные  $c$  и  $d$  характеризуют границы функции  $E(x)$ , то границы функции  $P$  можно определить так:  $a = c + R$ ;  $b = d - R$ . Предполагая, что течение перерабатываемого материала в зазоре валков соответствует концепции Гаскелла [23], правомерно на неизвестную функцию наложить условия:

$$P(b) = P'(b) = 0; \quad P(a) = 0. \quad (4.56)$$

Выполненное операционным методом решение задачи (4.55), (4.56) может быть представлено в интегральной форме:

$$P = \frac{2\sqrt{2}}{R} \int_b^{b-x} E(s) \sin \left[ \frac{2\sqrt{2}}{R} (b - x - s) \right] ds \quad (4.57)$$

В качестве примера была взята теоретическая кривая распределения давления из работы [65], соответствующая течению ньютоновской жидкости (см. рис. 4.22). Кривая измеренного распределения давления  $E$  для случая  $R = 0,2$  была получена путем искусственного искажения с использованием кубатурной формулы

$$E(x) = \frac{1}{4} P(x) + \frac{1}{3} \left[ P \left( x - \frac{R}{2} \right) + P \left( x + \frac{R}{2} \right) \right] + \frac{1}{24} [P(x - R) + P(x + R)],$$

которая эквивалентна уравнению (4.52), но более удобна для численных расчетов.

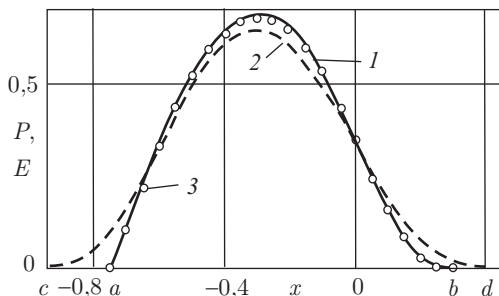


Рис. 4.22. Распределение давления в рабочем зазоре: 1 — истинная кривая  $P$ , 2 — «измеренное» распределение  $E$ , 3 — восстановленные точки

Из рисунка видно, что измеренное максимальное давление в сечении  $x = -0,3$  меньше действительного. Кроме того, кривая  $E$  показывает увеличенные размеры зоны течения. Также на рисунке представлены точки восстановленных значений функции  $P$ , полученные на основе анализа кривой  $E$ .

Уравнение (4.55) с учетом (4.56) решалось методом Рунге–Кутты. Функция  $E$  аппроксимировалась полиномом 8-й степени. Расчет выполнен с шагом по  $x$ , равным 0,1. При варьировании  $b$  в интервале 0,25–0,35 (вместо точного 0,3) конфигурация восстановленной кривой изменялась незначительно. Следовательно, предложенный метод мало чувствителен относительно точности задания координаты  $b$ . В точке максимума относительная погрешность для «измеренного» сигнала  $E$  составляла 6,55%, а восстановленной кривой — 1,43%. Соответственно, дисперсия в результате проведения процедуры восстановления снизилась с  $1,13 \cdot 10^{-3}$  до  $8,22 \cdot 10^{-5}$ .

Погрешность, вносимая датчиком, зависит от соотношения радиуса чувствительной поверхности плунжера и размера зоны течения. При их соизмеримости искажения могут быть весьма существенны, и для получения достоверных результатов необходимо проводить процедуру восстановления сигнала.

## Список литературы

1. *Беляев Н.М., Рядно А.А.* Методы нестационарной теплопроводности. — М.: Наука, 1978.—328 с.
2. *Цой П.В.* Методы расчета задач тепло-массопереноса. — М.: Энергоатомиздат, 1984. 416 с.
3. *Шехтер Р.С.* Вариационный метод в инженерных расчетах. — М.: Мир, 1971. 291 с.
4. *Коздоба Л.А.* Методы решения нелинейных задач теплопроводности. — М.: Наука, 1972. 284 с.
5. *Лыков А.В.* Методы решения нелинейных уравнений нестационарной теплопроводности // Энергетика и транспорт. 1970. № 2. С. 109–150.
6. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. — М.: Высшая школа, 1967. 599 с.
7. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. — М.: ИФМЛ, 1962. 708 с.
8. *Лукач Ю.Е., Петухов А.Д., Сенатос В.А.* Оборудование для производства полимерных пленок. — М.: Машиностроение, 1981. 224 с.
9. *Класен П.В., Гришаев И.Г.* Основы техники гранулирования. — М.: Химия, 1982. 272 с.
10. *Вагин А.А. и др.* Грануляторы. — М.: ЦИИТИХИМНЕФТЕМАШ, 1970. 37 с.
11. *Лейбовский М.Г. и др.* Современные конструкции отечественных грануляторов. Обзор. — М.: ЦИИХИМНЕФТЕМАШ, 1980. 54 с.
12. *Мурашвер В.И., Юницкий В.В.* Пресс-формовочные грануляторы. Обзор. — М.: ЦИИТИХИМНЕФТЕМАШ, 1977. 54 с.
13. *Класен П.В. и др.* Гранулирование. — М.: Химия, 1991. 421 с.
14. *Галахов М.А. и др.* Математические модели контактной гидродинамики. — М.: Наука, 1982. 296 с.
15. *Сигаев Н.П.* Исследование течения вязких масс применительно к расчету грануляторов валкового типа. Дисс...канд. техн. наук. — М., 1876. 173 с.
16. *Александрова С.Г., Иванов О.Н.* Межвузовск. сб.: «Машины и технология переработки каучуков, полимеров и резиновых смесей» // Ярославль, 1984. С. 8
17. *Парталин Т.А., Иванов О.Н.* Исследование течения вязкой жидкости применительно к расчету грануляторов роторного типа // Межвузовск. сб. «Разработка, исследование и расчет машин и аппаратов химических производств». — М., 1980. С. 121–122.
18. *Пащенко В.Н.* Исследование процесса формирования через плоскую фильеру гранулятора // В кн.: Тез. 13 Всесоюзн. симпоз. по реологии. — Волгоград, 1984. С. 55–56.
19. *Пащенко В.Н. и др.* Определение усилия для перекачивания валак формующего гранулятора // В кн.: Тез. докл. Всесоюзн. совещан. «Повышение эффективности и надежности машин и аппаратов в основной химии». — Суммы, 1989. С. 17–18.

20. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1973. 848 с.
21. Техника переработки пластмасс / Под ред. Басова Н.И., Броя. — М.: Химия, 1982. 528 с.
22. Бернхардт Э. Переработка термопластичных материалов. — М.: Химия, 1962. 747 с.
23. Мак-Келви Д.М. Переработка полимеров. — М.: Химия, 1962. 444 с.
24. Торнер Р.В. Теоретические основы переработки полимеров. — М.: Химия, 1977. 464 с.
25. Гольдштейн Р.В., Ентов В.М. Качественные методы в механике сплошных сред. — М.: Наука, 1989. 224 с.
26. Тарг Г.М. Основные задачи теорий ламинарных течений. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1951. 420 с.
27. Гарифулин Ф.А., Кутузов А.Г. Двумерное течение упруговязкой среды в зазоре между вращающимися валками // В кн.: Тез. 1 Всесоюз. научн.-техн. конф. «Реология и оптимизация процессов переработки полимерных материалов». — Устинов, 1986. С. 106.
28. Кутузов А.Г. и др. Моделирование и синтез параметров симметричного процесса переработки вязкоупругих материалов в зазоре между вращающимися валками // В сб.: 3 Всесоюз. симпоз. «Теория механической переработки полимерных материалов». — Пермь, 1982. С. 112.
29. Моднов С.И. и др. Исследование течения вязкоупругих материалов в области деформации валковых машин // В кн.: 11 Всесоюз. симпоз. «Теория механической переработки полимерных материалов». — Пермь, 1980. — С.101–102.
30. Денисов И.Е. и др. Моделирование реологических свойств концентрированных суспензий // В сб.: Тез. докл. XIII Всесоюз. симпоз. по реологии. Волгоград, 1984. С. 23.
31. Курилкина Н.Е. и др. Реологические свойства металлонаполненного полиэтилена // В сб.: Тез. докл. Всесоюз. научн.-техн. конф. «Процессы и аппараты производства полимерных материалов, методы и оборудование для переработки их в изделия». Т. 1. — М., 1982. С. 10.
32. Голубков А.Г. О прогнозировании технологических свойств высоконаполненных композиций на основе карбонильного железа // В сб.: Тез. докл. Всесоюз. научн.-техн. конф. «Процессы и аппараты производства полимерных материалов, методы и оборудование для переработки их в изделия». Т. 1. — М., 1982. С. 10–11.
33. Яцук В.М. Гидродинамический анализ процесса шнековой экструзии наполненных полимерных композиций // В сб. 3 Всесоюз. симпоз. «Теория механической переработки полимерных материалов». — Пермь, 1982. С. 163.
34. Скробин Ю.Б. и др. Математическая модель прокатки вулканизованных масс // В сб. 3 Всесоюз. симпоз. «Теория механической переработки полимерных материалов». — Пермь, 1982. С. 167.
35. Тябин Н.В. и др. Математическая модель неизотермического каландрования вязкопластических резиновых смесей // В сб. 3 Всесоюз. симпоз. «Теория механической переработки полимерных материалов». — Пермь, 1982. С. 167.
36. Вахрушев А.В. Реологические свойства прессованных порошковых композиций // В сб. Тез. Всесоюз. научн.-техн. конф. «Реология и оптимизация процессов переработки полимерных материалов». — Устинов, 1986. С. 77.

37. Любимов А.В. и др. Исследование реологических характеристик высоконаполненных материалов на основе низковязкого полимера // В сб. Тез. Всесоюз. научн.-техн. конф. «Реология и оптимизация процессов переработки полимерных материалов». — Устинов, 1986. С. 86.
38. Карнаушенко Л.И. Процессы сдвига мелкодисперсных сыпучих материалов // В сб.: Тез. 3 Всесоюз. симоз. «Теория механической переработки полимерных материалов». — Пермь, 1982. С. 83.
39. Gu Da-Zhi, Lu Jim. Rheological properties of ceramic pastes with and without polymer additives // In X-th Int. Congress on Rheology. — Sydney, 1988, 1, 371–373.
40. Бухановский Ю.В. и др. Об условиях закупорки фильер в процессе гранулирования композитных материалов // В сб.: Тез. 3 Всесоюз. симоз. «Теория механической переработки полимерных материалов». — Пермь, 1982. — С. 32.
41. Doraiswamy D. et al. The rheology of ceramic suspensions // In X-th Int. Congress on Rheology. — Sydney, 1988, № 1, 19–24.
42. Van den Brule B.H.H.A. On layered flow of a concentrated suspension // In X-th Int. Congress on Rheology. — Sydney, 1988, 2, 345–347.
43. Ярин А.Л. Механические аспекты процессов получения покрытий и проводов из высокотемпературных сверхпроводников. ИПМ АН СССР. — М.: Препринт №399, 1989. 55 с.
44. Маковей Н. Гидравлика бурения. — М.: Недра, 1986. 536 с.
45. Горбатов А.В. Реология мясных и молочных продуктов. — М.: Пищевая промышленность, 1979. 383 с.
46. Мачихин Ю.А., Мачихин С.А. Инженерная реология пищевых материалов. — М.: Легкая и пищевая промышленность, 1981. 216 с.
47. Tokota N, White J.L. // J. Applied Polymer Science. 1966. V. 10. P. 1011–1026.
48. Скробин Ю.Б., Тябин Н.В. Основы расчетов реологических процессов течения полимерных систем в рабочих органах валковых машин. Часть 1. Учебное пособие. — Волгоград, 1981. С. 33–59.
49. Wagner M.G. // J. Applied Polymer Science. 1970. V. 14. P. 759–763.
50. Виноградов Г.В., Малкин А.Я. Реология полимеров. — М.: Химия, 1977. 438 с.
51. Иванова Л.И., Виноградов Г.В. Экспериментальное исследование эластической турбулентности и пристенного скольжения эластомеров в широком интервале температур // Механика полимеров. 1968. № 2. С. 336–342.
52. Константинов В.Н., Тимергалеев Р.Г., Воскресенский В.А. Пристенный эффект при течении систем ПВХ-пластификатор // Пластические массы. 1972. № 12. С. 34–36.
53. Бекин Н.Г., Богданов В.Н., Городецкий В.Н. Об относительном перемещении материала по дуге контакта в процессе каландрования // Изв. вузов. Химия и химическая технология, 1971. Т. 14, № 9. С. 1426–1428.
54. Богданов В.Н., Городецкий В.Н., Бекин Н.Г. Распределение скоростей движения материала при несимметричном процессе переработки на валковых машинах // Химическое нефтяное машиностроение. 1972. № 6. С. 12–13.
55. Михалева Н.М., Мирзоев Р.Г., Красовский В.Н. Оценка эффекта проскальзывания при переработке полимеров на валковых машинах // Межвуз. сб. Ленингр. технол. ин-та, 1971. С. 71–74.

56. Чистякова Т.Б., Авербух А.Б., Колерт К. Математическое моделирование процессов усадки/растяжения полимерной пленки для управления каландровой линии // Химическая промышленность. 2002. № 10. С. 277–282.
57. Sapovalov V.M. Berechnung von Rotorgranulatoren // Plaste und Kautschuk. 1992. № 4. С. 133–132.
58. Вехтер Б.Д., Шаповалов В.М. Переработка неньютоновских жидкостей в грануляторах роторного типа // Пластмассы. 1991. № 9. С. 32–33.
59. Вехтер Б.Д., Шаповалов В.М., Тябин Н.В. Определение энергетических параметров при роторном гранулировании высоконаполненных гетерогенных систем // Пластмассы. 1991. № 9. С. 39–40.
60. Шаповалов В.М. Гидродинамический контакт вращающегося вала и полупроницаемого лотка // ИФЖ. 1982. Т. 68, № 6. С. 954–959.
61. Красовский В.Н. Исследование механики процессов переработки полимеров на валковых машинах // Автореферат дисс. на соиск. учен. степени докт. техн. наук. — Л., 1973.
62. Красовский В.Н., Минишки В.И., Мирзоев Р.Г. Приближенная теория несимметричного процесса каландрования полимерных материалов // Каучук и резина. 1970. № 2. С. 31–34.
63. Минишки В.И. Исследование несимметричного процесса переработки полимеров в зазоре валков // Автореферат дисс. на соиск. учен. степени канд. техн. наук. — Л., 1969.
64. Розе Н.В. Течение полимерных материалов между двумя вращающимися цилиндрами // ДАН СССР. 1972. Т. 206, № 4. С. 834–837.
65. Шаповалов В.М. Вехтер Б.Д., Тябин Н.В. Течение неньютоновской жидкости в зазоре между вращающимся цилиндром и проницаемой поверхностью при роторном гранулировании // ИФЖ. 1988. Т. 54. № 3. С. 415–421.
66. Янков В.И., Первадчук В.П., Боярченко В.И. Процессы переработки волокно образующих полимеров. — М.: Химия, 1989. 320 с.
67. Шаповалов В.М. Методика исследования параметров течения неньютоновских жидкостей в межвалковом зазоре с помощью плунжерного сканирующего датчика давления // Пластмассы. 1991. № 9. С. 44–45.
68. Sapovalov V.M. Erhöhung der Genauigkeit von Druckmessungen Walzenspalt bei Anwendung von integrierenden Messfühlern // Plaste und Kautschuk. 1990, 37, № 5. 169–170.
69. Zubovich C.O. Влияние гравитационных сил на валковое течение среды Шведова–Бингама // XI межвузовская научно-практическая конференция молодых ученых и студентов г. Волжского, тезисы докладов в 4-х томах. Т. 4. Технологические машины и оборудование в строительстве, машиностроении, химии и энергетике. — Волгоград, 2002. С. 47–48.
70. Zubovich C.O. Валковое течение среды Гершеля–Балкли с учетом гравитационных сил // X региональная конференция молодых исследователей Волгоградской области, тезисы докладов. — Волгоград, 2002. С. 7–9.
71. Zubovich C.O. Валковое течение среды Шведова–Бингама с учетом гравитационных сил // IX региональная конференция молодых исследователей Волгоградской области, тезисы докладов. — Волгоград, 2004. С. 11–13.
72. Шаповалов В.М., Zubovich C.O. Влияние гравитационных сил на течение среды Шведова–Бингама в валковой сушилке // Химия и химическая технология. Известия высших учебных заведений. 2006. № 4. С. 336–342.



73. Шаповалов В.М., Zubovich C.O. Математическая модель течения среды Гершеля–Балкли в валковой сушилке с учетом гравитационных сил // Химическая технология. 2006. № 3. С. 36–41.
74. Шаповалов В.М. Методика исследования параметров течения неньютоновских жидкостей в межвалковом зазоре с помощью плунжерного сканирующего датчика давления // Пластмассы. 1991. № 9. С.44–45,
75. Sapovalov V.M. Erhöhung der Genauigkeit von Druckmessungen Walzenspalt bei Anwendung von integrierenden Messfuhrern // Plaste und Kautschuk. 1990, 37, № 5. 169–170.
76. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения. Справочное пособие. — Киев: Наукова думка. 1986. 544 с.
77. Коновалов В.И. Пропиточно-сушильное и клеепромазочное оборудование / Коновалов В.И., Коваль А.М. — М.: Химия, 1989. 224 с.
78. Капица П.Л. Гидродинамическая теория смазки при качении // ЖТФ. 1955. Т. 25, вып. 4. С. 747–763.
79. Шаповалов В.М., Лапшина С.В. Введение в механику течения волокнонаполненных композитов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 176 с.
80. Мосина Е.В., Чернышёв И.В. Условие скольжения на поверхности модельной волокнистой пористой среды // Письма в ЖТФ. 2009. Т. 35, вып. 5. С. 103–110.