

В. И. Янков, В. И. Боярченко, В. П. Первадчук,
И. О. Глот, Н. В. Шакиров

ПЕРЕРАБОТКА ВОЛОКНООБРАЗУЮЩИХ ПОЛИМЕРОВ

ОСНОВЫ РЕОЛОГИИ ПОЛИМЕРОВ
И ТЕЧЕНИЕ ПОЛИМЕРОВ В КАНАЛАХ



R&C
Dynamics



**В. И. Янков, В. И. Боярченко, В. П. Первадчук,
И. О. Глот, Н. В. Шакиров**

ПЕРЕРАБОТКА ВОЛОКНООБРАЗУЮЩИХ ПОЛИМЕРОВ

**ОСНОВЫ РЕОЛОГИИ ПОЛИМЕРОВ
И ТЕЧЕНИЕ ПОЛИМЕРОВ В КАНАЛАХ**



Москва ♦ Ижевск

2008



Издание осуществлено при поддержке Российского фонда
фундаментальных исследований по проекту 08-08-07021

Рецензент:

доктор тех. наук, проф. Е. В. Славнов

Янков В. И., Боярченко В. И., Первадчук В. П., Глот И. О., Шакиров Н. В.
Переработка волокнообразующих полимеров. Основы реологии полимеров
и течение полимеров в каналах. — Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2008. — 264 с.

В книге рассматриваются основы реологии волокнообразующих полимеров и приводятся постановки и решения задач механики жидкости. Большое внимание уделено различным видам граничных условий жидкости у твёрдых границ. Приводятся решения задач о течении суспензий полимеров в различных загрузочных устройствах, течении полимеров в круглых трубах и каналах. Значительная часть книги посвящена течению реагирующих и полимеризующихся жидкостей (масс) в трубчатом реакторе вытеснения.

Для научных и инженерно-технических работников промышленности химических волокон и переработки пластмасс, лаков и красок. Для специалистов, студентов и аспирантов, изучающих вопросы переработки полимеров.

Табл. 9. Илл. 111. Библиогр. список: 183 назв.

ISBN 978-5-93972-705-1

© В. И. Янков, В. И. Боярченко, В. П. Первадчук, И. О. Глот, Н. В. Шакиров, 2008
© НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008

<http://shop.rcd.ru>
<http://ics.org.ru>

<http://www.twirpx.org> & <http://chemistry-chemists.com>

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ	5
Глава 1. КЛАССИФИКАЦИЯ ХИМИЧЕСКИХ ВОЛОКОН И КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О МЕТОДАХ ИХ ПОЛУЧЕНИЯ	8
Глава 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТЕЙ	15
Сохранение массы. Уравнения движения.	17
Уравнение сохранения энергии. Диссипативная функция	20
Реологические уравнения состояния сплошной среды	22
Постановка и решение задач механики жидкостей	51
Скольжение жидкостей у твердых границ	56
Глава 3. ПОЛУЧЕНИЕ СУСПЕНЗИЙ ПОЛИМЕРОВ И РАЗЛИЧНЫХ ДОБАВОК	78
Аппаратурное оформление процессов	78
Течение жидкости в открытом прямоугольном канале	82
Течение жидкости по поверхности вращающегося конуса.....	89
Течение жидкости по поверхности вращающегося диска	93
Течение жидкости по внутренней поверхности неподвижной трубы	95
Течение жидкости между неподвижными коаксиальными цилиндрами	97
Течение на начальном участке плоского и кольцевого каналов ...	
97 Стационарное течение в кольцевом зазоре	115
Стационарное течение в плоском канале	126
Течение между вращающимися конусами и гладкими дисками	130
Глава 4. ТЕЧЕНИЕ РАСТВОРОВ И РАСПЛАВОВ ПОЛИМЕРОВ В КРУГЛЫХ ТРУБАХ	136
Течение аномально вязких жидкостей на входе в трубу	136
Изотермическое течение	136
Неизотермическое течение	144

Стационарное течение полимерных жидкостей.....	159
<i>Изотермическое течение</i>	159
<i>Неизотермическое течение</i>	163
Стационарное течение жидкости в канале фильеры для нанесения оболочки на комплексную нить	167
<i>Течение с положительным градиентом давления</i>	169
<i>Течение с отрицательным градиентом давления</i>	174
<i>Определение давлений в канале фильеры и осевых усилий, действующих на нить</i>	179
Глава 5. ТЕЧЕНИЕ РЕОКИНЕТИЧЕСКИХ ЖИДКОСТЕЙ	186
Влияние диссипации механической энергии на течение жидкости в трубах и каналах.....	187
Нестационарное течение.....	190
<i>Течение при постоянном градиенте давления</i>	195
<i>Течение при постоянном расходе</i>	203
Квазистационарный подход к решению задачи о тепловом воспламенении реокинетических жидкостей в круглой трубе ...	206
Глава 6. ТЕЧЕНИЕ ПОЛИМЕРИЗУЮЩИХСЯ МАСС В ТРУБЧАТОМ РЕАКТОРЕ ВЫТЕСНЕНИЯ	216
Постановка задачи	216
Влияние диссипативного тепловыделения на гидродинамику и теплофизику процесса	218
Влияние осевого теплопереноса на течение	227
Влияние радиального распределения температурных и концентрационных полей	234
Низкотемпературный режим полимеризации	237
Высокотемпературный режим полимеризации	246
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	252

Предисловие

Химические волокна являются одним из самых многотоннажных полимерных материалов, которые выпускаются в мире и уступают только производству пластических масс, ассортимент которых безгранично велик. Значение химических волокон для нужд населения и промышленности невозможно переоценить. Химические волокна и нити широко используются в легкой промышленности для производства одежды и обуви, в резинотехнической промышленности для производства автомобильных покрышек и шлангов, в электротехнической промышленности для получения оплеток проводов и кабелей, для производства транспортных лент, приводных ремней (плоских и клиновых), для производства специальных видов бумаги, в промышленности при производстве тентовых тканей, канатов, орудий промышленного лова рыбы, мукомольных сит, для производства специальных армированных полимерных материалов и негорючих изделий из них и т. д.

Все химические волокна, вырабатываемые в мире, производятся, как правило, из растворов и расплавов полимеров, поэтому гидродинамическим и тепломассообменным процессам полимерных жидкостей и их математическому моделированию необходимо уделить самое пристальное внимание, поскольку от качественного проведения этих процессов и, самое главное, правильного выбора технологического оборудования в конечном счёте зависят все физико-механические показатели получаемых волокон.

Процессы переработки волокнообразующих полимеров имеют много общего с процессами переработки пластических масс (литература по переработке последних довольно обширна). Однако они отличаются своими, только им присущими, специфическими особенностями. Поскольку поперечные размеры элементарных химических волокон чрезвычайно малы по сравнению с изделиями из пластмасс, а требования к равномерности физико-механических показателей по длине волокон очень высоки, к полимерным жидкостям для формирования волокон предъявляются жесткие требования не только по чистоте (практически полное отсутствие примесей), но и по дисперсности и гомогенности различных добавок (красителей, пигментов, наполнителей и т. д.). Жесткие требования предъявляются также в отношении постоянства температуры, вязкости, цветности полимерной жидкости и т. п. Все эти требования нашли отражение в конструкции обо-

рудования и технологических процессах переработки, на основе которых производятся химические волокна.

Желая сделать книгу доступной для широкого круга читателей, авторы приводят в ней основные сведения о реологических свойствах волокнообразующих растворов и расплавов полимеров, постановки и решения задач механики жидкости, отличающиеся начальными и граничными условиями. Обсуждаются вопросы непрерывного получения суспензий полимеров в загрузочных устройствах различных конструкций, а также приводится решение задач о течении и теплообмене полимерных жидкостей в трубопроводах, коллекторах прядильных машин и различных каналах перерабатывающего полимеры оборудования.

Значительное место в книге уделено исследованию течения реагирующих и полимеризующихся жидкостей в трубчатом реакторе.

В первой главе дается краткая классификация химических волокон и некоторые сведения о методах их получения.

Вторая глава посвящена основным уравнениям механики жидкостей. Здесь обсуждаются динамические уравнения механики жидкостей, уравнения сохранения энергии, приводятся основы реологии волокнообразующих полимеров, а также методология постановки и решения задач механики жидкостей. Особое внимание уделено граничным условиям прилипания и скольжения полимерных жидкостей у твердых границ и начальным граничным условиям. Основная ценность данной главы состоит в том, что в ней приведена довольно большая сводка различных реологических уравнений как для аномально вязких, так и для вязкоупругих растворов и расплавов полимеров.

В третьей главе приводится решение задач, с которыми приходится сталкиваться при получении суспензий полимеров и различных добавок. Рассматривается течение в открытых прямоугольных каналах, на поверхности вращающихся конусов и дисков, на внутренней поверхности неподвижной трубы и в зазоре между неподвижными коаксиальными цилиндрами.

Четвертая глава целиком посвящена течению вязких, вязкоупругих, реокинетических и полимеризующихся полимеров в трубах круглого сечения. Здесь рассматриваются изотермические и неізотермические течения на входном участке трубы, стационарное изотермическое течение вязкопластической жидкости с учётом скольжения по внутренней поверхности трубы и неізотермическое стационарное течение жидкости с реологическим уравнением Рабиновича. Большое внимание уделяется стационарному течению жидкости в каналах фильер для нанесения оболочек на комплексную нить.

Пятая и шестая главы целиком посвящены течению в трубах реокинетических и полимеризующихся жидкостей.

Данная книга была задумана и написана как часть большого труда, посвященного различным аспектам процессов переработки химических во-

<https://www.twirpx.org> & <http://chemistry-chemists.com>

локон. Инициатором и вдохновителем этого проекта был доктор технических наук, заслуженный деятель науки и техники СССР Виктор Иванович Янков, который осуществил и общее редактирование труда. К сожалению, книга эта выходит в свет уже после его смерти. Авторы выражают признание огромного вклада, который внес В. И. Янков в исследование процессов переработки полимеров, и посвящают эту книгу памяти коллеги и учителя.

Глава 1

КЛАССИФИКАЦИЯ ХИМИЧЕСКИХ ВОЛОКОН И КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О МЕТОДАХ ИХ ПОЛУЧЕНИЯ

Все выпускаемые в мире волокна можно разделить на два больших класса. В первую очередь это синтетические волокна, получаемые из полимеров, синтезированных человеком. К ним относятся полиамидные, полиэфирные, полиакрилонитрильные, поливинилхлоридные и полиолефиновые волокна. Другой большой класс составляют искусственные волокна, которые получают химической переработкой природных высокомолекулярных соединений. К этому классу волокон относятся вискозные, медно-аммиачные и др. волокна.

С другой стороны, синтетические волокна можно разделить на две группы в зависимости от строения макромолекул: гетероцепные и карбоцепные. Гетероцепные волокна получают из полимеров, макромолекулы которых в своей цепи кроме атомов углерода имеют другие элементы, например, кислород, серу, азот и др. Карбоцепные же волокна получают из полимеров, основные цепи макромолекул которых построены только из атомов углерода.

Химические волокна получают путем продавливания растворов или расплавов полимеров через отверстия фильер с последующей их обработкой. Если полимер можно расплавить без разложения, то волокна получают из расплава полимеров (полиамидные, полиэфирные, полипропиленовые волокна). Если же температура плавления полимеров лежит выше их температуры разложения или полимеры не образуют термически стабильных расплавов, но растворяются в низкомолекулярных жидкостях, то волокна из этих полимеров получают путем растворения последних в различных растворителях (вискозные, медно-аммиачные, ацетатные, полиакрилонитрильные, поливинилхлоридные и др. волокна).

На практике нашли распространение два метода получения волокон — сухой и мокрый [3, 7, 25, 105]. При сухом методе формования расплав или раствор полимера после выхода из фильеры поступает в обдувочную шахту, в которую подается газ. В шахте струйки раствора вступают в контакт с горячим газом, благодаря чему происходит испарение растворителя, снижение текучести системы и образование твердой фазы — волокна. Темпера-

тура поступающего газа зависит от природы полимера и растворителя. Если волокна формируются из расплава полимера, то в обдувочной шахте струйки расплава вытягиваются, охлаждаются и, выйдя из шахты, либо сразу поступают на приёмные механизмы, либо предварительно подвергаются дополнительной вытяжке в застывшем состоянии. При сухом методе формирования волокон из растворов полимеров в шахту подается горячий воздух с температурой выше температуры кипения растворителя. В данном случае также производится вытяжка струй раствора полимера с одновременным удалением из них растворителя. Вытяжку можно производить и как отдельную операцию после удаления растворителя из свежесформованного волокна путем сушки или промывки. Скорость формирования волокна из раствора ограничивается условиями испарения растворителя из нити. Выйдя из шахты, волокно наматывается приемным механизмом на паковку. Технологическое оформление и физические процессы, происходящие при формировании из раствора по сухому методу, сложнее, чем при формировании из расплава.

Сухим методом формируют, как правило, волокна из расплавов полимеров и некоторые виды волокон из растворов, температура кипения растворителя которых не велика, например ацетатные волокна. В настоящее время разработан сухой способ формирования волокон из растворов полимеров, у которых температура кипения растворителя достигает 156° С. Таким способом иногда формируют текстильные нити из растворов полиакрилонитрила в диметилформамиде.

При мокром способе формирования раствор полимера, выходя из фильеры, попадает в осадительную ванну. В осадительной ванне происходит диффузия компонентов ванны в струйки раствора и растворителя полимера из волокна в ванну. Полимер осаждается в ванне в виде гелеобразных волокон, которые далее подвергаются вытяжке, отмывке от остатков растворителя, сушке и дополнительным операциям в зависимости от вида продукции.

При мокром способе формирования используются более разбавленные растворы, чем при сухом. Концентрация полимера при мокром способе формирования колеблется от 5 до 30%, а при сухом – от 15 до 60% в зависимости от характеристик прядильной массы, среды, в которую ведется выдавливание, и условий последующей обработки.

Многие проблемы, возникающие при формировании по сухому и мокрому способам, носят общий характер. В частности, это относится к методам расчета основных стадий технологических процессов, описанию физико-механических свойств прядильной массы и используемого математического аппарата.

Способы получения химических волокон из расплава или из раствора по сухому или мокрому методу являются основными видами процессов формирования синтетических нитей.

Существуют процессы [25, 105], которые сочетают в себе формование по мокрому и сухому способу. Такой процесс называют «сухо-мокрым формованием». В этом случае струя прядильного раствора до того как попадает в осадительную ванну, проходит через газовую прослойку. Как отмечается в [25], такой метод позволяет в несколько раз повысить производительность процесса. Это достигается благодаря тому, что гелеобразное волокно в осадительной ванне способно легко вытягиваться в несколько раз.

Нити, получаемые в результате продавливания расплава или раствора полимера через фильеру, в большинстве случаев подвергаются термическому вытягиванию и термической обработке. Это способствует дополнительной ориентации, релаксации внутренних напряжений и уменьшению усадки.

Для получения волокон из низкомолекулярных соединений предложены методы, совмещающие механические операции (формование) с химическими реакциями образования полимера [25, 31, 182]. Для данного метода формования характерны низкая энергоемкость и высокая скорость всего процесса формования в целом.

В настоящее время разработаны методы и организовано промышленное производство получения волокон из смесей полимеров. В зависимости от свойств исходных компонентов предложены различные схемы формования, позволяющие получать волокна как совместимых, так и несовместимых смесей полимеров [25, 105].

Совмещение операций формования и вытягивания волокна позволяет проводить процесс получения нитей со скоростями 4000÷6000 м/мин [110]. При проведении высокоскоростного формования важное значение приобретает аппаратура для приема нитей.

Следует отметить, что операциям формования предшествует предварительная подготовка растворов и расплавов полимеров, посредством которой модифицируются свойства полимера и он подготавливается к стадии формования. Готовые изделия могут подвергаться дополнительной обработке, улучшающей их качество и внешний вид.

К основным процессам переработки волокнообразующих полимеров из растворов и расплавов следует отнести:

- дозирование сыпучих и жидких компонентов (полимеров или мономеров, растворителей и т. д.);
- получение гомогенных суспензий;
- растворение суспензий полимеров;
- синтез полимеров;
- транспортирование полимерных жидкостей;
- обезвоздушивание (дегазация, удаление мономеров) полимерных жидкостей;
- фильтрацию растворов и расплавов полимеров;

- литье расплавов полимеров и получение гранулята;
- смешение растворов и расплавов полимеров с различными добавками (пигментами, красителями, наполнителями и т. д.);
- плавление полимеров в пластицирующих экструдерах;
- продавливание полимерных жидкостей через отверстия фильер и охлаждение или осаждение струек прядильной массы в осадительных ваннах;
- вытягивание, термическая обработка, кручение, трощение волокон и т. д.

Многообразие методов формования обусловлено необходимостью учета физических, химических и электрических свойств сырья и изменения их в процессе переработки. На стадии формования или последующих стадиях переработки в полимере происходят структурные изменения, которые могут быть результатом целенаправленного воздействия, предпринимаемого для улучшения физико-механических характеристик волокна. Выявление закономерностей между процессами формования и изменением структуры позволяет оптимизировать технологический процесс.

Процессы получения различных видов волокон весьма разнообразны и зависят от большого числа факторов. Однако сопоставление основных характеристик процессов формования различных волокон показывает, что для каждого из перечисленных выше методов характерна значительная общность условий процесса, мало зависящая от природы используемого полимера. Для этих основных видов процессов сложились свои технологические схемы и аппаратное оформление, которые могут применяться (иногда с небольшими различиями) для получения волокон из разных полимеров. В последующих главах будут рассмотрены некоторые из перечисленных выше стадий переработки волокнообразующих полимеров. Теоретический анализ отдельных стадий базируется на законах механики сплошных сред, теплопередачи и реологии полимерных сред.

Промышленностью химических волокон выпускаются кордные, технические и текстильные нити, штапельные волокна, моноволокна, пленочные нити, нетканые материалы и ряд специальных волокон и нитей.

Одиночные нити состоят из большого числа одиночных филаментов (волоконце) большой длины. При последующих обработках нити могут быть подвергнуты операциям трощения, кручения, пневмосоединений, текстурирования, перематывания и т. д. Область применения химических нитей чрезвычайно широка. Кордные и технические нити используются при производстве пневматических шин, транспортные ленты, клиновых ремней, тентов, орудий промышленного лова рыбы, канатов и т. д. Текстильные нити используются для производства тканей, трикотажа, гардинных полотен, чулочно-носочных изделий самых разнообразных ассортиментов и выпускаются в основном для изделий народного потребления.

Штапельное волокно состоит из коротких волоконце определенной длины и применяется, как правило, для смеси с другими видами волокон,

например хлопком, шерстью, льном. После смеси различных видов волокон на текстильных фабриках получают пряжу, из которой производят нити различных ассортиментов и назначений. Резка волокна на короткие отрезки (штапельки) может производиться как на предприятиях, которые производят волокна, так и на предприятиях текстильной промышленности. В последнем случае волокно выпускается в виде жгута различного развеса. Штапельные волокна дешевле нитей, поскольку не требуют при своем производстве многих операций, необходимых при изготовлении кордных, технических и текстильных нитей (крутка, трощение, перемотка и т. д.). В настоящее время промышленностью выпускаются полиэфирные, вискозные, полиакрилонитрильные, поливинилхлоридные, полиамидные и штапельные волокна.

Штапельные волокна могут выпускаться как сухим, так и мокрым способом. При мокром способе производство волокна полностью непрерывно от момента формования до упаковки. При сухом способе производства после прядильной машины существует разрыв, поскольку скорость формования волокон намного превышает скорость прохождения жгута на штапельном агрегате. Мокрым способом получают вискозные, полиакрилонитрильные и поливинилхлоридные штапельные волокна, а сухим — полиэфирные и полиамидные волокна.

Моноволокна — это одиночные волокна строго заданного диаметра и бесконечной длины, выпускаются, как правило, из расплавов полимеров (полиамидные, полиэфирные и др.) и в сравнительно небольших количествах. Моноволокна используются при производстве специальных тканей, чулок, специальных трикотажных изделий, при производстве кистей, щеток, специальных сеток для фильтров, орудий промышленного лова рыбы и снастей для спортивного рыболовства.

Пленочные нити представляют собой полоски пленки заданной ширины и бесконечной длины. Эти нити выпускаются как в кручёном, так и в некрученом виде. Из некрученых пленочных нитей вырабатываются специальные упаковочные ткани (тарные ткани), а крученая нить используется в качестве перевязочного шпата и для производства канатов. Наибольшее распространение получили пленочные нити из полипропилена.

Нетканые материалы — это особый вид продукции, который получают из химических волокон, минуя стадию ткачества. Такие материалы получают либо из готовых волокон, либо непосредственно при формировании из расплавов полимеров. Нетканые материалы находят применение при строительстве временных дорог, при производстве фильтров специального назначения, в швейной, обувной промышленности и других отраслях народного хозяйства.

Под качеством химических волокон и нитей понимают целый комплекс показателей, значимость которых неодинакова. Например, одни показатели имеют первостепенное значение для всех видов волокон, другие —

только для товаров волокон, используемых при производстве товаров народного потребления или для специальных целей. К основным показателям, которые характеризуют качество и свойства химических волокон, относятся: прочность, удлинение, начальный модуль, эластичность, гигроскопичность, светостойкость, термостойкость, хемостойкость, устойчивость к многократным деформациям, плотность, равномерность свойств по длине.

Если волокна выпускаются для товаров народного потребления, то для них определяют дополнительные характеристики, такие как: сминаемость, равномерность окраски, изменяемость формы при носке, загрязняемость, устойчивость к стиркам.

Однако надо помнить, что в зависимости от условий эксплуатации волокон и нитей их показатели изменяются по-разному, поэтому для потребительских свойств волокон необходимо пользоваться результатами эксплуатационных испытаний, которые должны проводиться в определенных стандартных условиях.

Предприятия по производству синтетических волокон иногда не производят у себя процесс синтеза полимера и получают полимер с других специализированных предприятий. Так же поступают и предприятия по производству искусственных волокон, поскольку целлюлоза — их основной исходный продукт — производится на отдельных предприятиях.

При производстве растворных волокон полимеры смешивают с растворителями (суспендируют), растворяют, темперируют, смешивают с различными добавками (например, красителями, пигментами, двуокисью титана т. д.), обезвоздушивают, фильтруют, гомогенизируют и отправляют на формование.

В зависимости от способа производства волокон схемы подготовки прядильных растворов к формованию могут быть различны. Например, при производстве полиакрилонитрильных волокон с использованием в качестве растворителя водных растворов роданистого натрия стадии суспендирования и растворения полимеров отсутствуют, поскольку полимеризация акрилонитрила производится непосредственно в среде растворителя, и после синтеза получают готовый раствор (лаковая полимеризация).

По другой схеме производства полиакрилонитрильных волокон проводят полимеризацию акрилонитрила в водной среде, отгоняют мономеры, отделяют полимер, производят его сушку и только затем подают на растворение.

В той и другой схемах имеются свои достоинства и недостатки.

При производстве расплавных волокон синтез расплава производят, как правило, на предприятиях по выпуску волокон. Первоначально проводят смешение мономеров, производят их синтез, ведут отгонку мономеров, вводят в расплав необходимые добавки (часто во время синтеза), производят фильтрацию расплава и направляют его либо на формование, либо на линии гранулирования и сушки.

Штапельные волокна, как правило, производят способом прямого формирования, т. е. непосредственно из расплава полимера, полученного после синтеза. Нити технического и текстильного назначения обычно получают через гранулят, используя для этого специальные машины для плавления гранулята — пластицирующие экструдеры.

В производстве расплавных волокон в настоящее время наметились тенденции создания специализированных заводов по выпуску гранулята, который в качестве товарной продукции может быть отправлен на отдельные предприятия по выпуску нитей.

Глава 2

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТЕЙ

В данной главе приведена и кратко обсуждена система дифференциальных уравнений, описывающая движение и теплообмен сплошной среды. Уравнения сохранения субстанции (массы, количества движения и энергии) и реологические уравнения состояния (РУС) представлены в тензорной (индексной) форме, которая весьма удачно отражает инвариантность физических законов относительно систем отсчета. Значительное внимание уделено обсуждению реологических свойств растворов и расплавов волокнообразующих полимеров, которые являются объектом нашего исследования. В заключение изложена современная точка зрения на постановку и решение задач механики жидкостей.

Прежде чем перейти к рассмотрению уравнений механики сплошных сред (континуума), одним из разделов которой является механика жидкостей, отметим, что объектом изучения будут материальные тела. Необходимым атрибутом таких тел является инерция, которая характеризуется массой. В механике континуума предполагается, что реальные тела заполняют непрерывным образом некоторую часть пространства [1]. Одним из общих подходов, привлекаемых к исследованию поведения материальных тел, является *статистический* метод, в котором к изучаемым объектам применяется вероятностный подход и вводятся усредненные по ансамблю характеристики. По другому подходу, называемому *феноменологическим*, исследование движения материальной среды проводится с привлечением экспериментальных закономерностей и постулируемых гипотез.

Для того чтобы описать движение сплошной среды (например, растворов или расплавов полимеров), необходимо заранее выбрать систему отсчета, с помощью которой определяют положение объекта в различные моменты времени. Отметим, что движение среды считается известным, если известно движение ее каждой точки. В классической механике Ньютона существуют два подхода (две точки зрения) для описания движения сплошной среды: представления Лагранжа и Эйлера [1–3].

Точка зрения Лагранжа заключается в следующем. В качестве объекта изучения выбирают материальные тела и рассматривают изменения во времени некоторых скалярных или векторных величин, таких как температура, плотность, скорость фиксированной материальной частицы, а также изменения этих величин при переходе от одной частицы к другой. Пусть

в начальный момент времени t_0 координаты точек тела равны X^1, X^2, X^3 (цифры вверху являются индексами, но не показателями степени!). Задавая координаты X^i ($i = 1, 2, 3$), мы тем самым индивидуализировали каждую точку сплошной среды. По Лагранжу, необходимо следить за каждой частицей среды за все время ее движения. При этом закон движения считается известным, если известны координаты x^i каждой точки континуума в любой момент времени t , т. е.

$$x^i = x^i(X^1, X^2, X^3, t) \quad (i = 1, 2, 3),$$

здесь X^i, t — переменные Лагранжа.

Подход Эйлера состоит в том, что, выбрав в пространстве некоторую систему координат, следят за фиксированной точкой пространства, через которую проходят различные частицы континуума. Различные величины, характеризующие движение, считаются функциями точки и времени. По Эйлеру, движение сплошной среды известно, если заданы скорость v^i , температура, тензор напряжений и ряд других величин как функция координат x^i и времени t , которые являются независимыми переменными и которые в этом случае называются эйлеровыми переменными.

На практике функции $v^i = v^i(x^1, x^2, x^3, t)$ при фиксированных x^i и переменном t дают распределение скорости в данной точке пространства в разные моменты времени. Причем во многих случаях такого описания вполне достаточно, чтобы адекватно отобразить реальный процесс движения сплошной среды. К таким случаям в механике жидкостей относится течение чисто вязких сред. Однако при исследовании течения вязкоупругих жидкостей, которые обладают памятью о прошлых состояниях, приходится следить за движением каждой частицы, т. е. использовать лагранжевы координаты. Сразу же подчеркнем, что это приводит к резкому усложнению задачи. Так как в предлагаемой работе рассматриваются течения вязких и вязкоупругих жидкостей, то это вызвало необходимость остановиться, хотя бы кратко, на существующих способах описания движения сплошной среды. Более подробно этот вопрос изложен в известной монографии Л. И. Седова [1], а также в ряде других работ, например [4, 6, 8].

Итак, чтобы описать движение жидкости, необходимо определить поле скоростей, температур и т. д. Очевидно, что эти характеристики должны удовлетворять определенным условиям, которые можно сформулировать в виде некоторых уравнений. В механике Ньютона сплошная среда как материальный объект должна подчиняться ряду фундаментальных законов, которые называются *законами сохранения субстанции*, под которой понимают массу, количество движения и энергию*.

* Закон сохранения момента количества движения удовлетворяется тождественно, если тензор напряжений симметричен [1].

Сохранение массы. Уравнения движения

Не останавливаясь на выводе указанных уравнений, которые можно найти во многих работах, в том числе цитированных выше, отметим, что динамические уравнения механики жидкости являются математической формулировкой законов сохранения массы и количества движения. Эти уравнения можно представить как в дифференциальной, так и в интегральной формах. Но так как в практических расчетах гораздо удобнее использовать дифференциальную форму записи, то она и будет в дальнейшем применяться.

В общем случае для переменных Эйлера (в фиксированной системе координат) закон сохранения массы записывается в виде уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v^i)_{,i} = 0, \quad (2.1)$$

где ρ — плотность жидкости, которая является функцией координат и времени.

Уравнение (2.1) записано в тензорном виде. Под v^i понимают контравариантные компоненты вектора скорости, а запятая внизу перед индексом i означает ковариантное дифференцирование. В том случае, когда плотность среды ρ является постоянной величиной, уравнение неразрывности переходит в уравнение несжимаемости

$$v^i_{,i} = 0, \quad (2.2)$$

которое в развернутом виде можно представить так:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x^i} + \Gamma_{i\alpha}^\alpha \cdot v^i = 0, \quad (2.3)$$

где $\Gamma_{i\alpha}^\alpha$ — символы Кристоффеля, а индексы i и α пробегают значения 1, 2 и 3. Причем по повторяющимся символам происходит суммирование во всех уравнениях.

Математической формулировкой закона сохранения количества движения являются уравнения движения сплошной среды, которые в свою очередь получаются из прямого обобщения второго закона Ньютона на движение континуума.

Эти уравнения в предположении, что массовые силы равны нулю, имеют вид

$$\rho \left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^k v^i_{,k} \right) = -g^{ik} P_{,k} + \tau^{ik}_{,k}. \quad (2.4)$$

Правая часть этих уравнений состоит из двух слагаемых, что связано с представлением тензора напряжений следующим образом:

$$S^{ij} = -P g^{ij} + \tau^{ij}, \quad (2.5)$$

где P — изотропное давление; g^{ij} — метрический (фундаментальный) тензор, τ^{ij} — девиатор напряжений.

При таком разбиении тензора напряжений скаляр P определяется как среднее арифметическое его диагональных компонент:

$$P = -\frac{1}{3}(S^{11} + S^{22} + S^{33}). \quad (2.6)$$

Для проведения расчетов, связанных с исследованием течений вязкоупругих жидкостей, тензор напряжений часто разбивают на два слагаемых:

$$\mathbf{S} = -\alpha \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma},$$

где α — произвольный скаляр, \mathbf{I} — единичный тензор, $\boldsymbol{\sigma}$ — избыточный (экстра-) тензор напряжений, которые связаны с давлением и девиатором напряжений следующим соотношением:

$$-\alpha \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma} = -P \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}.$$

В уравнениях движения (2.4) использованы операторы:

$$v^i_{,k} = \frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{\alpha k} \cdot v^\alpha; \quad (2.7)$$

$$P_{,k} = \frac{\partial P}{\partial x^k}; \quad (2.8)$$

$$\tau^{ij}_{,k} = \frac{\partial \tau^{ij}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{\alpha k} \tau^{\alpha j} + \Gamma^j_{\alpha k} \tau^{i\alpha}. \quad (2.9)$$

В динамические уравнения (2.1)–(2.4) входят десять независимых переменных: давление P , три компоненты вектора скорости v^i и, в силу симметрии девиатора напряжений τ^{ij} , шесть его компонент. Однако число уравнений равно четырём, т. е. для того чтобы замкнуть данную систему уравнений, к ней нужно добавить ещё шесть дополнительных уравнений. Этими уравнениями являются так называемые *реологические уравнения состояния* (РУС), которые устанавливают связь между напряжениями и деформациями или скоростями деформаций. РУС подробно будут обсуждаться ниже, а сейчас запишем динамические уравнения в двух системах координат: прямоугольной декартовой (x, y, z) и цилиндрической (r, θ, z) . Эти системы координат будут использованы в дальнейшем при моделировании процессов течения растворов и расплавов полимеров.

В прямоугольной декартовой системе координат $x^1=x$, $x^2=y$, $x^3=z$ и, кроме того, известно, что

$$g^{ij} = g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases} \quad (2.10)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера–Кристоффеля.

Из условия (2.10) следует, что все символы Кристоффеля равны нулю, т. е. ковариантные и контравариантные компоненты тензоров совпадают. Тогда уравнение неразрывности примет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0, \quad (2.11)$$

а для несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) оно запишется так:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0. \quad (2.12)$$

Уравнения движения в декартовой системе координат будут следующими:

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}; \quad (2.13, \text{а})$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}; \quad (2.13, \text{б})$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}. \quad (2.13, \text{в})$$

В случае цилиндрической системы координат $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = z$, которая, как известно, является ортогональной, имеем:

$$g_{11} = g_{33} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{ij} = 0 \quad (i \neq j);$$

$$g^{11} = g^{33} = 1, \quad g^{22} = 1/r^2; \quad (2.14)$$

$$\Gamma_{22}^1 = r_{\theta\theta}^2 = -r, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = 1/r.$$

Тогда, учитывая условия (2.14) и переходя в уравнениях (2.1), (2.3) и (2.4) от ковариантных компонент тензоров к физическим компонентам вектора скорости и тензора напряжений, получим динамические уравнения в следующей форме:

уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_r r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0; \quad (2.15)$$

уравнение несжимаемости:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(v_r r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(v_z)}{\partial z} = 0; \quad (2.16)$$

уравнения движения:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \\ = - \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r}; \end{aligned} \quad (2.17, a)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = \\ = - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \tau_{\theta r})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial z}; \end{aligned} \quad (2.17, б)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \\ = - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{zr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.17, в)$$

Уравнение сохранения энергии. Диссипативная функция

К числу основных законов сохранения субстанции относится закон сохранения энергии, известный как первое начало термодинамики. В механике сплошных сред для изучения неизотермических процессов кроме первого закона привлекаются и другие законы термодинамики. Объединение механики и термодинамики называют *термомеханикой*.

Если изучаются только механические величины, то закон сохранения механической энергии для объема сплошной среды можно получить непосредственно из уравнения движения (2.4). В том же случае, когда необходимо учитывать другие виды энергии, этот закон нужно записывать в его наиболее общей формулировке в виде первого закона термодинамики [1, 2, 4]. В рассматриваемом далее классе задач будут фигурировать только два вида энергии: механическая и тепловая. Поэтому закон сохранения энергии записывается следующим образом:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + v^i U_{,i} = \frac{1}{\rho} \Phi - \frac{1}{\rho} q^i_{,i}, \quad (2.18)$$

где U — удельная внутренняя энергия континуума; Φ — интенсивность диссипации или диссипативная функция; q — тепловой поток.

Для того чтобы записать полученное выше уравнение через одну из основных характеристик состояния физических тел — температуру T , необходимы два дополнительных условия, связывающих температуру с удельной внутренней энергией и тепловым потоком. В механике сплошных сред обычно предполагается, что тепловой поток подчиняется закону теплопроводности Фурье

$$q^i = -g^{ij}\lambda T_{,j}, \quad (2.19)$$

а внутренняя энергия связана с температурой следующим соотношением:

$$U = \int C_v dT + \text{const},$$

где C_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме; λ — коэффициент теплопроводности.

Тогда в прямоугольной декартовой системе координат уравнение энергии имеет вид:

$$\begin{aligned} \rho C_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \Phi. \end{aligned} \quad (2.20)$$

В цилиндрической системе координат уравнение (2.18) с учетом указанных условий запишется так:

$$\begin{aligned} \rho C_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \\ = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \Phi. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Диссипативная функция Φ для разных сред различна. Если в среде происходит полностью обратимый процесс, то диссипация энергии равна нулю. К таким средам относятся упругие материалы. Если же в сплошной среде происходят полностью необратимые процессы, как, например, у вязких жидкостей, то

$$\Phi = \tau^{ij} D_{ij}. \quad (2.22)$$

Тогда функция Φ в прямоугольной декартовой и цилиндрической системах координат будет соответственно:

$$\Phi = \tau_{xx} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v_y}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \tau_{xz} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \tau_{yz} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) = \eta \frac{I_2}{2}; \quad (2.23)$$

$$\Phi = \tau_{rr} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \tau_{\theta\theta} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + \tau_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \tau_{r\theta} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \right] + \tau_{rz} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \tau_{\theta z} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) = \eta \frac{I_2}{2}. \quad (2.24)$$

Здесь I_2 — второй инвариант тензора скоростей деформации, который в соответствующих координатных системах имеет вид:

$$\frac{I_2}{2} = 2 \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2; \quad (2.25)$$

$$\frac{I_2}{2} = 2 \left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \right]^2 + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right)^2. \quad (2.26)$$

Нахождение диссипативной функции затруднено для более сложных сред, например, упругопластичного материала, вязкоупругой жидкости и т. д. В таких средах параллельно протекают обратимые и необратимые процессы. Поэтому при расчетах приходится каким-то образом разделять эти процессы. Например, в теории пластичности раскладывают деформации на «обратимые» упругие $\varepsilon_{ij}^{(E)}$ и «необратимые» пластические $\varepsilon_{ij}^{(P)}$ и диссипативную функцию представляют в виде $\tau^{ij} \varepsilon_{ij}^{(P)}$ [5]. Аналогичную задачу необходимо решать и при изучении движения вязкоупругих жидкостей.

Реологические уравнения состояния сплошной среды

Известно, что масса, расстояние и время образуют три основные величины, через единицы которых могут быть количественно описаны любые

физические явления. Однако масса и энергия связаны друг с другом через скорость света в вакууме, а поэтому энергию можно включить вместо массы в число основных величин. В силу этого в современной механике континуума концепция энергии является основной, и на ней базируется построение математических моделей различных типов сплошных сред: упругих, вязких, вязкоупругих и т. д.

Построением таких моделей занимается реология, одной из главных задач которой является установление связей между напряженным состоянием сплошной среды, деформациями или скоростями деформаций. Математической формулировкой таких связей и являющихся упоминавшиеся ранее реологические уравнения состояния, роль которых можно рассматривать в двух аспектах. Во-первых, они характеризуют некоторые свойства среды, а во-вторых, эти уравнения, как уже отмечалось, замыкают систему дифференциальных уравнений (2.1) и (2.4).

Рассмотрим на качественном уровне деформацию сплошной среды под воздействием приложенных внешних сил. Эти внешние силы совершают определенную работу. Причем часть этой работы может запасаться и в среде в виде упругой энергии. Если рассматривается единичный объем материала, то эту энергию называют упругим потенциалом W . Другая часть работы внешних сил может необратимо рассеиваться (диссипировать). Под интенсивностью диссипации Φ понимают величину работы рассеянной в единице объема среды за единицу времени [6].

Исходя из такого представления можно ввести следующую классификацию различных сред. Упругим телом называют такие среды, для которых выполняются условия: $W \neq 0$ и $\Phi = 0$. В том случае, когда $W = 0$, а $\Phi \neq 0$, среда называется вязкой. И наконец, для вязкоупругой среды $W \neq 0$ и $\Phi \neq 0$. Строгое изложение этого подхода, основанного на законах термодинамики, можно найти в работах [1, 10].

Модели среды, представленные в виде РУС, должны удовлетворять ряду феноменологических принципов [3]. Общая теория течения жидкостей, обладающих памятью (или «простых» жидкостей), удовлетворяющая этим принципам, развита в работах Коллемана и Нолла (цитируем по [3, 6, 8, 9]). Согласно данной теории, напряжения в общем случае выражаются как некоторый функционал тензора деформаций, зависящего от времени. Кроме того, Коллеман и Нолл получили весьма важные результаты для течения гомогенной несжимаемой жидкости в случае установившейся деформации простого сдвига. Эти выводы положены в основу не только современной экспериментальной реологии, но и практических расчетов. Суть этих результатов заключается в том, что для полного описания реологических свойств вязкоупругой жидкости в указанных условиях, которые, как известно, реализуются при вискозиметрических течениях, достаточно оп-

ределить три независимые функции:

$$\tau_{12} = \eta(\dot{\gamma})\dot{\gamma}, \quad \tau_{11} - \tau_{22} = \psi_1(\dot{\gamma})\dot{\gamma}^2, \quad \tau_{22} - \tau_{33} = \psi_2(\dot{\gamma})\dot{\gamma}^2,$$

где $\dot{\gamma}$ — скорость сдвига, а цифровые индексы употреблены в общепринятом смысле.

Три функции — $\eta(\dot{\gamma})$, $\psi_1(\dot{\gamma})$ и $\psi_2(\dot{\gamma})$ — называются материальными функциями. Причем $\eta(\dot{\gamma})$ — эффективная (кажущаяся) вязкость — представляет собой меру интенсивности диссипации работы, затрачиваемой для поддержания течения жидкости [10]. Функции $\psi_1(\dot{\gamma})$ и $\psi_2(\dot{\gamma})$ характеризуют упругость среды и называются коэффициентами первой и второй разностей нормальных напряжений соответственно.

Очевидно, что при течении чисто вязкой жидкости в условиях простого сдвига $\psi_1(\dot{\gamma}) = \psi_2(\dot{\gamma}) = 0$. Если при этом $\eta(\dot{\gamma}) = \mu_0 = \text{const}$, то жидкость называется ньютоновской. Если же эффективная вязкость η зависит от скорости сдвига $\dot{\gamma}$, то жидкость называется нелинейно вязкой.

В современной литературе все РУС делят либо на два основных типа — скоростные и интегральные [8], либо на три типа — дифференциальные, релаксационные (или скоростные) и интегральные [9]. Однако более принципиальным вопросом является изучение возможности приведения различных реологических уравнений к одному виду, например интегральных уравнений к релаксационным, которые представлены в дифференциальной форме. Это важно по двум причинам: во-первых, можно более четко провести анализ и сравнение различных типов РУС, а во-вторых, запись РУС в виде дифференциальных уравнений является гораздо предпочтительнее с точки зрения вычислительной практики. В работе [11] показана такая возможность, а также сформулированы условия эквивалентности релаксационных и интегральных РУС.

В качестве простейшей интегральной модели можно задать следующее уравнение:

$$\tilde{\tau} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t-t') \tilde{\varepsilon}(t') dt', \quad (2.27)$$

где $\Phi = \frac{d\varphi}{dt}$; $\varphi(t)$ — функция релаксации; $\tilde{\varepsilon}(t')$ — тензор деформации;

$\tilde{\tau}$ — экстратензор напряжений; t — время.

Иногда вместо тензора деформации в уравнении (2.27) используют тензор скоростей деформации. Тогда оно будет выглядеть следующим образом:

$$\tilde{\tau} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} m(t-t') \tilde{D}(t') dt', \quad (2.28)$$

где $m(t-t')$ — функция памяти; \tilde{D} — тензор скоростей деформации.

Дальнейшее обобщение уравнения (2.28) осуществлялось в основном в направлении подбора функции памяти.

Коллеман и Нолл [12] предложили представить тензор напряжений в виде изотропного наследственного функционала предыстории деформации:

$$\tilde{\tau} = H[\tilde{E}(S)], \quad (2.29)$$

где $\tilde{E}(S) = \tilde{C}_t^{-1}(S) - \tilde{I}$; $\tilde{C}_t^{-1}(S)$ — тензор относительной деформации по Фингеру; \tilde{I} — единичный тензор.

Функционал предыстории деформации можно разложить в ряд, содержащий одинарные и двойные интегралы более высоких порядков от функции предыстории деформации \tilde{E} .

Наиболее распространенным уравнением состояния дифференциального типа является модель Ривлина–Эриксона [6]:

$$\tau_{ij} = f(A_{ij}^{(1)}, A_{ij}^{(2)}, \dots, A_{ij}^{(n)}). \quad (2.30)$$

Компоненты тензоров Ривлина–Эриксона $A_{ij}^{(1)}, A_{ij}^{(2)}, \dots, A_{ij}^{(n)}$, записанные через компоненты тензора скоростей деформации D_{ij} и компоненты скорости v_k , имеют вид:

$$A_{ij}^{(1)} = 2\tilde{D}_{ij};$$

$$A_{ij}^{(n)} = \frac{\partial A_{ij}^{(n-1)}}{\partial t} + v_k \frac{\partial A_{ij}^{(n-1)}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_k} A_{kj}^{(n-1)} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} A_{ik}^{(n-1)}.$$

Среди моделей состояния релаксационного типа можно выделить группу уравнений, основанных на модели Максвелла [8], называемых релаксационными РУС:

$$\tilde{\tau} + \lambda_0 \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial t} = 2\eta_0 \tilde{D}. \quad (2.31)$$

Уравнение (2.31) можно переписать так:

$$\tau_{ij} + \lambda_0 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} = 2\eta_0 d_{ij}, \quad (2.32)$$

где λ_0 — время релаксации; η_0 — ньютоновская вязкость полимерной жидкости; t — время.

Уравнение (2.31) на качественном уровне описывает релаксацию напряжений. Однако оно не предсказывает ни аномалии вязкости, ни эффекта нормальных напряжений. Другой слабой стороной модели Максвелла является то, что она справедлива лишь для случая, когда деформации и их

градиенты малы, т. е. когда можно не делать различия между лагранжевым и эйлеровым представлениями.

Конечно, для описания процессов течения полимерных материалов могут быть использованы и модели интегрального типа. Однако использование этих моделей приводит к системе интегродифференциальных уравнений, решение которой является довольно сложной задачей. Поэтому в практических расчетах чаще используются уравнения состояния дифференциального и релаксационного типов.

В случае простого сдвигового состояния для модели Максвелла (2.31)–(2.32) получим следующие значения трех материальных констант:

$$\eta = \eta_0; \quad \psi_1 = 0; \quad \psi_2 = 0. \quad (2.33)$$

При обобщении модели (2.32) должны быть удовлетворены два принципа: принцип инвариантности относительно преобразования координат и принцип кинематической инвариантности. Первый принцип выполняется вследствие записи физических соотношений через инварианты соответствующих тензоров. Для выполнения второго принципа вместо частной производной по времени используются операторы Яумана и Олдройда, обеспечивающие согласование величин, определяемых в конвективной и пространственной системах координат.

Если используются производные Яумана, то это приводит к РУС, называемой моделью Де-Витта:

$$\tau^{ij} + \lambda_0 \frac{D_j \tau^{ij}}{D_j t} = 2\eta_0 d^{ij}, \quad (2.34)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{D_j \tau^{ij}}{D_j t} &= \frac{\partial \tau^{ij}}{\partial t} + v^k \tau^{ij}_{,k} - W_k^i \tau^{kj} + \tau^{ik} W_k^j; \\ d^{ij} &= \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}); \\ W^{ij} &= \frac{1}{2} (v_{i,j} - v_{j,i}). \end{aligned}$$

При течении в условиях простого сдвига модель (2.34) предсказывает аномалию вязкости, первую и вторую разности нормальных напряжений:

$$\begin{aligned} \tau_{12} &= \frac{\eta_0 \dot{\gamma}}{1 + \lambda_0^2 \dot{\gamma}^2} = \eta \dot{\gamma}; \\ \tau_{11} - \tau_{22} &= 2 \frac{\eta_0 \lambda_0 \dot{\gamma}^2}{1 + \lambda_0^2 \dot{\gamma}^2} = \psi_1 \dot{\gamma}^2; \quad \tau_{22} - \tau_{33} = -2 \frac{\eta_0 \lambda_0 \dot{\gamma}^2}{1 + \lambda_0^2 \dot{\gamma}^2} = \psi_2 \dot{\gamma}^2. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Модель Де-Витта предсказывает нефизичные результаты при $\dot{\gamma} > 1/\lambda_0$ (в этом случае с ростом $\dot{\gamma}$ касательные напряжения падают), что ограничивает возможность применения модели. Применение оператора Олдройда устраняет указанный недостаток и приводит к модели Уайта–Метцнера:

$$\tilde{\tau} + \lambda_0 \overset{\nabla}{\tilde{\tau}} = 2\eta_0 \tilde{D}; \quad \tau^{ij} + \lambda_0 \frac{D_o \tau^{ij}}{D_o t} = 2\eta_0 d^{ij}. \quad (2.36)$$

Здесь $\overset{\nabla}{\tilde{\tau}} = \frac{D\tilde{\tau}}{Dt} - \tilde{\tau} \cdot \nabla \tilde{V}^T - \nabla \tilde{V} \cdot \tilde{\tau}$; $\nabla \tilde{V}$ — градиент скоростей; \tilde{V}^T — транспонированный градиент скоростей;

$$\frac{D_o \tau^{ij}}{D_o t} = \frac{\partial \tau^{ij}}{\partial t} + v^k \tau^{ij}_{,k} - v^i_{,k} \tau^{kj} - v^j_{,k} \tau^{ik}.$$

Модель Уайта–Метцнера (2.36) позволяет рассчитывать в установившемся режиме ньютоновскую вязкость и первую разность нормальных напряжений, но не предсказывает аномалии вязкости. Для условий простого сдвига материальные константы запишутся так:

$$\eta = \eta_0; \quad \tau_{11} - \tau_{22} = 2\eta_0 \lambda_0 \dot{\gamma}^2 = \psi_1 \dot{\gamma}^2; \quad \tau_{22} - \tau_{33} = \psi_2 = 0. \quad (2.37)$$

Джеффри предложил РУС в следующем виде:

$$\tilde{\tau} + \lambda_1 \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial t} = 2\eta_0 \left(\tilde{D} + \lambda_2 \frac{\partial \tilde{D}}{\partial t} \right), \quad (2.38)$$

с материальными константами, аналогичными выражениям (2.33).

Уравнение (2.38) можно обобщить, используя операторы Олдройда и Ямана, тогда получим такие выражения:

$$\begin{aligned} \tilde{\tau} + \lambda_1 \overset{\nabla}{\tilde{\tau}} &= 2\eta_0 \left(\tilde{D} + \lambda_2 \overset{\nabla}{\tilde{D}} \right); \\ \tilde{\tau} + \lambda_1 \overset{\circ}{\tilde{\tau}} &= 2\eta_0 \left(\tilde{D} + \lambda_2 \overset{\circ}{\tilde{D}} \right). \end{aligned}$$

Олдройд предложил восьмиконстантную модель следующего вида:

$$\begin{aligned} \tilde{\tau} + \lambda_1 \overset{\circ}{\tilde{\tau}} + \mu_0 T_r (\tilde{\tau} \cdot \tilde{D}) - \mu_1 (\tilde{\tau} \cdot \tilde{D} + \tilde{D} \cdot \tilde{\tau}) + \nu_1 T_r (\tilde{\tau} \cdot \tilde{D}) I = \\ = 2\eta_0 \left[\tilde{D} + \lambda_2 \overset{\circ}{\tilde{D}} - 2\mu_2 \tilde{D}^2 + \nu_2 T_r (\tilde{D}^2) I \right], \end{aligned}$$

где λ_1 , λ_2 , μ_0 , μ_1 , μ_2 , ν_1 , ν_2 , η_0 — произвольные константы.

Следует отметить, что использование данного реологического уравнения в практических расчетах затруднено невозможностью определения восьми произвольных констант, получаемых из простых экспериментов. Чаще всего на практике используют уравнение Олдройда, записанное таким образом:

$$\tilde{\tau} + \lambda \overset{\nabla}{\tilde{\tau}} = 2(\eta_1 + \eta_2) \left(\tilde{D} + \frac{\lambda \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \overset{\nabla}{\tilde{D}} \right). \quad (2.39)$$

Материальные константы в уравнении (2.39) выглядят следующим образом:

$$\eta = \eta_1 + \eta_2; \quad \psi_1 = 2\lambda\eta_1; \quad \psi_2 = 0, \quad (2.40)$$

где η_1 , η_2 , λ — константы.

Предполагая, что полимерную жидкость можно представить как систему, состоящую из большого числа сопряженных систем пружина–демпфер, а общее напряжение определять суперпозицией напряжений в каждой ячейке (пружина–демпфер), Спрингс предложил РУС в следующей форме [6]:

$$\begin{cases} \tilde{\tau} = \sum_{p=1}^{\infty} \tilde{\tau}_p; \\ \tilde{\tau}_p + \lambda_p \left\{ \overset{o}{\tilde{\tau}} - (1 + \varepsilon_1) \left[\tilde{\tau}_p \cdot \tilde{D} + \tilde{D} \cdot \tilde{\tau}_p - \frac{2}{3} \text{tr}(\tilde{\tau}_p \cdot \tilde{D}) \tilde{I} \right] \right\} = 2\eta_p \tilde{D}. \end{cases} \quad (2.41)$$

Здесь ε_1 — константа; \tilde{I} — единичный тензор; λ_p , η_p — материальные константы описываемой ячейки.

Для определения констант λ_p и η_p служат следующие выражения:

$$\begin{cases} \lambda_p = \frac{\lambda_0}{p^\alpha}; \\ \eta_p = \frac{\eta_0 \lambda_0}{\sum_{p=1}^{\infty} \lambda_p}. \end{cases} \quad (2.42)$$

Уравнения (2.41) и (2.42) для случая установившегося течения дают следующие материальные константы:

$$\eta = \frac{\eta_0}{\sum_{p=1}^{\infty} 1/p^\alpha} \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p^\alpha}{p^{2\alpha} + (C\lambda\dot{\gamma})^2}; \quad (2.43)$$

$$\psi_1 = \frac{\eta_0 \lambda_0}{\sum_{p=1}^{\infty} 1/p^\alpha} \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^{2\alpha} + (C\lambda\dot{\gamma})^2}; \quad (2.44)$$

$$\psi_2 = \frac{\varepsilon \eta_0 \lambda_0}{\sum_{p=1}^{\infty} 1/p^\alpha} \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^{2\alpha} + (C\lambda\dot{\gamma})^2}, \quad (2.45)$$

где $C = \frac{2 - 2\varepsilon - \varepsilon^2}{2}$.

Примеры других реологических уравнений состояния, используемых в расчетах течений вязкоупругих жидкостей, можно найти в работах [13–17] и др.

Следует отметить, что большинство приведенных моделей хорошо описывает не только стационарные течения вязкоупругих растворов и расплавов полимеров, но и релаксацию напряжений, а также запаздывание. Применимость той или иной модели соответствует рассматриваемому режиму течения. Так, модели (2.30), (2.36) и (2.39) могут быть использованы в случае течений с малыми скоростями деформаций. Использование этих моделей для течений с большими скоростями деформаций является неприменимым в силу того, что они не предсказывают аномалии вязкости. Реологические модели типа (2.34), (2.38) и (2.41) могут с успехом быть использованы для течений полимерных жидкостей при больших скоростях деформаций. Однако, как и большинство моделей, построенных с использованием производной Яумана, они предполагают возможность снижения касательного напряжения с ростом скорости деформации при значениях числа Вайссенберга (We), близких к единице. Это усложняет исследование вязких жидкостей с большим числом Деборы (De).

Числа Вайссенберга и Деборы определяются соотношениями:

$$We = \frac{\lambda_0 V_0}{H}; \quad De = \frac{\lambda_0}{t_0}, \quad (2.46)$$

где λ_0 — время релаксации, V_0 — скорость течения жидкости; H — характерный размер канала; t_0 — характерное время процесса течения полимерной жидкости.

Кроме того, определение констант для некоторых типов моделей требует проведения экспериментов не только в статическом, но и в динамическом режимах, что в значительной степени усложняет использование таких моделей. Специфические особенности формирования химических волокон из растворов и расплавов полимеров, заключающиеся в реализации больших скоростей деформации полимеров в процессе течения, не позволяют ис-

пользовать большинство из известных РУС. Это заставляет модифицировать известные реологические модели с целью достаточно простого описания результатов вискозиметрических испытаний, а также возможности анализа процессов в широком диапазоне скоростей деформации.

Например, модифицируя РУС типа Уайта–Метцнера, можно получить уравнения состояния следующего вида:

$$\begin{aligned}\tilde{\tau} + \lambda_{\text{эф}} \frac{\nabla}{\dot{\gamma}} \tilde{\tau} &= 2\eta \tilde{D}; \\ \lambda_{\text{эф}} &= \frac{\lambda_0}{(1 + a^2 I_2 / 2)^n}; \\ \eta &= \frac{\eta_0}{(1 + b^2 I_2 / 2)^c}.\end{aligned}\tag{2.47}$$

Здесь $\lambda_{\text{эф}}$ — эффективное время релаксации; η — эффективная вязкость; I_2 — второй инвариант тензора скоростей деформации; a , c , b , n — константы; λ_0 — время релаксации; η_0 — константа, характеризующая ньютоновскую вязкость полимерной жидкости.

В случае $n = c$ и $a = b$ реологическая модель (2.47) предполагает, что величина модуля упругости G не зависит от скорости деформации $\dot{\gamma}$.

При стационарном сдвиговом течении для материальных констант реологических моделей (2.47) можно записать следующие выражения:

$$\eta = \frac{\eta_0}{(1 + b^2 \dot{\gamma}^2)^c}; \quad \psi_2 = 2\eta \lambda_{\text{эф}}; \quad \psi_2 = 0.\tag{2.48}$$

Из выражений (2.48) следует, что РУС (2.47) позволяет предсказать в случае простого сдвигового течения аномалию вязкости и зависимость коэффициента первой разности нормальных напряжений ψ_1 от скорости деформации $\dot{\gamma}$. Зависимость эффективной вязкости η от скорости сдвига аналогична известному соотношению Керри, которое позволяет описать зависимость вязкости от скорости деформации как в диапазоне скоростей сдвига, близких к нулю, так и при $\dot{\gamma}$ порядка $10^3 - 10^4 \text{ с}^{-1}$. На рис. 2.1 представлена зависимость эффективной вязкости η и первой разности нормальных напряжений $\tau_{11} - \tau_{22}$ от скорости сдвига $\dot{\gamma}$ для расплава полистирола [18]. Из рисунка видно, что уравнение (2.47) позволяет с точностью $\pm 1\div 3\%$ описать результаты вискозиметрических измерений для реальных полимерных материалов.

Для нахождения коэффициентов η_0 , b и c нужно использовать кривую течения полимерной жидкости. Коэффициент η_0 соответствует величине вязкости при скорости сдвига, стремящейся к нулю. Величина коэффициента b численно равна квадратному корню от обратной величины скорости сдвига, при которой начинает проявляться аномалия вязкости. Коэффициент c представляет собой тангенс половины угла наклона кривой зависи-

мости вязкости от скорости деформации. Тангенс угла наклона определяется в точке с максимальным значением скорости сдвига, реализуемой в эксперименте (рис. 2.2).

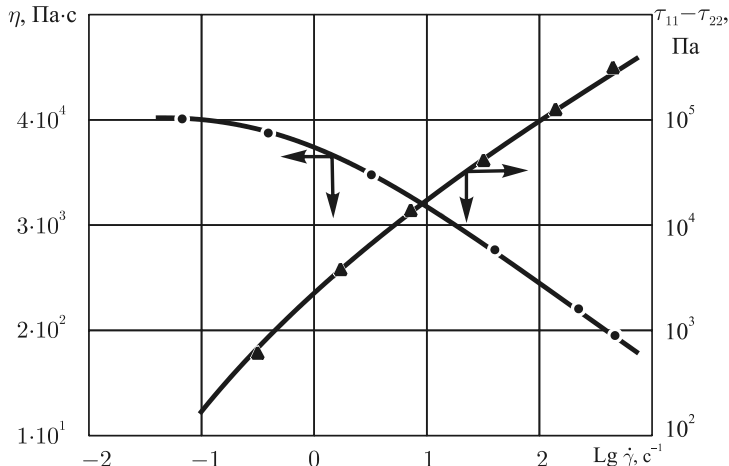


Рис. 2.1. Зависимости эффективной вязкости и первой разности нормальных напряжений от скорости сдвига для расплава полистирола при $T = 200^\circ \text{C}$. ●, ▲ — экспериментальные, — — — теоретические кривые

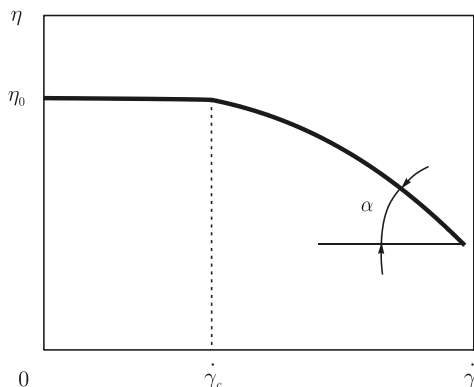


Рис 2.2. Зависимость эффективной вязкости от скорости сдвига

На рис. 2.3 представлена зависимость вязкости расплава полистирола от скорости сдвига при температуре 200°C . По кривой $\eta = f(\dot{\gamma})$ легко определить

$$b = \sqrt{1/\dot{\gamma}_c}; \quad c = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

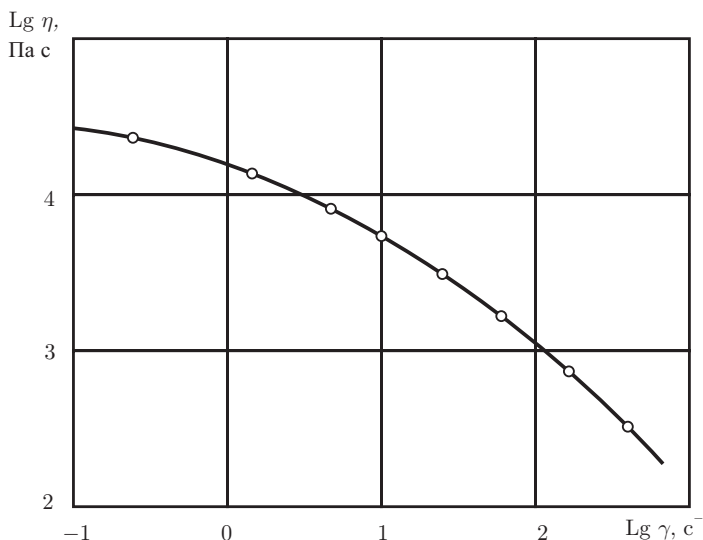


Рис. 2.3. Зависимость эффективной вязкости η от скорости сдвига $\dot{\gamma}$ для расплава полистирола при $T = 200^\circ \text{C}$

Величина эффективного времени релаксации $\lambda_{\text{эф}}$ может быть определена из зависимости первой разности нормальных напряжений от скорости деформации $\dot{\gamma}$. Из реологического уравнения состояния (2.47) для простого сдвигового течения имеем:

$$\tau_{zz} - \tau_{rr} = 2\lambda_{\text{эф}}\eta\dot{\gamma}^2, \quad (2.49)$$

тогда

$$\lambda_{\text{эф}} = \frac{\tau_{zz} - \tau_{rr}}{2\eta\dot{\gamma}^2}. \quad (2.50)$$

Таким образом, имея зависимость времени релаксации от скорости деформации, можно определить значения коэффициентов η_0 , a и n .

На рис. 2.4 приведена зависимость эффективного времени релаксации $\lambda_{\text{эф}}$ от скорости сдвига $\dot{\gamma}$ для расплава полистирола, построенная на основе кривых, приведенных на рис. 2.1, и выражения (2.50). По кривой рис. 2.4 легко определить константы λ_0 , a и $n = \text{tg } \beta$.

Получить константы модели (2.49) возможно и из других вискозиметрических измерений. Значение констант λ_0 , a и n можно получить из релаксационных кривых. На рис. 2.5 приведены релаксационные кривые касательных напряжений для расплава полистирола, полученные при различ-

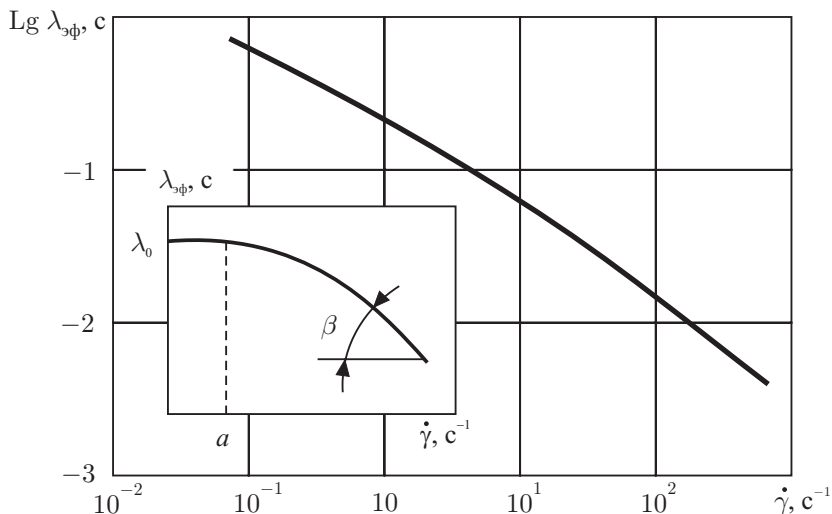


Рис. 2.4. Зависимость времени релаксации $\lambda_{эф}$ расплава полистирола от скорости сдвига $\dot{\gamma}$ при $T = 200^\circ C$

ных скоростях деформации при температуре $t = 200^\circ C$. Имея эти кривые, проанализируем уравнения (2.47) для случаев нагружения полимерной жидкости с постоянной деформацией, с постоянной скоростью деформации и с постоянным напряжением.

В случае нагружения с постоянной деформацией, т. е. $\gamma = \gamma_0 = \text{const}$, уравнение (2.47) имеет следующее решение:

$$\tau(t) = \tau_0 [1 - \exp(-t/\lambda_0)]; \quad (2.51)$$

$$\tau_0 = G\gamma_0,$$

где G – модуль упругости.

Релаксационная функция в этом случае имеет вид:

$$\varphi(t) = \frac{\tau(t)}{\gamma_0} = G \exp(-t/\lambda_0). \quad (2.52)$$

Из выражений (2.51) и (2.52) видно, что величина времени релаксации λ_0 может быть определена из экспериментов по нагружению вязкоупругой жидкости с постоянной деформацией γ .

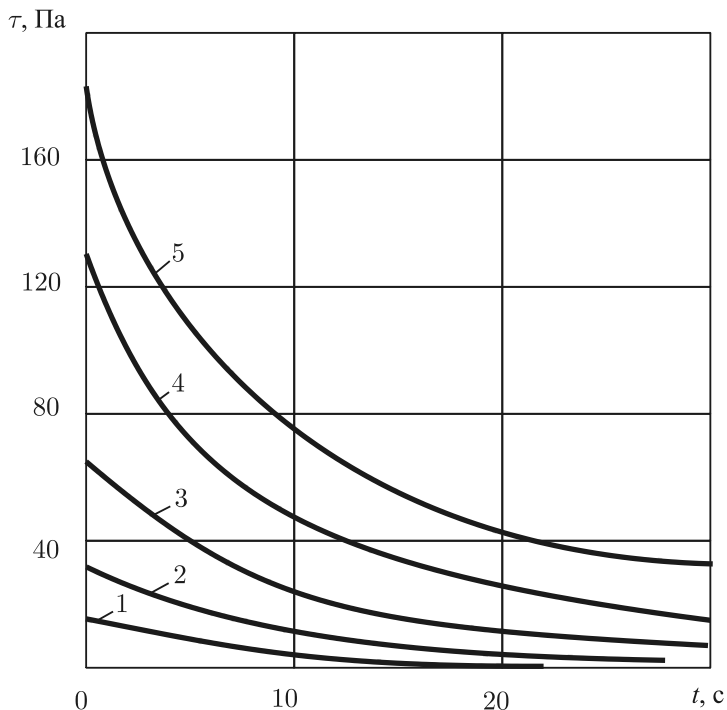


Рис. 2.5. Релаксация касательных напряжений расплава полистирола при $T = 200^\circ \text{C}$.
 1 — $\dot{\gamma} = 5 \cdot 10^{-5}$; 2 — $1,1 \cdot 10^{-3}$; 3 — $2,2 \cdot 10^{-3}$; 4 — $4,4 \cdot 10^{-3}$; 5 — $8,7 \cdot 10^{-3}$

При нагружении с постоянной скоростью деформации $\dot{\gamma}$ получим:

$$\tau(t) = \eta \dot{\gamma}_0 \left[1 - \exp(-t / \lambda_{\Phi}) \right]. \quad (2.53)$$

Величины λ_{Φ} определяются из кривых, приведенных на рис. 2.5.

Значение λ_0 можно также вычислить по формуле [6]

$$\lambda_0 = \frac{\xi_0}{\eta_0} = \frac{1}{\eta_0} \left(k_s \frac{\eta_0}{B_0} \right) = \frac{k_s}{B_0}.$$

Здесь ξ_0 — начальный коэффициент нормальных напряжений; η_0 — коэффициент вязкости; $k_s = 0,36$ — эмпирический коэффициент; B_0 — величина скорости сдвига, при которой начинается аномалия вязкости.

Для режима нагружения полимерной жидкости с постоянным напряжением τ_0 получим:

$$\gamma(t) = \frac{\tau_0}{G} + \tau_0 \int \frac{dt}{\eta}. \quad (2.54)$$

Более подробно аппроксимация экспериментальных данных по релаксации касательных напряжений в режиме постоянно заданной скорости деформации для расплава полистирола рассмотрена в работе [19].

В качестве примера значения констант η_0 , b , c , λ_0 , a и n для полистирола марок ПС1 и ПС2 приведены в табл. 2.1 [18].

Таблица 2.1.

Значения констант для полистирола марок ПС1 и ПС2

Марка полимера	η_0 , Па·с	b , с	c	$\lambda_{0,c}$	a	n
ПС1	8709	3,16	0,26	0,71	5	0,32
ПС2	17782	1,8	0,24	10	21,3	1,04

Необходимо отметить, что при формировании волокон реализуется не только сдвиговое течение, но и течение растяжения. Поэтому важным фактором является возможность описания данного режима течения полимерной жидкости реологической моделью (2.47). Для величины вязкости при растяжении из уравнения (2.47) получим

$$\eta_p = \frac{3\eta_0}{1 - 2\lambda_{эф}\dot{\gamma}}. \quad (2.55)$$

Из этого выражения видно, что в случае $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ величина продольной вязкости η_p стремится к $3\eta_0$, т. е. мы получаем в этом случае так называемую трутоновскую вязкость. При увеличении скорости деформации, согласно модели (2.47), величина η_p увеличивается, а при достижении критической величины $\dot{\gamma} = 1/2\lambda_{эф}$ значение η_p неограниченно возрастает.

Хотя растворы и расплавы волокнообразующих полимеров зачастую одновременно проявляют вязкие и упругие свойства, величина упругих эффектов и их влияние на картину течения в разных ситуациях различны. Наиболее сильно упругость проявляется при нестационарных режимах и при резких изменениях формы каналов. Поэтому при экструзии вязкоупругих жидкостей шнековыми машинами, у которых глубина канала, как правило, постоянна или изменяется очень плавно, следует ожидать, что эффект упругости не окажет сколько-нибудь заметного влияния на характер течения, а приведет лишь к появлению нормальных напряжений. Это замечание в некоторой сте-

пени справедливо и для формирующих каналов, которые на практике также изготавливают, по возможности, с плавными переходами.

Таким образом, в первом приближении при анализе течения растворов и расплавов полимеров можно пренебречь влиянием упругости или, точнее, предположить, что это влияние сводится лишь к проявлению аномалии вязкости. Применительно к обобщенному уравнению Максвелла последнее замечание формально может быть выполнено, если положить в уравнении (2.47) $\lambda_0 = 0$.

Тогда уравнение, полученное из выражения (2.47),

$$\tau^{ij} = 2\eta D^{ij}, \quad (2.56)$$

является РУС неньютоновской неупругой жидкости. Коэффициент вязкости η в общем случае является функцией мгновенного напряженно-деформированного состояния, характеризуемого уровнем напряжений или скоростей деформации, температуры T , давления P , концентрации c , молекулярной массы (веса) M_v и молекулярно-массового распределения (ММР).

Используя физические компоненты тензоров экстракнужений τ^{ij} и скоростей деформаций D^{ij} , запишем РУС неньютоновской неупругой жидкости (2.56):

— в прямоугольных декартовых координатах:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2\eta \frac{\partial v_x}{\partial x}; \\ \tau_{yy} &= 2\eta \frac{\partial v_y}{\partial y}; \\ \tau_{zz} &= 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z}; \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right); \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right); \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \eta \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right); \end{aligned} \quad (2.57)$$

— в цилиндрических координатах:

$$\begin{aligned} \tau_{rr} &= 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r}; \\ \tau_{zz} &= 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{\theta\theta} &= 2\eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right); \\
 \tau_{r\theta} &= \tau_{\theta r} = \eta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \right]; \\
 \tau_{\theta z} &= \tau_{z\theta} = \eta \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right); \\
 \tau_{rz} &= \tau_{zr} = \eta \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right).
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

Для нахождения вязкости по экспериментальным данным реализуют такие условия течения, при которых удастся независимо друг от друга определить напряжения сдвига τ и скорость сдвига $\dot{\gamma}$, а затем вычислять вязкость. Существует много способов и приборов, позволяющих реализовать такие течения, называемые вискозиметрическими [10]. Примерами таких течений являются течения между двумя вращающимися коаксиальными цилиндрами и течения в длинных капиллярах. Полученную из таких опытов зависимость

$$\tau = \tau(\dot{\gamma}) = \eta(\dot{\gamma})\dot{\gamma}$$

часто называют кривой течения.

На рис. 2.6–2.8 в двойных логарифмических координатах ($\lg \tau - \lg \dot{\gamma}$) показаны типичные кривые течения волокнообразующих полимерных систем, которые имеют S-образную форму с прямолинейными нижним и верхним участками. Причем каждый из этих участков характеризуется своей ньютоновской вязкостью: нижний — начальной (максимальной) вязкостью μ_0 , а верхний — минимальной вязкостью μ_∞ . На среднем участке кривых течения вязкость с ростом скорости сдвига уменьшается. Жидкости, у которых проявляется такая аномалия вязкости, называют *псевдопластиками*.

Для того чтобы использовать кривую течения $\tau = \tau(\dot{\gamma})$ в расчетах, необходимо предварительно: 1) описать данную кривую каким-либо уравнением; 2) обобщить результаты, полученные для условий вискозиметрического течения, на произвольный (двухмерный или трехмерный) вид течения.

Существует довольно много выражений, определяющих зависимость вязкости неньютоновских жидкостей от напряжения τ или скорости сдвига $\dot{\gamma}$ при простом изотермическом сдвиговом течении [6, 20, 21].

Приведем некоторые из них.

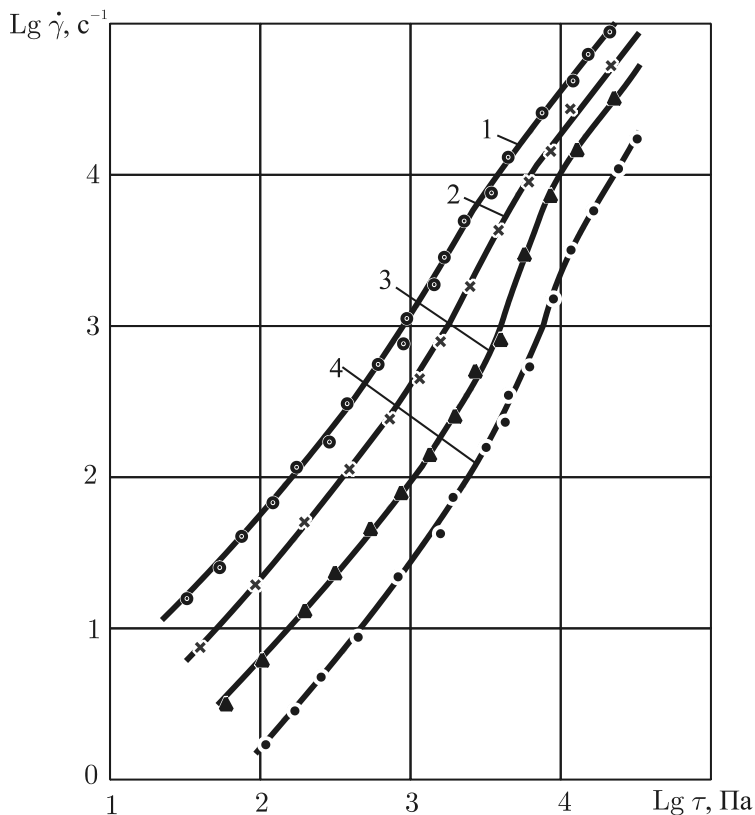


Рис. 2.6. Кривые течения раствора полиакрилонитрила (удельная вязкость 1,7) в диметилформамиде при 25° С. Концентрация c равна: 1 — 9%; 2 — 11%; 3 — 13,5%; 4 — 17%

Уравнение Рейнера–Филиппова:

$$\tau = \left[\mu_{\infty} + \frac{\mu_0 - \mu_{\infty}}{1 + (\tau / \dot{\gamma})^2} \right] \dot{\gamma}; \quad \eta = \left[\mu_{\infty} + \frac{\mu_0 - \mu_{\infty}}{1 + (\tau / \dot{\gamma})^2} \right]. \quad (2.59)$$

Уравнение Паула–Эйринга:

$$\tau = \left[C + \frac{1}{B|\dot{\gamma}|} \operatorname{arsh} \left(\frac{\dot{\gamma}}{A} \right) \right] \dot{\gamma}; \quad \eta = \left[C + \frac{1}{B|\dot{\gamma}|} \operatorname{arsh} \left(\frac{\dot{\gamma}}{A} \right) \right]. \quad (2.60)$$

Уравнение Эллиса:

$$\tau = (A + B|\tau|^{\alpha-1})^{-1} \dot{\gamma}; \quad \eta = (A + B|\tau|^{\alpha-1})^{-1} \quad (\alpha \geq 1). \quad (2.61)$$

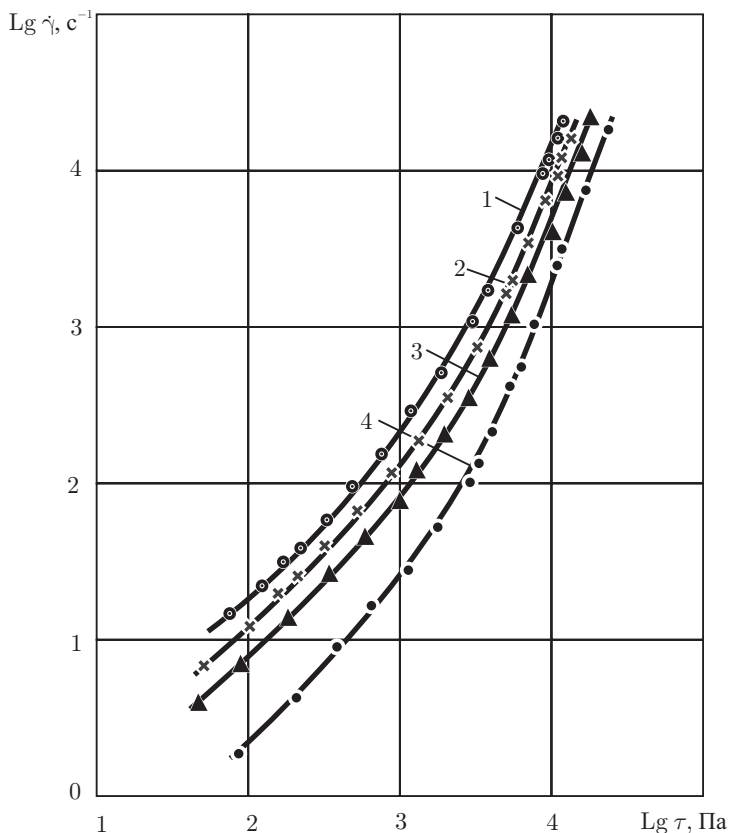


Рис. 2.7. Кривые течения растворов полиакрилонитрила с $M_e=74000$ в диметилформамиде при $c = 17\%$. Температура равна: 1 — 115°C ; 2 — 95°C ; 3 — 75°C ; 4 — 25°C

Уравнение Уильямсона:

$$\tau = \left(\frac{A}{B + \dot{\gamma}} + \mu_\infty \right) \dot{\gamma}; \quad \eta = \frac{A}{B + \dot{\gamma}} + \mu_\infty. \quad (2.62)$$

Уравнение Прандтля:

$$\tau = A|\dot{\gamma}| \operatorname{arsh}(|\dot{\gamma}|C), \quad \eta = A \operatorname{arsh}(|\dot{\gamma}|C). \quad (2.63)$$

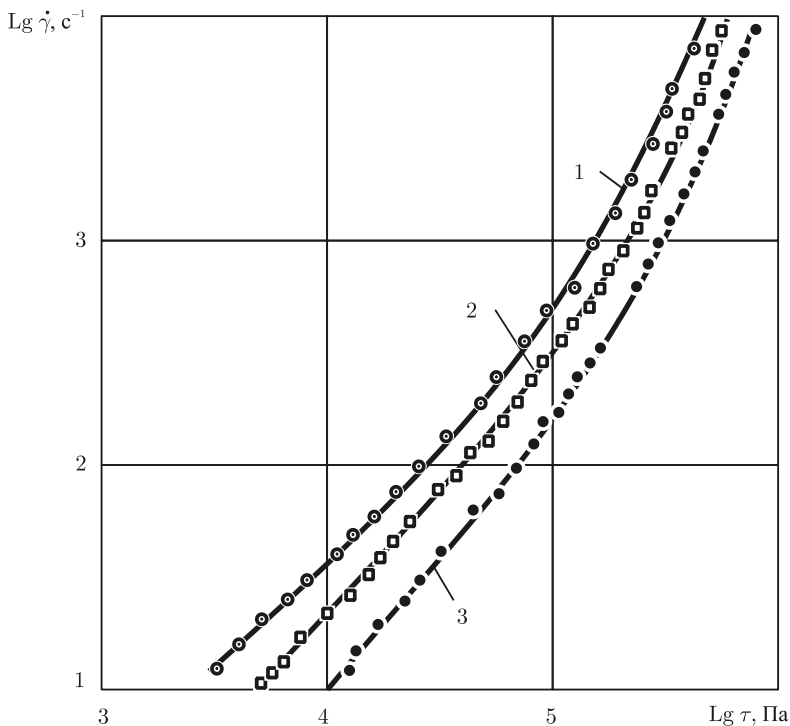


Рис. 2.8. Кривые течения расплава поликапроаида с $M_e = 18000\text{--}22000$ при различных температурах: 1 — 288°C , 2 — 260°C , 3 — 232°C

Уравнение Де-Хавена:

$$\tau = \frac{\mu_0}{1 + C|\tau|^n} \dot{\gamma}, \quad \eta = \frac{\mu_0}{1 + C|\tau|^n} \quad (n > 0). \quad (2.64)$$

Уравнение Сиско:

$$\tau = (A + B|\dot{\gamma}|^{n-1})\dot{\gamma}, \quad \eta = (A + B|\dot{\gamma}|^{n-1}) \quad (n > 0). \quad (2.65)$$

Уравнение Эйринга:

$$\tau = \frac{\dot{\gamma}}{B} + C \sin \frac{|\tau|}{A}, \quad \eta = \frac{1}{B} + C \sin \frac{|\tau|}{A\dot{\gamma}}. \quad (2.66)$$

Уравнение Прандтля–Эйринга:

$$\tau = A \operatorname{arsh} \left(\frac{\dot{\gamma}}{B} \right), \quad \eta = \frac{1}{\dot{\gamma}} A \operatorname{arsh} \left(\frac{\dot{\gamma}}{B} \right). \quad (2.67)$$

Уравнение Рабиновича:

$$\tau = \frac{\mu_0}{1 + C\tau^2} \dot{\gamma}, \quad \eta = \frac{\mu_0}{1 + C\tau^2}. \quad (2.68)$$

Полиномиальное уравнение:

$$\tau = \frac{\mu_0 \dot{\gamma}}{1 + \sum_{k=1}^n A_k \tau^{2k}}, \quad \eta = \frac{\mu_0}{1 + \sum_{k=1}^n A_k \tau^{2k}}. \quad (2.69)$$

Для вязкопластических растворов и расплавов полимеров, особенно различных суспензий, применяемых в производстве химических волокон, следует привести уравнения Бингама

$$\tau = \tau_0 \operatorname{sign}(\dot{\gamma}) + \mu \dot{\gamma}; \quad \eta = \mu \quad (2.70)$$

и уравнение Балкли–Гершеля

$$\tau = \tau_0 \operatorname{sign}(\dot{\gamma}) + B |\dot{\gamma}|^{n-1} \dot{\gamma}; \quad \eta = B |\dot{\gamma}|^{n-1} \dot{\gamma}. \quad (2.71)$$

В выражениях (2.59)–(2.71) α , n , A , B , A_k , C , k — коэффициенты, определяемые опытным путем; τ_0 — начальный предел текучести (при $\tau < \tau_0$ жидкость ведет себя как твердое тело и подчиняется закону Гука, а при $\tau > \tau_0$ — начинает течь).

Наиболее широкое распространение получило так называемое степенное реологическое уравнение — уравнение Оствальда и де Виля [22]:

$$\tau = B |\dot{\gamma}|^{n-1} \dot{\gamma}; \quad \eta = B |\dot{\gamma}|^{n-1}, \quad (2.72)$$

где B характеризует вязкость системы, а n — отклонение свойств данной жидкости от свойств ньютоновской жидкости. При $n = 1$ уравнение (2.72) переходит в уравнение для ньютоновской жидкости. Значение $n < 1$ соответствует псевдопластичным жидкостям, а $n > 1$ — дилатантным жидкостям, у которых с ростом скорости сдвига $\dot{\gamma}$ вязкость η возрастает.

Степенное реологическое уравнение (2.72) в двойных логарифмических координатах представляет прямую линию с углом наклона α , причем $n = \operatorname{tg} \alpha$. Вискозиметрические измерения растворов [23] и расплавов [24–26] волокнообразующих полимеров показали, что в указанных координатах линейность сохраняется в диапазоне 2–3 и более десятичных порядков измерения $\dot{\gamma}$ (см. рис. 2.6 и 2.8).

Отметим, что вид реологического уравнения играет решающую роль лишь при получении аналитического решения задач о течении жидкостей.

При использовании численного моделирования этот фактор не имеет большого значения. Мало того, в последнем случае вообще отпадает необходимость в подборе функции, хорошо аппроксимирующей кривую течения во всем интересующем нас диапазоне значений $\dot{\gamma}$ или τ .

При обобщении результатов вискозиметрических исследований несжимаемых неупругих жидкостей на более сложные типы течений обычно постулируется следующее утверждение: вид реологического уравнения не зависит от характера течения. Это так называемая *гипотеза единой кривой*. Следуя данной гипотезе, нужно в реологическом уравнении вместо скорости сдвига $\dot{\gamma}$ (напряжения сдвига τ) подставить второй инвариант тензора скоростей деформаций I_2 (напряжений T_2), поделенный на два.

Вновь обратимся к рисункам 2.6–2.8. На рис. 2.6 показана зависимость $\tau = \tau(\dot{\gamma})$ при постоянной температуре T и различных значениях концентрации c ; на рис. 2.7 — при постоянной концентрации c и разных температурах T ; а на рис. 2.8 — при постоянной молекулярной массе M_B и различных значениях температур. Нетрудно заметить, что на каждом рисунке все кривые практически параллельны друг другу, а поэтому появляется возможность их совмещения путем жесткого параллельного переноса вдоль одной из осей. Результатом таких преобразований является обобщенная (единая) характеристика вязкостных свойств полимерных систем в широком диапазоне значений: T , c , M_B , ММР, P , $\dot{\gamma}$ или τ .

В наиболее общем случае такая характеристика строится в двойных логарифмических координатах в виде зависимости [6]

$$\frac{\eta}{\mu_0} = f(\dot{\gamma}\theta),$$

где η/μ_0 — приведенная вязкость, а $\dot{\gamma}\theta$ — приведенная скорость сдвига.

Здесь под θ следует понимать либо максвелловское эффективное время релаксации $\lambda_0 = \mu_0/G$, либо максимальное значение времени θ_m из некоторого релаксационного спектра. Причем значение λ_0 целесообразно использовать для получения обобщенной характеристики вязкостных свойств полимеров с различными ММР и растворов полимеров, а величина θ_m определяется по следующему уравнению [6]:

$$\theta_m = \frac{\mu_0 M_B^a}{T^b c^k},$$

где a , b , k — значения констант, зависящие от выбора модели полимерной системы.

При фиксированных значениях M_B и c время релаксации θ_m является функцией отношения μ_0/T^b , причем начальная вязкость μ_0 зависит от температуры T . Величина T^b , как отмечено в работе [6], практически не изме-

няется более чем в 1,5 раза, в то время как диапазон изменений значения μ_0 может достигать нескольких десятичных порядков. Поэтому можно считать, что $\theta_m \sim \mu_0$ и приведенная скорость сдвига равна $\dot{\gamma}\mu_0$. Тогда очевидно, что приведенная вязкость η/μ_0 уже не зависит от температуры, т. е. функция $f(\dot{\gamma}\mu_0)$ является температурно-инвариантной характеристикой. Аналогичные результаты можно получить для других параметров, например давления или ММР [6], а также и для их совокупности.

Впервые температурно-инвариантную характеристику для расплавов полимеров получили Г. В. Виноградов, А. Я. Малкин и др. [27, 28], а для растворов полимеров — А. П. Неверов и др. [29].

В качестве примера на рис. 2.9 приведена обобщенная вязкостная характеристика для растворов сополимера акрилонитрила (АН) метилметакрилатом (ММА) и винилсульфонатом (ВС) в диметилформамиде (ДММ) в диапазоне концентраций $c = (20 \div 24)\%$ и температур $T = (25 \div 115)^\circ\text{C}$ [29].

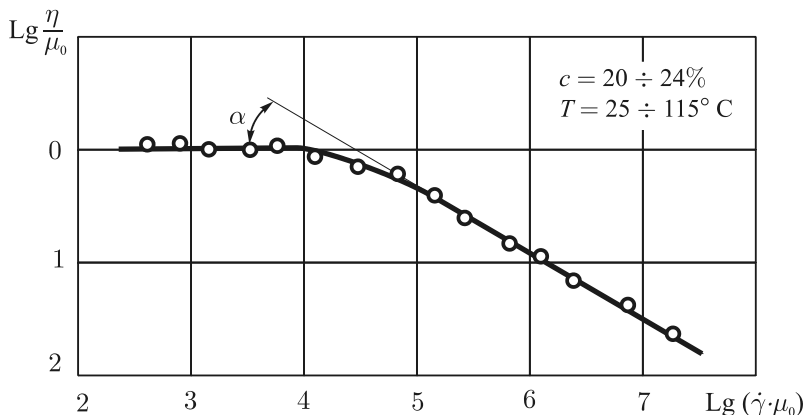


Рис. 2.9. Обобщенные вязкостные характеристики раствора сополимера (акрилонитрил — 92,5%, метилметакрилат — 6%, винилсульфонат — 1,5%) в диметилформамиде

На рис. 2.10 и 2.11 приведены обобщенные вязкостные характеристики для растворов полиакрилонитрила с различными молекулярными весами и для растворов полимеров винилхлорида в ДМФ [30] соответственно.

Таким образом, используя изложенный выше подход, удается получить единую форму кривой течения. Влияние же различных факторов (температуры, давления и т. д.) учитывается зависимостью начальной вязкости μ_0

от этих параметров. Поэтому в реологии полимеров закономерно возникает вопрос об установлении такой зависимости.

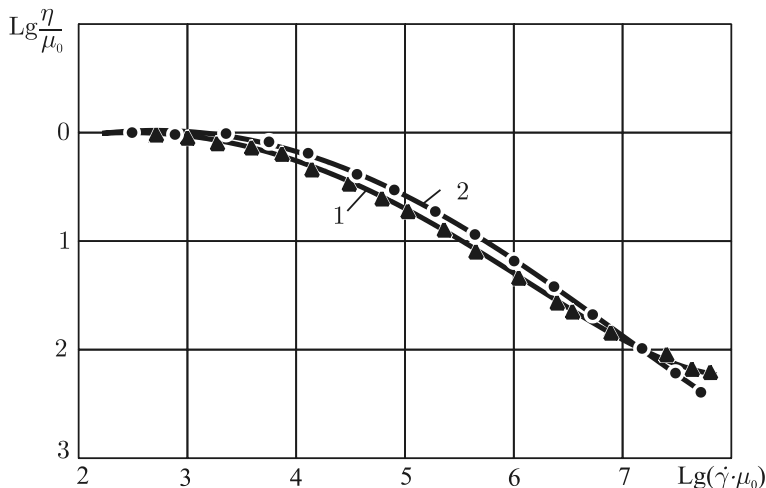


Рис. 2.10. Обобщенная вязкостная характеристика растворов полиакрилонитрила в диметилформамиде: 1 — $M_e = 74000$; 2 — $M_e = 37200$

Эволюция взглядов и существующая точка зрения на эту проблему подробно изложены в уже не раз цитированной монографии [6]. Поэтому ограничимся лишь некоторыми краткими замечаниями.

Многочисленные экспериментальные исследования зависимости начальной вязкости μ_0 от молекулярной массы M_B показали, что она хорошо описывается степенным законом:

$$\mu_0 = \begin{cases} aM_B^\alpha & \text{при } M_B < M_B^* \\ bM_B^\beta & \text{при } M_B \geq M_B^* \end{cases},$$

где a и b — константы; α имеет порядок 1, а $\beta = 3,4 \div 3,5$; M_B^* — критическое значение молекулярной массы, равное для полиэтилена 4000, полистирола — 36000, поливинилацетата — 22000, полиметилметакрилата — 27500 и т. д.

Если ограничиться не очень большими значениями давлений, то зависимость начальной вязкости полимеров от давления описывается, как и для низкомолекулярных жидкостей, экспоненциальным законом:

$$\mu_p = \mu_0 \exp(\delta \cdot P),$$

где μ_0 — вязкость при атмосферном давлении; δ — постоянная величина.

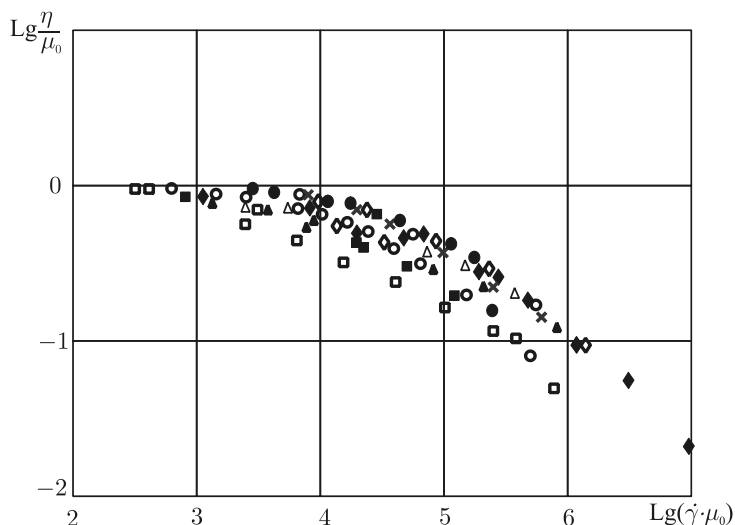


Рис. 2.11. Обобщенная зависимость вязкости растворов полимеров винилхлорида в диметилформамиде:

поливинилхлорид: Δ — $T_p = 90^\circ \text{C}$ ($c = 19\%$); \blacktriangle — $T_p = 100^\circ \text{C}$ ($c = 26\%$);

\bullet — $T_p = 100^\circ \text{C}$ ($c = 19\%$);

теплостойкий поливинилхлорид: \blacksquare — $T_p = 120^\circ \text{C}$; \blacksquare — $T_p = 130^\circ \text{C}$;

\circ — $T_p = 150^\circ \text{C}$;

поливинилхлорид СХН-60: \ast — $c = 18\%$; \diamond — $c = 20\%$; \blacklozenge — $c = 24\%$

Вопросам вязкости растворов полимеров посвящено большое количество работ. Эмпирическим путем установлена связь между начальной вязкостью μ_0 и концентрацией c , которая в общем случае подчиняется степенному закону:

$$\mu_0 = Ac^\chi,$$

где χ и A — константы. Причем A зависит от температуры, молекулярной массы и вида полимера.

На рис. 2.12 изображена концентрационная зависимость вязкости полимеров ПАН различного молекулярного веса в ДМФ [23]. Характер зависимости $\lg \mu_0 - c$ с увеличением молекулярной массы не изменяется, однако большей молекулярной массе при $c = \text{const}$ соответствует большее значение μ_0 .

Наконец, рассмотрим зависимость вязкости растворов и расплавов волоконобразующих полимеров от температуры, которая, как известно, явля-

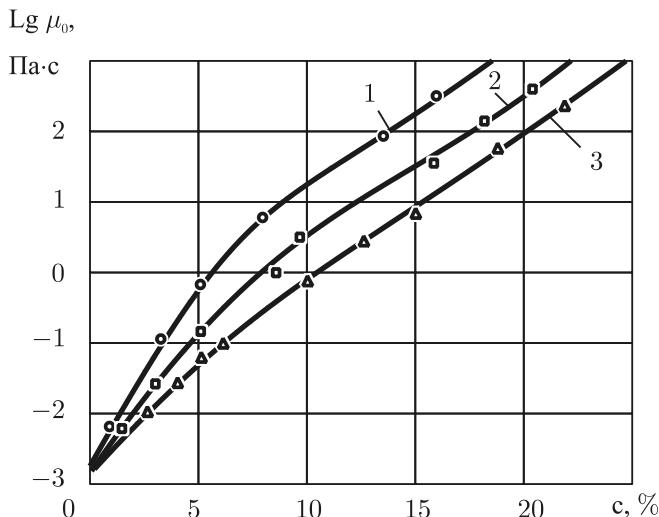


Рис. 2.12. Зависимость вязкости растворов полиакрилонитрила в диметилформамиде от концентрации полимера и его молекулярного веса при $T=25^\circ\text{C}$:
1 — $M_e = 87000$; 2 — 74000; 3 — 37200

ется одной из важнейших характеристик материалов. Наиболее часто для описания такой зависимости используют уравнение Аррениуса

$$\mu_0 = A \exp\left(\frac{E}{RT}\right), \quad (2.73)$$

где A — коэффициент, зависящий от природы полимера; E — энергия активации процесса течения; R — газовая постоянная.

На рис. 2.13 представлены зависимости наибольшей ньютоновской вязкости раствора акрилонитрила с винилацетатом (удельная вязкость 1,5) в ДМФ от температуры и концентрации [23]. На рис. 2.14 показана зависимость вязкости раствора поливинилхлорида в ДМФ от температуры [30], а на рис. 2.15 — зависимость эффективной вязкости η от скорости сдвига и температуры для расплава поликапроамида [24].

Из рисунков видно, что указанные зависимости в координатах $\lg \mu_0 - T$ линейны, а следовательно, для описания зависимости начальной вязкости от температуры справедлива формула (2.73). Часто вместо формулы (2.73) используют уравнение Рейнольдса

$$\mu_0 = A \exp(-kT), \quad (2.74)$$

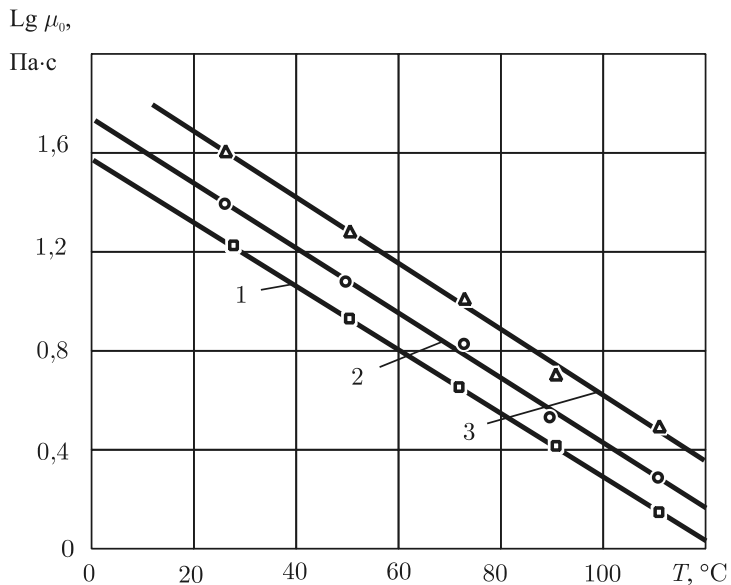


Рис. 2.13. Зависимость вязкости от температуры при различных значениях концентрации для растворов сополимера акрилонитрила с винилацетатом в диметилформамиде ($\eta_{уд} = 1,15$): 1 — $c = 16,9\%$; 2 — $17,8\%$; 3 — 19%

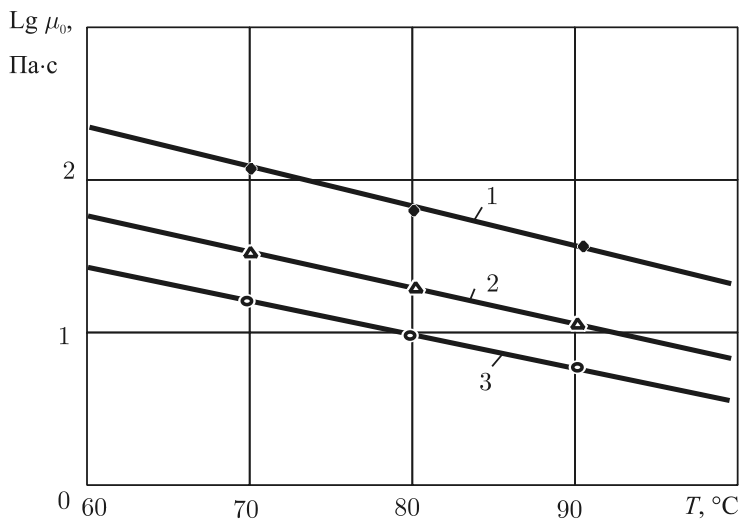


Рис. 2.14. Зависимость вязкости от температуры и концентрации для растворов поливинилхлорида в диметилформамиде: 1 — $c = 25\%$; 2 — $22,2\%$; 3 — 20%

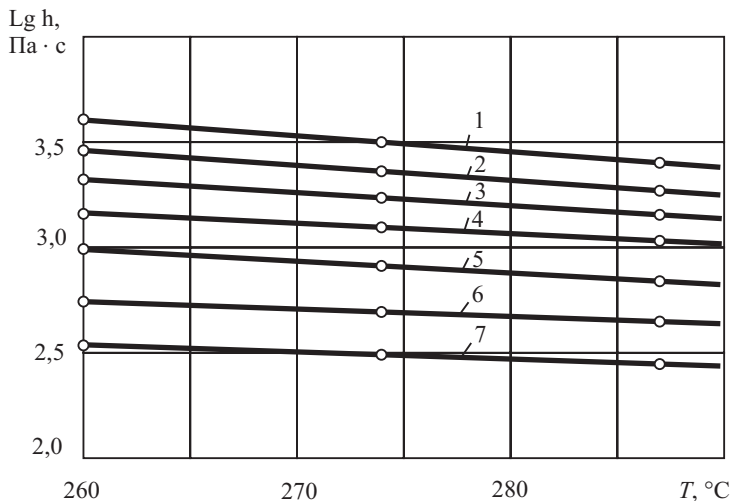


Рис. 2.15. Изменение эффективной вязкости поликапроамида ($M_e = 35000\text{--}40000$) от температуры и скорости сдвига: 1 — $\dot{\gamma} = 10 \text{ сек}^{-1}$; 2 — 40; 3 — 100; 4 — 200; 5 — 500; 6 — 1000; 7 — 2000

которое иногда представляют и в другой форме:

$$\mu_0 = A \cdot \exp[k(T_0 - T)]. \quad (2.75)$$

Здесь A , k , и T_0 — некоторые константы.

Из возможности представления вязкостных свойств полимеров в виде некоторой обобщенной характеристики вытекает еще один весьма полезный для практики вывод, который сводится к правилу логарифмической аддитивности. Согласно этому правилу эффективную вязкость η можно представить в виде произведения ряда функций

$$\eta = \eta(\dot{\gamma}) \cdot f_1(T) \cdot f_2(M_B) \cdot f_3(P) \cdot f_4(c).$$

Другими словами, влияние каждого фактора на эффективную вязкость учитывается независимо друг от друга. Этот факт может быть использован для разработки единого подхода к расчету изо- и неизотермических процессов экструзии полимерных материалов.

Следует отметить, что с ростом температуры изменяется не только вязкость жидкости, но и время релаксации λ_0 . В работе [31] предлагается считать λ_0 зависящим от температуры по следующему закону:

$$\lambda_0 = \bar{P} \exp[-\beta(T - T_0)],$$

где \bar{P} , β — эмпирические константы.

Если принять во внимание, что $\lambda_0 = \eta_0 / G$, то можно говорить о слабой температурной зависимости модуля упругости. В работе [30] коэффициенты вязкости и времени релаксации принимаются зависящими от температуры по закону Аррениуса. Модуль упругости G также считается не зависящим от температуры.

Остановимся более подробно на степенном реологическом уравнении (2.72). Если посмотреть на кривые течения, изображенные на рис. 2.6 и 2.7, то можно убедиться, что индекс течения $n = \operatorname{tg} \alpha$ зависит не только от концентрации раствора полимера, но и от его температуры. Вводя обобщенные величины вязкости $\eta_n = \eta / \mu$ и скорости сдвига $\dot{\gamma}_n = \mu \dot{\gamma}$, можно получить обобщенные характеристики $\eta_n(\dot{\gamma}_n)$, инвариантные относительно температуры. Рис. 2.16, заимствованный из работы [29], показывает, что для этих обобщенных величин каждой системе полимер-растворитель и растворам одних и тех же полимеров, отличающихся молекулярной массой, соответствует своя обобщенная характеристика. Кривые обобщенных реологических характеристик в пределах одного-двух, а иногда и более порядков изменения $\dot{\gamma}_n$ приближаются к прямым. Поэтому в указанных интервалах можно получить простейшие формулы для вычисления эффективной вязкости η и напряжения сдвига τ как функции скорости сдвига $\dot{\gamma}$. Константы этих выражений от температуры зависеть не будут. Поскольку в дальнейшем при решении неизотермических задач о течении полимеров мы часто будем пользоваться обобщенным степенным законом, полученным Л. М. Бедером [26], остановимся кратко на его выводе.

Обратимся к рис. 2.17 и совместим линейный участок аппроксимируемой кривой течения с прямой, пересекающей ось ординат в точке с координатами (x_0, y_0) . При $x_0 = 0$ уравнение прямой примет вид:

$$y - y_0 = mx.$$

Значение углового коэффициента m этой прямой и константу y_0 можно определить по координатам (x_1, y_1) и (x_2, y_2) двух произвольно взятых точек, лежащих вблизи границ прямолинейного участка кривой течения:

$$m = \left| \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right|, \quad y_0 = \left| \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1} \right|.$$

Учитывая, что $x = \lg \dot{\gamma}_n$, $y = \lg \eta_n$, $\eta_n = \eta / \mu$, а $\dot{\gamma}_n = \mu \dot{\gamma}$, получим

$$\eta = \eta_n^0 \cdot \mu^{1-m} \cdot \dot{\gamma}^{-m}, \quad \tau = \eta_n^0 \cdot (\mu \dot{\gamma})^{1-m}. \quad (2.76)$$

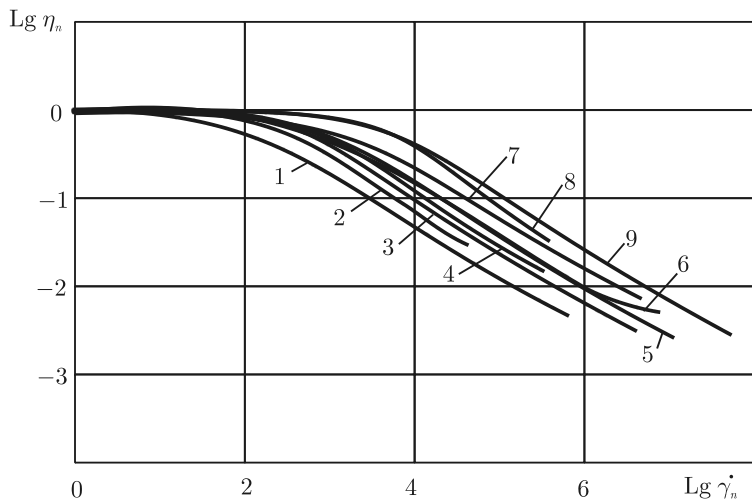


Рис. 2.16. Обобщенные реологические характеристики полимерных жидкостей: 1, 2, 6–8 — растворы ПАН в ДМФ (M_e образцов равен соответственно 11700, 48800, 40100, 32000, 27500); 3 — раствор смеси сополимера акрилонитрила ($M_e = 38000$) и ацетилцеллюлозы ($M_e = 48300$) в ДМФ; 4 — раствор ацетилцеллюлозы ($M_e = 48300$) в ДМФ; 5 — вискоза ($M_e = 60000$); 9 — расплавы различных полимеров

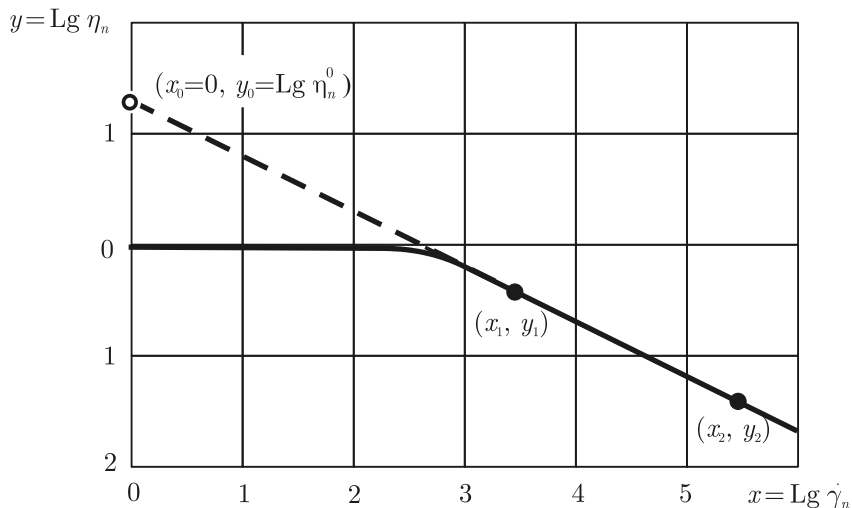


Рис. 2.17. К определению констант m и η_n^0 обобщенного степенного закона

Поскольку вязкость расплавов и растворов полимеров экспоненциально зависит от температуры, $\mu = \mu_0 \exp(-kT)$, из формулы (2.76) окончательно будем иметь:

$$\eta = \frac{B_1}{\exp(n_0 T)} \cdot \dot{\gamma}^{-m}, \quad \tau = \frac{B_1}{\exp(n_0 T)} |\dot{\gamma}|^{-m} \cdot \dot{\gamma}. \quad (2.77)$$

Здесь $B_1 = \eta_m^0 \mu_0^{1-m}$, $n_0 = (1-m)k$.

При изотермических условиях течения полимерных жидкостей формулы (2.77) запишутся так:

$$\eta = B \dot{\gamma}^{-m}, \quad \tau = B |\dot{\gamma}|^{-m} \cdot \dot{\gamma}, \quad (2.78)$$

где $B = B_1 \exp(-n_0 T)$.

Константы B_1 , n_0 и m не зависят от температуры T продукта и концентрации полимера. Величина m , названная авторами обобщенным индексом течения, характеризует угол наклона обобщенной кривой течения и численно равна $m = \operatorname{tg} \alpha$. Для псевдопластичных жидкостей $1 > m > 0$, а для дилатантных $0 > m > -\infty$. При $m = 0$ получим уравнение Ньютона. При этом формальное сходство уравнений (2.72) и (2.78) позволяет взаимно распространять результаты, полученные с помощью любого из них путем замены в соответствующих выражениях параметра n на $1-m$, хотя всегда надо четко себе представлять, что это только именно формальная замена.

Постановка и решение задач механики жидкостей

С практической точки зрения, решить задачу — значит отыскать некоторые числа или числовые функции. Однако прежде чем их отыскать, необходимо выполнить еще ряд действий (этапов), среди которых основным является первый этап — постановка (формулировка) задачи, которая заключается в сведении механической задачи к математической задаче, т. е. к математической формулировке сути исследуемого явления.

Однако на этом этапе роль механика не заканчивается, так как сегодня в круг его обязанностей входит также само решение конкретных задач механики сплошных сред путем некоторых математических операций. Сейчас для решения задач привлекают численное моделирование, поэтому термин математическое моделирование сегодня понимают в широком смысле: собственно математическое моделирование, выбор или разработка алгоритма и программирование. Это краеугольные камни математического моделирования. Дальнейшая детализация этого понятия приводит к следующим этапам [32]:

- 1) постановка задачи;
- 2) доказательство корректности постановки: существование решения, его единственность, непрерывная зависимость от входных данных;
- 3) замена исходной задачи другой, позволяющей для ее решения использовать численные методы;
- 4) доказательство корректности и сходимости новой (приближенной) задачи;
- 5) выбор метода решения приближенной задачи и оценка его эффективности;
- 6) разработка алгоритма решения приближенной задачи;
- 7) составление и отладка программы;
- 8) решение на ЭВМ;
- 9) анализ численных результатов, включающий сравнение с экспериментальными данными и другими решениями.

На практике зачастую ряд этапов по некоторым причинам (это обычно значительные трудности) пропускают. Однако при этом молчаливо предполагается, что условия, указанные в данном этапе, автоматически выполняются. Обычно опускают доказательства корректности постановок исходной и приближенной задач, а также доказательство сходимости. Однако именно здесь вычислителей чаще всего и подстерегает неудача, так как нельзя с уверенностью сказать, что полученные числа относятся к той задаче, которую мы хотели решить. Если все-таки мы вынуждены опустить доказательства корректности и сходимости, то нужно особенно внимательно и тщательно провести анализ и сравнение результатов.

Сейчас несколько подробнее остановимся на постановке задачи.

Итак, в нашем распоряжении есть замкнутая система дифференциальных уравнений с частными производными, которая содержит 11 неизвестных величин: давление P , температуру T , три компоненты скорости v^i и шесть компонент тензора напряжений τ^{ij} . Причем эту систему уравнений можно разбить на 4 группы уравнений: неразрывности (2.1), движения (2.4), энергии (2.18) и РУС (например, уравнение (2.47)). Однако если даже выбрать конкретный материал (задаться некоторым РУС), то все равно оставшиеся уравнения будут описывать бесчисленное разнообразие движений выбранной среды, другими словами, имеется бесконечное множество решений данной системы уравнений. Для выбора одного решения необходимы дополнительные условия, которые бы позволили выделить отдельное (конкретное) движение среды. К таким условиям относятся начальные и граничные условия.

Начальные условия задаются в том случае, когда исследуется нестационарный процесс. В зависимости от вида уравнений необходимо задать значения функций, а иногда и их производных, в некоторый момент времени $t = t_0$. Обычно полагают, что это начальный момент $t_0 = 0$, при котором жидкость находится в состоянии покоя или движется в установившемся режиме.

Сложнее обстоит дело с заданием граничных условий. Трудность заключается в том, что для компонент тензора напряжений τ^{ij} и давления P их распределение (значение) на граничных поверхностях обычно заранее неизвестно. Если рассматривается движение чисто вязких жидкостей, то, подставляя уравнение (2.56) в уравнение (2.2), удается исключить напряжения из решения задачи. Очевидно, при этом порядок системы уравнений уменьшается с 11 до 5. Вопрос о задании давления на границе приходится решать, как правило, отдельно в каждом конкретном случае, что и будет продемонстрировано в дальнейшем. Иногда, например при исследовании плоских или осесимметричных течений, давление также удается исключить из рассмотрения.

В современной литературе различают 4 вида (рода) граничных условий для температуры.

При граничных условиях I рода на границе области задано значение температуры или распределение температуры по некоторому закону.

При граничных условиях II рода на границе задано значение теплового потока, определяемого по уравнению (2.19).

При граничных условиях III рода, которые иногда называют еще законом теплообмена по Ньютону, на границе должно выполняться следующее условие:

$$q = \alpha(T - T_c),$$

где α — коэффициент теплообмена; T_c — температура окружающей среды; q — тепловой поток.

Граничные условия IV рода задаются на границе контакта двух сред с различными теплофизическими свойствами. Эти граничные условия требуют выполнения двух равенств: равенства температур каждой из сред и тепловых потоков на границе раздела этих сред.

В классической гидромеханике предполагается, что вязкая жидкость прилипает к ограничивающим твердым поверхностям, то есть если поверхность неподвижна, то скорость жидкости на границе равна нулю. Если же поверхность движется, то скорость жидкости на границе равна скорости движения поверхности.

Очевидно, чтобы выполнить некоторые вычисления, нужно знать значение плотности ρ , коэффициентов теплопроводности λ и удельной тепло-

емкости C , которые в общем случае зависят от температуры T . Такие зависимости для раствора ПАН в ДМФ показаны на рис. 2.18, а для ПКА, ПЭТФ, ПП и анида приведены в табл. 2.2 и 2.3.

Отметим, что хотя плотность ρ и является функцией температуры, но мы будем пренебрегать этой зависимостью и считать жидкость несжимаемой, т. е. $\rho = \text{const}$.

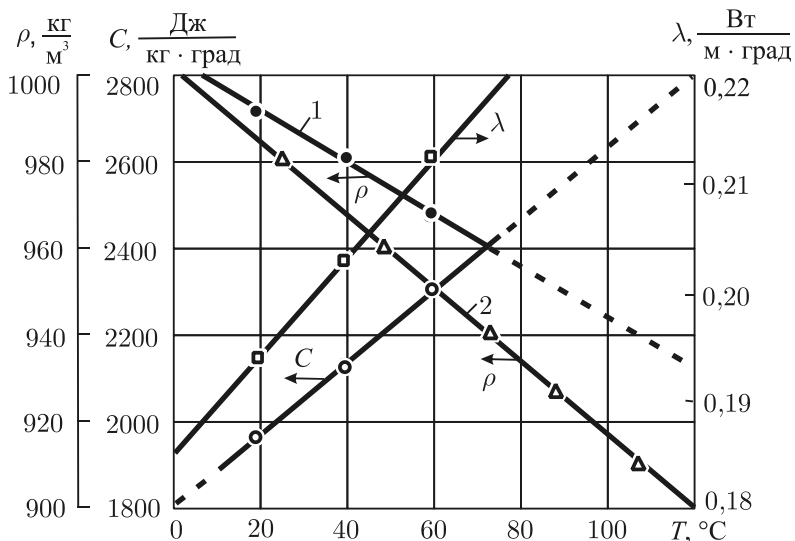


Рис. 2.18. Температурные зависимости теплоемкости C , теплопроводности λ и плотности ρ диметилформамидных растворов полиакрилонитрила: 1 — сополимер акрилонитрила ($c = 21,6\%$); 2 — чистый полиакрилонитрил ($c = 17\%$)

Таблица 2.2.

Зависимость плотности ρ [кг/м³], теплопроводности λ [Вт/(м·град)] и теплоемкости C [Дж/(кг·град)] поликапроамида (плотностью $\rho = 1152$ кг/м³ при $T = 20^\circ\text{C}$ и полиэтилентерефталата (лавсан) от температуры T ($^\circ\text{C}$).

T	Поликапроамид			Полиэтилентерефталат		
	ρ	λ	C	ρ	λ	C
20	1152	0,389	1914	1315	0,205	997
30	1196	0,381	1973	1313	0,208	1016
40	1142	0,379	2030	1310	0,211	1037
50	1138	0,377	2090	1309	0,215	1060
60	1134	0,376	2153	1308	0,218	1082
70	1130	0,374	2221	1305	0,222	1105

Таблица 2.2 (продолжение).

80	1126	0,372	2297	1304	0,225	1126
90	1122	0,371	2379	1303	0,228	1148
100	1118	0,369	2464	1301	0,231	1171
110	1113	0,368	2553	1300	0,235	1197
120	1109	0,366	2651	1298	0,238	1222
130	1104	0,364	2763	1295	0,242	1248
140	1099	0,363	2873	1291	0,245	1275
150	1093	0,361	3002	1286	0,248	1305
160	1087	0,36	3149	1283	0,252	1336
170	1081	0,358	3313	1280	0,255	1374
180	1073	0,356	3497	1275	0,258	1416
190	1064	0,354	3677	1271	0,262	1467
200	1052	0,345	4124	1265	0,265	1525
210	1030	0,286	5049	1256	0,268	1621
220	993	0,243	3599	1243	0,272	1761
230	987	0,245	2365	1228	0,275	1949
240	982	0,246	2403	1210	0,279	2225
250	977	0,248	2428	1175	0,282	3196
260	974	0,25	2456	1118	0,303	4732
270	970	0,251	2489	1097	0,359	2684
280	967	0,253	2516	1090	0,42	2833

Таблица 2.3.

Зависимость плотности ρ [кг/м³], теплопроводности λ [Вт/(м·град)] и теплоемкости C [Дж/(кг·град)] полипропилена и анида от температуры T (°C).

T	Полипропилен			Анид		
	ρ	λ	C	ρ	λ	C
10				987	0,370	1653
20	868	0,213	1926	986	0,364	1669
30	867	0,213	1939	984	0,359	1683
40	866	0,213	1950	981	0,354	1702
50	865	0,212	1943	978	0,346	1722
60	864	0,212	1936	974	0,343	1746
70	860	0,212	1992	969	0,337	1768
80	857	0,212	2057	965	0,332	1794
90	854	0,211	2139	960	0,327	1827
100	851	0,211	2221	955	0,321	1849
110	844	0,210	2336	950	0,316	1881
120	836	0,208	2522	944	0,310	1914
130	827	0,204	2771	938	0,305	1950
140	815	0,199	3101	930	0,299	1989
150	807	0,188	3870	922	0,294	2031
160	799	0,176	4728	915	0,288	2078
170	764	0,163	8739	907	0,283	2134

Таблица 2.3 (продолжение).

180	737	0,272	2977	900	0,277	2175
190	727	0,278	3435	892	0,272	2233
200	717	0,274	3894	884	0,266	2290
210	707	0,290	4353	877	0,261	2345
220				869	0,256	2410
230				861	0,249	2566
240				854	0,241	2957
250				846	0,231	3774
260				830	0,210	8434
270				809	0,215	2115
280				805	0,221	2241

Анализ уравнений сохранения и РУС показывает, что они связаны друг с другом. Например, коэффициент вязкости η , зависящий от температуры, входит в уравнения движения, энергии и РУС, а в уравнение энергии через функцию диссипации Φ входят напряжения и скорости. Эта формальная связь отражает физическую суть происходящих явлений, для которых характерно взаимодействие механических (гидродинамических) и термомеханических процессов. Если при решении задачи учитывают это взаимодействие, то говорят о связанной задаче, если же этим взаимодействием пренебрегают, то получают несвязанную задачу. В последнем случае механическую и тепловую задачу решают раздельно.

В заключение отметим еще одну точку зрения на изложенный материал. Уравнения сохранения в математической форме отражают закон природы, а поэтому они описывают движение и теплообмен сплошной среды в любом канале, устройстве, машине и т. д. Для того чтобы указать, что из себя представляет движущаяся среда, какими она обладает свойствами, нужно задать РУС и дополнительные соотношения для плотности ρ , коэффициентов теплопроводности λ и удельной теплоемкости C . И наконец, особенность технологического процесса (скорость движения отдельных частей устройств, условия теплообмена на границе, состояние материала в некоторый момент времени и т. д.) и геометрические размеры каналов, по которым движется жидкость, учитываются с помощью начальных и граничных условий.

Скольжение жидкостей у твердых границ

Многие текучие системы, в том числе полимерные материалы, проявляют вблизи твердых поверхностей аномалию, заключающуюся в возникновении проскальзывания. Данное явление называют *пристенным эффектом* или π -эффектом. Наличие пристенного эффекта приводит к нарушению гипотезы о прилипании и необходимости задавать соответствующие граничные условия.

Аномальное поведение (пристенное скольжение) материалов в вязкотекучем состоянии (суспензии, смазки, растворы и расплавы полимеров) у твердых поверхностей требует всестороннего изучения не только при исследовании реологических свойств [10], но и при расчете параметров течения и характеристик перерабатывающего оборудования. При этом в первую очередь возникают достаточно сложные задачи определения по результатам вискозиметрических исследований вязкостных свойств материала, скорости его скольжения на стенке и обобщения данных о скорости скольжения, полученных при простом сдвиговом течении, на сложное напряженное состояние. Следующий этап, связанный с решением конкретных задач о теплообмене в жидкостях, проявляющих аномалию у твердых поверхностей, заключается в непосредственном использовании скоростей скольжения в качестве граничных условий. Необходимо отметить, что изучению этого вопроса посвящено большое количество работ [33, 46]. Это явление аномального поведения жидкостей и газов у твердых границ обусловлено различием свойств и поведения материала в пристенном слое и объеме.

Анализ многочисленных исследований аномального поведения жидкостей и газов вблизи поверхностей позволяет провести следующую классификацию случаев, при которых наблюдается пристенное скольжение:

- течение разряженных газов;
- течение жидкостей между пористыми (проницаемыми) поверхностями;
- течение неньютоновских жидкостей.

Изучение первых двух случаев не является предметом настоящего издания, однако они все же будут кратко рассмотрены. Это объясняется тем, что, во-первых, математическая формулировка граничных условий для всех трех случаев имеет много общего, а во-вторых, тем, что в некоторых работах [34, 35] указывается на возможность общего подхода к исследованию π -эффекта.

Условия, которые возникают на границе газа и твердого тела, были впервые сформулированы Максвеллом [36]. Эти условия обусловлены тем, что все молекулы, попадающие на поверхность, делятся на две группы. Одна группа после взаимодействия со стенкой прилипает к ней, а другая отталкивается от нее. Скорость отскочивших молекул равна скорости газа в пристенных слоях.

Обтекание стенки как плотным, так и разряженным газом происходит, строго говоря, одинаково [37]. Однако при течении разряженного газа действие стенки на него ослабевает, что приводит к появлению проскальзывания. Эксперименты, проведенные еще в 1875 году Кундтом и Вербургом, были первыми опытами, подтверждавшими существование пристенного

скольжения. Этими же исследователями было установлено, что скорость скольжения обратно пропорциональна давлению газа [36].

Экспериментально скольжение газа проявляется в увеличении фактического расхода газа по сравнению с расходом, вычисленным по формуле Пуазейля [37]. В работах по теории разряженного газа [36, 37] скорость скольжения v_s у границы определяется по формуле

$$v_s = \beta \frac{\partial v}{\partial n}, \quad (2.80)$$

где n — нормаль к поверхности; β — коэффициент скольжения, имеющий размерность длины.

В таком случае расход газа в трубе при использовании условия (2.80) может быть определен по следующему уравнению:

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta_0} \left(1 + \frac{4\beta}{R} \right) \frac{\partial P}{\partial z}, \quad (2.81)$$

из которого видно, что фактический расход газа в $1 + 4\beta/R$ раз больше, чем расход, определяемый по формуле Пуазейля.

М. Смолуховский [38] впервые экспериментально обнаружил наличие температурного скачка на стенке, обтекаемой разряженным газом. Опыты Смолуховского были проверены П.П. Лазаревым, который непосредственно измерял температуру газа вблизи твердой стенки. Граничные условия для температуры имеют вид

$$T_s = \lambda^* \frac{\partial T}{\partial n},$$

где λ^* — коэффициент температурного скачка.

В фундаментальной работе А. К. Тимирязева [39] была разработана теория, устанавливающая количественную связь между коэффициентом скольжения и величиной температурного скачка. Расчеты, проведенные по этой теории, оказались в отличном соответствии с экспериментальными данными, полученными самим автором. Таким образом, Тимирязевым впервые экспериментально и теоретически было доказано существование связи между этими коэффициентами, которая, как оказалось, описывается простым соотношением

$$\beta = \frac{8}{15} \lambda^*. \quad (2.82)$$

Важно отметить, что А. К. Тимирязевым было высказано предположение о возможном влиянии кривизны поверхности на коэффициент скольжения и величину температурного скачка. Это предположение, как показали последующие исследования, оказалось справедливым для многих

неньютоновских жидкостей, в том числе и для суспензий, растворов и расплавов полимеров.

Перейдем к рассмотрению жидкостей, соприкасающихся с пористыми поверхностями. Течения такого типа встречаются во многих реальных процессах, например в пористых подшипниках [40], пористых валах [41] и т. д. Хотя большинство этих работ было выполнено в предположении о том, что жидкость прилипает к пористым поверхностям, тем не менее подобного вида течения перспективно использовать при получении гранулята из расплавов полимеров (поликапроамид, полиэтилен, полиэтилентерефталет и др.), пленок и пленочных нитей, подавая через пористые фильтры подогретый азот или жидкость.

В работе [42] было предложено использовать на проникаемой стенке в качестве граничного условия не прилипание, а проскальзывание. Предварительно проведенные исследования с нефтью подтвердили наличие скольжения. Последующие эксперименты [43], проведенные достаточно тщательно, не только подтвердили наличие эффекта скольжения, но и позволили оценить его количественно. Эксперименты проводились на каналах с плоскопараллельными стенками. В качестве рабочей жидкости использовалась вода. Опыты показали, что величина скорости проскальзывания у пористой стенки достигает в некоторых случаях 60% от величины максимальной скорости в канале. Для описания эффекта проскальзывания авторы воспользовались макроскопической моделью, связывающей скорость скольжения v_s с градиентом скорости у стенки:

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\alpha}{\sqrt{k}}(v_s - V), \quad (2.83)$$

где k — проницаемость пористого материала; V — скорость фильтрации, которая намного меньше величины v_s ; α — безразмерная постоянная, зависящая от свойств пористого материала.

В работе [44] исследовалось течение жидкости в плоских каналах и трубах с пористыми стенками, через которые был возможен вдув или отсос жидкости. Граничные условия задавались по уравнению (2.83). Наряду с анализом давления в зависимости от вдува или отсоса в этой работе было отмечено, что пристенное скольжение не только выравнивает скорости, но и снижает максимум скорости (для плоских каналов).

Аналогичные граничные условия использовались Марти [45] при решении уравнения Рейнольдса, описывающего течение смазки в зазоре пористого подшипника. Автором отмечено, что проскальзывание приводит к уменьшению давления по всей окружности подшипника.

Эффект проскальзывания жидкости у непроницаемой стенки экспериментально был обнаружен еще в 1860 г. Гельмгольцем и Петровским [34, 47]. Гельмгольцем [47] была введена поправка на пристенное

скольжение в уравнении Пуазейля, в котором величину R^4 он заменил множителем $(R^4 + 4R^3\eta/\beta)$. Здесь R — внутренний радиус трубы, β — «коэффициент трения» между жидкостью и стенкой.

Муни [49] была разработана феноменологическая теория оценки пристенного скольжения в случае течения между коаксиальными цилиндрами. Согласно этой теории, пользуясь ротационными вискозиметрами с коаксиальными цилиндрами различных диаметров, можно найти средние скорости скольжения и их зависимость от напряжения сдвига. Однако стоит заметить, что к настоящему времени в литературе отсутствует описание подобных экспериментальных исследований [50].

Д. С. Великовский [51] при изучении граничных условий для пластичных смазок обнаружил пристенный эффект даже при малых значениях напряжения сдвига и показал прямую зависимость этого эффекта от радиуса капилляра.

М. Д. Толстой [48, 52–54] для количественной оценки проскальзывания жидкости использовал коэффициент пристенного скольжения

$$\beta = v_s / \tau, \quad (2.84)$$

который равен эффективной скорости скольжения на стенке v_s , отнесенный к единице касательного напряжения τ .

Для исследования π -эффекта консистентных смазок Д. М. Толстой [52] использовал «метод плоского ползуна», при котором реализовалось куэтовское течение. Им было показано, что скольжение изученных смазок является результатом образования у поверхности тонкого слоя дисперсной среды, вязкость которой очень мала по сравнению с вязкостью системы в объеме. В работе [53] предложена молекулярная теория скольжения жидкости, базирующаяся на теории вязкости жидкостей А. И. Френкеля. Эксперименты, проведенные с ртутью, продавливаемой через стеклянные капилляры, показали хорошее согласие с теоретическими выводами [54].

Рейнер [55, 56], рассматривая поведение жидкостей у твердой поверхности, считал, что вопроса о скольжении «чистой» жидкости не существует. Такие же выводы сделаны в классических работах по механике жидкостей Л. Г. Лойцянским [2] и Бетчелором [57]. Однако при течении дисперсных систем, как отмечено в работах Рейнера [55, 56], возможно образование пристеночных слоев с пониженной вязкостью, которые играют роль смазки. Причем в жидкостях, соприкасающихся с твердыми телами, могут образовываться пристеночные слои, либо «смазывающие», либо «тормозящие» [55]. Появление того или иного слоя Рейнер связывает с ориентацией молекул вблизи стенки. Если молекулы ориентированы параллельно стенке (падение вязкости), то это соответствует появлению «смазочного» слоя, если же они ориентированы нормально к стенке (увеличение вязкости), то это приводит к появлению «тормозящего» слоя.

В последующих работах [58, 59] описанные Рейнером возможные случаи аномалии у стенки получили название положительного (уменьшение вязкости) и отрицательного (увеличение вязкости) эффектов скольжения. В качестве примера в работе [58] приводится случай, когда растворимое вещество адсорбируется на твердой стенке. Отмечается, что существование этого эффекта сильно затрудняет определение вязкости жидкости.

Олдройдом [60, 61] была предложена оригинальная теория, базирующаяся на математической основе — исследовании пристенных эффектов при течении неньютоновской жидкости. Основанный на этой теории метод изучения реологических характеристик с помощью капиллярного вискозиметра, как показали дальнейшие экспериментальные работы, дал хорошие результаты. Согласно теории Олдройда [60], параметры течения неньютоновской жидкости, проскальзывающей у поверхности капилляра, могут быть определены по формуле

$$\frac{Q}{\pi R^3 \tau_R} = \frac{\beta(\tau_R)}{R} + \frac{1}{\tau_R^4} \int_0^{\tau_R} \tau^2 f(\tau) d\tau, \quad (2.85)$$

где $f(\tau) = |\dot{\gamma}|$.

Одним из главных выводов Олдройда является то, что для определения скольжения жидкости у стенки необходимо проведение реологических исследований на капиллярном вискозиметре с капиллярами, которые имеют одинаковое отношение длины к радиусу ($L/R = \text{const}$), но разные диаметры. Для количественной оценки пристенных эффектов, как это следует из выражения (2.85), нужно результаты реологических исследований представить в виде графиков зависимости $Q/(\pi R^3) - 1/R$ при τ_R в качестве параметра. Из этих графиков скорость скольжения v_s и коэффициент скольжения β могут быть определены как тангенсы углов наклона прямых линий.

Эксперименты Томса [62], проведенные с растворами полиметилметакрилата с целью исследования пристенных эффектов, показали, что коэффициент скольжения зависит от напряжения сдвига на стенке, причем с ростом τ_R увеличивается значение коэффициента скольжения β . Результаты этой работы подтвердили теорию Олдройда.

Г. В. Виноградов и В. В. Синицын [63, 64], исследуя вязкостные свойства На-смазок, показали, что неинвариантность кривых течений данных смазок обусловлена пристенным скольжением. В этих работах было отмечено, что наибольшее влияние на π -эффект оказывают микроструктура смазок, а также соотношение между прочностными характеристиками дисперсной фазы и дисперсионной среды. Кроме того, был экспериментально подтвержден тот факт, что увеличение температуры приводит к усилению пристенного эффекта. Этот вывод хорошо согласуется с пред-

ложенным авторами механизмом скольжения На-смазок. Для обработки результатов эксперимента использовалось уравнение

$$D_{\text{эф}} = D_{\text{об}} + \frac{v_s}{R}, \quad (2.86)$$

где $D_{\text{эф}}$ и $D_{\text{об}}$ — соответственно среднееэффективные и объемные скорости деформации смазок.

В работах Максвелла и Гальта [65, 66] описаны результаты экспериментов по изучению профиля скорости полиэтилена с помощью оптических исследований. Опыты были проведены с трубами круглого (диаметр 0,635 см) и прямоугольного (0,318×1,27 см) сечений. Продавливался полиэтилен высокого давления различных марок с различными молекулярными весами. Профиль скорости определялся путем замера скорости частиц карборунда. Эксперименты показали существование пристенного слоя и наличие скорости скольжения у поверхности, которые объясняются упругостью материала. Исследование влияния поверхности стенки (в описываемых работах материала стенки) показало, что поверхность не оказывает практически заметного действия на течение. Однако в последующих работах [67, 68] достоверность выводов Максвелла и Гальта была подвергнута сомнению ввиду использования ими в опытах круглых труб и довольно крупных частиц карборунда.

Ястрембжевским [69] при изучении входных и пристенных эффектов каолиновых суспензий в капиллярном вискозиметре было обнаружено, что коэффициент скольжения для этих суспензий является функцией не только напряжения сдвига, но и радиуса. Для изученных суспензий связь между β и β_s имеет вид

$$\beta(\tau_R, R) = \beta_s(\tau_R) / R. \quad (2.87)$$

Истинный коэффициент скольжения β_s определяется как угол наклона прямых, построенных в координатах $Q/(\pi R^3 \tau_R) - 1/R^2$, а расход Q_c , обусловленный лишь вязким течением, вычисляется по формуле

$$Q_c = Q - \pi R \tau_R \beta_s, \quad (2.88)$$

где Q — замеренный расход жидкости.

Аналогичные результаты получены в работе [70] при исследовании течения водных суспензий мела в капиллярах. Для описания проскальзывания авторы использовали двухслойную модель течения. Показано, что коэффициент скольжения описывается уравнением (2.88). Получен график зависимости $\beta_s(\tau_R)$ в широком интервале значений напряжения сдвига τ_R , из которого видно, что после достижения предельного значения сдвигово-

го напряжения истинный коэффициент скольжения β_s не зависит от τ_R , т. е. $\beta_s = \text{const}$.

В работах Г.В. Виноградова и Л.И. Ивановой [71, 72] на примере сополимера этилена с пропиленом показано, что причиной возникновения эластичной турбулентности является процесс скольжения–прилипания (stick–slip), заключающийся в непрерывно чередующихся отрывах материала от стенки капилляра и прилипания к ней. Для количественной оценки скорости скольжения v_s и скорости сдвига $\dot{\gamma}$ использовался метод Муни [49], однако подчеркнуто, что величины v_s и $\dot{\gamma}$ являются осредненными по времени. Кроме того, показана зависимость пристенного скольжения вязкоупругих сред от гидростатического давления. Последнее означает, что средние скорости скольжения изменяются не только во времени, но и по длине капилляра.

Г. В. Виноградовым и Л. И. Ивановой [73] при расчете коэффициента скольжения β некоторых полимеров были использованы координаты $Q/(\pi R^3 \tau_R) - 1/R^2$, а расход определялся по формуле, аналогичной (2.88).

В работах Б. В. Дерягина и Н. Н. Федякина [74] показано, что при определенных условиях даже у обычных ньютоновских жидкостей, в частности воды, бензина, метилового спирта, может проявляться аномалия у поверхности. Такими условиями являются малый радиус капилляра, который может быть определен по формуле

$$r \frac{\lambda_T}{4\eta} \ll 1, \quad (2.89)$$

где λ_T — коэффициент трения.

Для воды этот радиус равен $r \leq 2 \cdot 10^{-5}$ см, что согласуется с экспериментами, проведенными авторами.

Особенностью экспериментальных работ [75–78], выполненных в Белорусском политехническом институте, по исследованию π -эффекта, является то, что скорость скольжения у поверхности оценивалась не по интегральным характеристикам, а непосредственно замерялась с помощью рентгеновской установки. Применение рентгеноскопического метода позволило провести исследование профиля скорости таких непрозрачных сред, как торф, пластичные смазки, мучное тесто и строительная глина в различных каналах.

В работах [75, 76] описаны результаты по изучению пристенного скольжения дисперсных систем в конусах. Показано, что основной реологической характеристикой скольжения является коэффициент проскальзывания β . Для количественной оценки π -эффекта использована формула,

предложенная А. Х. Кимом:

$$\beta = \frac{|v_s|}{\left| \partial v / \partial n \right|_{\text{ст}} r \sin \alpha}, \quad (2.90)$$

где $\left| \partial v / \partial n \right|_{\text{ст}}$ — градиент скорости прилегающих к твердой стенке объемных слоев; r — радиус, проведенный из вершины конуса до данной точки; α — половина угла раствора конуса.

Отмечается, что коэффициент β , рассчитанный по формуле (2.90), во всех сечениях, за исключением концевых, был величиной постоянной для исследуемого материала.

В работах М. П. Козеева [77] показано, что коэффициент пристенного скольжения β некоторых вязкопластических систем зависит от радиуса цилиндрической трубы. На основании этого формулу Д. М. Толстого предложено записывать в виде

$$\beta = \frac{v_s}{\left| \partial v / \partial n \right|_{\text{ст}} R}. \quad (2.91)$$

Исследование движения этих материалов в гладких и резбовых трубах показало, что коэффициент пристенного скольжения β не зависит от микрогеометрии внутренней поверхности, что противоречит результатам других работ.

И. П. Гранчином и А. Х. Кимом [78] рассмотрены вопросы о связи π -эффекта с величиной предела сдвиговой прочности τ_0 . Использование рентгеноскопического метода позволило подтвердить существование их прямой зависимости друг от друга. Авторами высказано мнение о возможности установления эмпирической зависимости τ_0 и β . Обращается особое внимание на задание граничных условий при теоретическом исследовании течения жидкостей, проявляющих аномалию у поверхностей.

В настоящее время существуют два подхода к учету эффекта проскальзывания материалов. Применительно к теории шнековых машин эти подходы подробно рассмотрены в работах [79, 80]. Первый подход [79, 81, 82] заключается в задании в явном виде скорости скольжения на стенке, которая в общем случае является функцией напряженного состояния, геометрических размеров и температуры. Причем указанная зависимость скорости скольжения на стенке от перечисленных факторов находится из вискозиметрических измерений [10]. Согласно этому подходу скорость скольжения материала у твердой стенки может быть определена так:

$$v_s = \begin{cases} 0 & \text{при } T_{2c} \leq \tau_s \exp(-sT); \\ \frac{\beta_s(T_{2c})\tau_R}{R^{m_0}} \exp(kT) & \text{при } T_{2c} > \tau_s \exp(-sT). \end{cases} \quad (2.92)$$

Здесь T_{2c} — второй инвариант тензора напряжений на стенке; v_s — «истинная» скорость скольжения материала у стенки; τ_s — напряжение сдвига, при котором начинается скольжение; β_s — «истинный» коэффициент скольжения жидкости; R — некоторый линейный размер (радиус трубы, глубина канала); m_0 , k , s — коэффициенты, определяемые экспериментально; T — температура; τ_R — напряжение на стенке.

Для простого сдвигового течения и изотермических условий уравнение (2.92) преобразуется к виду:

$$v_s = \frac{\beta_s(\tau_R)\tau_R}{R^{m_0}}.$$

В этом случае соотношение Олдройда (2.85) запишется так:

$$\frac{Q}{\pi R^3 \tau_R} = \frac{\beta_s(\tau_R)}{R^{m_0+1}} + \frac{1}{\tau_R^4} \int_0^{\tau_R} \tau^2 f(\tau) d\tau.$$

Таким образом, коэффициент скольжения β_s находится из серии опытов на капиллярах различного радиуса при фиксированном напряжении на стенке τ_R как тангенс угла наклона функции $Q/(\pi R^3 \tau_R) = f(1/R^{m_0+1})$, а постоянная материала m_0 подбирается таким образом, чтобы зависимость $Q/(\pi R^3 \tau_R)$ от $1/R^{m_0+1}$ была линейной.

Второй подход [80, 83] предполагает существование для конкретного материала некоторого «порогового» напряжения сдвига на стенке, при достижении которого возникает скольжение, причем при установившемся движении сдвиговое напряжение в пристеночных слоях не может превысить «порогового» значения.

На наш взгляд, обе точки зрения являются правомерными, и их применение определяется видом материала. Первый подход, как показывают реологические исследования, по-видимому, наиболее приемлем для жидкостей, эффект проскальзывания у которых обусловлен образованием тонких пристеночных слоев маловязкой жидкости, второй — для высоковязких расплавов и растворов полимеров.

Необходимо заметить, что при изучении влияния эффекта проскальзывания на движение жидкости в каналах шнека и характеристики машин оба подхода дали одну и ту же качественную картину.

Метод построения кривых течения и обработка экспериментальных данных для жидкостей, проскальзывающих у твердых границ, подробно изложены в работах [21, 84].

На примере нескольких жидкостей рассмотрим подробно методологию построения истинных кривых течения сред, проявляющих скольжение

у твердых границ, и определим необходимые константы для уравнения (2.92). Так как выяснение причин и механизма пристенного скольжения у различных материалов представляет собой достаточно сложную и самостоятельную задачу, решение которой выходит за рамки данного издания, то этот вопрос здесь не рассматривается. С учетом же того, что в основе капиллярной вискозиметрии лежит феноменологический подход, а определение вязкости и скорости скольжения связано с замером двух интегральных характеристик (перепада давления и расхода), исследуемый метод является достаточно общим и не зависит от механизма проскальзывания.

Известно [10, 50], что при течении двухфазных систем у стенки капилляра может образоваться тонкий слой маловязкой жидкости. Тогда вблизи стенки скорость резко изменяется (рис. 2.19, б), а кривая течения материала становится неинвариантной относительно радиуса. Ввиду того что толщина слоя h составляет несколько микрон, что намного меньше радиуса капилляра, многие исследователи имитируют это явление пристенным скольжением.

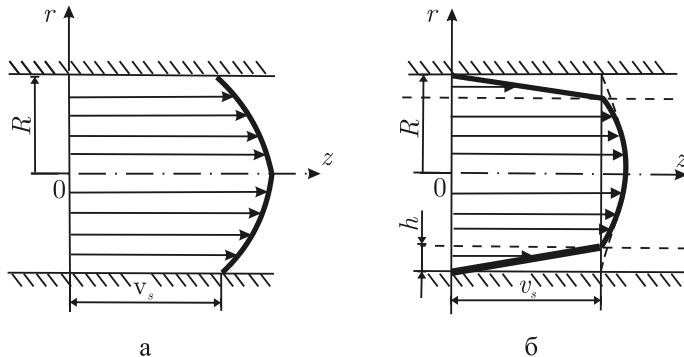


Рис. 2.19. Схема течения жидкостей, проскальзывающих у твердых поверхностей

При этом предполагается, что

$$v_s = v_z|_{r=R-h}. \quad (2.93)$$

Как показано в работе [40], погрешность такой замены не превышает величины h/R .

Преимущество такого подхода особенно хорошо проявляется при решении краевых задач о течении жидкости со скольжением.

Итак, оставляя в стороне вопрос механизма проскальзывания, рассмотрим вискозиметрическое течение материала в круглой трубе радиусом R и длиной L (см. рис. 2.19). Если жидкость прилипает к поверхности канала,

то напряжение τ_R и скорость сдвига $\dot{\gamma}$ на стенке определяются через давление P в резервуаре и расход по формуле [10]:

$$\tau_R = \frac{(P_2 - P_1)}{2(L_2 - L_1)} R = \frac{\Delta P}{2\Delta L} R; \quad (2.94)$$

$$\dot{\gamma}_R = \left(\frac{3n+1}{n}\right) \frac{Q}{\pi R^3}; \quad (2.95)$$

$$n = \frac{d(\lg \tau_R)}{d(\lg \dot{\gamma}_0)}; \quad (2.96)$$

$$\dot{\gamma}_0 = \frac{4Q}{\pi R^3}. \quad (2.97)$$

Здесь индексы 1 и 2 относятся к короткому и длинному капилляру соответственно.

Если жидкость скользит по поверхности капилляра, то ее расход равен сумме двух слагаемых: расхода Q_γ , обусловленного сдвиговым течением, и расхода Q_s , обусловленного скольжением жидкости. Для того чтобы правильно определить вязкость жидкости, нужно вычислить величину каждого из расходов, а затем подставить в формулу (2.95) значение расхода Q_γ .

Независимо от свойств жидкости и условий на границе объемная скорость течения Q связана с радиальным распределением скорости v_z соотношением

$$Q = \int_0^R 2\pi r v_z(r) dr. \quad (2.98)$$

Интегрируя это уравнение по частям, получим

$$Q = \pi r^2 v_z(r) \Big|_0^R - \int_0^R 2\pi r^2 \frac{\partial v_z}{\partial r} dr. \quad (2.99)$$

В случае прилипания жидкости первое слагаемое уравнения (2.99) обращается в нуль ($v_z|_{r=R} = 0$), и для определения скорости сдвига $\dot{\gamma}_R$ нужно использовать уравнение (2.95), вытекающее из известного уравнения Вайссенберга–Рабиновича [10]. Однако задача значительно усложняется, если жидкость скользит по поверхности. В этом случае необходимо на границе $r = R$ задавать скорость скольжения, величина которой заранее не известна.

Как следует из анализа ряда экспериментальных работ и исследований авторов данной книги, удобно задать скорость скольжения при изотермическом течении в виде функции (2.92). К числу главных достоинств этой функции нужно отнести следующее.

Во-первых, она подчиняется правилу логарифмической аддитивности, что позволяет учитывать влияние геометрии канала (радиуса R) и напряжения сдвига τ_R на величину скорости v_s с помощью двух функций, в каждой из которых аргументом является R и τ_R .

Во-вторых, в ее структуру входит специальная скалярная функция (истинный коэффициент скольжения β_s [69]), которая позволяет обобщить результаты вискозиметрических исследований на сложнонапряженное состояние жидкости.

После подстановки формулы (2.92) в формулу (2.99) и некоторых преобразований получим

$$\frac{Q}{\pi R^3 \tau_R} = \frac{\beta_s(\tau_R)}{R^{m_0+1}} + \frac{1}{\tau_R^4} \int_0^{\tau_R} \tau^2 f(\tau) d\tau, \quad (2.100)$$

где

$$f(\tau) = |\dot{\gamma}| = \left| \frac{dv_z}{dr} \right|.$$

Из уравнения (2.100) следует, что величина истинного коэффициента β_s , а значит, и скорость v_s могут быть определены как тангенс угла наклона прямой, построенной в координатах $Q/(\pi R^3 \tau_R)$ и $1/R^{m_0+1}$ при τ_R в качестве параметра. Из этого же уравнения следует, что реологическая константа m_0 должна подбираться таким образом, чтобы в указанных координатах уравнение (2.100) было линейным.

Зная величину β_s как функцию τ_R , можно найти расход Q_γ :

$$Q_\gamma = Q - \pi R^{2-m_0} \tau_R \beta_s. \quad (2.101)$$

Следует отметить, что предложенное уравнение (2.92) является более общим, чем известные. В частности, из него при $m_0 = 0$ вытекает уравнение Д. Олдройда [60], при $m_0 = 1$ — уравнение, используемое в работах [69, 70], а при $m_0 = 0,5$ — соотношение, используемое в уравнениях для описания смазок.

Из уравнения (2.99) следует, что при скольжении материала его кривая течения должна быть неинвариантна относительно радиуса капилляра. Если для обнаружения эффекта скольжения достаточно только двух капилляров, то для количественной оценки данного явления требуется уже как минимум три капилляра различных радиусов. Геометрические размеры капилляров, использованных нами при проведении вискозиметрических исследований, приведены в табл. 2.4.

Таблица 2.4.

Размеры экспериментальных капилляров

№ п/п	$L \cdot 10^3$, м	$R \cdot 10^3$, м	L/R
1	150,7	1,1	137,0
2	95,9	0,7	137,0
3	75,2	0,55	137,0
4	34,0	1,1	30,8
5	11,0	1,1	12,7
6	34,0	2,1	16,2
7	14,0	2,1	6,7
8	34,0	2,9	11,7
9	14,0	2,9	4,7
10	30,0	1,0	30,0
11	30,0	1,5	20,0
12	30,0	2,0	15,0

Как отмечалось выше, основой для определения вязкости и скорости скольжения служит экспериментально полученная зависимость расхода Q от давления P . На рис. 2.20 и 2.21 и в табл. 2.5 представлена информация для трех материалов: консистентной смазки (технический солидол), высоковязкой массы и ПВХ производства Германии (марка полимера *PVC-56359U*). Используя эти сведения и формулы (2.94) и (2.97), рассчитывались напряжения сдвига τ_R и скорость сдвига $\dot{\gamma}_0$, а затем строились графики $\tau_R = f(\dot{\gamma}_0)$ (рис. 2.22), которые позволяют судить о наличии пристенного скольжения и определить индекс течения n (рис. 2.23).

Для количественной оценки пристенного эффекта необходимо, чтобы все кривые $\tau_R = f(\dot{\gamma}_0)$, рассчитанные для различных радиусов капилляров, располагались в некотором общем диапазоне значений τ_R . В этом плане эксперименты, проведенные с ПВХ на экструзионном реометре, показали, что с помощью данного вискозиметра не удастся определить «истинную» кривую течения и скорость скольжения (см. рис. 2.22). По полученным результатам можно сделать только вывод о том, что ПВХ проявляет аномалию у стенки, т. е. проскальзывает (кривые $\tau_R = f(\dot{\gamma}_0)$ неинвариантны относительно радиуса капилляра).

Для количественной оценки пристенного эффекта необходимо, чтобы все кривые $\tau_R = f(\dot{\gamma}_0)$, рассчитанные для различных радиусов капилляров, располагались в некотором общем диапазоне значений τ_R . В этом плане эксперименты, проведенные с ПВХ на экструзионном реометре, показали,

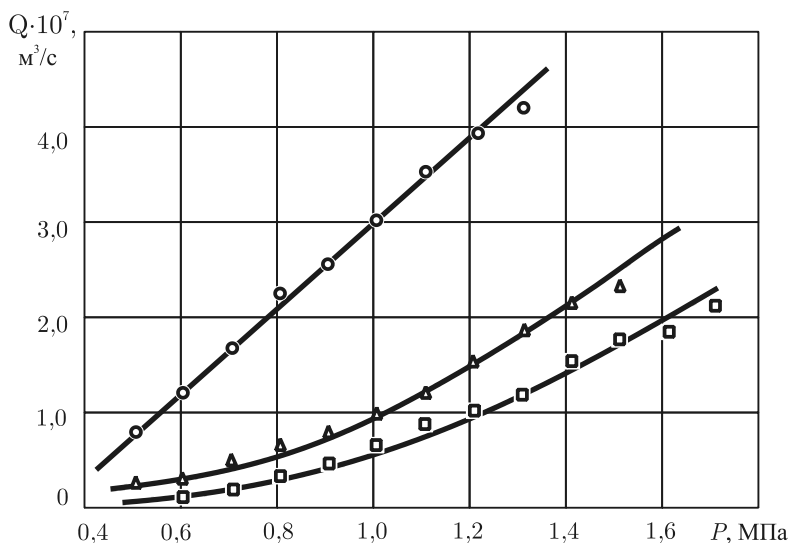


Рис. 2.20. Зависимость секундного расхода Q консистентной смазки от давления P :
 ○ — $R = 1,1$ мм; Δ — $R = 0,7$ мм; ◻ — $R = 0,55$ мм

что с помощью данного вискозиметра не удастся определить «истинную» кривую течения и скорость скольжения (см. рис. 2.22). По полученным результатам можно сделать только вывод о том, что ПВХ проявляет аномалию у стенки, т. е. проскальзывает (кривые $\tau_R = f(\dot{\gamma}_0)$ неинвариантны относительно радиуса капилляра).

Далее, согласно теории, строятся вспомогательные графики в координатах $Q/(\pi R^3 \tau_R)$ и τ_R . На рис. 2.24 приведены графики для консистентной смазки, которые в свою очередь служат основой для построения новых графиков в координатах $Q/(\pi R^3 \tau_R)$ и $1/R^{m_0+1}$ (рис. 2.25 и 2.26). Из последних графиков определяется «истинный» коэффициент скольжения β_s как тангенс угла наклона прямой при τ_R в качестве параметра.

Следует отметить, что только использование предложенного модифицированного метода позволило определить коэффициент скольжения β_s обоих исследованных материалов. Попытка применить при расчетах эффективной вязкости η и скорости скольжения v_s традиционный метод Д. Олдройда (метод М. Муни) оказалась безуспешной, так как для консистентной смазки и высоковязкой массы зависимость $Q/(\pi R^3 \tau_R)$ от $1/R$ нелинейная (см. штриховые кривые на рис. 2.26).

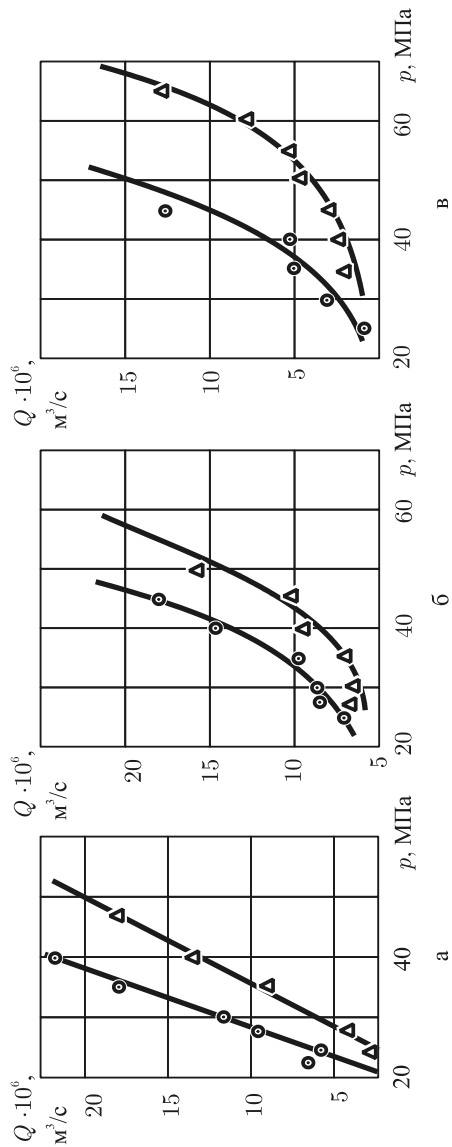


Рис. 2.21. Экспериментальная зависимость секундного расхода Q высоковязкой массы от давления P
а – $R = 2,9$ мм; б – $R = 2,1$ мм; в – $R = 1,1$ мм; Δ – $L_1 = 34$ мм; \circ – $L_2 = 14$ мм

Таблица 2.5.

Опытные данные по исследованию реологических свойств ПВХ

ω_0 рад/с	$R = 1 \text{ мм}$					$R = 1,5 \text{ мм}$					$R = 2,0 \text{ мм}$				
	M , Н·м	P , мПа	$Q \cdot 10^7$, м ³ /с	$\dot{\gamma}_0$, с ⁻¹	τ_R , Н·м	M , Н·м	P , мПа	$Q \cdot 10^7$, м ³ /с	$\dot{\gamma}_0$, с ⁻¹	τ_R , Н·м	M , Н·м	P , мПа	$Q \cdot 10^7$, м ³ /с	$\dot{\gamma}_0$, с ⁻¹	τ_R , Н·м
2,09	55,92	44,14÷45,13	2,830	360,1	0,744	45,13	22,56	3,763	141,9	0,564	49,05	9,52÷10,0	3,106	49,4	0,327
	59,84	44,14÷45,32	2,790	355,3	0,746	45,62	19,62	3,106	117,2	0,490	48,07	10,1÷10,50	3,220	51,2	0,343
2,62	55,92	46,6÷47,58	5,550	451,7	0,785	49,05	24,52	4,520	170,5	0,613	51,01	10,2÷10,89	3,902	62,1	0,352
	59,84	47,28÷48,26	3,485	443,7	0,799	47,58	22,76	3,952	149,1	0,569	50,05	10,3÷10,99	3,889	61,9	0,355
3,14	55,92	47,09÷48,56	4,242	540,2	0,797	50,52	25,31	5,139	193,9	0,633	48,56	10,89÷11,18	4,609	73,3	0,368
	57,88	48,07÷50,03	4,179	532,1	0,818	46,11	22,96	4,646	175,3	0,574	52,00	11,09÷11,48	4,482	71,3	0,376
3,66	56,90	48,07÷49,05	4,848	617,3	0,809	48,07	24,52÷25,7	5,354	202,0	0,628	54,94	10,79÷11,77	5,328	84,8	0,376
	54,94	48,26÷49,83	4,899	623,8	0,818	48,07	23,05÷24,52	5,328	201,0	0,595	50,03	10,99÷11,58	5,366	85,4	0,379
4,19	56,90	48,07÷49,83	5,442	692,9	0,816	48,07	25,3÷25,9	6,124	232,0	0,638	52,97	11,77÷12,07	6,010	95,7	0,397
	56,90	49,05÷50,03	5,404	688,1	0,827	48,07	23,74÷24,23	5,821	219,6	0,598	50,52	11,58÷12,36	5,960	94,8	0,392
4,71	57,88	49,05÷50,23	6,035	768,4	0,827	48,07	25,02÷25,7	6,818	257,2	0,634	51,01	11,77÷12,26	6,548	104,3	0,401
	59,35	49,54÷50,32	5,846	744,3	0,832	47,09	24,23÷28,74	6,591	248,6	0,598	51,50	12,07÷12,56	6,566	104,5	0,409
5,24	55,92	49,05÷50,03	6,345	853,6	0,826	46,56	25,8÷26,49	7,538	278,7	0,654	52,00	10,99÷12,36	7,121	113,3	0,386
	55,92	49,54÷50,03	6,465	823,1	0,830	46,60	24,72÷25,51	7,348	277,2	0,628	52,00	10,79÷11,58	7,121	113,3	0,372
5,76	57,88	47,09÷49,853	7,222	919,6	0,814	49,05	26,3÷28,78	8,018	302,5	0,662	52,97	11,18÷11,38	7,347	116,9	0,376
	57,88	43,05÷50,03	7,121	906,7	0,826	47,09	24,05÷25,31	7,967	300,6	0,619	52,00	10,20÷11,75	7,475	119,0	0,355

Здесь ω_0 – скорость вращения шнека; M – момент на валу

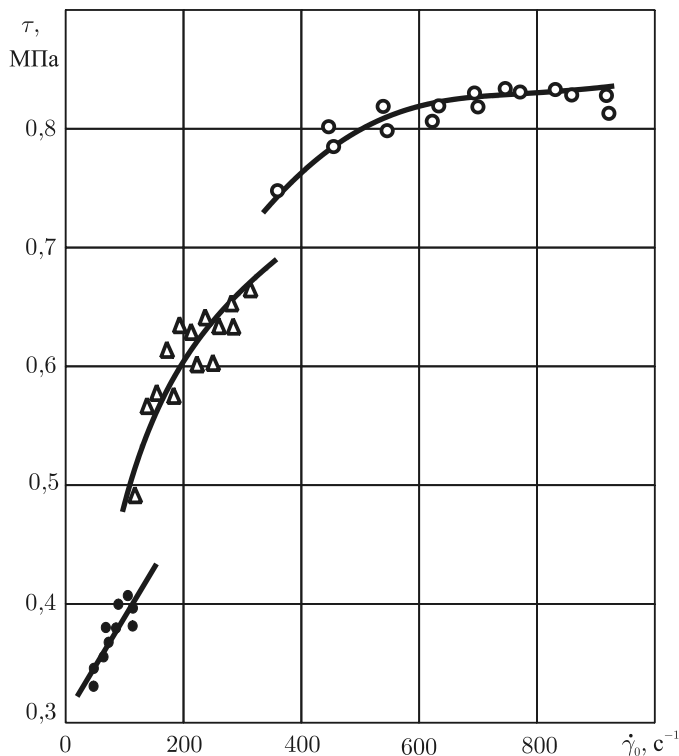


Рис. 2.22. Зависимость напряжения сдвига τ от скорости сдвига $\dot{\gamma}_0$ для ПВХ: Δ — $R = 1,5$ мм; \circ — $R = 1$ мм; \bullet — $R = 2$ мм

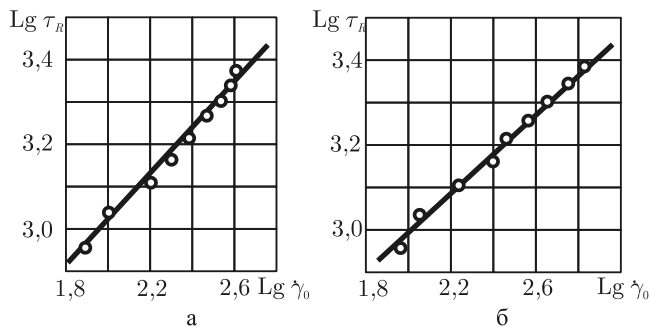


Рис. 2.23. Графики для определения индекса течения n консистентной смазки: а — $R = 1,1$ мм, $n = 0,55$; б — $R = 0,7$ мм, $n = 0,48$

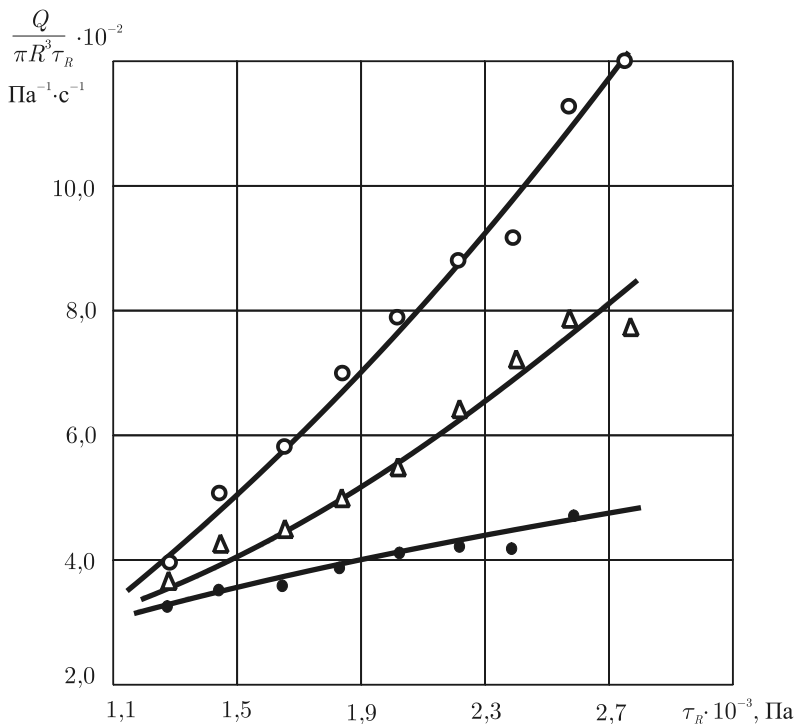


Рис. 2.24. Вспомогательный график для расчета «истинной» кривой течения консистентной смазки и скорости скольжения v_s : \circ — $R=0,55$ мм; Δ — $R=0,7$ мм; \bullet — $R=1,1$ мм

На рис. 2.27 показана зависимость коэффициента скольжения β_s от напряжения сдвига τ_R на стенке. Путем экстраполяции кривой $\beta_s = \beta_s(\tau_R)$ до значения $\beta_s = 0$ определяется напряжение сдвига τ_s , при котором начинается скольжение материала по поверхности капилляра. Подставляя теперь найденную зависимость β_s от τ_R и значение радиуса капилляра в выражение (2.92), можно рассчитать величину скорости скольжения v_s .

Другим не менее важным результатом проведенных исследований является определение «истинных» кривых течения консистентной смазки и высоковязкой массы, которые вместе с так называемыми «кажущимися» кривыми течения изображены на рис. 2.28 и 2.29. Сравнение кривых течения наглядно показывает значительную роль пристенных эффектов для изученных материалов, пренебрежение которыми может приводить к ошибкам в определении вязкости на 1–2 порядка (см. рис. 2.29).

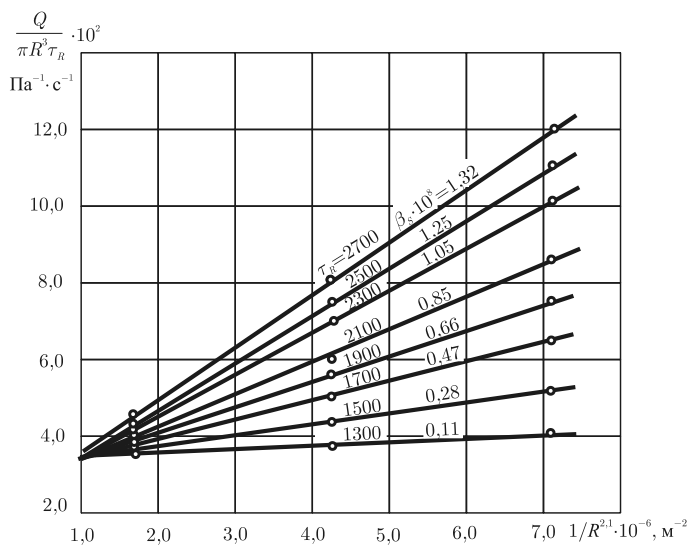


Рис. 2.25. График для определения коэффициента скольжения β консистентной смазки

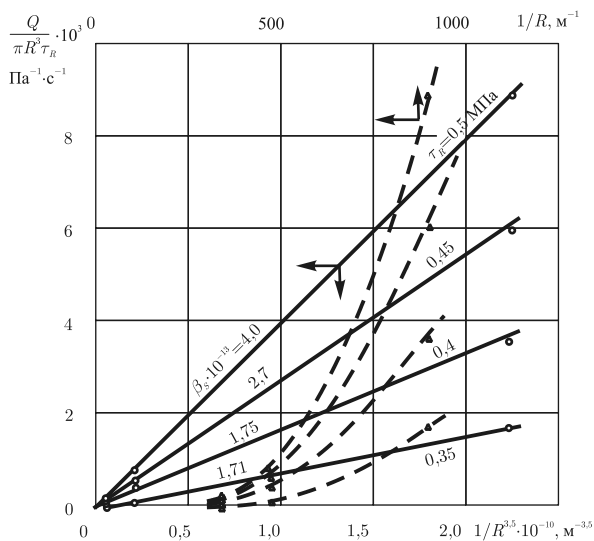


Рис. 2.26. График для определения коэффициента скольжения β_s высоковязкой массы: — — предложенный метод; - - - метод Олдройда

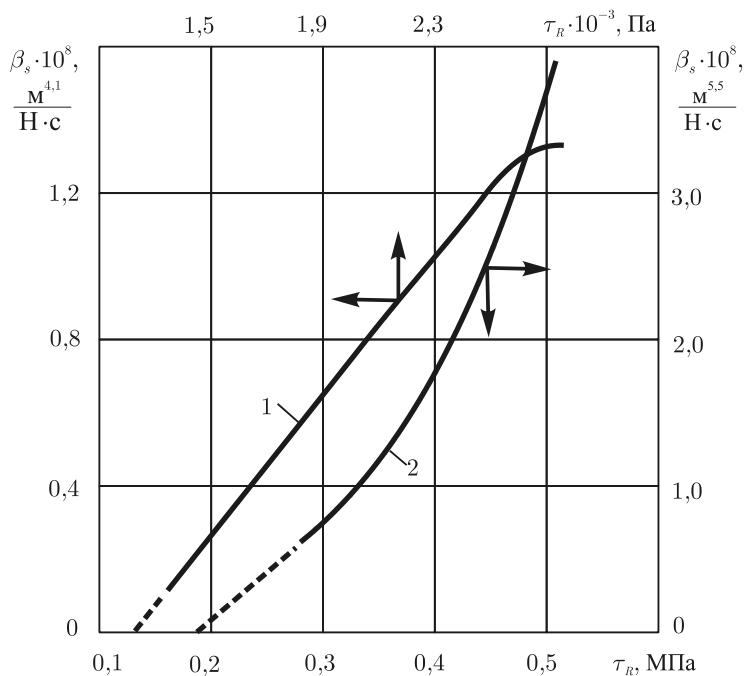


Рис. 2.27. Зависимость коэффициента скольжения β_s от напряжения сдвига τ_R на стенке: 1 — консистентная смазка; 2 — высоковязкая масса

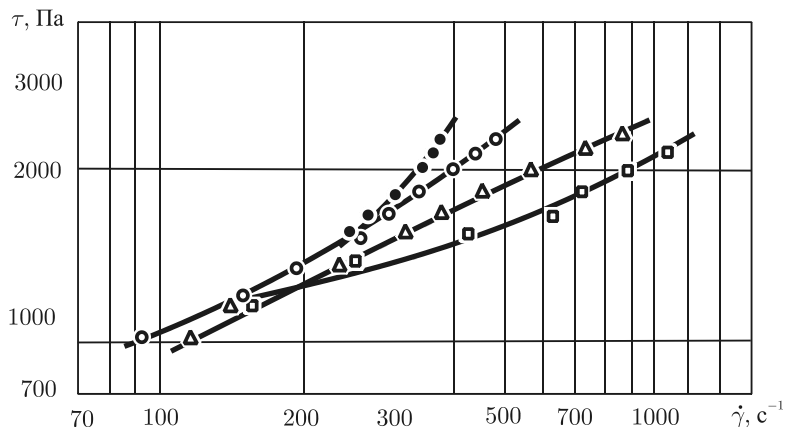


Рис. 2.28. Логарифмическая зависимость напряжения сдвига τ от скорости сдвига $\dot{\gamma}$ для консистентной смазки: \circ — $R = 1,1$ мм; Δ — $0,7$ мм; \square — $0,55$ мм

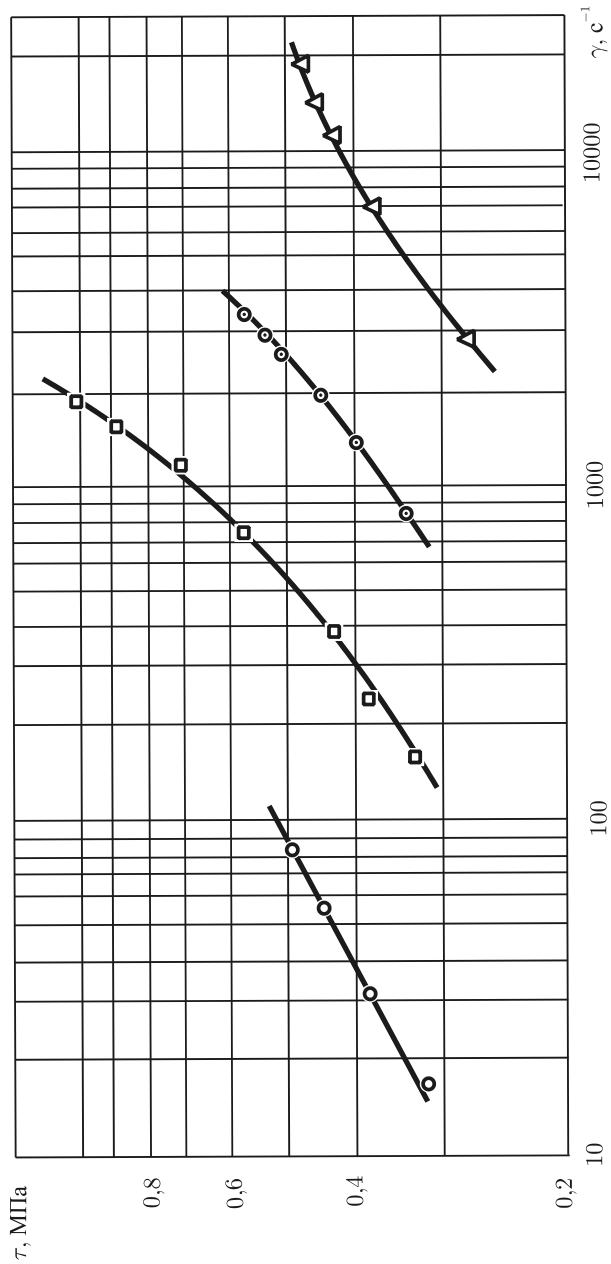


Рис. 2.29. Логарифмическая зависимость напряжения сдвига τ от скорости сдвига $\dot{\gamma}$ для капилляров различных радиусов при течении высоковязкой массы: \odot — истинная кривая течения; \blacksquare — $R = 2.9 \text{ мм}$; \odot — 2.1 мм ; \blacktriangle — 1.1 мм

Глава 3

ПОЛУЧЕНИЕ СУСПЕНЗИЙ ПОЛИМЕРОВ И РАЗЛИЧНЫХ ДОБАВОК

Аппаратурное оформление процессов

Рассмотрим процесс получения прядельного раствора в производстве волокна (нитрона) по водно-диметилформамидному способу (рис. 3.1). Порошкообразный полимер из бункера 1 автоматическим весовым дозатором 2 подается в объемный питатель 3, а затем в загрузочное устройство 4 и бак-суспензатор 7. Диметилформамид из емкости 5 дозирующим насосом 6 также подается в загрузочное устройство 4. Насос 3 обеспечивает циркуляцию суспензии через загрузочное устройство и бак-суспензатор, что улучшает условия перемешивания и способствует получению более однородного продукта, а также подает суспензию в растворитель непрерывного действия 9, где происходит превращение суспензии в раствор. После растворителя непрерывного действия установлен дозирующий насос 10, с помощью которого создается объемная производительность растворителя 9. Далее готовый раствор поступает в прядельный бак 11, затем насосом 10 подается на фильтр 12 и эвакуатор 13. Готовый обезвоздушенный раствор насосом направляется на формование.

При выпуске окрашенного в массу волокна перед формованием производят смешение пасты красителя с прядельным раствором. Эта операция производится следующим образом. Пасту красителя, приготовленную в специальной аппаратуре, дозирующим насосом в строгом соотношении с блестящим прядельным раствором направляют в смеситель непрерывного действия, где происходит интенсивное перемешивание и гомогенизация продукта, затем окрашенный прядельный раствор фильтруют и отправляют на формование.

Схема получения прядельного раствора поливинилхлорида в диметилформамиде практически не отличается от приведенной выше. Отличие состоит только в конструкции загрузочного устройства 4 и в отсутствии циркуляционного контура суспензии через бак-суспензатор 7. Кроме того, поскольку суспензия поливинилхлорида в диметилформамиде при низких

температурах имеет небольшую вязкость, то поступает из бака-суспензатора 7 в растворитель 9 самотеком, а насос 8 в схеме отсутствует.

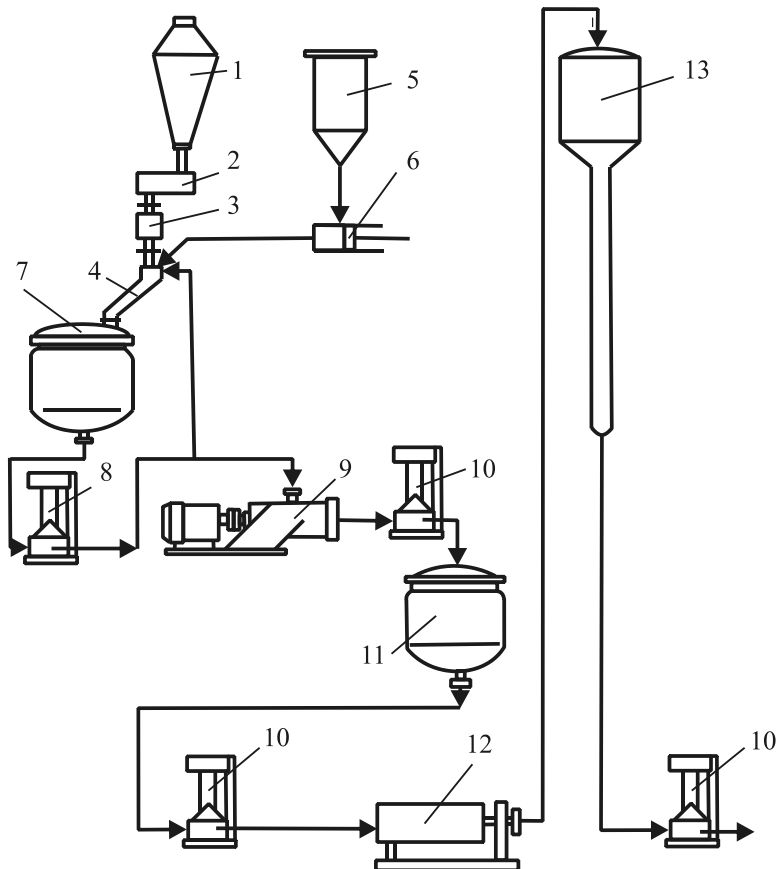


Рис. 3.1. Схема установки непрерывного получения прядильных растворов полиакрилонитрила в диметилформамиде:

- 1 – бункер полимера; 2 – дозатор полимера; 3 – объемный питатель;
 4 – загрузочное устройство; 5 – бак для диметилформамида;
 6 – дозирующий насос; 7 – бак-суспензатор; 8 – объемный насос;
 9 – аппарат для непрерывного растворения полимеров; 10 – дозирующий насос; 11 – прядильный бак; 12 – фильтр; 13 – эвакуатор

Специальные загрузочные устройства при получении суспензий полимеров и различных порошкообразных добавок необходимы для того, что-

бы избежать обильного пыления порошкообразных продуктов и засорения ими неомываемых поверхностей аппарата, и в получении гомогенных (без комков) суспензий.

Поскольку различные суспензии отличаются между собой по вязкости, липкости, концентрации, по времени набухания полимеров и ряду других свойств, то загрузочные устройства приходится в каждом конкретном случае выбирать отдельно. Единых процессов и оборудования для суспензирования всех видов полимеров и добавок к волокнам не существует.

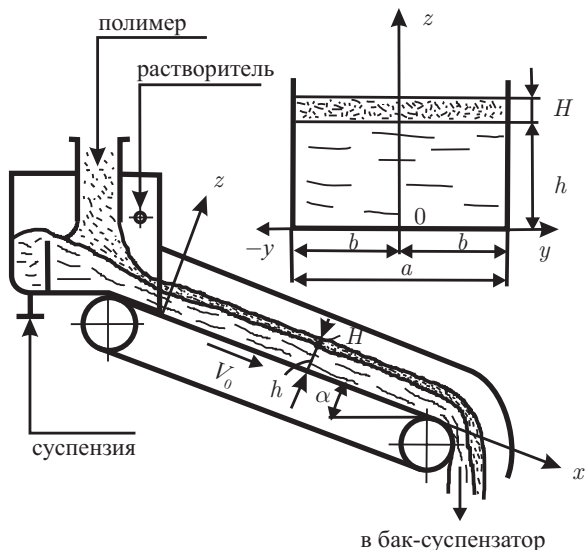


Рис. 3.2. Схема загрузочного устройства в виде открытого окна

На рис. 3.2 приведена схема загрузочного устройства, применяемого при получении суспензии полиакриланитрила в диметилформамиде. Суспензия полимера из бака-суспензатора подается в нижний штуцер загрузочного устройства, а затем стекает по наклонному днищу. На зеркало суспензии наносится тонким слоем полимер, который сверху опрыскивается растворителем. Набухший полимер вместе с суспензией стекает в бак-суспензатор, где интенсивно перемешивается. Подобное устройство не образует пыли и сводов в баке-суспензаторе, поэтому установка работает стабильно длительное время. В принципе при переработке суспензий высокой вязкости днище у лотка можно сделать и подвижным, как показано на рис. 3.2, однако конструктивно выполнить такое загрузочное устройство непросто по причине необходимости уплотнения его боковых граней.

На рис. 3.3, а–е приведены различные схемы загрузочных устройств для предварительного распределения порошкообразных продуктов (поли-

меров, красителей, пигментов, наполнителей и т. д. с растворителем, раствором или расплавом полимера). Схема устройства, изображенная на рис. 3.3, б, используется при получении суспензии поливинилхлорида в диметилформамиде, устройство на рис. 3.3, в — при смешении красителя с прядильным раствором, а устройства рис. 3.3, д, е — при смешении расплавов и растворов полимеров с различными добавками.

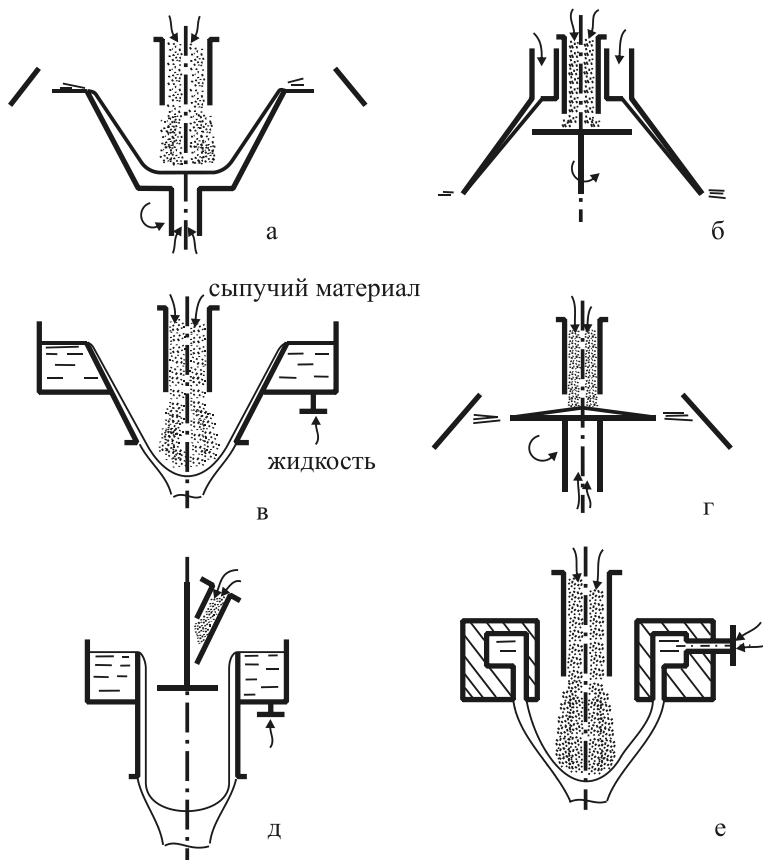


Рис. 3.3. Схемы загрузочных устройств баков-суспензаторов

Нет необходимости останавливаться подробно на весовых дозаторах сыпучих веществ и дозаторах жидких компонентов, поскольку конструкции и методы их расчета широко известны. Например, анализ весовых дозаторов, области их применения и особенности их конструкций приведены

в литературе [85–91], а сведения более чем о шестистах весоизмерительных устройствах — в работе [92].

Течение жидкости в открытом прямоугольном канале

Рассмотрим изотермическое установившееся течение суспензии полимера в прямоугольном открытом лотке [93], наклоненном под углом α к горизонту (рис. 3.2). Ось x направим вдоль канала, z — по глубине лотка, а y — поперек его. Ширину лотка обозначим $a = 2b$, высоту слоя суспензии — h , а высоту слоя полимера — H .

При рассмотрении задачи будем считать, что боковые стенки лотка неподвижны, а дно лотка движется в направлении оси x с постоянной скоростью V_0 , которая практически в данном частном случае равна нулю. Вследствие небольших градиентов скоростей вязкость суспензии будем считать постоянной величиной.

Уравнение движения в проекции на ось x имеет вид (см. уравнение 2.13, а):

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial^2 z} = \frac{\rho g}{\mu} \sin \alpha, \quad (3.1)$$

где ρ — плотность суспензии; g — ускорение силы тяжести.

Граничные условия задачи следующие:

$$v_x(\pm b, z) = 0; \quad \frac{\partial v_x}{\partial z}(y, h) = 0; \quad v_x(y, 0) = V_0. \quad (3.2)$$

Решение уравнения (3.1) будем искать в виде:

$$v_x(y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} v(z) \cos\left(\frac{1+2n}{2b} y\right); \quad (3.3)$$

$$v(z) = A_n \operatorname{ch}\left(\frac{1+2n}{2b} \pi z\right) + B_n \operatorname{sh}\left(\frac{1+2n}{2b} \pi z\right) - \frac{16cb^2(-1)^n}{\pi^3(1+2n)^3}, \quad (3.4)$$

где $c = -(\rho g / \mu) \sin \alpha$.

Уравнение (3.3) удовлетворяет первому граничному условию (3.2). Для удовлетворения уравнения (3.4) третьему граничному условию (3.9) разложим V_0 в ряд Фурье по косинусам:

$$v_x(y, 0) = V_0 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{1+2n}{2b} \pi y\right) \quad (3.5)$$

и вычислим коэффициенты ряда в промежутке $-b \leq y \leq b$:

$$C_n = \frac{1}{b} \int_{-b}^b V_0 \cos\left(\frac{1+2n}{2b} \pi y\right) dy = \frac{4V_0}{\pi} \frac{(-1)^n}{1+2n}. \quad (3.6)$$

Постоянные коэффициенты A_n и B_n определим из уравнения (3.4), используя выражение (3.6) и второе граничное условие (3.2):

$$A_n = \frac{16cb^2}{\pi^3} \frac{(-1)^n}{(1+2n)^3} + \frac{(-1)^n}{1+2n} \frac{4V_0}{\pi}; \quad (3.7)$$

$$B_n = -\left[\frac{(-1)^n}{(1+2n)^3} \frac{16cb^2}{\pi^3} + \frac{(-1)^n}{1+2n} \frac{4V_0}{\pi} \right] \operatorname{th}\left(\frac{1+2n}{2b} \pi h\right). \quad (3.8)$$

Подставляя в (3.3) выражения (3.4), (3.7) и (3.8), окончательно получим формулу для определения скорости суспензии:

$$\begin{aligned} v_x = & \frac{4}{\pi} V_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+2n} \frac{\operatorname{ch}\left[\frac{1+2n}{2b} \pi(h-z)\right]}{\operatorname{ch}\left(\frac{1+2n}{2b} \pi h\right)} \cos\left(\frac{1+2n}{2b} \pi y\right) + \\ & + \frac{16cb^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+2n)^3} \left[\frac{\operatorname{ch}\left[\frac{1+2n}{2b} \pi(h-z)\right]}{\operatorname{ch}\left(\frac{1+2n}{2b} \pi h\right)} - 1 \right] \cos\left(\frac{1+2n}{2b} \pi y\right). \quad (3.9) \end{aligned}$$

Из формулы (3.9) следует, что при $y = \pm b$ $v_x = 0$, а при $z = y = 0$ $v_x = V_0$.

Уравнение для определения расхода суспензии полимера можно записать так:

$$Q_c = 2 \int_0^h \int_0^b v_x dz dy. \quad (3.10)$$

Подставляя в уравнение (3.10) значение v_x из формулы (3.9) и интегрируя, приходим к выражению

$$Q_c = \frac{32V_0b^2}{\pi^3} \varphi_1(k) + \frac{\alpha^4 \rho g \sin \alpha}{\mu} \varphi_2(k), \quad (3.11)$$

где

$$\varphi_1(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+2n)^3} \operatorname{th}[(1+2n)\pi k]; \quad (3.12)$$

$$\varphi_2 = \frac{k}{12} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+2n)^5} \operatorname{th}[(1+2n)\pi k]; \quad k = \frac{h}{2b}. \quad (3.13)$$

Производительность загрузочного устройства по полимеру можно определить следующим образом:

$$Q_n = 2H \int_0^b v_x \Big|_{z=h} dy. \quad (3.14)$$

Скорость суспензии полимера на зеркале получим из выражения (3.9) при $z = h$:

$$v_x \Big|_{z=h} = \frac{4}{\pi} V_0 \varphi_3(k, \delta) + \frac{16\rho g b^2 \sin \alpha}{\pi^3 \mu} \varphi_4(k, \delta). \quad (3.15)$$

Здесь

$$\varphi_3(k, \delta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+2n} \frac{\cos\left(\frac{1+2n}{2}\pi\delta\right)}{\operatorname{ch}[\pi k(1+2n)]}; \quad (3.16)$$

$$\varphi_4(k, \delta) = \sum \frac{(-1)^n}{1+2n} \left\{ 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}[\pi k(1+2n)]} \right\} \cos\left(\frac{1+2n}{2}\pi\delta\right); \quad (3.17)$$

$$\delta = y/b.$$

Подставляя выражения (3.15) в (3.14) и интегрируя полученное, будем иметь:

$$Q_n = \frac{16bV_0H}{\pi^2} \varphi_5(k) + \frac{\rho g H^3 \sin \alpha}{\pi \mu} \left[\frac{\pi}{12} - \varphi_6(k) \right], \quad (3.18)$$

где

$$\varphi_5(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+2n)^3} \frac{1}{\operatorname{ch}[\pi k(1+2n)]}, \quad (3.19)$$

$$\varphi_6(k) = \frac{8}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+2n)^4} \frac{1}{\operatorname{ch}[\pi k(1+2n)]}. \quad (3.20)$$

Зависимости безразмерных комплексов $\varphi_1(k)$, $\varphi_2(k)$, $\varphi_5(k)$ и $\varphi_6(k)$ от безразмерного соотношения $k = h/a$ приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1.

Зависимость величин $\varphi_1(k)$, $\varphi_2(k)$, $\varphi_5(k)$ и $\varphi_6(k)$ от соотношения $k = h/a$

$k = h/a$	$\varphi_1(k)$	$\varphi_2(k)$	$\varphi_5(k)$	$\varphi_6(k)$
3,0	0,968946	0,223739	0,000161	0,000042
2,0	0,968939	0,140407	0,003735	0,000964
1,0	0,965218	0,057171	0,068249	0,022258
0,8	0,955909	0,040747	0,160831	0,041531
0,5	0,886104	0,017572	0,400564	0,102885
0,3	0,705562	0,005633	0,690473	0,174952
0,2	0,527480	0,001995	0,867625	0,215285
0,15	0,412149	0,000913	0,853648	0,233344
0,1	0,282327	0,000292	0,889973	0,248132

Безразмерные комплексы $\varphi_3(k, \delta)$ и $\varphi_4(k, \delta)$ представляют собой безразмерную скорость на зеркале лотка при $\alpha = 0$ и $V_0 = 0$ соответственно. Действительно, положив в (3.15) $\alpha = 0$ и $V_0 = 0$, получим:

$$\varphi_3(k, \delta) = \frac{\pi}{4V_0} v_x|_{z=h}; \quad \varphi_4(k, \delta) = \frac{\pi^3 \mu}{16gb^2 \rho \sin \alpha} v_x|_{z=h}. \quad (3.21)$$

Зависимость безразмерных комплексов $\varphi_3(k, \delta)$ и $\varphi_4(k, \delta)$ от безразмерной ширины канала $\delta = y/b$ и $k = h/a$ представлена на рис. 3.4. Из рисунка следует, что в центре канала ($\delta = 0$) скорость суспензии максимальна, а на стенках его ($\delta = 1$) равна нулю. С увеличением k (с уменьшением толщины слоя суспензии), как и следовало ожидать, величина $\varphi_3(k, \delta)$ уменьшается, а $\varphi_4(k, \delta)$ возрастает.

На рис. 3.5 в качестве примера построены профили скоростей v_x для случаев, когда дно лотка неподвижно (см. рис. 3.4, *а, б*) и движется со скоростью $V_0 = 0,04$ м/с (см. рис. 3.4, *в, г*). Расчетные значения параметров были следующие: $a = 2b = 0,1$ м, $h = 0,05$ м/с, $\alpha = 45^\circ$, $\rho = 970$ кг/м³, $\mu = 41$ Па·с. Из сопоставления рис. 3.5, *а* и рис. 3.5, *в* видно, что скорость суспензии на зеркале в случае течения с неподвижным дном меньше, чем в случае течения с подвижным дном, но разница в этих скоростях меньше, чем величина V_0 . Наибольшая разница в скоростях —

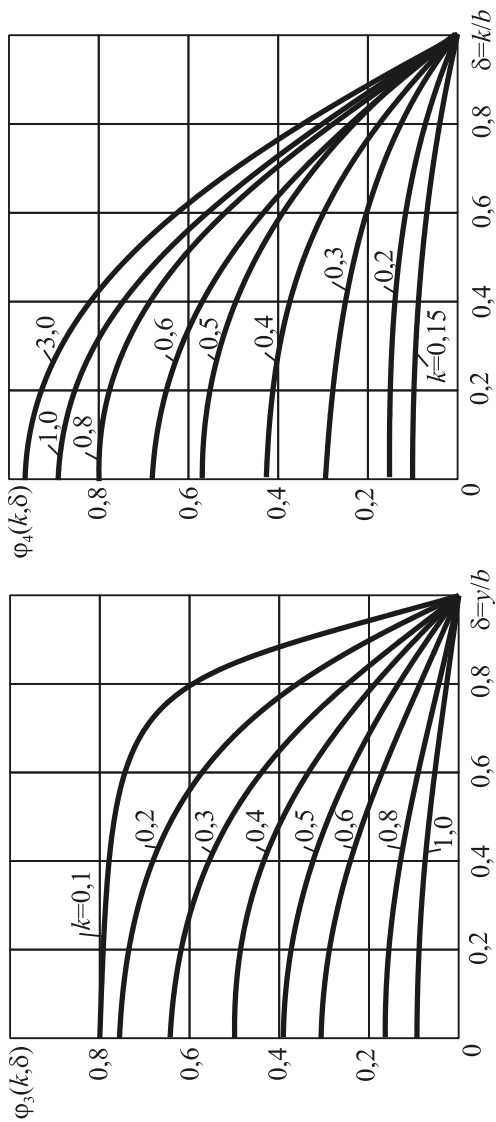


Рис. 3.4. Зависимость безразмерных комплексов $\varphi_3(k, \delta)$ и $\varphi_4(k, \delta)$ от величины δ и параметра k (цифры у кривых)

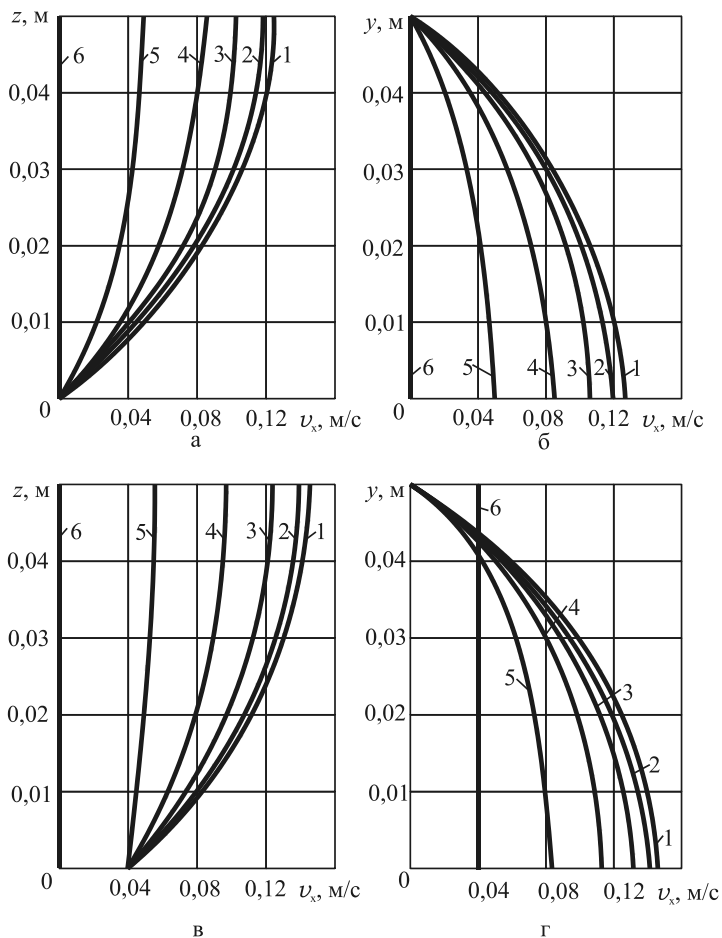


Рис. 3.5. Профили скоростей v_x для случая, когда дно лотка неподвижно (а, б) и движется со скоростью 0,04 м/с:

а, в) 1 – $y = 0$; 2 – 0,01; 3 – 0,02; 4 – 0,03; 5 – 0,04; 6 – 0,05;

б, г) 1 – $z = 0,05$; 2 – 0,04; 3 – 0,03; 4 – 0,02; 5 – 0,01; 6 – 0

в центре лотка ($y=0$), затем с увеличением y последняя убывает, доходя до нуля на боковых стенках лотка.

Положив в полученных выражениях $V_0 = 0$, получим формулы для случая, когда дно лотка неподвижно.

Экспериментальная часть работы по проверке уравнений, описывающих течение суспензии полимера в загрузочном устройстве, прово-

дилась на установке по производству полиакрилонитрильного волокна (см. рис. 3.1). В качестве рабочей жидкости использовалась суспензия полиакрилонитрила в диметилформамиде (ПАН в ДМФ) различной вязкости. Вязкость суспензии изменялась за счет ее подогрева в баке-сенсизаторе.

Лоток с неподвижным дном имел следующие размеры (см. рис. 3.2): $a = 0,095$ м; L (длина лотка) = 1 м; $\alpha = 45^\circ$. Плотность суспензии при 20°C составляла 970 кг/м^3 , а зависимость ее от температуры не учитывалась. Лоток был изготовлен из нержавеющей стали 12Х18Н10Т с полированной внутренней поверхностью.

В баке для суспензии 7 (см. рис. 3.1) приготавливалась суспензия ПАН в ДМФ. После включения насоса 8 суспензия подавалась в лоток (растворитель был отключен). В процессе эксперимента измеряли температуру суспензии, а следовательно, и ее вязкость, толщину слоя суспензии и скорость ее на зеркале в центре лотка. Зависимость вязкости суспензии от температуры измерялась с помощью вискозиметра Гепплера.

Экспериментальные и расчетные данные приведены в табл. 3.2. Скорость на зеркале в центре лотка и расход суспензии рассчитывались по формулам (3.15) и (3.11). Из таблицы видно, что теоретические и экспериментальные данные находятся в удовлетворительном соответствии.

Таблица 3.2.

Сравнение теории с экспериментом при течении суспензии полимера в лотке загруженного устройства

N опыта	Экспериментальные данные					Теоретические результаты			
	$Q_3 \cdot 10^4$ м ³ /с	$v_3 \cdot 10^2$ м/с	$h \cdot 10^2$ м	T °C	μ_0 Па · с	$Q_3 \cdot 10^4$ м ³ /с	$v_3 \cdot 10^2$ м/с	$Q_3 - Q_T$ Q_T ·100%	$v_3 - v_T$ v_T ·100%
								%	%
1	1,156	5,88	3,5	30	40,7	1,290	7,4	-10,4	-20,20
2	1,160	5,67	3,5	31	39,5	1,270	7,2	-8,3	-21,20
3	0,565	3,85	2,4	29	42,0	0,475	4,1	18,4	-6,20
4	0,869	5,27	2,9	30	40,7	0,756	5,7	14,7	-7,55
5	0,688	4,68	2,6	30	40,7	0,539	4,7	16,0	-0,42
6	0,522	3,61	2,4	30	40,7	0,482	4,2	8,3	-14,00
7	1,081	5,27	3,2	28	44,0	0,950	6,7	13,7	-21,40
8	1,081	5,56	3,3	27	45,5	0,980	6,8	10,6	-18,30
9	0,280	2,36	1,9	27	45,5	0,239	2,56	17,4	-7,70
10	0,780	5,27	3,0	28	44,0	0,765	5,3	1,95	-5,65
11	1,310	6,13	3,1	47	24,5	1,509	8,1	-12,9	-24,60
12	0,882	7,50	2,3	57	17,2	0,990	8,75	-10,7	-14,20
13	1,102	8,33	2,3	53	20,7	0,870	7,7	25,0	8,20
14	0,527	5,00	1,9	50	22,5	0,480	5,2	9,7	-3,84

Таблица 3.2 (продолжение).

N опыта	$Q_{\text{э}} \cdot 10^4$ м ³ /с	$v_{\text{э}} \cdot 10^2$ м/с	$h \cdot 10^2$ м	T °C	μ_0 Па · с	$Q_{\text{э}} \cdot 10^4$ м ³ /с	$v_{\text{э}} \cdot 10^2$ м/с	$Q_{\text{э}} - Q_{\text{т}}$	$v_{\text{э}} - v_{\text{т}}$
								$\frac{Q_{\text{т}}}{Q_{\text{э}}} \cdot 100\%$	$\frac{v_{\text{т}}}{v_{\text{э}}} \cdot 100\%$
15	1,105	8,83	2,4	55	19,5	1,010	8,84	9,4	-1,13
16	1,105	9,08	2,3	56	19,0	0,946	8,4	6,25	8,10
17	1,105	9,08	2,3	57	18,2	0,990	8,75	5,05	2,63
18	1,105	83,11	2,2	56	19,0	0,862	7,83	28,0	9,70
19	1,156	7,13	2,4	53	20,7	0,950	8,33	21,0	14,40
20	0,283	3,09	1,5	52	21,2	0,283	3,7	0,0	16,40

Течение жидкости по поверхности вращающегося конуса

Рассмотрим ламинарное установившееся течение жидкости в загрузочном устройстве, представленном на рис. 3.3, *a* (расчетная схема — рис. 3.6, *a*). Ось l направим по образующей конуса, а ось x — перпендикулярно образующей. Текущий радиус конуса обозначим через r , толщину слоя жидко-

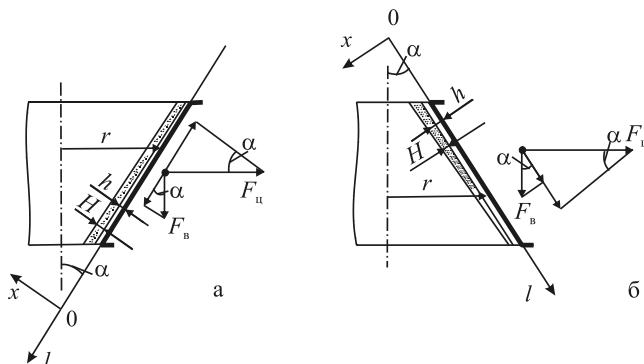


Рис. 3.6. Расчетные схемы загрузочных устройств с вращающимся конусом

сти — через h , а угол раскрытия конуса — через α . Конус вращается с постоянной скоростью ω_0 . Будем интересоваться только течением жидкости вдоль образующей конуса, пренебрегая течением в направлении вращения.

На единицу объема жидкости массой m в направлении радиуса r действует центробежная сила $F_y = mr\omega_0^2$, а в направлении оси вращения конуса — сила веса $F_g = \rho g$. Проекции сил F_y и F_g на ось l направлены в раз-

ные стороны, тогда, учитывая, что $m / \rho = 1$, уравнение движения в проекции на ось l запишется так:

$$\frac{d\tau_{lx}}{dx} = A, \quad (3.22)$$

где $A = \rho(g \cdot \cos \alpha - \omega_0^2 l \cdot \sin^2 \alpha)$.

В качестве реологического уравнения для жидкости используем нелинейное уравнение вязкопластичной жидкости (2.71), которое для нашего конкретного случая течения ($\dot{\gamma} \geq 0$) будет иметь вид:

$$\tau = \tau_0 + B \left(\frac{dv_l}{dx} \right)^n. \quad (3.23)$$

Граничные условия задачи следующие:

$$\tau_{lx} = 0 \text{ при } x = h; \quad v_l = 0 \text{ при } x = 0. \quad (3.24)$$

Интегрируя уравнение (3.22) с учетом первого граничного условия (3.24), получим

$$\tau_{lx} = A(h - x). \quad (3.25)$$

Подставляя уравнение (3.25) в (3.23) и интегрируя полученное уравнение по x с использованием второго граничного условия (3.24), получим выражение для определения профиля скорости жидкости в направлении оси l :

$$v_l = \frac{n}{n+1} \left(\frac{A}{B} \right)^{\frac{1}{n}} \left[\left(h - \frac{\tau_0}{A} \right)^{\frac{n+1}{n}} - \left(h - x - \frac{\tau_0}{A} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right]. \quad (3.26)$$

Следует отметить, что особенностью вязкопластической жидкости является то, что она может течь только в том случае, когда касательные напряжения τ_{lx} будут больше начального предела текучести τ_0 или равны ему. Если же $\tau_{lx} < \tau_0$, то эта жидкость ведет себя как твердое тело, подчиняющееся закону Гука. Поскольку на свободной поверхности $\tau_{lx} = 0$, то вблизи нее образуется упругая зона. Координата упругой зоны x_0 легко определяется из уравнения (3.25) путем подстановки в него условия $\tau_{lx} = \tau_0$ (рис. 3.7):

$$x_0 = h - \frac{\tau_0}{A}. \quad (3.27)$$

Толщина упругой зоны ядра будет

$$h - x_0 = h - h + \frac{\tau_0}{A} = \frac{\tau_0}{A}. \quad (3.28)$$

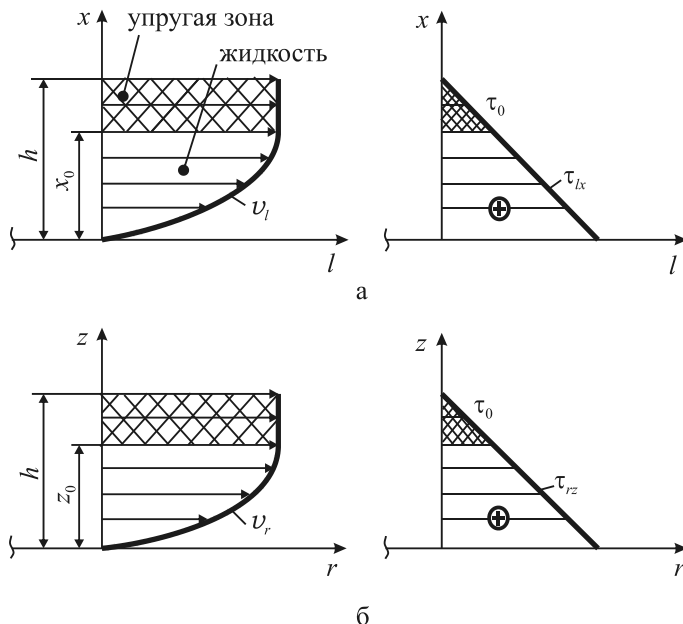


Рис. 3.7. Профиль скорости и эпюра касательных напряжений при течении жидкости по поверхности вращающихся конуса (а) и диска (б)

Скорость упругого ядра на зеркале жидкости получаем из уравнения (3.26) при $x = x_0$:

$$v_l|_{x=x_0} = \frac{n}{1+n} \left(\frac{A}{B} \right)^{\frac{1}{n}} \left(h - \frac{\tau_0}{A} \right)^{\frac{1+n}{n}}. \quad (3.29)$$

Расход жидкости по поверхности вращающегося конуса определится так:

$$\begin{aligned} Q_l &= 2\pi r \left[\int_0^{x_0} v_l dx + v_l|_{x=x_0} (h - x_0) \right] = \\ &= \frac{2n}{1+n} \pi l \left(\frac{A}{B} \right)^{\frac{1}{n}} \left(h - \frac{\tau_0}{A} \right)^{\frac{1+n}{n}} \left[\frac{1+n}{1+2n} \left(h - \frac{\tau_0}{A} \right) + \frac{\tau_0}{A} \right] \sin \alpha. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Расходом жидкости Q_l , как правило, задаются, тогда по уравнению (3.30) можно найти толщину пленки жидкости h при любом l . В данном случае величина h в явном виде из уравнения (3.30) не определяется.

Зная скорость жидкости на зеркале и задавшись расходом сыпучего материала Q_c , несложно определить его толщину H при произвольном значе-

нии величины l :

$$H = \frac{Q_c}{2\pi r v_l|_{x=x_0}} = \frac{1+n}{2n} \left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{Q_c}{\pi l \left(h - \frac{\tau_0}{A}\right)^{\frac{n+1}{n}} \sin \alpha}. \quad (3.31)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи полученного решения задачи.

При $n = 1$ получим формулы для течения жидкости Бингама, подчиняющейся реологическому уравнению (2.70):

$$v_l = \frac{A}{2\mu} \left[\left(h - \frac{\tau_0}{A} \right)^2 - \left(h - x - \frac{\tau_0}{A} \right)^2 \right]; \quad (3.32)$$

$$Q_l = \frac{\pi l A}{3\mu} \left(h - \frac{\tau_0}{A} \right)^2 \left(2h + \frac{\tau_0}{A} \right) \sin \alpha; \quad (3.33)$$

$$v_l|_{x=x_0} = \frac{A}{2\mu} \left(h - \frac{\tau_0}{A} \right)^2; \quad (3.34)$$

$$H = \frac{\mu}{A} \frac{Q_c}{\pi l \left(h - \frac{\tau_0}{A} \right)^2 \sin \alpha}. \quad (3.35)$$

При $\tau_0 = 0$ получим формулы для течения жидкости, подчиняющейся степенному реологическому закону (2.72):

$$v_l = \left(\frac{A}{B}\right)^{1/n} \frac{n}{1+n} \left[h^{\frac{1+n}{n}} - (h-x)^{\frac{1+n}{n}} \right]; \quad (3.36)$$

$$Q_l = \frac{2n}{1+2n} \pi l \left(\frac{A}{B}\right)^{1/n} h^{\frac{1+2n}{n}} \sin \alpha; \quad (3.37)$$

$$v_l|_{x=h} = \frac{n}{1+n} \left(\frac{A}{B}\right)^{1/n} h^{\frac{1+n}{n}}; \quad (3.38)$$

$$h = \left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{1+2n}} \left(\frac{1+2n}{2n} \frac{Q_l}{\pi l \sin \alpha} \right)^{\frac{n}{1+2n}}; \quad (3.39)$$

$$H = \frac{1+n}{2n} \left(\frac{B}{A}\right)^{1/n} \frac{Q_c}{\pi l h^{\frac{1+n}{n}} \sin \alpha}. \quad (3.40)$$

При $\tau_0 = 0$ и $n = 1$ получим формулы, описывающие течение жидкости Ньютона:

$$v_l = \frac{A}{2\mu} (2h - x) x; \quad (3.41)$$

$$Q_l = \frac{2}{3} \pi l \frac{A}{\mu} h^3 \sin \alpha; \quad (3.42)$$

$$v_l|_{x=h} = \frac{A}{2\mu} h^2; \quad (3.43)$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{Q_l}{\pi l A \sin \alpha}}; \quad (3.44)$$

$$H = \frac{\mu}{A} \frac{Q_c}{\pi h^2 \sin \alpha}. \quad (3.45)$$

Положив в выражениях (3.25)–(3.45) $\omega_0 = 0$ (ω_0 входит в величину A), получим соответствующие выражения для случая неподвижного конуса, когда движение жидкости осуществляется только под действием силы тяжести. Схема загрузочного устройства подобного типа приведена на рис. 3.3, в.

Очевидно, что, полагая $A = \rho(\omega_0^2 l \sin^2 \alpha + g \cos \alpha)$, получим расчетные выражения для загрузочного устройства, показанного на рис. 3.3, б (расчетная схема течения жидкости приведена на рис. 3.6, б).

Течение жидкости по поверхности вращающегося диска

Рассмотрим установившееся ламинарное течение жидкости по поверхности вращающегося диска загрузочного устройства, приведенного на рис. 3.3, г. Ось r направим по радиусу диска, а ось z — перпендикулярно ему. Угловую скорость вращения диска обозначим через ω_0 , толщину пленки жидкости — через h , а толщину слоя сыпучего материала — через H (рис. 3.8, а). Как и в предыдущем случае, течение жидкости в направлении вращения рассматривать не будем, а жидкость будем считать нелинейной вязкопластичной, подчиняющейся уравнению (2.71), которое для нашего случая течения запишется так:

$$\tau = \tau_0 + B \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^n. \quad (3.46)$$

Уравнение движения жидкости в проекции на ось r запишем следующим образом [см. уравнение (2.17, а)]:

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\varphi^2}{r} \right) = \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z}. \quad (3.47)$$

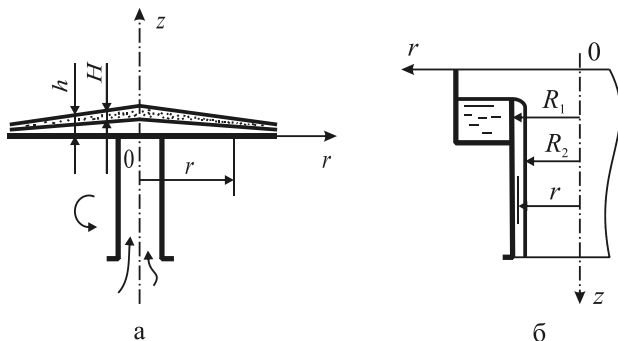


Рис. 3.8. Расчетные схемы загрузочных устройств с вращающимся диском (а) и неподвижной вертикальной трубой (б)

Учитывая, что $\partial v_r / \partial z \gg \partial v_r / \partial r$, уравнение (3.47) упростим:

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = -\frac{\rho v_\varphi^2}{r} = -a, \quad (3.48)$$

где $a = \rho \omega_0^2 r$.

Задачу необходимо решить при следующих граничных условиях:

$$\tau_{rz} = 0 \text{ при } z = h; \quad v_r = 0 \text{ при } z = 0. \quad (3.49)$$

Интегрируя уравнение (3.48) с использованием первого граничного условия (3.49), получим

$$\tau_{rz} = a(h - z). \quad (3.50)$$

Приравнявая правые части выражений (3.46) и (3.50) и интегрируя полученное по z с использованием второго граничного условия (3.49), придем к выражению для определения скорости жидкости в направлении оси r :

$$v_r = \frac{n}{1+n} \left(\frac{a}{B} \right)^{1/n} \left[\left(h - \frac{\tau_0}{a} \right)^{\frac{1+n}{n}} - \left(h - z - \frac{\tau_0}{a} \right)^{\frac{1+n}{n}} \right]. \quad (3.51)$$

Профиль скорости жидкости и эпюра касательных напряжений при течении по поверхности вращающегося диска (см. рис. 3.7, б) аналогичны профилю скорости и эпюре касательных напряжений при течении по поверхности вращающегося конуса. Здесь также у свободной поверхности

образуется упругая зона, граница которой z_0 легко определяется из выражения (3.50) при $\tau_{rz} = \tau_0$:

$$z_0 = h - \frac{\tau_0}{a}. \quad (3.52)$$

Скорость упругой зоны в направлении оси r определим из уравнения (3.51) при $z = z_0$:

$$v_r = \frac{n}{n+1} \left(\frac{a}{B} \right)^{1/n} \left(h - \frac{\tau_0}{a} \right)^{\frac{1+n}{n}}. \quad (3.53)$$

Расход жидкости по поверхности диска определяется по формуле

$$\begin{aligned} Q_r &= 2\pi r \left[\int_0^{z_0} v_r dz + v_r \Big|_{z=z_0} (h - z_0) \right] = \\ &= \frac{2n}{1+n} \pi r \left(\frac{a}{B} \right)^{1/n} \left(h - \frac{\tau_0}{a} \right)^{\frac{1+n}{n}} \left[\frac{1+n}{1+2n} \left(h - \frac{\tau_0}{a} \right) + \frac{\tau_0}{a} \right]. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Задавшись расходом сыпучего материала Q_c и зная скорость жидкости на свободной поверхности, несложно определить толщину слоя сыпучего материала:

$$H = \frac{Q_c}{2\pi r v_r \Big|_{z=z_0}} = \frac{1+n}{2n} \left(\frac{B}{a} \right)^{1/n} \frac{Q_c}{\pi r \left(h - \frac{\tau_0}{a} \right)^{\frac{1+n}{n}}}. \quad (3.55)$$

Сравнивая полученное выражение для v_r , Q_r и H с соответствующими выражениями для v_l , Q_l и H при течении жидкости по поверхности вращающегося конуса, можно увидеть, что они имеют одинаковую структуру и при замене величины A на величину a и $l \sin \alpha$ на r могут быть получены одни из других. Таким образом, заменяя указанные величины в (3.32)–(3.45), получим соответствующие выражения для течения жидкости Бингама, степенной и ньютоновской жидкости по поверхности вращающегося диска.

Течение жидкости по внутренней поверхности неподвижной трубы

Рассмотрим установившееся ламинарное течение жидкости по внутренней поверхности неподвижной трубы радиусом R_1 . Схема загрузочного устройства с использованием такого рода течения приведена на рис. 3.3, *д*, а расчетная схема — на рис. 3.8, *б*. Уравнение движения жидкости в про-

екции на ось r имеет вид [см. уравнение (2.17, б)]:

$$\rho v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \rho g. \quad (3.57)$$

Учитывая, что $\partial v_z / \partial r \gg \partial v_z / \partial z$, и приравнявая к нулю продольный градиент давления $\partial P / \partial z$, получим:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) = -\rho g r. \quad (3.57)$$

Граничные условия следующие:

$$\tau_{rz} = 0 \quad \text{при} \quad r = R_2; \quad v_z = 0 \quad \text{при} \quad r = R_1. \quad (3.58)$$

Интегрируя уравнение (3.57) с учетом граничного условия (3.58), получим:

$$\tau_{rz} = \frac{\rho g}{2} \left(\frac{R_2^2}{r} - r \right). \quad (3.59)$$

Поскольку при течении жидкости под действием только силы тяжести по внутренней поверхности круглой трубы развиваются небольшие градиенты скорости $\dot{\gamma} = \partial v_z / \partial r$, примем для решения задачи ньютоновский закон течения

$$\tau_{rz} = \mu \frac{\partial v_z}{\partial r}. \quad (3.60)$$

Приравнявая правые части уравнений (3.59) и (3.60), интегрируя полученное выражение и учитывая второе граничное условие (3.58), получим уравнение для профиля скорости жидкости:

$$v_z = \frac{\rho g}{2\mu} \left(\frac{R_1^2 - r^2}{2} - R_2^2 \ln \frac{R_1}{r} \right). \quad (3.61)$$

Расход жидкости, протекающей по внутренней поверхности трубы, вычисляется по формуле

$$Q_z = 2\pi \int_{R_2}^{R_1} v_z r dr = \frac{\pi \rho g}{2\mu} \left[\frac{R_1^4 + 3R_2^4}{4} + R_2^4 \ln \frac{R_1}{R_2} - R_1^2 R_2^2 \right]. \quad (3.62)$$

Положив в формуле (3.61) $r = R_2$, получим выражение для определения скорости жидкости на свободной поверхности:

$$v_z|_{r=R_2} = \frac{\rho g}{2\mu} \left(\frac{R_1^2 - R_2^2}{2} - R_2^2 \ln \frac{R_1}{R_2} \right). \quad (3.63)$$

При расчете подобного загрузочного устройства величина Q_z известна, тогда, выбрав внутренний радиус трубы R_1 , по уравнению (3.62) находят величину R_2 . Если величина R_2 мала и много меньше R_1 , есть опасность смыкания свободной поверхности жидкости. При $R_2 = 0$ и $R_1 = R = D/2$ из (3.62) получим:

$$Q_z = \frac{\pi \rho g D^4}{128 \mu}.$$

Течение жидкости между неподвижными коаксиальными цилиндрами

С задачей о течении жидкости между неподвижными коаксиальными цилиндрами приходится сталкиваться при расчете загрузочного устройства, показанного на рис. 3.3, в. Раствор или расплав полимера дозирующим насосом подается в кольцевую камеру, из которой выдавливается наружу через кольцевую щель (фильеру). За счет сил поверхностного натяжения формуемый «чулок» жидкости стягивается внутрь. На поверхность формуемой кольцевой пленки жидкости можно дозировать как сыпучие, так и жидкие добавки. Расчет данного устройства сводится к определению перепада давления $\Delta P = (dP/dz)L$ (здесь L — длина щели) при заданном расходе жидкости или к определению расхода при заданном перепаде давления. Кроме того, с течением такого рода приходится сталкиваться при формировании из расплавов полимеров методом раздува пленочных материалов. Как правило, зазор между цилиндрами $h = R_2 - R_1$ (R_2 , R_1 — наружный и внутренний радиусы канала) у кольцевых фильер много меньше внутреннего радиуса канала, поэтому для расчета таких каналов можно использовать плоскую модель, т. е. рассматривать течение между двумя неподвижными параллельными пластинами длиной L и шириной $S = 2\pi R_2$. Предельными случаями течения между неподвижными коаксиальными цилиндрами являются труба ($R_1 = 0$) и плоская щель ($R_1 \rightarrow \infty$, $R_2 \rightarrow \infty$).

Важно отметить, что длины каналов кольцевых фильер обычно невелики, поэтому перед механиками и технологами всегда стоит вопрос о длине участков гидродинамической и термической стабилизации потока жидкости и о точном определении сопротивления канала.

Течение на начальном участке плоского и кольцевого каналов

Рассмотрим течение растворов и расплавов полимеров (суспензий) в кольцевом канале между двумя коаксиальными цилиндрами радиусами R_1 и R_2 ($h = R_2 - R_1 = \text{const}$) и в прямоугольной щели с каналом глу-

биной $2h$ и длиной L (рис. 3.9). Стенки каналов неподвижны, а движение жидкости происходит вследствие приложения давления P на входе в канал. Распределение скоростей жидкости и ее температуры во входном сечении канала, а также температура изотермических стенок считаются заданными.

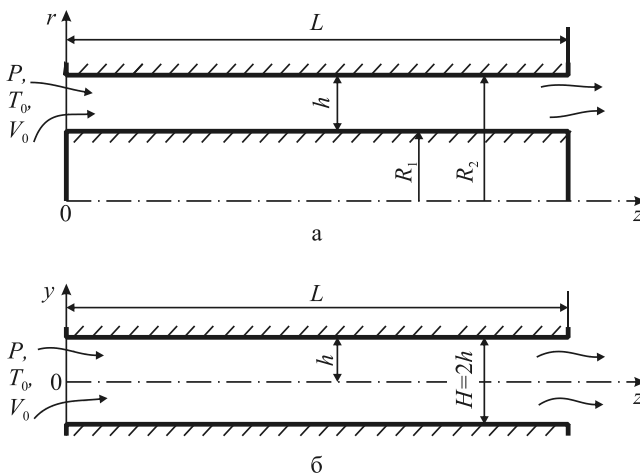


Рис. 3.9. Схемы цилиндрического (а) и плоского (б) каналов

При постановке и решении задачи будем считать, что течение жидкости стационарное, а на выходе канала — установившееся, то есть все переменные остаются неизменными по длине канала. Кроме того, будем рассматривать изменение скорости и температуры жидкости только по длине и глубине каналов (направления z, r для цилиндрической модели и z, y — для плоской), считая, что $v_\varphi = v_x = \partial k / \partial \varphi = \partial k / \partial x = 0$ (здесь k — любая переменная). Для кольцевого канала эти допущения справедливы в силу симметрии течения, а для плоского канала — в силу того, что ширина канала много больше его глубины. Сжимаемостью и термическим расширением жидкости будем пренебрегать. Ось z расположим так, чтобы она совпала с осью симметрии задачи. В качестве реологического уравнения для полимерной жидкости используем степенное уравнение Оствальда и де Виля (2.72), которое для нашего случая течения запишется так:

$$\eta = \mu \exp[-k(T - T_0)] \left(\frac{I_2}{2} \right)^{\frac{n-1}{2}}. \quad (3.64)$$

С учётом сделанных допущений полная система уравнений, включающая уравнения неразрывности, движения, энергии и состояния, будет иметь вид:

— в декартовых координатах [см. уравнения (2.12), (2.13), (2.20) и (2.57)]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0; \\ \rho \left(v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}; \\ \rho \left(v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}; \\ \rho C \left(v_z \frac{\partial T}{\partial z} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \\ &= \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \tau_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \tau_{yy} \frac{\partial v_y}{\partial y} + \tau_{zy} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right); \\ \tau_{zz} &= 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z}; \quad \tau_{yy} = 2\eta \frac{\partial v_y}{\partial y}; \quad \tau_{zy} = \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right); \quad \tau_{zy} = \tau_{yz};\end{aligned}\tag{3.65}$$

— в цилиндрических координатах [см. уравнения (2.16), (2.17), (2.21) и (2.58)]:

$$\begin{aligned}\frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0; \\ \rho \left(v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{\tau_{zr}}{r} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r}; \\ \rho \left(v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\tau_{rr}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} - \frac{\tau_{r\varphi\varphi}}{r} + \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r}; \\ \rho C \left(v_z \frac{\partial T}{\partial z} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} \right) &= \\ &= \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right) + \tau_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \tau_{rr} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \tau_{\varphi\varphi} \frac{v_r}{r} + \tau_{zr} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right); \\ \tau_{zz} &= 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z}; \quad \tau_{rr} = 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r}; \quad \tau_{\varphi\varphi} = 2\eta \frac{v_r}{r}; \\ \tau_{zr} &= \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right); \quad \tau_{zr} = \tau_{rz}.\end{aligned}\tag{3.66}$$

Выражения для второго инварианта тензора скоростей деформации I_2 в декартовых и цилиндрических координатах запишутся так [см. уравнения (2.25) и (2.26)]:

$$\frac{I_2}{2} = 2 \left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)^2; \quad (3.67)$$

$$\frac{I_2}{2} = 2 \left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{v_r}{r} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2. \quad (3.68)$$

Движение жидкости на начальных участках плоской и цилиндрической труб исследовалось во многих работах. Были проведены расчеты с использованием ряда допущений, упрощений и привлечением различных методов решения [2, 101, 147]. Для ньютоновской жидкости было установлено, что длина гидродинамического участка стабилизации может быть рассчитана по формуле

$$L_l = AR \operatorname{Re} = AR \frac{\rho v_0 R}{\mu}, \quad (3.69)$$

где L_l – длина участка перестройки поля скоростей; R – радиус трубы; μ и v_0 – динамическая вязкость и осевая скорость жидкости; A – коэффициент пропорциональности, изменяющийся в пределах $0,05 \div 0,16$, конкретное значение которого зависит от выбранного метода решения и принятых допущений.

Отметим, что формула (3.69) справедлива для чисел Рейнольдса, больших единицы. Применение ее для расчета длины участков перестройки скоростей расплавов полимеров может привести к большим погрешностям. Если принять во внимание, что в процессах переработки полимеров значения чисел Рейнольдса для расплавов обычно не превышают единицы, то длина начального участка, вычисленная по уравнению (3.69), оказалась бы равной $0.2R$. Проведённые же с высоковязкими жидкостями экспериментальные исследования в условиях медленных движений, при которых можно пренебречь инерционными силами по сравнению с вязкими, указывают на то, что протяжённость участка перестройки осевой скорости может достигать нескольких радиусов трубы [98–100]. Конкретный размер участка перестройки определяется вязкими, тиксотропными и упругими свойствами среды.

При движении вязкой жидкости на начальном участке канала изменяются не только скорости и перепад давления, но температура, т. е. формируется температурный профиль и возникает необходимость расчета термического (температурного) начального участка, величина которого может оказаться намного больше гидродинамического участка перестройки скоростей [109].

Все вышесказанное обуславливает необходимость применения численных методов исследования для анализа течений вязких жидкостей в области входа в канал.

Численное решение системы уравнений (3.65) и (3.66), описывающих двумерное течение жидкости, было получено [94, 95] с использованием конечно-разностного метода. Система уравнений (3.65) или (3.66) путем введения функции тока и вихря [1, 96] и замены дифференциальных уравнений их конечно-разностными аналогами была сведена к системе алгебраических уравнений, которая решалась с использованием метода последовательных приближений Гаусса–Зейделя.

Эти преобразования позволили исключить из уравнений движения давление и выполнить условие несжимаемости. Граничные условия для новых переменных определяются из условия прилипания жидкости к непроницаемым стенкам [101].

Некоторые результаты расчетов приведены ниже. Значения расчетных параметров указаны в табл. 3.3.

В потоке жидкости, движущейся по каналу, можно выделить три области.

1. Переходная область, в пределах которой происходит перестройка полей скоростей и температур. На этом участке значения температуры и скорости зависят как от продольной, так и от поперечной координат, а вектор скорости имеет две составляющие.
2. Область установившегося течения, в пределах которой температура и скорость зависят только от поперечной координаты.
3. Область выхода, находящаяся полностью вне канала. Здесь кончается сдерживающее влияние стенок канала и происходит вторичное перераспределение профиля скоростей от параболического к плоскому.

Участку установившегося течения предшествует участок формирования течения. На входе в канал, куда жидкость поступает из резервуара или трубы большего диаметра, эпюра скоростей имеет почти прямоугольную форму, и только в очень тонком пристенном слое скорость резко уменьшается до нулевого значения на стенке. По мере удаления от входа пристенный слой тормозит соседние с ним слои жидкости и область торможения расширяется. Одновременно с этим увеличивается скорость центральных слоев жидкости.

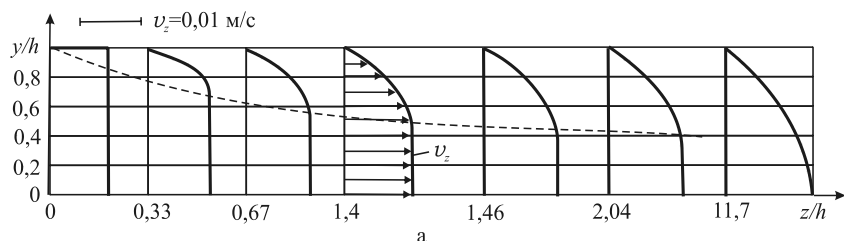
Эти процессы продолжатся до тех пор, пока профиль скорости не примет параболическую форму, соответствующую установившемуся режиму.

Таблица 3.3.
Значения расчётных параметров

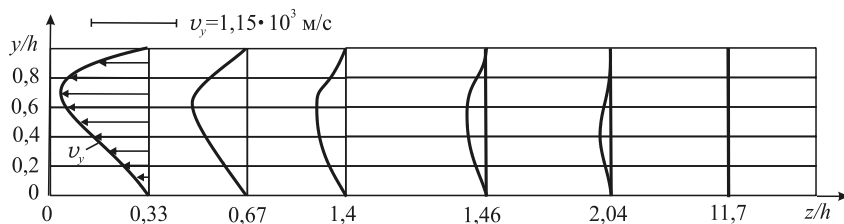
№ рисунка	μ Па · с	B_1 Па · с ⁿ	V_0 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$	ρ $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	h м	$R_2 \cdot R_1$ м	L м	C $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}$	λ $\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$	Pr	Re
3.10	$1,33 \cdot 10^{-3}$		10^{-2}	0001	10^{-2}		1	750	1	1	150
3.11		10^4	0,25		10^{-2}		0,2	1500	1	$1,5 \cdot 10^7$	$5 \cdot 10^{-4}$
3.12, крив.1	$1,33 \cdot 10^{-3}$		10^{-2}		10^{-2}		1				150
3.12, крив.2	10^4		0,25		$10^{-2\text{м}}$		0,2				$5 \cdot 10^{-4}$
3.13	10^4		0,25			10^{-2}	0,05				$5 \cdot 10^{-4}$
3.14	$1,33 \cdot 10^{-3}$		10^{-2}		10^{-2}		1	750	1	1	150
3.15	$1,33 \cdot 10^{-3}$		10^{-2}		10^{-2}		1	750	1	1	150
3.16	10^4		0,25		10^{-2}		0,2	1500	1	$1,5 \cdot 10^7$	$5 \cdot 10^{-4}$
3.17	$1,33 \cdot 10^{-3}$		10^{-2}		10^{-2}		1	750	1	1	150
3.18	$1,33 \cdot 10^{-3}$		10^{-2}		10^{-2}		1	750	1	1	150
3.19		10^4	0,25		10^{-2}		0,2	1500	1	$1,5 \cdot 10^7$	$5 \cdot 10^{-4}$
3.20		10^4	0,25		10^{-2}		0,2	1500	1	$1,5 \cdot 10^7$	$5 \cdot 10^{-4}$
3.21	$1,33 \cdot 10^{-3}$		10^{-2}		10^{-2}		1	750	1	1	150
3.22	10^4		0,25		10^{-2}		0,2	1500	1	$1,5 \cdot 10^7$	$5 \cdot 10^{-4}$
3.23	10^4		0,25		10^{-2}		0,2	1500	1	$1,5 \cdot 10^7$	$5 \cdot 10^{-4}$
3.24	$1,33 \cdot 10^{-3}$		10^{-2}		10^{-2}		1	750	1	1	150
3.25		10^4	0,25		10^{-2}		0,2	1500	1	$1,5 \cdot 10^7$	$5 \cdot 10^{-4}$

На рис. 3.10, а, б приведено развитие профилей скорости v_z и v_y в плоском канале для ньютоновской жидкости. Из рисунка видно, что с удалением от входа пограничный слой жидкости увеличивается (граница пограничного слоя показана пунктирной линией), а ядро потока уменьшается. Как и следовало ожидать, наибольшие скорости жидкости v_y наблюдаются в начале канала, а затем скорость v_y затухает и при установившемся профиле продольной скорости становится равной нулю (рис. 3.10, б).

На рис. 3.11 приведено развитие поля скорости v_z в плоском канале при изотермическом течении ньютоновской жидкости при $Re = 5 \cdot 10^{-4}$ и $L = 40h$ (сплошные линии). В этом случае формирование профиля v_z фактически заканчивается на расстоянии $\approx 0,8h$ от входа.



а



б

Рис. 3.10. Профили скоростей v_z (а) и v_y (б) в плоском канале при течении ньютоновской жидкости

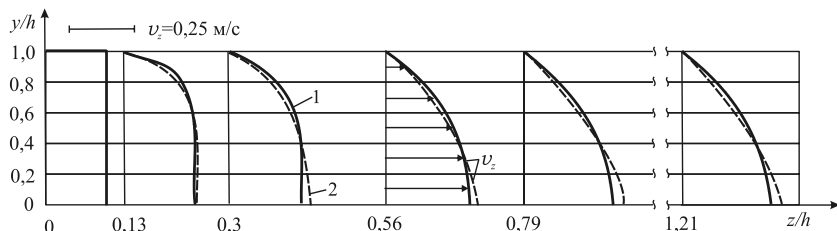


Рис. 3.11. Развитие профиля скорости v_z в плоском канале при течении ньютоновской жидкости: 1 — изотермическое течение; 2 — неизомермическое течение жидкости с вязкостью, зависящей от температуры при $k = 0,02 \text{ град}^{-1}$

На рис. 3.12 показано развитие безразмерной скорости в центре плоского канала (при $y = 0$) v_z/V_0 (V_0 — скорость жидкости на входе в канал) для ньютоновской жидкости. Кривая 1 соответствует $Re = 150$, а кривая 2 — $Re = 5 \cdot 10^{-4}$. Обратим внимание, что при больших значениях числа Re длина зоны стабилизации течения может оказаться весьма значительной (для $Re=150$ она составила $\approx 10h$). В этом случае пренебрегать входным участком нельзя, так как применительно к практике переработки волокон различные насадки, кольцевые фильеры и различные головки имеют ограниченные длины, и входной участок (участок гидродинамической стабилизации) может составлять существенную часть канала и даже быть больше его.

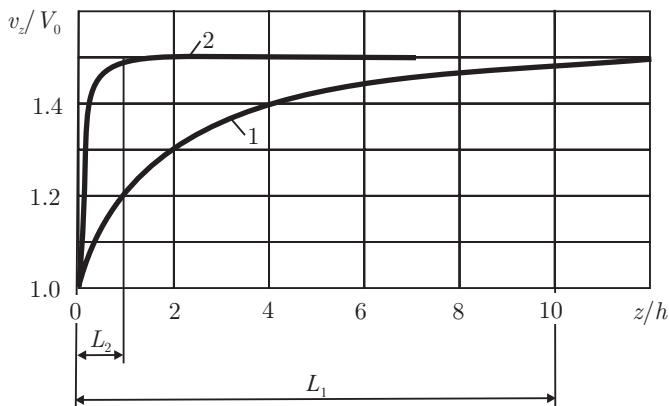


Рис. 3.12. Развитие скорости v_z в центре плоского канала при течении ньютоновской жидкости: 1 — $Re = 150$; 2 — $Re = 5 \cdot 10^{-4}$

На рис. 3.13 показано развитие профиля скорости v_z при течении ньютоновской жидкости в зазоре между коаксиальными цилиндрами (сплошные линии) и в цилиндрической трубе (пунктирные линии). Отношение радиусов для коаксиальных цилиндров составляло $R_1/R_2 = 1/6$. Из рисунка видно, что максимальная скорость жидкости при течении в цилиндрической трубе больше, чем при течении между коаксиальными цилиндрами (скорости жидкости V_0 на входе задавались одинаковыми). Следует отметить, что максимальное значение скорости при течении между коаксиальными цилиндрами смещается от середины зазора в сторону оси симметрии, причём это смещение тем заметнее, чем больше кривизна канала. Длина участков гидродинамической стабилизации у обоих каналов одинакова.

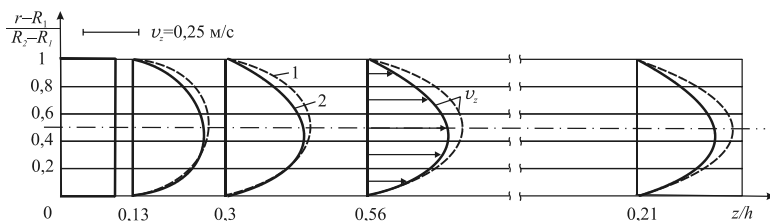


Рис. 3.13. Развитие профиля скорости v_z в трубе (1) и между коаксиальными цилиндрами (2)

Рядом авторов получены решения задачи о гидродинамическом развитии течения различными методами. Шлихтинг [101], например, использовал метод пограничного слоя, а Уонг и Лонгуэлл [102] решали полные эллиптические уравнения сохранения.

На рис. 3.14 приведено сравнение полученных теоретических результатов по развитию профиля скорости по длине канала с экспериментальными данными работ [101, 102], в которых исследовалось течение ньютоновской жидкости в круглой трубе при следующих данных: $D/2=h=0,01$ м; $L=100h$; $\mu=0,00133$ Па·с; $\rho=1000$ кг/м³; $V_0=0,01$ м/с; $Re=150$; $Pr=\mu C/\lambda=1$. Как видно из рисунка, теоретические данные очень хорошо согласуются с данными экспериментов.

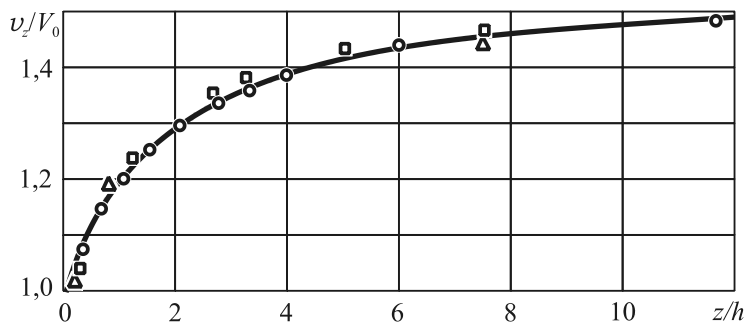


Рис. 3.14. Сравнение расчетных значений скорости жидкости v_z в центре канала (○) с данными работ [101] (Δ) и [102] (□)

Результаты, приведенные выше, были получены в предположении, что во входном сечении осевая скорость жидкости является постоянной V_0 . Используя вариационную постановку для случая малых чисел Рейнольдса, можно найти длину участка перестройки скоростей для случая, когда

входной профиль задается в виде степенной функции

$$v_{z0}(y) = \frac{Q(m+1)}{h \cdot m} \left(1 - \left(\frac{y}{h} \right)^m \right),$$

где Q – заданный расход, m – степень кривизны профиля, $2h$ – зазор между горизонтальными пластинами.

На некотором расстоянии L от входа в канал произойдет перестройка потока из начального $v_{z0}(y)$ в параболическое:

$$v_{z1}(y) = \frac{3Q}{2h} \left(1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right).$$

Можно поставить задачу получения формулы для определения длины начального участка в зависимости от показателя кривизны профиля m . Для решения задачи в аналитической постановке воспользуемся принципом минимума диссипации в медленных движениях [2]:

$$N = \min \iiint 0,5\mu H^2 dV,$$

где $H^2 = 4\xi_z^2 + \eta_{zy}^2$, $\xi_z = \frac{\partial v_z}{\partial z}$, $\eta_{zy} = \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}$, v_z и v_y – горизонтальная и вертикальная скорости течения, удовлетворяющие условию несжимаемости и граничным условиям, V – объем.

Реализацию функционала N будем проводить методом Ритца. В качестве пробной функции зададим осевую скорость в виде

$$v_z = v_{z1} \left(2\frac{z}{L} - \left(\frac{z}{L} \right)^2 \right) + v_{z0} \left(1 - 2\frac{z}{L} + \left(\frac{z}{L} \right)^2 \right) + C_1 \frac{z}{L} \left(1 - \frac{z}{L} \right) \left(\left(\frac{y}{h} \right)^4 - \frac{14}{5} \left(\frac{y}{h} \right)^6 + \frac{9}{5} \left(\frac{y}{h} \right)^8 \right),$$

где L и C_1 – варьируемые параметры, которые определяются из условия минимума функционала N .

Подставляя выражение скорости v_z в условие несжимаемости, находим скорость v_y . Зная скорости v_z и v_y , можем вычислить диссипативную функцию N и ее производные по L и C_1 . В результате всех преобразований получим систему двух уравнений с двумя неизвестными, решая которую, находим длину начального участка L для каждого конкретного значения показателя нелинейности m .

В результате вычислений была получена формула для расчета безразмерной длины участка гидродинамической стабилизации:

$$\frac{L}{h} = 0,91 \frac{m-2}{m-0,67}. \quad (3.70)$$

Результаты расчета начального участка по формуле (3.70) и с использованием метода конечных разностей хорошо согласуются между собой в случае медленного изотермического течения ньютоновской жидкости. Расчеты течения в цилиндрическом канале показали, что длина начального участка в этом случае меньше, чем для аналогичного плоского канала.

Полученное соотношение (3.70) можно улучшить, если вместо координатной функции v_z выбрать более сложные выражения, включающие большее число варьируемых параметров.

Рассмотренные выше случаи изотермического течения являются чисто гипотетическими, поскольку у высоковязких жидкостей диссипация механической энергии оказывается весьма существенной, что приводит в ряде случаев к значительному разогреву жидкости, которым пренебрегать нельзя. Поэтому для более точной оценки тепловых эффектов необходимо совместное решение уравнений (3.65) или (3.66).

В ряде работ [103, 105] приводятся аналитические решения, но только для участка установившегося течения, да и то с учётом упрощающих решение допущений, таких как:

- отсутствие диссипации механической энергии с предположением о параболической форме профиля скорости;
- отсутствие теплообмена с окружающей средой;
- независимость эффективной вязкости жидкости от температуры.

Первая группа допущений приводит к задаче изотермического типа, и её аналитическое решение для участка установившегося течения имеет вид [103]

$$\theta = \frac{T - T_c}{T_0 - T_c} = 1 - \left(\frac{r}{h} \right)^{\frac{1+3n}{n}}. \quad (3.71)$$

Здесь θ — безразмерная температура жидкости; T_0 — начальная температура жидкости; T_c — температура стенки; n — индекс течения.

При $n=1$ получим $\theta = 1 - (r/h)^4$.

На входном участке канала, где $v_r \neq 0$ (или $v_y \neq 0$), а T является функцией двух координат, система исходных уравнений значительно усложняется и аналитическое решение задачи получить не удастся.

Рассмотрим численное решение системы уравнений (3.65) и (3.66). В качестве одного из вариантов исследуем случай течения маловязкой ньютоновской жидкости, вязкость которой не зависит от температуры. На рис. 3.15 показано, как в этом случае устанавливается профиль температуры.

При течении растворов и расплавов волокнообразующих полимеров, для которых характерны значения $Pr \gg 1$, длина участка термической стабилизации намного превосходит длину гидродинамического начального участка, а область термической стабилизации может занимать значитель-

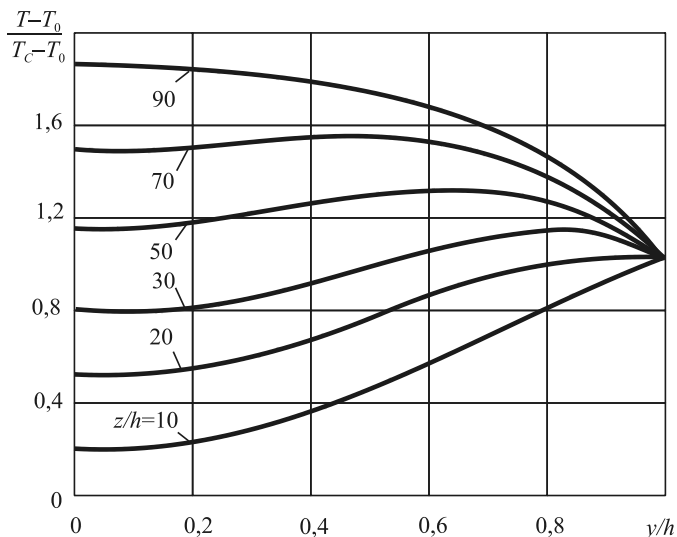


Рис. 3.15. Развитие профиля температуры в плоском канале с учетом диссипации механической энергии. Цифры у кривых показывают относительное расстояние от входа в канал

ную часть канала. В этом случае развитие профиля температуры происходит почти на всей длине канала на фоне гидродинамически стабилизированного течения.

Как показали результаты численного моделирования такого течения (рис. 3.16), в случае высоковязкой ньютоновской жидкости параболический профиль температуры не устанавливается даже на расстоянии $100h$ от входа. Этот факт еще раз подчеркивает необходимость численного решения подобного рода задач, так как допущения, которые принимаются при получении аналитического решения (3.70), во многих практических случаях оказываются несправедливы. Рис. (3.17) демонстрирует сравнение полученного решения на участке установившегося течения с аналитическим решением (3.71)

Учет вязкой диссипации в расчетах существенно влияет на поля температур. На рис. 3.18 приведены результаты расчета течения маловязкой ньютоновской жидкости ($Re = 150$, $Pr = 1$, $L = 100h$), полученные без учета диссипации. Сравнивая рис. 3.18 и 3.15, можно заметить, что диссипация ведет к значительному увеличению температуры. Важно отметить, что максимум температуры по сечению постоянно смещается от стенки к центру, и в конце концов профиль температуры принимает параболическую форму, характерную для установившегося течения.

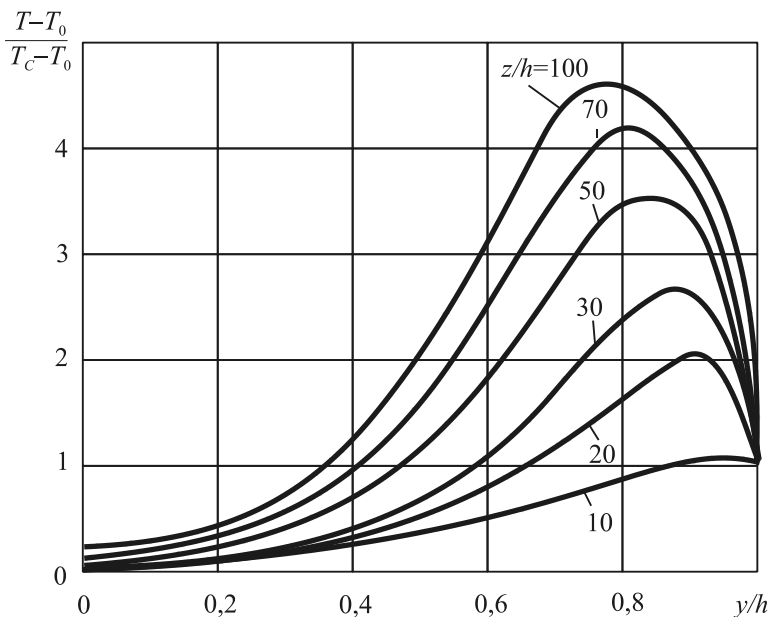


Рис. 3.16. Развитие профиля температуры в плоском канале с учетом диссипации механической энергии. Цифры у кривых показывают относительное расстояние от входа в канал

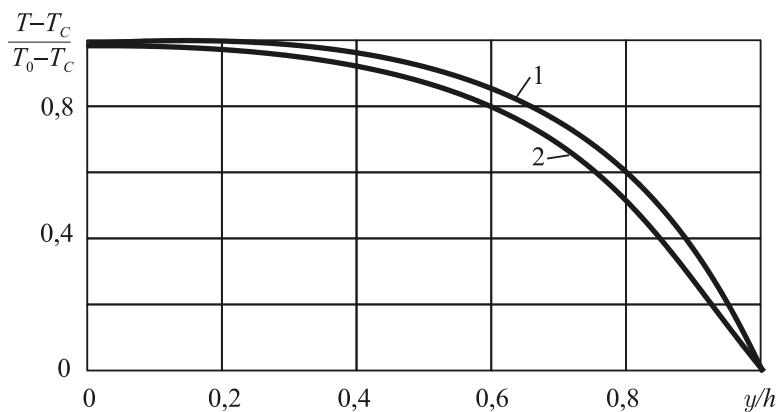


Рис. 3.17. Профиль температуры на участке установившегося течения:

1 — аналитическое решение по формуле (3.71); 2 — результаты численного решения [94]

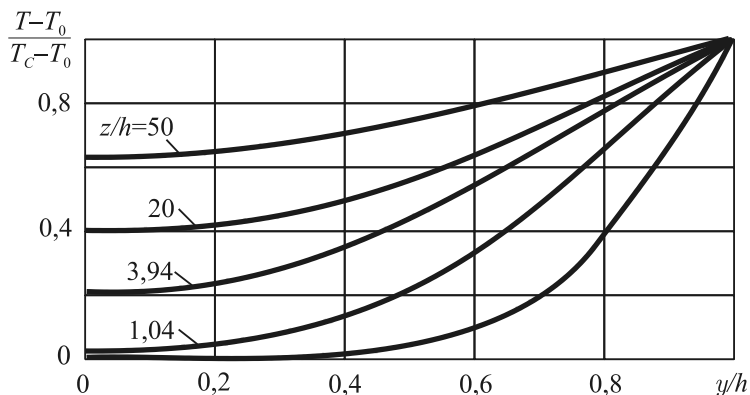


Рис. 3.18. Развитие профиля температуры в плоском канале без учета диссипации механической энергии. Цифры у кривых показывают относительное расстояние от входа в канал

Учет зависимости вязкости жидкости от температуры приводит к тому, что диссипативный разогрев жидкости будет меньше, так как рост температуры сопровождается уменьшением вязкости. Поэтому перепад температуры по сечению канала оказывается меньше, чем в случае, когда вязкость постоянна.

Следует заметить, что в случае когда вязкость жидкости не зависит от температуры, уравнения (3.65) и (3.66) оказываются несвязанными и уравнение энергии можно решать отдельно. Это означает, что в таком случае поле скоростей в изотермическом и неизотермическом течении одинаково. Если же вязкость жидкости зависит от температуры, то система уравнений (3.65) и (3.66) становится связанной и форма профиля скорости изменяется. Сравнивая профили скоростей на входном участке при

$$\eta = \mu_0 = \text{const} \text{ и } \eta = \mu_0 \exp[-k(T - T_0)],$$

можно заметить, что в последнем случае скорость жидкости в центре потока возрастает сильнее (см. рис. 3.11).

При наличии аномалии вязкости решение задачи усложняется. Влияние аномалии вязкости на вид поля скорости на участке установившегося течения показан на рис. 3.19. У псевдопластичных жидкостей $n < 1$, поэтому вязкость жидкости у стенки канала будет меньше, чем в центре, где скорости сдвига малы. Вследствие этого параболический профиль распределения скоростей сглаживается, причем это сглаживание тем заметнее, чем сильнее жидкость отличается от ньютоновской. Таким образом, при увеличении аномалии вязкости течение жидкости приближается к течению «стержневого» типа.

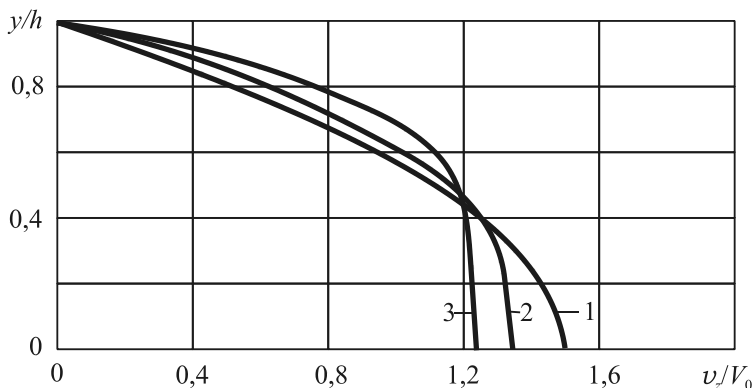


Рис. 3.19. Профили скорости v_z в плоском канале на участке установившегося течения: 1 — $n = 1$; 2 — 0,5; 3 — 0,25

Поскольку у псевдопластичных жидкостей вязкость в пристенных слоях уменьшается, то, по сравнению с ньютоновскими жидкостями, падает и диссипативный разогрев (см. рис. 3.20).

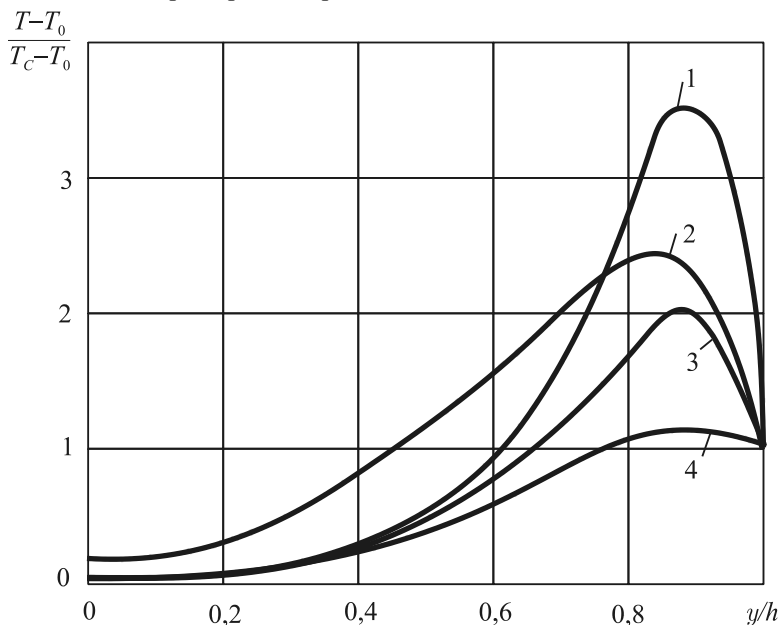


Рис. 3.20. Профили температуры жидкости на участке установившегося течения при различных законах изменения вязкости: 1 — $n = 1$, $k = 0$; 2 — 1, 0,02; 3 — 0,85, 0; 4 — 0,85, 0,01

Рассмотрим распределение давления жидкости по объему канала. Экспериментальные данные показывают, что градиент давления в пределах участка формирования течения превышает градиент давления в области установившегося течения [20]. Это связано с тем, что на ускоренное движение частиц жидкости, находящихся вблизи оси, и замедление движения частиц в пристеночных слоях необходимы дополнительные затраты энергии.

Для поддержания установившегося течения в канале необходимо приложить давление P_1 , благодаря которому частицы жидкости, находящиеся на одинаковом удалении от оси, движутся вдоль оси канала с одинаковой скоростью. На входном участке канала происходит перестройка профиля скорости, поэтому частицы жидкости движутся ускоренно. Это требует дополнительных затрат энергии и вызывает дополнительное падение давления ΔP_2 . Кроме того, при переходе из резервуара в канал также происходит перестройка профиля скорости, на которую расходуется давление P_3 . Таким образом, общее давление, которое прикладывается к резервуару, будет следующим:

$$P = P_1 + \Delta P_2 + P_3. \quad (3.72)$$

Расчеты показали, что все три составляющие давления сравнимы по величине, но для различных жидкостей вклад каждой будет разным. На рис. 3.21 и 3.22 хорошо виден скачок давления ньютоновских жидкостей с вязкостью $\mu = 0,00133 \text{ Па} \cdot \text{с}$ (рис. 3.21) и $\mu = 10^4 \text{ Па} \cdot \text{с}$ (рис. 3.22) на входном участке. Пунктирная линия, соответствующая $\partial P / \partial z = \text{const}$, отсекает на оси величину P_1 , а избыточное давление составляет ΔP_2 . Для маловязкой жидкости (рис. 3.21) $\Delta P_2 = 0,15P_1$, а для высоковязкой (рис. 3.22) $\Delta P_2 = 1,15P_1$. Таким образом, несмотря на то что длина участка перестройки профиля скоростей у высоковязких жидкостей мала (порядка h), пренебрегать им нельзя, так как именно на этом участке наблюдаются значительные потери давления.

Важно отметить, что на входном участке канала наблюдается градиент давления в поперечном направлении (рис. 3.23 и 3.24). Добавочное давление ΔP_2 оказывается больше в пристенных областях, там, где максимальны изменения скорости. Разница давлений в поперечном сечении максимальна на входе в канал и постепенно сглаживается к выходу. В области установившегося течения давление постоянно по сечению канала. Такая картина течения хорошо согласуется с физическими представлениями о течении. На входном участке жидкость перетекает из области большего давления в область меньшего давления (к центру канала), а на участке установившегося течения движется параллельно стенкам канала.

На вид напорно-расходной характеристики течения сильное влияние оказывает аномалия вязкости. Для ньютоновской жидкости наблюдается прямо пропорциональная зависимость расхода от давления на входе в канал (рис. 3.25, кривая 1). У псевдопластичных жидкостей течение как бы облегчается, то есть для определенного увеличения расхода требуется меньшее приращение давления, чем для ньютоновской жидкости. Это связано с тем, что у псевдопластичных жидкостей вязкость с ростом градиента скорости уменьшается, причем тем сильнее, чем больше аномалия вязкости. Это приводит к отклонению расходно-напорных характеристик от линейности.

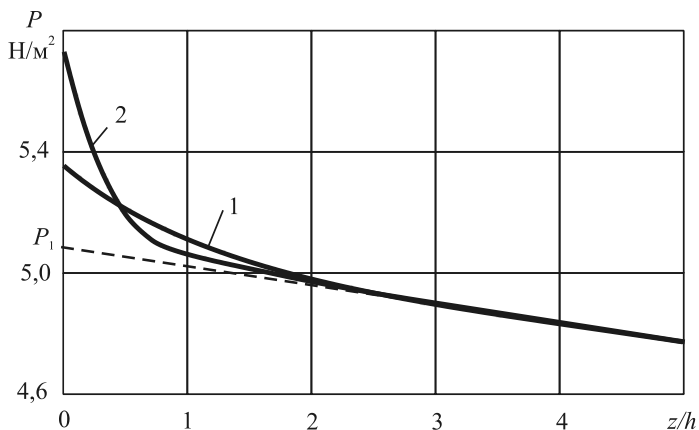


Рис. 3.21. Изменение давления по длине плоского канала: 1 — давление на оси симметрии; 2 — давление у стенки

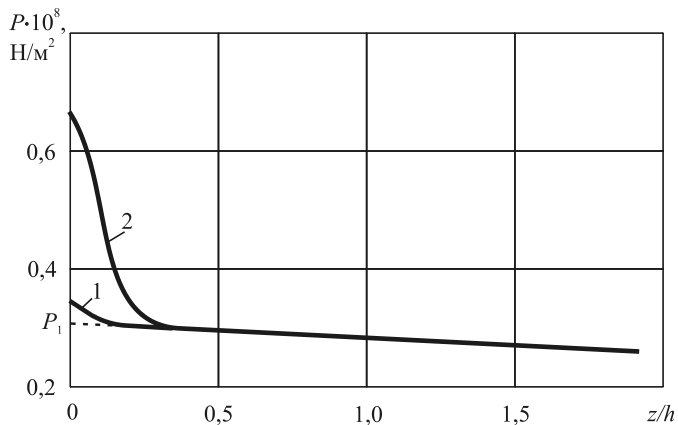


Рис. 3.22. Изменение давления по длине плоского канала: 1 — давление на оси симметрии; 2 — давление у стенки

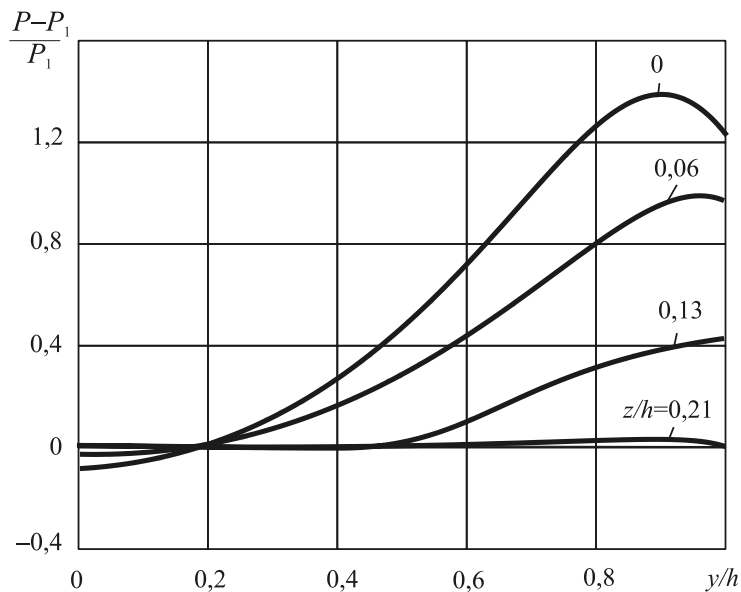


Рис. 3.23. Распределение давления по оси y на входном участке плоского канала при $Re = 5 \cdot 10^{-4}$. Цифры у кривых показывают относительное расстояние от входа в z/h

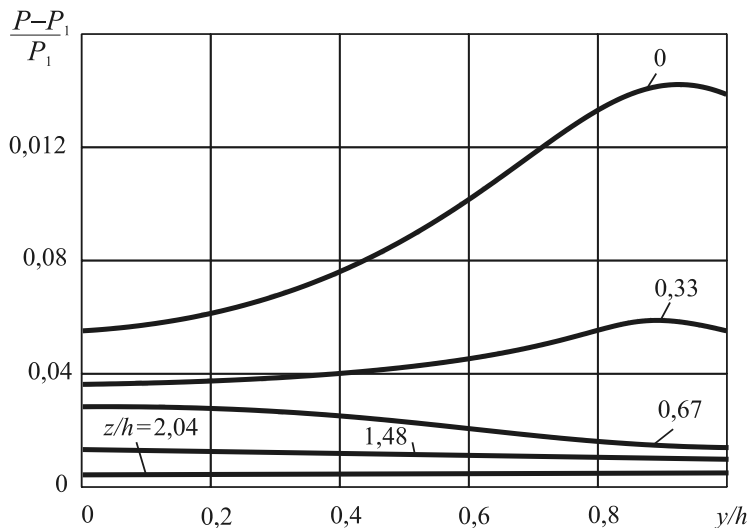


Рис. 3.24. Распределение давления по оси y на входном участке плоского канала при $Re = 150$. Цифры у кривых показывают относительное расстояние от входа в z/h

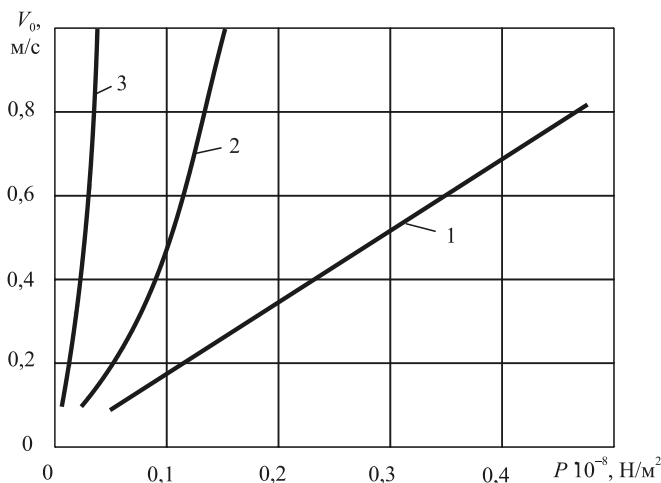


Рис. 3.25. Расходно-напорные характеристики течения жидкости для плоского канала: 1 — $n = 1$; 2 — 0,75; 3 — 0,25

Стационарное течение в кольцевом зазоре

Как отмечалось в главе 2, многие полимерные жидкости и суспензии проявляют аномальные свойства у твёрдых поверхностей (проскальзывают). Эту особенность их поведения необходимо принимать во внимание.

Рассмотрим изотермическое стационарное течение суспензий (растворов, расплавов полимеров) между двумя неподвижными коаксиальными цилиндрами длиной L . Радиус внутреннего цилиндра обозначим R_1 , а наружного — R_2 . Ось z направим по оси цилиндров, ось r — по радиусу. Течение жидкости будем считать симметричным относительно оси z и происходящим только за счёт приложенного давления P_0 на входе в канал. Расчётная схема задачи приведена на рис. 3.26.

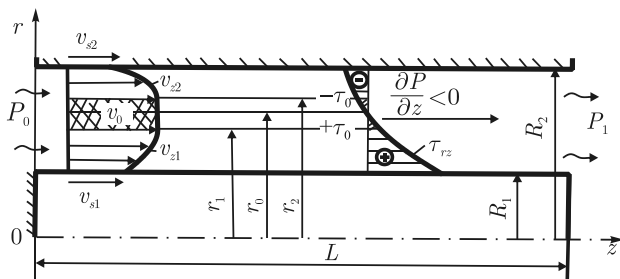


Рис. 3.26. Схема течения вязкопластичной жидкости между неподвижными коаксиальными цилиндрами

В качестве реологического уравнения для жидкости воспользуемся уравнением (2.71) для нелинейной вязкопластичной жидкости, которое для данной задачи запишем так:

$$\tau = \tau_0 \operatorname{sign} \frac{\partial v_z}{\partial r} + B \left| \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|^{n-1} \frac{\partial v_z}{\partial r}. \quad (3.73)$$

Мы будем рассматривать течение жидкости с того момента, когда касательные напряжения на цилиндрах будут больше начального предела текучести τ_0 .

При решении задачи будем считать, что жидкость может скользить по поверхности цилиндров с различными коэффициентами скольжения и скоростями, определяемыми уравнением (2.92). Для изотермического течения между неподвижными коаксиальными цилиндрами уравнение (2.92) для внутреннего и наружного цилиндров запишется следующим образом:

$$v_{s1} = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau_1 \leq \tau_s, \\ \frac{\beta_{s1}(\tau_1)\tau_1}{[k_0(R_2 - R_1)]^{m_0}} & \text{при } \tau_1 > \tau_s; \end{cases} \quad (3.74, a)$$

$$v_{s2} = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau_2 \leq \tau_s, \\ \frac{\beta_{s2}(\tau_2)|\tau_2|}{[k_0(R_2 - R_1)]^{m_0}} & \text{при } \tau_2 > \tau_s. \end{cases} \quad (3.74, б)$$

Здесь k_0 — коэффициент перехода от вискозиметрических измерений в капилляре на течение между коаксиальными цилиндрами, зависящий от материала; β_{s1} , β_{s2} , v_{s1} , v_{s2} , τ_1 , τ_2 — коэффициенты скольжения, скорости скольжения и касательное напряжение на поверхностях внутреннего и наружного цилиндров соответственно.

Уравнения (3.74) отражают тот факт, что скольжение по поверхности цилиндров начнётся только тогда, когда касательное напряжение на них будет выше некоторого значения τ_s . В противном случае скольжение жидкости будет отсутствовать. Кроме того, будем считать, что $\tau_s > \tau_0$, а

$$\beta_{s1}(\tau_1) = \beta_{s1} = \text{const}, \quad \beta_{s2}(\tau_2) = \beta_{s2} = \text{const}. \quad (3.75)$$

Этот факт установлен в работах [106, 107], в которых экспериментально показано, что истинный коэффициент скольжения $\beta_s(\tau)$ пред-

ставляет функцию от τ на стенке возрастающую до определённого значения τ^* , при дальнейшем увеличении τ на стенке β_s остаётся величиной постоянной.

Уравнение движения жидкости в проекции на ось z запишем так [см. уравнение (2.17, в)]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) = -A \quad (A = |\partial P / \partial z|), \quad (3.76)$$

а его интеграл представим в виде

$$\tau_{rz} = \frac{A}{2} \left(\frac{r_0^2}{r} - r \right). \quad (3.77)$$

Здесь r_0 — константа интегрирования, численно равная радиусу цилиндра нулевых напряжений сдвига. Действительно, при $r = r_0$ $\tau_{rz} = 0$.

Касательные напряжения на поверхности внутреннего и наружного цилиндров получим из уравнения (3.77):

$$\begin{aligned} \tau_{rz}|_{r=R_1} &= \tau_1 = \frac{A}{2} \left(\frac{r_0^2}{R_1} - R_1 \right); \\ \tau_{rz}|_{r=R_2} &= \tau_2 = \frac{A}{2} \left(\frac{r_0^2}{R_2} - R_2 \right). \end{aligned} \quad (3.78)$$

В таком случае граничные условия скольжения (3.74) преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} \text{при } r = R_1 \quad v_{s1} &= \frac{\beta_{s1} A}{2 [k_0 (R_2 - R_1)]^{m_0}} \left(\frac{r_0^2}{R_1} - R_1 \right); \\ \text{при } r = R_2 \quad v_{s2} &= \frac{\beta_{s2} A}{2 [k_0 (R_2 - R_1)]^{m_0}} \left(R_2 - \frac{r_0^2}{R_2} \right). \end{aligned} \quad (3.79)$$

Совместное решение реологического уравнения (3.73) и первого интеграла от уравнения движения (3.77) запишется так:

$$\begin{aligned} \tau_0 + B \left| \frac{\partial v_{z1}}{\partial r} \right|^{n-1} \frac{\partial v_{z1}}{\partial r} &= \frac{A}{2} \left(\frac{r_0^2}{r} - r \right) \quad (\tau > 0, \quad r_0 > r); \\ -\tau_0 + B \left| -\frac{\partial v_{z2}}{\partial r} \right|^{n-1} \left(-\frac{\partial v_{z2}}{\partial r} \right) &= \frac{A}{2} \left(\frac{r_0^2}{r} - r \right) \quad (\tau < 0, \quad r > r_0). \end{aligned} \quad (3.80)$$

Преобразуя выражение (3.80), получим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_{z1}}{\partial r} &= \left(\frac{A}{2B}\right)^{\frac{1}{n}} \left[\left(\frac{r_0^2}{r} - r \right) - \frac{2\tau_0}{A} \right]^{\frac{1}{n}} \quad (\tau > 0); \\ \frac{\partial v_{z2}}{\partial r} &= - \left(\frac{A}{2B}\right)^{\frac{1}{n}} \left[\left(r - \frac{r_0^2}{r} \right) - \frac{2\tau_0}{A} \right]^{\frac{1}{n}} \quad (\tau < 0).\end{aligned}\quad (3.81)$$

Введём в рассмотрение задачи безразмерные величины и параметры:

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{r}{R_1}; \quad \zeta_0 = \frac{r_0}{R_1}; \quad \beta = \frac{R_2}{R_1}; \quad \zeta_1 = \frac{r_1}{R_1}; \quad \zeta_2 = \frac{r_2}{R_1}; \quad w_z = \frac{v_z}{V_0}; \\ w_0 &= \frac{v_0}{V_0}; \quad w_{s1} = \frac{v_{s1}}{V_0}; \quad w_{s2} = \frac{v_{s2}}{V_0}; \quad \alpha = \left(\frac{AR_1}{2B}\right)^m \frac{R_1}{V_0}; \\ \alpha_0 &= \frac{2\tau_0}{AR_1}; \quad m = \frac{1}{n}; \quad \varepsilon_1 = \frac{\beta_{s1} AR_1}{2V_0 [k_0 (R_2 - R_1)]^{m_0}}; \\ \varepsilon_1 &= \frac{\beta_{s1} AR_1}{2V_0 [k_0 (R_2 - R_1)]^{m_0}}; \quad q = \frac{Q}{\pi V_0 R_1^2}.\end{aligned}\quad (3.82)$$

Здесь r_1, r_2 — радиусы границ упругой зоны; v_0 — скорость ядра; $V_0 = 1$ м/с — единичная скорость.

С учётом безразмерных величин (3.82) граничные условия скольжения примут вид:

$$\begin{aligned}\text{при } \zeta = 1 \quad w_{s1} &= \varepsilon_1 (\zeta_0^2 - 1); \\ \text{при } \zeta = \beta \quad w_{s2} &= \varepsilon_2 (\beta - \zeta_0^2 / \beta).\end{aligned}\quad (3.83)$$

Интегрируя уравнения (3.81) с учётом граничных условий (3.83) и безразмерных величин (3.82), получим:

$$w_{z1} = \alpha \int_1^\zeta \left[\left(\frac{\zeta_0^2}{\zeta} - \zeta \right) - \alpha_0 \right]^m d\zeta + w_{s1} \quad (\tau > 0); \quad (3.84, \text{ а})$$

$$w_{z2} = \alpha \zeta \int_\zeta^\beta \left[\left(\zeta - \frac{\zeta_0^2}{\zeta} \right) - \alpha_0 \right]^m d\zeta + w_{s2} \quad (\tau < 0). \quad (3.84, \text{ б})$$

Границы упругого ядра (см. рис. 3.26) можно определить из условий:

$$\text{при } \zeta = \zeta_1 \quad \tau = \tau_0; \quad \text{при } \zeta = \zeta_2 \quad \tau = -\tau_0. \quad (3.85)$$

Решая уравнение (3.77) с использованием граничных условий (3.85) и безразмерных величин (3.82), получим значения радиусов упругой зоны ζ_1 и ζ_2 :

$$\zeta_1 = -\frac{\alpha_0}{2} + \sqrt{\frac{\alpha_0^2}{4} + \zeta_0^2}, \quad \zeta_2 = \frac{\alpha_0}{2} + \sqrt{\frac{\alpha_0^2}{4} + \zeta_0^2}. \quad (3.86)$$

Зная радиусы кольца упругого ядра, несложно определить его толщину:

$$\zeta_1 - \zeta_2 = \alpha_0. \quad (3.87)$$

Скорость упругого ядра можно определить из уравнения (3.84, а) при $\zeta = \zeta_1$ или из уравнения (3.84, б) при $\zeta = \zeta_2$:

$$w_{z1}|_{\zeta=\zeta_1} = w_0 = \alpha \int_1^{\zeta_1} \left[\left(\frac{\zeta_0^2}{\zeta} - \zeta \right) - \alpha_0 \right]^m d\zeta + \varepsilon_1 (\zeta_0^2 - 1); \quad (3.88, а)$$

$$w_{z1}|_{\zeta=\zeta_2} = w_0 = \alpha \int_{\zeta_2}^{\beta} \left[\left(\zeta - \frac{\zeta_0^2}{\zeta} \right) - \alpha_0 \right]^m d\zeta + \varepsilon_2 \left(\beta - \frac{\zeta_0^2}{\beta} \right). \quad (3.88, б)$$

Приравняв выражения (3.88, а) и (3.88, б), получим выражение для определения константы интегрирования ζ_0 :

$$\alpha \left\{ \int_1^{\zeta_1} \left[\left(\frac{\zeta_0^2}{\zeta} - \zeta \right) - \alpha_0 \right]^m d\zeta - \alpha \int_{\zeta_2}^{\beta} \left[\left(\zeta - \frac{\zeta_0^2}{\zeta} \right) - \alpha_0 \right]^m d\zeta \right\} + \varepsilon_1 (\zeta_0^2 - 1) - \varepsilon_2 \left(\beta - \frac{\zeta_0^2}{\beta} \right) = 0. \quad (3.89)$$

Расход жидкости между коаксиальными цилиндрами определится следующим образом:

$$q = \frac{Q}{\pi V_0 R_1^2} = 2 \int_1^{\beta} w_z \zeta d\zeta = 2 \int_1^{\zeta_1} w_{z1} \zeta d\zeta + 2 \int_{\zeta_2}^{\beta} w_{z2} \zeta d\zeta + (\zeta_2^2 - \zeta_1^2) w_0. \quad (3.90)$$

Подставляя в выражение (3.90) значения скоростей из уравнений (3.88) и производя интегрирование по частям с учётом знаков градиентов скоростей, получим:

$$q = \alpha \left\{ \int_1^{\zeta_1} \left[\left(\frac{\zeta_0^2}{\zeta} - \zeta \right) - \alpha_0 \right]^m (\zeta_2^2 - \zeta^2) d\zeta + \int_{\zeta_2}^{\beta} \left[\left(\zeta - \frac{\zeta_0^2}{\zeta} \right) - \alpha_0 \right]^m (\zeta^2 - \zeta_2^2) d\zeta \right\} + \varepsilon_1 (\zeta_0^2 - 1) (\zeta_2^2 - 1) + \varepsilon_2 \left(\beta - \frac{\zeta_0^2}{\beta} \right) (\beta^2 - \zeta_0^2). \quad (3.91)$$

Поскольку $A = |\partial P / \partial z| = |P_1 - P_0| / L$, то, задавшись перепадом давления ΔP по уравнению (3.91), можно определить соответствующий ему расход жидкости Q .

Рассмотрим частные случаи задачи.

При $m = 1$ ($n = 1$) получим формулы для течения жидкости Бингама [см. уравнение (2.70)] с учётом пристенного скольжения:

$$w_{z1} = \alpha \left[\zeta_0^2 \ln \zeta - \frac{\zeta_0^2 - 1}{2} - \alpha_0 (\zeta - 1) \right] + w_{s1}, \quad \left(\alpha = \frac{AR_1^2}{2\mu V_0} \right); \quad (3.92)$$

$$w_{z2} = \alpha \left[\frac{\beta^2 - \zeta_0^2}{2} - \zeta_0^2 \ln \frac{\beta}{\zeta} - \alpha_0 (\beta - \zeta) \right] + w_{s2}; \quad (3.93)$$

$$w_0 = \alpha \left[\zeta_0^2 \ln \zeta_1 - \frac{\zeta_1^2 - 1}{2} - \alpha_0 (\zeta_1 - 1) \right] + w_{s1}; \quad (3.94)$$

$$\alpha \left[\zeta_0^2 \ln \frac{\zeta_1}{\zeta_2} \beta + \frac{1}{2} (1 - \zeta_0^2 - \beta^2 + \zeta_2^2) + \alpha_0 (1 - \zeta_1 - \beta + \zeta_2) \right] + \\ + \varepsilon_1 (\zeta_0^2 - 1) - \varepsilon_2 \left(\beta - \frac{\zeta_0^2}{\beta} \right) = 0; \quad (3.95)$$

$$q = \alpha \left\{ \frac{1}{4} (\beta^4 - 1 - \zeta_2^4 - \zeta_1^4) - \frac{1}{2} (\beta^2 - 1 - \zeta_2 + \zeta_1) (\zeta_0^2 + \zeta_2^2) + \right. \\ \left. + \zeta_0^2 \zeta_2^2 \ln \frac{\zeta_1}{\zeta_2} \beta + \frac{\alpha_0}{3} [3\zeta_2^2 (\beta + 1 - \zeta_2 - \zeta_1)] - \beta^3 - 1 + \zeta_2^3 - \zeta_1^3 \right\} + \\ + \varepsilon_1 (\zeta_0^2 - 1) (\zeta_2^2 - 1) + \varepsilon_2 \left(\beta - \frac{\zeta_0^2}{\beta} \right) (\beta^2 - \zeta_0^2). \quad (3.96)$$

Скорости скольжения w_{s1} и w_{s2} границы упругой зоны определяются по формулам (3.83) и (3.86).

При $\tau_0 = 0$ получим формулы для течения жидкости, подчиняющейся степенному реологическому уравнению [см. уравнение (2.72)] с учётом пристенного скольжения:

$$w_{z1} = \alpha \int_1^{\zeta} \left(\frac{\zeta_0^2}{\zeta} - \zeta \right)^m d\zeta + w_{s1} \quad (\tau \geq 0); \quad (3.97)$$

$$w_{z2} = \alpha \int_{\zeta}^{\beta} \left(\zeta - \frac{\zeta_0^2}{\zeta} \right)^m d\zeta + w_{s2} \quad (\tau \leq 0); \quad (3.98)$$

$$r_1 = r_2 = r_0; \quad (3.99)$$

$$\alpha \int_1^{\zeta_0} \left(\frac{\zeta_0^2}{\zeta} - \zeta \right)^m d\zeta - \alpha \int_{\zeta_2}^{\beta} \left(\zeta - \frac{\zeta_0^2}{\zeta} \right)^m d\zeta + \varepsilon_1 (\zeta_0^2 - 1) - \varepsilon_2 \left(\beta - \frac{\zeta_0^2}{\beta} \right) = 0; \quad (3.100)$$

$$q = \alpha \left[\int_1^{\zeta_0} \left(\frac{\zeta_0^2}{\zeta} - \zeta \right)^m (\zeta_0^2 - \zeta^2) d\zeta + \int_{\zeta_0}^{\beta} \left(\zeta - \frac{\zeta_0^2}{\zeta} \right)^m (\zeta^2 - \zeta_0^2) d\zeta \right] + \varepsilon_1 (\zeta_0^2 - 1)^2 + \varepsilon_2 \left(\beta - \frac{\zeta_0^2}{\beta} \right) (\zeta_2^2 - \zeta_1^2). \quad (3.101)$$

Интегралы в уравнениях (3.97)–(3.101) удобнее вычислять численными методами. Однако можно получить и аналитическое решение, раскладывая подынтегральные выражения в ряды и интегрируя их почленно. Если m — целое число, то число членов ряда (бином Ньютона) будет конечным, при нецелом m число членов ряда бесконечно. Прodelав эти операции, получим:

m — целое число:

$$w_{z1} = (-1)^m \alpha \sum_{k=0}^m (-1)^k B_k (\zeta^{m-2k+1} - 1) \zeta_0^{2k} + w_{s1}; \quad (3.102)$$

$$w_{z2} = \alpha \sum_{k=0}^m (-1)^k B_k (\beta^{m-2k+1} - \zeta^{m-2k+1}) \zeta_0^{2k} + w_{s2}; \quad (3.103)$$

$$B_0 = \frac{1}{m+1}; \quad B_k = \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-k+1)}{(m-2k+1) \cdot k!}; \quad (3.104)$$

$$\begin{aligned} & (-1)^m \alpha \sum_{k=0}^m (-1)^k B_k (\zeta^{m-2k+1} - 1) \zeta_0^{2k} - \\ & - \alpha \sum_{k=0}^m (-1)^k B_k (\beta^{m-2k+1} - \zeta_0^{m-2k+1}) \zeta_0^{2k} + \\ & + \varepsilon_1 (\zeta_0^2 - 1) - \varepsilon_2 \left(\beta - \frac{\zeta_0^2}{\beta} \right) = 0; \end{aligned} \quad (3.105)$$

$$\begin{aligned} q = & \alpha \left\{ \sum_{k=0}^m (-1)^k B_k [(-1)^m (\zeta_0^{m-2k+1} - 1) - (\beta^{m-2k+1} - \zeta_0^{m-2k+1})] \zeta_0^{2(k+1)} + \right. \\ & + \sum_{k=0}^m (-1)^k B'_k [(\beta^{m-2k+3} - \zeta_0^{m-2k+3}) - (-1)^m (\zeta_0^{m-2k+3} - 1)] \zeta_0^{2k} \Big\} + \\ & + \varepsilon_1 (\zeta_0^2 - 1)^2 + \varepsilon_2 \left(\beta - \frac{\zeta_0^2}{\beta} \right) (\beta^2 - \zeta_0^2); \end{aligned} \quad (3.106)$$

$$B'_0 = \frac{1}{m+3}; \quad B'_k = \frac{m(m-1)(m-2) \cdot \dots \cdot (m-k+1)}{(m-2k+3) \cdot k!}. \quad (3.107)$$

m – нецелое число:

$$w_{z1} = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A_k \frac{\zeta_0^{1-m+k} - 1}{\zeta_0^{2(k-m)}} + w_{s1}; \quad (3.108)$$

$$w_{z2} = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k B_k (\beta^{m-2k+1} - \zeta_0^{m-2k+1}) \zeta_0^{2k} + w_{s2}; \quad (3.109)$$

$$A_0 = \frac{1}{1-m}; \quad A_k = \frac{m(m-1)(m-2) \cdot \dots \cdot (m-k+1)}{(1-m+k) \cdot k!}; \quad (3.110)$$

$$\alpha \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A_k \frac{\zeta_0^{1-m+k} - 1}{\zeta_0^{2(k-m)}} - \alpha \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k B_k (\beta^{m-2k+1} - \zeta_0^{m-2k+1}) \zeta_0^{2k} + \\ + \varepsilon_1 (\zeta_0^2 - 1) - \varepsilon_2 \left(\beta - \frac{\zeta_0^2}{\beta} \right) = 0; \quad (3.111)$$

$$q = \alpha \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A_k \frac{\zeta_0^{1-m+k} - 1}{\zeta_0^{2(k-m+1)}} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A'_k \frac{\zeta_0^{3-m+k} - 1}{\zeta_0^{2(k-m)}} + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k B'_k (\beta^{m-2k+3} - \zeta_0^{m-2k+3}) \zeta_0^{2k} - \right. \\ \left. - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k B_k (\beta^{m-2k+1} - \zeta_0^{m-2k+1}) \zeta_0^{2(k+1)} \right\} + \\ + \varepsilon_1 (\zeta_0^2 - 1)^2 + \varepsilon_2 \left(\beta - \frac{\zeta_0^2}{\beta} \right) (\beta^2 - \zeta_0^2); \quad (3.112)$$

$$A'_0 = \frac{1}{3-m}; \quad A'_k = \frac{m(m-1)(m-2) \cdot \dots \cdot (m-k+1)}{(3-m+k) \cdot k!}.$$

При $\tau_0 = 0$ и $m = n = 1$ получим формулы для течения ньютоновской жидкости, проскальзывающей по поверхностям коаксиальных цилиндров:

$$w_{z1} = \frac{\alpha}{2} \left[1 - \zeta_0^2 + (\beta^2 - 1) \frac{\ln \zeta}{\ln \beta} \right] + w_{s1}; \quad (3.113)$$

$$w_{z2} = \frac{\alpha}{2} \left[\beta^2 - \zeta_0^2 - (\beta^2 - 1) \left(1 - \frac{\ln \zeta}{\ln \beta} \right) \right] + w_{s2}; \quad (3.114)$$

$$\zeta_0 = \sqrt{\frac{\beta^2 - 1}{2 \ln \beta}}; \quad (3.115)$$

$$w_{s1} = \varepsilon_1 \frac{\beta^2 - 1}{2 \ln \beta}, \quad w_{s2} = \varepsilon_2 \left(\beta - \frac{\beta^2 - 1}{2 \beta \ln \beta} \right); \quad (3.116)$$

$$q = \frac{\alpha}{4} \left[\beta^4 - 1 - \frac{(\beta^2 - 1)^2}{\ln \beta} \right] + \varepsilon_1 \left(\frac{\beta^2 - 1}{2 \ln \beta} - 1 \right)^2 + \\ + \varepsilon_2 \left[\beta^3 - \frac{\beta^2 - 1}{2 \ln \beta} \left(2\beta - \frac{\beta^2 - 1}{2 \beta \ln \beta} \right) \right]. \quad (3.117)$$

Положив во всех полученных уравнениях $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$ ($\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$), получим формулы, описывающие течение жидкости с равными истинными скоростями скольжения по обоим коаксиальным цилиндрам. При $\varepsilon_1 = w_{s1} = 0$ ($\beta_{s1} = v_{s1} = 0$) скольжение по поверхности внутреннего цилиндра будет отсутствовать, а при $\varepsilon_2 = w_{s2} = 0$ ($\beta_{s2} = v_{s2} = 0$) будет отсутствовать скольжение по поверхности наружного цилиндра. Положив в полученных выражениях $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = w_{s1} = w_{s2} = 0$, получим формулы для течения жидкости при полном отсутствии скольжения.

При отсутствии скольжения жидкости формулы значительно упрощаются. Например, для жидкости, подчиняющейся степенному реологическому уравнению (2.72), авторы работы [108] после анализа рядов, подобных приведённым выше, дали следующие уравнения для определения расхода жидкости:

$$Q = \frac{n}{1 + 2n} \pi R_2^3 \left(\frac{R_2 A}{2B} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{\beta - 1}{\beta} \right)^{\frac{1+2n}{n}} F(n, \beta), \quad (3.118)$$

где $F(n, \beta)$ — сложная функция, зависящая только от аномалии вязкости n и безразмерного радиуса $\beta = R_2 / R_1$. Вид этой функции показан на рис. 3.27.

МакКелви [20] обратил внимание, что значения функции $F(n, \beta)$ при $1/\beta \geq 0,3$ становятся почти независимыми от аномалии вязкости n , и описал в этой области значений функции формулой

$$F(n, \beta) = \frac{\beta + 1}{2\beta} \quad (1/\beta \geq 0,3).$$

Для ньютоновской жидкости при отсутствии скольжения формулы для скорости жидкости и расхода становятся элементарными:

$$w_z = \frac{\alpha}{2} \left(\beta^2 - \zeta^2 + \frac{\beta^2 - 1}{\ln \beta} \ln \frac{\zeta}{\beta} \right); \quad (3.119)$$

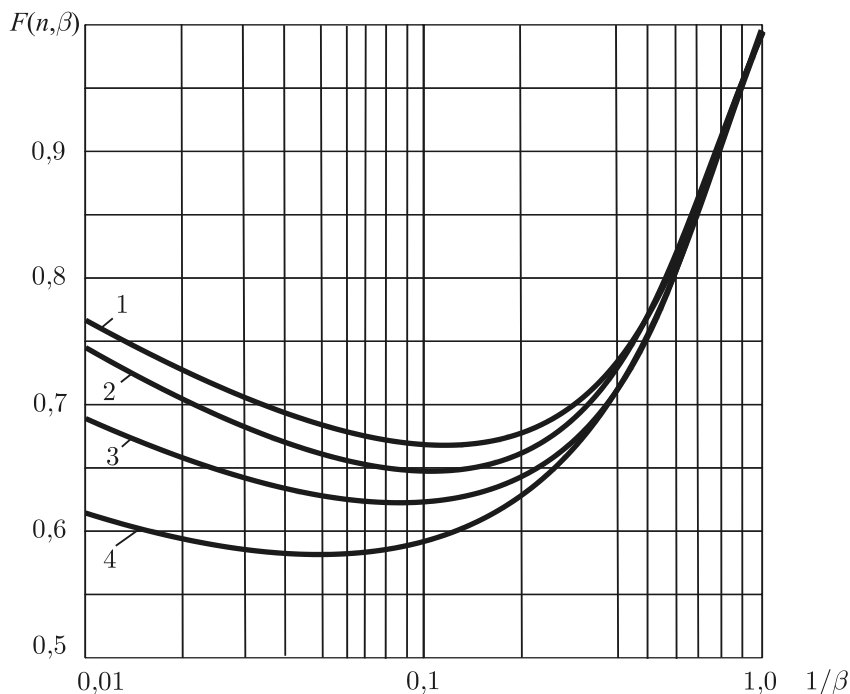


Рис. 3.27. Зависимость функции $F(n, \beta)$ от аномалии вязкости n и величины β :
1 — $n = 0,25$; 2 — $0,33$; 3 — $0,5$; 4 — 1

$$q = \frac{\alpha}{4} \left(\beta^4 - 1 - \frac{(\beta^2 - 1)^2}{\ln \beta} \right). \quad (3.120)$$

Типичные напорно-расходные характеристики течения рассмотренного класса жидкостей приведены на рис. 3.28. Рассмотрим характеристику $\Delta P - Q_z$ на примере кривой течения нелинейной вязкопластичной жидкости Балкли-Гершеля (кривая 1) при $n < 1$. При перепаде давления $\Delta P < \Delta P_1$ жидкость не течёт вообще и ведёт себя как твёрдое тело, поскольку касательные напряжения на стенках канала меньше начального предела текучести τ_0 . При $\Delta P = \Delta P_1$ касательные напряжения на внутреннем цилиндре τ_1 достигнут величины τ_0 и жидкость начнёт течь у поверхности этого цилиндра тонким пристенным слоем. Вся остальная жидкость ведёт себя как твёрдое тело, прилипшее к наружному цилиндру, если $\tau_s > \tau_0$, или скользит по поверхности наружного цилиндра при $\tau_s < \tau_0$.

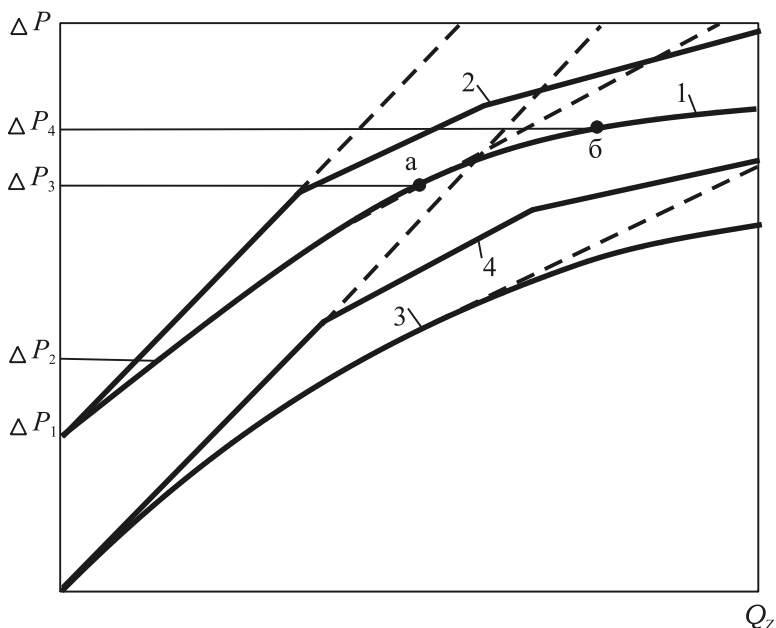


Рис. 3.28. Напорно-расходные характеристики течения жидкости между неподвижными коаксиальными цилиндрами: 1 — нелинейная вязкопластическая жидкость; 2 — жидкость Бингама; 3 — «степенная» жидкость; 4 — жидкость Ньютона; — — — — течение со скольжением; — — — — течение без скольжения

При дальнейшем увеличении давления толщина пристенного слоя у внутреннего цилиндра начнет возрастать, а при $\Delta P = \Delta P_2$ касательные напряжения τ_2 на наружном цилиндре достигнут по абсолютной величине τ_0 и упругое ядро расположится между цилиндрами и будет двигаться со скоростью v_0 . С этого момента мы и рассматриваем решение задачи. При $\Delta P = \Delta P_3$ касательные напряжения на внутреннем цилиндре τ_1 достигнут величины τ_s и жидкость по поверхности этого цилиндра начнёт скользить. На характеристике $\Delta P - Q_z$ этому соответствует появление излома. Течение жидкости облегчится, поскольку на увеличение расхода требуется меньший градиент давления. При $\Delta P = \Delta P_4$ жидкость начинает скользить и по поверхности наружного цилиндра, поскольку на нём $\tau_2 = |\tau_0|$. На характеристике $\Delta P - Q_z$ появляется второй излом. При дальнейшем увеличении ΔP скорости скольжения на поверхностях коаксиальных цилиндров возрастают, а расход жидкости Q_z увеличивается.

Следует отметить, что если жидкость будет скользить по поверхности только одного из цилиндров, то излом на характеристике $\Delta P - Q_z$ будет только один.

Как видно из приведённого выше анализа, аналитическое решение задачи о течении нелинейной вязкопластичной и «степенной» жидкостей между коаксиальными цилиндрами слишком трудоёмко и для исследования такого течения целесообразно использовать численные методы. Пользоваться полученными выражениями рационально только тогда, когда зазор между цилиндрами $R_2 - R_1$ соизмерим с радиусом внутреннего цилиндра R_1 .

Стационарное течение в плоском канале

Как уже отмечалось выше, если зазор между коаксиальными цилиндрами много меньше радиуса внутреннего цилиндра, то для расчёта таких каналов можно использовать плоскую модель, приняв ширину канала $S = 2\pi R_2$.

Рассмотрим изотермическое стационарное течение суспензий (растворов, расплавов полимеров) между двумя неподвижными параллельными пластинами длиной L и шириной S . Расстояние между пластинами $H = 2h$. Ось z направлена по оси симметрии, а ось y – по глубине канала. Течение жидкости происходит за счёт давления P_0 , приложенного на входе в канал. Расчётная схема приведена на рис. 3.29.

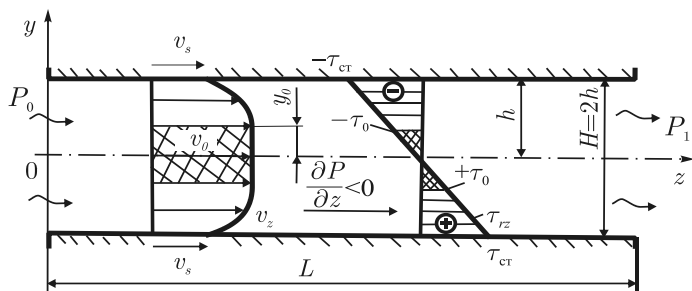


Рис. 3.29. Схема течения вязкопластичной жидкости между неподвижными параллельными пластинами

В качестве реологического уравнения для жидкости используем уравнение (2.71) для нелинейной вязкопластической жидкости, которое для нашего случая течения запишется в виде

$$\tau = \tau_0 \operatorname{sign} \frac{\partial v_z}{\partial y} + B \left| \frac{\partial v_z}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial v_z}{\partial y}. \quad (3.121)$$

Кроме того, будем считать, что жидкость может проскальзывать по поверхности пластин со скоростью, определяемой уравнением (2.92). Для изотермического простого сдвигового течения между параллельными пластинами скорость скольжения будет выглядеть так:

$$v_s = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau \leq \tau_s; \\ \frac{\beta_s (\tau_{cm}) \tau_{cm}}{(k_0 H)^{m_0}} & \text{при } \tau > \tau_s. \end{cases} \quad (3.122)$$

Здесь k_0 — коэффициент перехода от вискозиметрических измерений в капилляре на течение между пластинами, зависящий от материала; τ_{cm} — касательное напряжение на стенке.

Из уравнения (3.122) видно, что скольжение по поверхности пластин начнётся только тогда, когда касательное напряжение на них будет больше некоторого порогового значения τ_s . В противном случае скольжение жидкости будет отсутствовать. Кроме того, как и в предыдущей задаче, будем считать, что $\beta_s (\tau_{cm}) = \beta_s = \text{const}$.

Из постановки задачи и рис. 3.29 следует, что градиент давления является величиной отрицательной. Тогда, обозначив $A = |\partial P / \partial z|$, перепишем уравнение движения (2.13, в) в виде

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = -A. \quad (3.123)$$

Интегрируя уравнение (3.123) по y и определяя константу интегрирования из условия $\tau = -\tau_0$ при $y = -y_0$ [см. рис. (3.29)], получим:

$$\tau_{zy} = -A(y - y_0) - \tau_0. \quad (3.124)$$

Границу упругой зоны y_0 определим из выражения (3.124), используя условие, что при $y = 0$, $\tau = 0$

$$y_0 = \frac{\tau_0}{A}. \quad (3.125)$$

Ввиду симметрии, будем рассматривать только верхнюю половину канала, где $\partial v_z / \partial y < 0$. В этом случае реологическое уравнение (3.121) запишется так:

$$\tau = -\tau_0 + B \left(-\frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^{n-1} \left(-\frac{\partial v_z}{\partial y} \right) = -\tau_0 - B \left(-\frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^n. \quad (3.126)$$

Решая совместно уравнения (3.124) и (3.126), получим

$$v_z = -\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{n}} (y - y_0) \frac{n}{n+1} + C, \quad (3.127)$$

где C — константа интегрирования.

Чтобы воспользоваться граничным условием (3.122), необходимо определить касательное напряжение на стенке τ_{cm} . Сделать это можно, положив в выражение (3.124) $y = h$, тогда, с учётом формулы (3.125), получим:

$$|\tau_{cm}| = A(h - y_0) + \tau_0 = Ah. \quad (3.128)$$

Определяя константу интегрирования C в уравнении (3.127) с использованием граничного условия (3.122) при $\tau > \tau_s$ и учитывая выражение (3.128), получим:

$$v_z = \frac{n}{n+1} \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{n}} \left[(h - y_0)^{\frac{1+n}{n}} - (y - y_0)^{\frac{1+n}{n}} \right] + \frac{Ah\beta_s}{(2k_0h)^{m_0}}. \quad (3.129)$$

Из уравнения (3.129) при $y = y_0$ получим скорость упругого ядра $v_z = v_0$:

$$v_0 = \frac{n}{n+1} \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{n}} \left(h - \frac{\tau_0}{A} \right)^{\frac{1+n}{n}} + \frac{Ah\beta_s}{(2k_0h)^{m_0}}. \quad (3.130)$$

Расход жидкости определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_z &= 2S \left(\int_{y_0}^h v_z dy + v_0 y_0 \right) = \\ &= 2S \left\{ \frac{n}{n+1} \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{n}} \left(h - \frac{\tau_0}{A} \right)^{\frac{1+n}{n}} \left[\frac{n+1}{2n+1} \left(h - \frac{\tau_0}{A} \right) + \frac{\tau_0}{A} \right] + \frac{Ah^2\beta_s}{(2k_0h)^{m_0}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.131)$$

Задавшись величиной $A = |\partial P / \partial z| = |\Delta P| / L$, легко определить Q_z .

Рассмотрим частные случаи полученного решения задачи.

При $n = 1$ получим формулы для течения жидкости Бингама [см. уравнение (2.70)] с учётом пристенного скольжения:

$$v_z = \frac{A}{2\mu} \left[\left(h - \frac{\tau_0}{A} \right)^2 - \left(y - \frac{\tau_0}{A} \right)^2 \right] + \frac{Ah\beta_s}{(2k_0h)^{m_0}}; \quad (3.132)$$

$$Q_z = 2S \left\{ \frac{A}{6\mu} \left[2h^3 - 3h^2 \frac{\tau_0}{A} + \frac{\tau_0^3}{A^3} \right] + \frac{Ah^2\beta_s}{(2k_0h)^{m_0}} \right\}. \quad (3.133)$$

При $n = 1$ и $\beta_s = 0$ получим формулы для течения жидкости Бингама при отсутствии скольжения жидкости у неподвижной стенки:

$$v_z = \frac{A}{2\mu} \left[\left(h - \frac{\tau_0}{A} \right)^2 - \left(y - \frac{\tau_0}{A} \right)^2 \right]; \quad (3.134)$$

$$Q_z = \frac{SA}{3\mu} \left[2h^3 - 3h^2 \frac{\tau_0}{A} + \frac{\tau_0^3}{A^3} \right]. \quad (3.135)$$

При $\tau_0 = 0$ получим формулы для течения степенной жидкости [см. уравнение (2.72)], проскальзывающей у неподвижных стенок:

$$v_z = \frac{n}{1+n} \left(\frac{A}{B} \right)^{\frac{1}{n}} (h-y)^{\frac{1+n}{n}} + \frac{Ah\beta_s}{(2k_0h)^{m_0}}; \quad (3.136)$$

$$Q_z = 2S \left[\frac{n}{1+2n} \left(\frac{A}{B} \right)^{\frac{1}{n}} h^{\frac{1+2n}{n}} + \frac{Ah^2\beta_s}{(2k_0h)^{m_0}} \right]. \quad (3.137)$$

При $\tau_0 = 0$ и $\beta_s = 0$ получим формулы для течения степенной жидкости без учёта скольжения:

$$v_z = \frac{n}{1+n} \left(\frac{A}{B} \right)^{\frac{1}{n}} (h-y)^{\frac{1+n}{n}}; \quad (3.138)$$

$$Q_z = \frac{2n}{1+2n} S \left(\frac{A}{B} \right)^{\frac{1}{n}} h^{\frac{1+2n}{n}}. \quad (3.139)$$

При $\tau_0 = 0$ и $n = 1$ получим формулы для течения ньютоновской жидкости при наличии пристенного скольжения:

$$v_z = \frac{A}{2\mu} (h-y)^2 + \frac{Ah\beta_s}{(2k_0h)^{m_0}}; \quad (3.140)$$

$$Q_z = 2S \left[\frac{Ah^3}{3\mu} + \frac{Ah^2\beta_s}{(2k_0h)^{m_0}} \right]. \quad (3.141)$$

При $\tau_0 = 0$, $n = 1$ и $\beta_s = 0$ получим известные формулы для течения жидкости Ньютона без учёта скольжения:

$$v_z = \frac{A}{2\mu}(h - y)^2; \quad (3.142)$$

$$Q_z = \frac{2}{3} \frac{Sh^3}{\mu} A = \frac{SH^3}{12\mu} A. \quad (3.143)$$

При решении задачи о течении жидкости между двумя неподвижными параллельными пластинами мы считали, что жидкость будет скользить по обеим пластинам с одинаковым истинным коэффициентом скольжения β_s , следовательно, на характеристике жидкости $\Delta P - Q_z$ [см. рис. (3.28)] будет только один излом.

В заключение следует отметить, что если зазор между коаксиальными цилиндрами составляет меньше 13% наружного радиуса, то есть если $(R_2 - R_1) \leq 0,13R_2$, то для расчёта кольцевых фильер можно пользоваться плоской моделью канала. В этом легко убедиться, сравнив расчёты для кольцевого и плоского каналов по расходу ньютоновской жидкости.

Течение между вращающимися конусами и гладкими дисками

Течение жидкости между вращающимися конусами и гладкими дисками встречается при введении в растворы и расплавы полимеров и другие полимерные жидкости различных добавок (пасты красителя, суспензии двуокиси титана и т. д.) по схемам, изображённым на рис. 3.3, б, г, д, когда гладкий вращающийся диск не справляется с поставленной задачей и требуется создание дополнительного давления в центре дисков.

Рассмотрим изотермическое течение между двумя вращающимися конусами, а течение жидкости между двумя вращающимися дисками получим как частный случай рассмотренной задачи.

Течение между соосными конусами, вращающимися в одну сторону с угловой скоростью ω_0 , исследуем в конической ортогональной системе координат l, z, θ . Будем рассматривать течение только вдоль образующих конусов, не интересуясь течением по осям z и θ . Расчётная схема задачи приведена на рис. 3.30. Ось l направлена посередине зазора вдоль образующих конусов, а ось z — перпендикулярно ей. Половину угла раствора конусов обозначим через α . Наименьший средний радиус конического зазора обозначим через R_0 , а наибольший — через R , величину зазора — через $H = 2h$. На входе задано давление P_0 , а на выходе — P_1 . Движение жидкости в зазоре осуществляется за счёт центробежных сил, давле-

ния и собственного веса (которым, для сильновязких жидкостей можно пренебречь). Для данной задачи градиент давления $\partial P / \partial l$ будет величиной отрицательной.

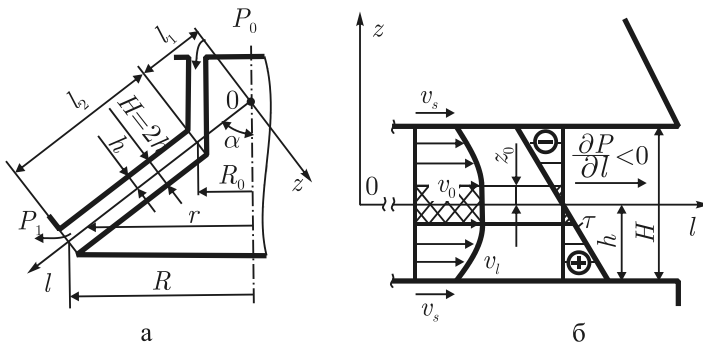


Рис. 3.30. Схема течения жидкости между вращающимися соосными конусами (а) и профили скоростей и касательных напряжений (б)

Течение считаем изотермическим, ламинарным и стационарным.

Будем рассматривать течение нелинейной вязкопластической жидкости, реологическое уравнение которой для нашего случая течения запишется так:

$$\tau = \tau_0 \operatorname{sign} \frac{\partial v_l}{\partial z} + B \left| \frac{\partial v_l}{\partial z} \right|^{n-1} \frac{\partial v_l}{\partial z}. \quad (3.144)$$

Как и в предыдущих задачах, полагаем, что жидкость может скользить вдоль образующих конусов с одинаковыми истинными коэффициентами скольжения β_s и скоростью скольжения, определяемой уравнением (3.122).

Уравнение движения в проекции на ось l запишем следующим образом:

$$\frac{\partial \tau_{lz}}{\partial z} = -\rho \frac{v_\theta^2}{l} + \frac{\partial P}{\partial l} - \rho g_l. \quad (3.145)$$

Так как $l = r / \sin \alpha$, а $\rho g_l = \rho g \cos \alpha$, уравнение движения (3.145) преобразуем к виду:

$$\frac{\partial \tau_{lz}}{\partial z} = -A, \quad (3.146)$$

$$\text{где } A = \rho (\omega_0^2 r \sin^2 \alpha + g \cos \alpha) - \frac{\partial P}{\partial l}. \quad (3.147)$$

Интегрируя уравнение движения (3.146) по z и определяя константу интегрирования из условия $\tau = -\tau_0$ при $z = -z_0$ (в силу симметрии решаем задачу только для верхней половины зазора), получим:

$$\tau_{lz} = -A(z - z_0) - \tau_0. \quad (3.148)$$

Граница упругой зоны определяется из условия, что при $z = 0$, $\tau_{lz} = 0$

$$z_0 = \tau_0 / A. \quad (3.149)$$

Из уравнения (3.148) несложно определить касательное напряжение при $z = h$:

$$|\tau_{lz}|_{z=h} = A(h - z_0) + \tau_0 = Ah. \quad (3.150)$$

Тогда граничные условия скольжения (3.122) преобразуются к виду:

$$v_s = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau \leq \tau_s; \\ \frac{Ah\beta_s}{(2k_0h)^{m_0}} & \text{при } \tau > \tau_s. \end{cases} \quad (3.151)$$

Совместное решение уравнений (3.144) и (3.148) для отрицательного градиента давления запишется так:

$$\frac{\partial v_l}{\partial z} = -\frac{A}{B}(z - z_0)^{\frac{1}{n}}. \quad (3.152)$$

Интегрируя уравнение (3.152) с учетом граничного условия (3.151), получим

$$v_l = \frac{n}{1+n} \left(\frac{A}{B} \right)^{\frac{1}{n}} \left[(h - z_0)^{\frac{1+n}{n}} - (z - z_0)^{\frac{1+n}{n}} \right] + \frac{Ah\beta_s}{(2k_0h)^{m_0}}. \quad (3.153)$$

Из уравнения (3.153) при $z = z_0$ получим скорость упругой зоны:

$$v_0 = \frac{n}{1+n} \left(\frac{A}{B} \right)^{\frac{1}{n}} \left(h - \frac{\tau_0}{A} \right)^{\frac{1+n}{n}} + \frac{Ah\beta_s}{(2k_0h)^{m_0}}. \quad (3.154)$$

Расход жидкости между конусами определится так:

$$Q_l = 4\pi r \left(\int_{z_0}^h v_l dz + v_0 z_0 \right). \quad (3.155)$$

Подставляя в уравнение (3.155) значение скоростей v_l и v_0 из выражений (3.153) и (3.154) и интегрируя полученное уравнение, окончательно

будем иметь:

$$Q_l = 4\pi r \left\{ \frac{n}{n+1} \left(\frac{A}{B} \right)^{\frac{1}{n}} \left(h - \frac{\tau_0}{A} \right)^{\frac{1+n}{n}} \left[\frac{1+n}{1+2n} \left(h - \frac{\tau_0}{A} \right) + \frac{\tau_0}{A} \right] + \frac{Ah^2\beta_s}{(2k_0h)^{m_0}} \right\}. \quad (3.156)$$

Для того чтобы получить напорно-расходную характеристику, необходимо вычислить перепад давления

$$\Delta P = |P_1 - P_0| = \int_{l_1}^{l_2} \left| \frac{\partial P}{\partial l} \right| dl. \quad (3.157)$$

Градиент давления $\partial P / \partial l$ из уравнения (3.156) в явном виде не выражается, поэтому определить величину ΔP можно только с использованием численных методов.

Рассмотрим частные случаи полученного решения задачи.

При $n = 1$ получим формулы для течения линейной вязкопластической жидкости (жидкости Бингама):

$$v_l = \frac{A}{2\mu} \left[\left(h - \frac{\tau_0}{A} \right)^2 - \left(z - \frac{\tau_0}{A} \right)^2 \right] + \frac{Ah\beta_s}{(2k_0h)^{m_0}}; \quad (3.158)$$

$$v_0 = \frac{A}{2\mu} \left(h - \frac{\tau_0}{A} \right)^2 + \frac{Ah\beta_s}{(2k_0h)^{m_0}}; \quad (3.159)$$

$$Q_l = 4\pi r \left\{ \frac{A}{2\mu} \left(h - \frac{\tau_0}{A} \right)^2 \left[\frac{2}{3} \left(h - \frac{\tau_0}{A} \right) + \frac{\tau_0}{A} \right] + \frac{Ah^2\beta_s}{(2k_0h)^{m_0}} \right\}. \quad (3.160)$$

При $\tau_0 = 0$ получим формулы для жидкости, подчиняющейся степенному реологическому закону:

$$v_l = \frac{n}{1+n} \left(\frac{A}{B} \right)^{\frac{1}{n}} \left[h^{\frac{1+n}{n}} - z^{\frac{1+n}{n}} \right] + \frac{Ah\beta_s}{(2k_0h)^{m_0}}; \quad (3.161)$$

$$v_0 = \frac{n}{1+n} \left(\frac{A}{B} \right)^{\frac{1}{n}} (h)^{\frac{1+n}{n}} + \frac{Ah\beta_s}{(2k_0h)^{m_0}}; \quad (3.162)$$

$$Q_l = 4\pi r \left\{ \frac{n}{1+2n} \left(\frac{A}{B} \right)^{\frac{1}{n}} h^{\frac{1+2n}{n}} + \frac{Ah^2\beta_s}{(2k_0h)^{m_0}} \right\}. \quad (3.163)$$

При $n = 1$ и $\tau_0 = 0$ получим формулы для течения ньютоновской жидкости:

$$v_l = \frac{A}{2\mu} [h^2 - z^2] + \frac{Ah\beta_s}{(2k_0h)^{m_0}}; \quad (3.164)$$

$$v_0 = \frac{Ah^2}{2\mu} + \frac{Ah\beta_s}{(2k_0h)^{m_0}}; \quad (3.165)$$

$$Q_l = 4\pi r Ah^2 \left[\frac{h}{3\mu} + \frac{\beta_s}{(2k_0h)^{m_0}} \right]. \quad (3.166)$$

Как видно из выражений (3.156), (3.160), (3.163) и (3.166), для всех четырёх жидкостей с учётом пристенного скольжения величина A , в которую входит градиент давления $\partial P / \partial l$ [см. уравнение (3.147)], может быть выражена в явном виде только для ньютоновской жидкости:

$$A = \frac{Q_l}{4\pi r h^2 \left[\frac{h}{3\mu} + \frac{\beta_s}{(2k_0h)^{m_0}} \right]}. \quad (3.167)$$

Учитывая выражение (3.147), получим:

$$\frac{\partial P}{\partial l} = \frac{Q_l}{4\pi r h^2 \left[\frac{h}{3\mu} + \frac{\beta_s}{(2k_0h)^{m_0}} \right]} - \rho(\omega_0^2 r \sin^2 \alpha + g \cos \alpha). \quad (3.168)$$

Учитывая, что $l = r / \sin \alpha$, интеграл от выражения (3.168) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \Delta P = |P_0 - P_1| &= \frac{Q_l \sin \alpha}{4\pi h^2 \left[\frac{h}{3\mu} + \frac{\beta_s}{(2k_0h)^{m_0}} \right]} \ln \frac{l_2}{l_1} - \\ &- \frac{\rho \omega_0^2}{2} (l_2^2 - l_1^2) \sin^2 \alpha - \rho g (l_2 - l_1) \cos \alpha = \\ &= \frac{Q_l \sin \alpha}{4\pi h^2 \left[\frac{h}{3\mu} + \frac{\beta_s}{(2k_0h)^{m_0}} \right]} \ln \frac{R}{R_0} - \frac{\rho \omega_0^2}{2} (R^2 - R_0^2) - \rho g (R - R_0) \operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned} \quad (3.169)$$

Положив в полученных выражениях $\beta_s = 0$, получим формулы, описывающие течение с граничными условиями прилипания, то есть без учёта скольжения.

Для жидкости, подчиняющейся степенному реологическому уравнению, можно определить перепад давления:

$$\Delta P = |P_1 - P_0| = \left(\frac{1+2n}{n} \right)^n \frac{B}{h^{1+2n} \sin \alpha} \frac{Q_i}{4\pi} \frac{(R^{1-n} - R_0^{1-n})}{1-n} - \frac{\rho \omega_0^2}{2} (R^2 - R_0^2) - \rho g (R - R_0) \operatorname{ctg} \alpha. \quad (3.170)$$

При $\omega_0 = 0$ получим случаи течения жидкости для неподвижных конусов — течения под действием только градиента давления и силы тяжести.

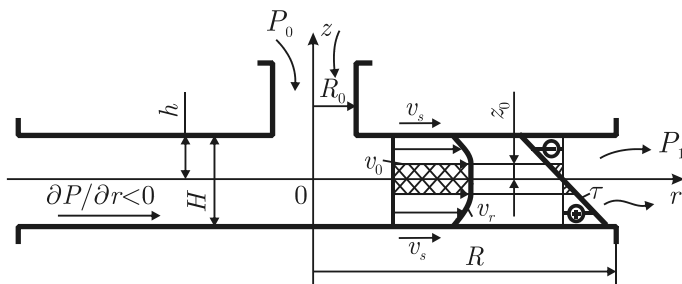


Рис. 3.31. Схема течения жидкости между вращающимися дисками

В заключение следует отметить, что при $\alpha = 90^\circ$ ($\sin \alpha = 1$, $\cos \alpha = 0$) получим формулы для течения различных жидкостей между гладкими вращающимися в одну сторону дисками. Схема течения вязкопластической жидкости между дисками приведена на рис. 3.31.

Глава 4

ТЕЧЕНИЕ РАСТВОРОВ И РАСПЛАВОВ ПОЛИМЕРОВ В КРУГЛЫХ ТРУБАХ

Транспортировка растворов и расплавов полимеров, суспензий различных добавок является основной технологической операцией при производстве химических волокон. По мере течения полимерных жидкостей по трубопроводам их часто подогревают или охлаждают. Это больше относится к растворам полимеров, трубопроводы же для расплавов полимеров снабжены рубашками всегда и обогреваются жидкостным или паровым высокотемпературным органическим теплоносителем (ВОТ), предотвращающим остывание (замерзание) расплава полимера. Как правило, растворы и расплавы полимеров, в силу их высокой вязкости, транспортируются по трубопроводам при малых числах Рейнольдса Re , и скорость их очень редко превышает 0,5 м/с.

Течение аномально вязких жидкостей на входе в трубу

Изотермическое течение

Течение жидкости на входе в кольцевой канал подробно рассмотрено выше. При течении жидкости в круглой трубе можно также выделить три участка: участок входа, участок установившегося течения, участок выхода. Рассмотрим более детально входовой участок круглой трубы, то есть участок, где происходит перестройка полей скорости и давления.

Длиной участка гидродинамической стабилизации L_1 принято считать расстояние от входа в трубу, на котором устанавливаются значения скорости, отличающиеся от скоростей стабилизированного течения не более чем на 1%. Анализ течения на этом участке может быть сделан на основании приближённого решения уравнений Прандтля в пограничном слое [2]:

$$\rho \left(v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \eta \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 0; \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) = 0. \quad (4.1)$$

Длина участка гидродинамической стабилизации оценивается при этом в соответствии с выражением (3.69).

Уравнения Праудтля (4.1) являются нулевым приближением уравнений Навье–Стокса (3.66) и (3.68) и остаются справедливыми только при достижении достаточно большого значения числа Re (по оценкам [109], при $Re > 100$), не характерных для течения растворов и расплавов полимеров.

Другим приближением для решения данной задачи может быть приближение ползущего течения, в котором пренебрегают инерционными членами в уравнениях движения:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\eta \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial r} &= 0; \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) = 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Такое приближение справедливо при значениях $Re \ll 1$. Однако решения, полученные для входовой области на основании приближения ползущего течения, оказываются малоприменимыми для интересующего нас класса задач, поскольку довольно часто при переработке полимеров реализуются течения со значениями $Re = 10^{-1} \div 10$. Таким образом, для построения достоверной модели течения и теплообмена растворов и расплавов полимеров на входе в трубу необходимо решать систему уравнений (3.66), (3.68). При решении изотермической задачи уравнения баланса энергии из уравнений (3.66) нужно исключить. Система уравнений (3.66), (3.68) дополняется степенным реологическим уравнением

$$\eta = \mu \left| \frac{I_2}{2} \right|^{(n-1)/2}. \quad (4.3)$$

Записывая граничные условия, будем считать течение во входном сечении трубы безвихревым и будем полагать, что $v_z = \text{const}$; $v_r = 0$. Течение реализуется в режиме заданного расхода $Q = \text{const}$. Численное решение задачи было выполнено в работе [94]. Значения расчётных параметров приведены в таблице 4.1.

На рис. 4.1 показано развитие продольной v_z и поперечной v_r скоростей при течении высоковязкой жидкости ($Re = 5,5 \cdot 10^{-6}$) в зоне гидродинамической стабилизации. В непосредственной близости от входа выделяется ядро потока и пограничный слой, развивающийся на протяжении участка L_1 . Развитие пограничного слоя сопровождается оттоком жидко-

сти к центру канала, который максимален вблизи входа и быстро затухает. Скорость центральных слоёв потока при этом возрастает.

Таблица 4.1.

Значения расчётных параметров по течению растворов и расплавов полимеров в круглых трубах

Рисунок	Рис. 4.4; 4.6(б)	Рис. 4.1; 4.2; 4.3; 4.5; 4.11; 4.12; 4.13; 4.15	Рис. 4.6 (а); 4.7; 4.8; 4.16	Рис. 4.9; 4.17	Рис. 4.10; 4.17
Параметры					
$R \cdot 10^3$, м	0,5	2,0	2,0	2,0	2,0
$L \cdot 10^3$, м	50	120	120	300	300
L / R	100	60	60	150	150
μ , Па · с	10^{-2}	$3,6 \cdot 10^3$	$3,6 \cdot 10^3$	$3,6 \cdot 10^4$	10^5
n	1	1; 0,2; 0,5	1; 0,5	1	1; 0,5
k , 1/град.	0	0; 003; 0,04	0; 003; 0,04	0	0; 003; 0,04
\bar{v}_0 , м/с	10^{-2}	$5 \cdot 10^{-3}$	10^{-3}	10^{-2}	10^{-2}
T_0 , °C	0	120	90	20	10
$T_{ст}$, °C	1	0	12	12	0
C , Дж/(кг °C)	10^2	$4 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^3$
λ , Вт/(м °C)	1	0,4	0,4	0,4	0,4
Re	10^2	$5,5 \cdot 10^{-6}$	$1,1 \cdot 10^{-6}$	$1,1 \cdot 10^{-6}$	$4,0 \cdot 10^{-7}$
Pr	1	$3,6 \cdot 10^7$	$3,6 \cdot 10^7$	$3,6 \cdot 10^8$	10^9
Pe	10^2	$2 \cdot 10^2$	$4 \cdot 10^2$	$4 \cdot 10^2$	$4 \cdot 10^2$

Численное исследование участка гидродинамической стабилизации, проведённое при различных значениях числа Re, показало, что длина участка L_1 хорошо согласуется с оценками (3.69), и при значениях $Re > 10$ расчёты дают оценку

$$L_1 = (0,03 \div 0,04) D \cdot Re, \quad (4.4)$$

где D – диаметр трубы.

При значениях $Re < 1$ величина L_1 не зависит от Re и оценивается как

$$L_1 = (0,5 \div 0,6) D. \quad (4.5)$$

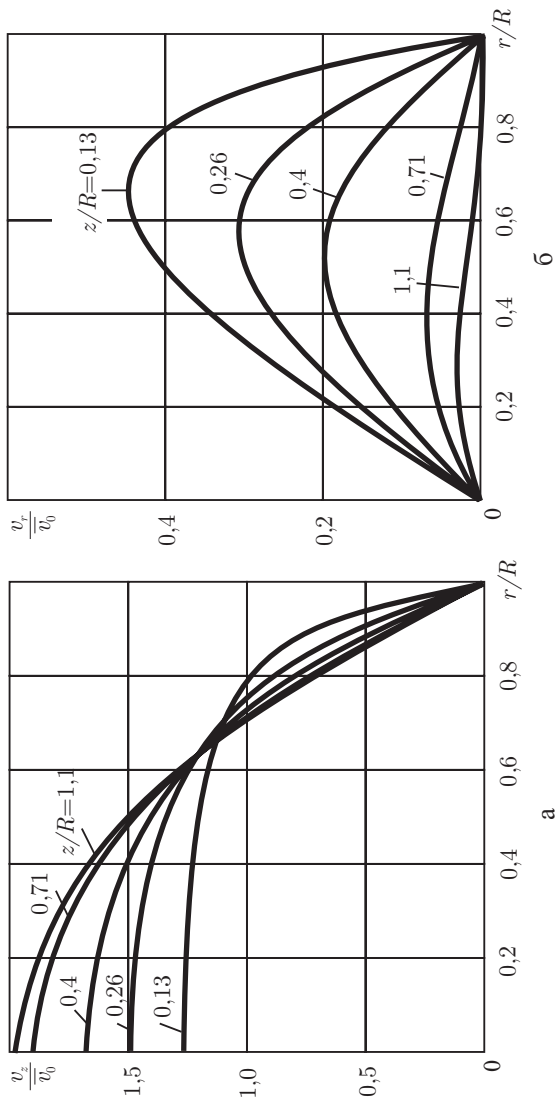


Рис. 4.1. Профили продольной v_z / \bar{v}_0 (а) и радиальной v_r / \bar{v}_0 (б) скоростей жидкости на участке гидродинамической стабилизации трубы. Цифры у кривых соответствуют расстоянию z/R от входа в трубу; \bar{v}_0 — средняя скорость жидкости

На рис. 4.2 показано изменение скорости жидкости на оси трубы при различных значениях Re . Длина участка гидродинамической стабилизации уменьшается с уменьшением Re , а при $Re \leq 1$ практически не изменяется.

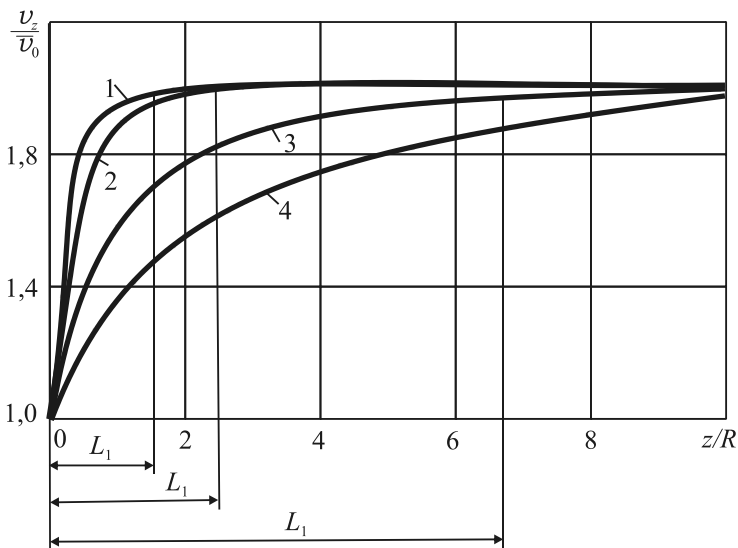


Рис. 4.2. Зависимость скорости v_z / \bar{v}_0 ньютоновской жидкости на оси трубы в зоне гидродинамической стабилизации от расстояния на входе в трубу при различных значениях числа Re : 1 — $Re \leq 1$; 2 — 10; 3 — 50; 4 — 150

Расчёты, проведённые для неньютоновских жидкостей с различными значениями расходов Q и аномалии вязкости n , показали, что при течении такой жидкости со значениями $Re < 1$ длина участка L_1 так же, как и в случае течения ньютоновской жидкости, практически не зависит от Re . Однако усиление неньютоновских свойств жидкости ведёт к росту L_1 . На рис. 4.3 показано изменение скорости жидкости в центре трубы для различных значений аномалии вязкости n . При изменении n от 1 до 0,2 величина L_1 возрастает от $0,5D$ до $1,25D$.

Частицы жидкости, попадающие из резервуара в трубу, движутся ускоренно, пока скорость их не достигнет значения, соответствующего области установившегося течения. Это требует дополнительных затрат энергии и приводит к тому, что величина давления P_0 , рассчитанного для режима установившегося течения, может значительно отличаться от фактического

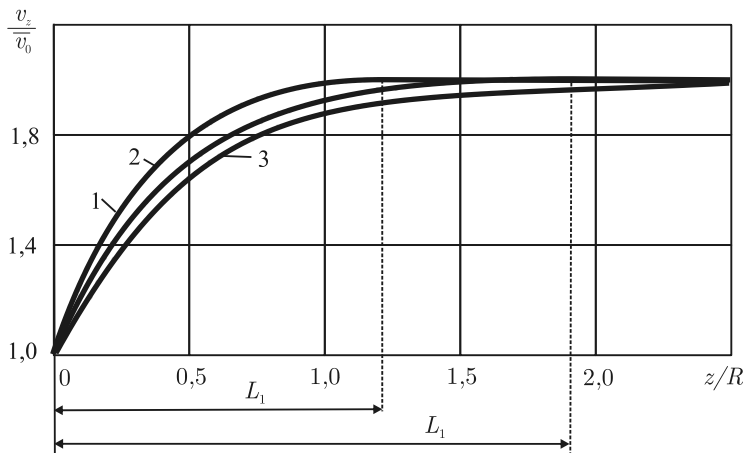


Рис. 4.3. Изменение осевой скорости неньютоновской жидкости в зоне гидродинамической стабилизации при малых значениях числа Re при различных значениях аномалии вязкости n : 1 — $n=1$; 2 — 0,5; 3 — 0,2

значения давления P . В данной постановке задачи считается, что вся перестройка поля скорости, а следовательно, и входовые потери давления сосредоточены внутри трубы.

Численные исследования течения на входном участке трубы позволят проследить изменение давления как по длине трубы, так и по радиусу.

Полученные поля давления в трубе выявляют общие закономерности и особенности образования потерь давления при течении как высоковязких ($Re < 1$), так и маловязких жидкостей ($Re > 10$). На рис. 4.4 и 4.5 показано распределение давления по длине и радиусу трубы при течении ньютоновских и неньютоновских жидкостей.

На входе в трубу параллельно движущиеся слои жидкости испытывают влияние стенок: торможение в пристенной области заставляет жидкость перетекать к центру трубы, где течение не затруднено. Таким образом, линии тока жидкости разворачиваются к оси трубы, образуя сходящееся течение. Оно осуществляется за счёт градиента давления $\partial P / \partial r$, направленного от стенки к оси трубы. На этом участке радиальные компоненты скорости жидкости v_r наиболее значительны. На некотором расстоянии от входа линии тока претерпевают второй разворот: скорость v_r уменьшается до нуля и течение из сходящегося вновь преобразуется в параллельное. Этот участок зоны стабилизации потока сопровождается отрицательным градиентом давления $\partial P / \partial r < 0$, который отжимает слои жидкости в обратном направлении, заставляя их

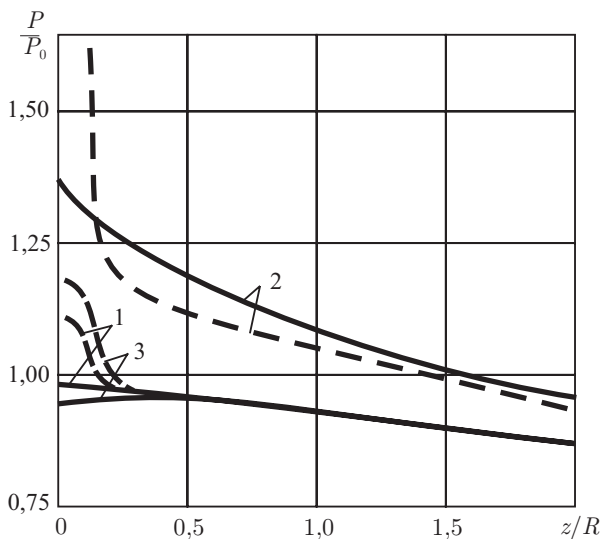


Рис. 4.4. Зависимость давления P/P_0 на входном участке трубы от расстояния от входа в трубу z/R ; n и Re равны: 1 — 1 и $5,5 \cdot 10^{-6}$; 2 — 1 и 10^2 ; 3 — 0,5 и $1,5 \cdot 10^{-5}$. Сплошные линии соответствуют давлению на оси трубы, пунктирные — на стенке

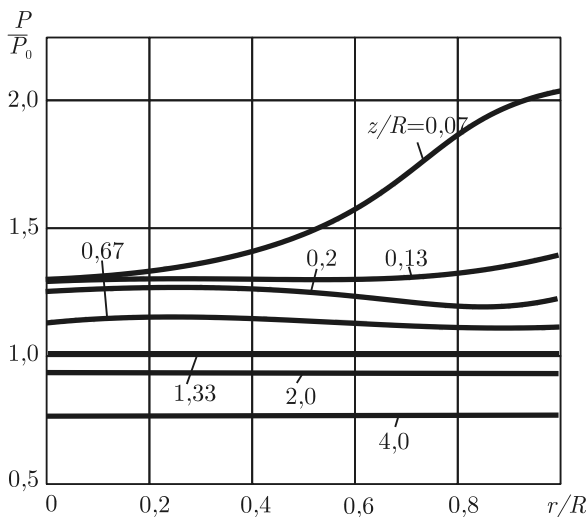


Рис. 4.5. Распределение давления P/P_0 по радиусу трубы r/R при $Re = 10^{-2}$ и различных расстояниях от входа в трубу z/R (числа у кривых)

снова течь вдоль стенки. И наконец, на расстоянии L_1 от входа, соответствующем длине участка гидродинамической стабилизации, все частицы жидкости начинают двигаться вдоль оси трубы с постоянными для себя скоростями и перепад давления по сечению трубы исчезает вовсе.

Отметим, что постоянное значение $\partial P / \partial z$ устанавливается в пределах L_1 , однако разность давлений в поперечном сечении трубы становится несущественной гораздо раньше (около $0,3L_1$). Во входном сечении трубы давление вблизи стенки значительно превосходит давление в центральных слоях потока.

Будем считать входовыми потерями разность давления на входе трубы, осреднённого по сечению \bar{P}_{ex} , и давления P_0 , вычисленного в предположении, что градиент давления остаётся постоянным по всей длине канала:

$$\Delta P_{\text{ex}} = \bar{P}_{\text{ex}} - P_0. \quad (4.5)$$

Величина ΔP_{ex} в нашей интерпретации представляет собой чисто вязкие потери на формирование течения в трубе и не зависит от длины трубы, если она превышает длину участка гидродинамической стабилизации.

Для учета входовых потерь давления в трубе при различных условиях течения удобно пользоваться методом Бэгли, согласно которому длина капилляра увеличивается на величину $\Delta L = n_B D$, а градиент давления в капилляре предлагается вычислять по формуле

$$\left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)_c = \frac{\Delta P_{\text{ex}}}{(L + n_B D)}, \quad (4.6)$$

где n_B – поправка по Бэгли, $(\partial P / \partial z)_c$ — градиент давления на участке стабилизированного течения, который для жидкостей, подчиняющихся степенному реологическому уравнению (2.72), определяется соотношением

$$\left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)_c = 2^{(2+n)} \left(\frac{1 + 3n}{n} \frac{\bar{v}_0}{D} \right)^n \frac{B}{D}, \quad (4.7)$$

где \bar{v}_0 — средняя скорость течения жидкости в трубе ($\bar{v}_0 = \frac{4Q}{\pi D^2}$).

Проведённые расчёты показали, что при значениях $\text{Re} > 10$ величина входовой поправки существенно зависит от числа Re потока жидкости:

$$n_B = (0,05 \div 0,075) D \cdot \text{Re}. \quad (4.8)$$

Решение задачи при значениях $Re < 1$ согласуется с оценкой n_B , приводящейся в работах [111], где для ползущих течений было получено $n_B = (0,59 \div 1,5) D$. Наши расчёты показали

$$n_B = (0,35 \div 0,55) D. \quad (4.9)$$

Следует отметить, что на самом деле формирование потока при переходе жидкости из резервуара в трубу происходит ещё до входа в трубу, так что во входном сечении трубы уже существует тонкий пристенный слой заторможенных частиц жидкости. Таким образом, для достоверной оценки потерь давления на участке гидродинамической стабилизации необходимо рассматривать течение на входе в трубу совместно с предшествующим ему течением в резервуаре (ёмкости). Решение в постановке, рассмотренной выше, может служить лишь для ориентировочной оценки поля давления на входе в трубу.

Как показали расчёты, проведённые для неньютоновских жидкостей, при усилении неньютоновских свойств жидкости, наряду с ростом длины участка гидродинамической стабилизации, наблюдается увеличение разности давлений в сечении трубы в зоне входа, которое реализуется за счет более высоких значений давления в пристенных слоях (см. рис. 4.4, кривая 3).

Неизотермическое течение

Решение неизотермической задачи о течении жидкости в трубе требует совместного рассмотрения уравнений неразрывности, движения и теплообмена [см. систему уравнений (3.66), (3.68)] с реологическим уравнением состояния и зависимостью вязкости жидкости от температуры.

При решении неизотермической задачи необходимо учитывать зависимость физических свойств жидкости (плотность, теплоёмкость и т. д.) от температуры. В такой полной постановке задача о неизотермическом течении является нелинейной и связанной и поэтому представляет сложность даже для приближённого решения.

Существенное упрощение задачи дают допущения о постоянстве теплофизических констант материала, а также о независимости вязкости от температуры. Последнее допущение приводит к тому, что задача распадается на две: уравнения движения могут решаться независимо от уравнения теплопроводности, а температура жидкости находится затем по полученным полям скоростей. Будем называть задачу в такой постановке несвязанной задачей теплообмена.

Аналитическое решение задачи о неизотермическом течении в круглой трубе удаётся получить только при существенных упрощениях, сводящих задачу к различным частным случаям.

Классическое решение одномерной несвязанной задачи для жидкости, подчиняющейся уравнению (2.72), определяется соотношениями [20]:

$$\frac{v_z}{\bar{v}_0} = 2 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right]; \quad (4.10, a)$$

$$\frac{T - T_{cm}}{T_0 - T_{cm}} = 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{3n+1}{n}}, \quad (4.10, б)$$

где $\bar{v}_0 = \frac{Q}{\pi R^2}$.

В литературе [112, 113] приводится решение связанной задачи о течении в бесконечной трубе неньютоновской жидкости с вязкостью, зависящей от температуры по уравнению (2.75).

Особый интерес представляет исследование течения на участке термической стабилизации, в пределах которого происходит развитие теплового пограничного слоя. Тепловое поле здесь можно разбить на ядро потока с температурой, равной температуре входа T_0 , и тепловой пограничный слой, в котором жидкость остывает или нагревается до температуры стенки. Развиваясь по мере продвижения вдоль трубы, пограничный слой достигает оси на расстоянии L_1 , и изотермическое ядро потока исчезает. Далее температура жидкости продолжает изменяться как по радиусу, так и по длине, однако сохраняется подобие профилей температуры. Это — участок стабилизированного теплообмена, для которого характерно постоянство теплового потока на стенке, который характеризуется числом Нуссельта:

$$\text{Nu} = \frac{D(\partial T / \partial r)_{cm}}{\bar{T} - T_{cm}} = \text{Nu}_\infty,$$

где $\bar{T} = \frac{2\pi}{Q} \int_0^R T v_z r dr$ — среднемассовая температура по сечению трубы;

$D = 2R$; T_{cr} — температура стенки; $(\partial T / \partial r)_{cr}$ — градиент температуры на стенке.

Известно приближённое аналитическое решение несвязанной задачи об остывании ньютоновской жидкости на участке термической стабилизации в трубе с изотермической стенкой — решение Гретса–Нуссельта [109]:

$$\frac{T - T_{cr}}{T_0 - T_{cr}} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \psi_k \exp \left(-2\epsilon_k^2 \frac{1}{\text{Pe}} \frac{z}{D} \right), \quad (4.11)$$

где $Pe = \frac{\bar{v}_0 D \rho C}{\lambda}$ — критерий Пекле; A_k , ψ_k , ε_k — коэффициенты, определяемые из граничных условий.

В ряде работ приводятся аналитические решения для более общих случаев теплообмена [20, 101]. Однако в большинстве своём эти решения весьма громоздки и содержат существенные упрощения.

При численном решении задачи по исследованию поля температур на участке термической стабилизации в круглой трубе решалась система уравнений (3.66, 3.68) со степенным реологическим уравнением состояния и вязкостью, зависящей от температуры по закону:

$$\eta = \mu_0 \exp[-k(T - T_0)] \left(\frac{I_2}{2} \right)^{\frac{n-1}{2}}, \quad (4.12)$$

где T_0 — температура во входном сечении канала.

Физические свойства жидкости (ρ , C , λ) считались постоянными. В качестве граничных условий для температуры задавалось её распределение на входе в трубу $T(0, r) = T_0$ и на стенке трубы $T(z, R) = T_{cm}$.

На рис. 4.6–4.9 приведены решения для различных вариантов несвязанной задачи течения и теплообмена при совместной термической и гидродинамической стабилизации течения. Развитие температурного поля при охлаждении жидкости сопровождается образованием изотермического ядра, в котором $T \approx T_0$, и теплового пограничного слоя, а также установлением подобных профилей температуры при $z > L_T$. Развитие температурного поля при нагревании жидкости происходит аналогичным образом. При этом в случае течения высоковязкой жидкости ($Re = 1,1 \cdot 10^{-6}$) стабилизация теплообмена происходит на фоне установившегося поля скорости ($L_1 \approx R$, $L_T \approx 40R$), а для маловязкой жидкости ($Re = 100$) развитие температурного и скоростного полей идёт одновременно ($L_1 \approx 10R$, $L_T \approx 8R$).

Характер распределения температуры на участке термической стабилизации существенно зависит от скорости потока жидкости, характерного размера канала, а также теплофизических характеристик материала (теплоёмкости и теплопроводности). Однако введение относительной координаты $\zeta = \frac{1}{Pe} \cdot \frac{z}{D}$ позволяет получать для течений жидкости при малой величине диссипации механической энергии распределение температуры в канале, не зависящее от всех отмеченных факторов. На рис. 4.7 показана зависимость температуры на оси канала от приведённой длины ζ при остывании ньютоновской жидкости. При малых значениях приведённой длины $\zeta \leq 0,02$ происходит интенсивное остывание жидкости вблизи стенок, а температура ядра практически не меняется. Это — участок активно-

го формирования профиля температуры. Начиная с $\zeta \approx 0,05$, температура жидкости равномерно понижается по всему сечению с сохранением подобия профиля. Такая оценка размеров начального термического участка соответствует данным, приведённым в работе [109] $\zeta \approx 0,055$.

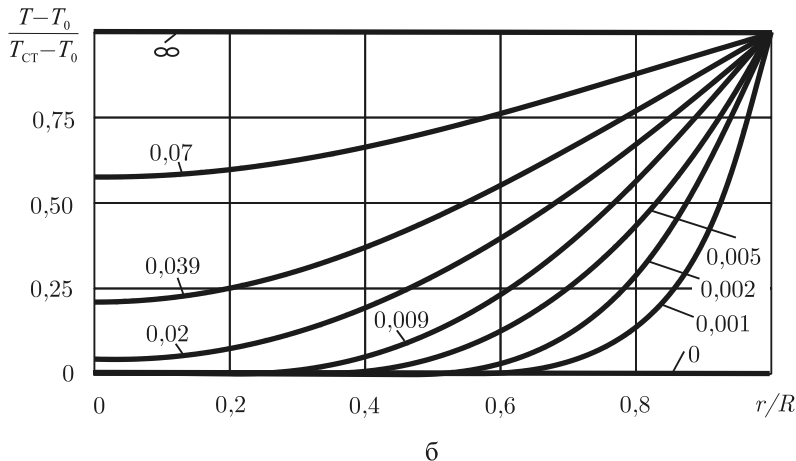
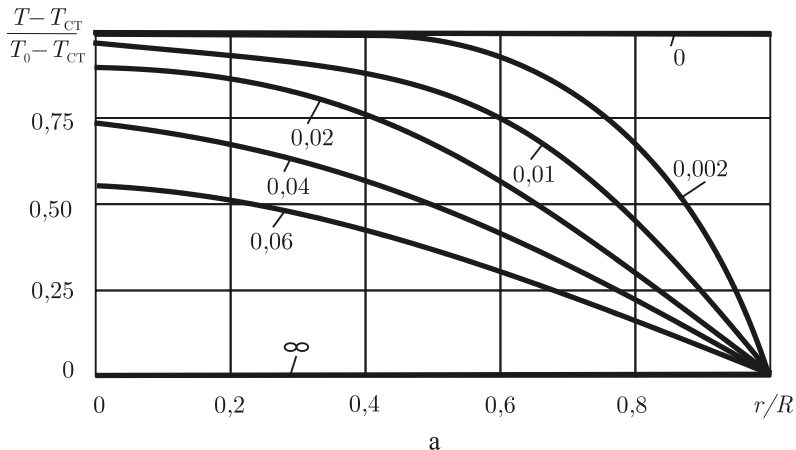


Рис. 4.6. Профили температур при течении ньютоновской жидкости на участке термической стабилизации: а — $T_0 > T_{ct}$, $Re = 1,1 \cdot 10^{-6}$, $Pr = 3,6 \cdot 10^7$, $Pe = 400$; б — $T_0 < T_{ct}$, $Re = 100$, $Pr = 1$, $Pe = 100$; цифры у кривых — расстояние

$$\zeta = \frac{1}{Pe} \cdot \frac{z}{D} \text{ от входа в трубу}$$

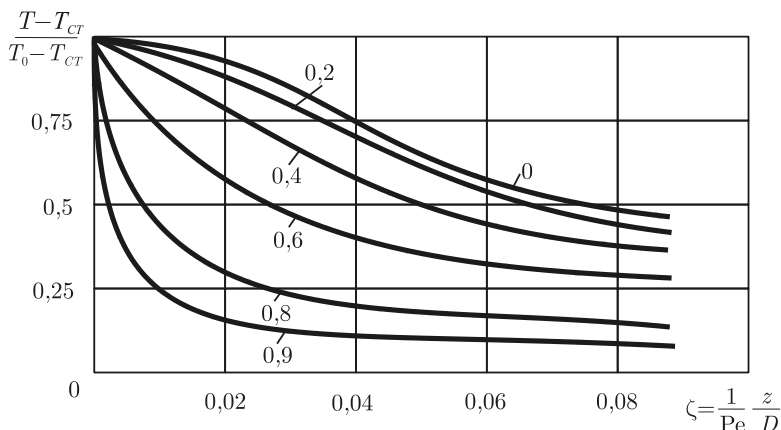


Рис. 4.7. Распределение температуры в трубе при течении ньютоновской жидкости на участке термической стабилизации: цифры у кривых — расстояние r/R от оси трубы

Переходя к размерным координатам, получим, что при параметрах течения, характерных для процессов получения волокон (особенно из расплавов полимеров), длина участка термической стабилизации во много раз превосходит длину участка гидродинамической стабилизации и часто может превышать длину канала. Таким образом, для достоверной оценки поля температуры при течении растворов и расплавов полимеров в каналах фильер, формирующих головок и некоторых прядильных машин необходимо проводить анализ с учётом участка термической стабилизации, так как профили температуры, характерные для бесконечной трубы, не всегда достигаются в реальных технологических процессах даже на весьма длинных каналах.

Из анализа результатов расчетов движения неньютоновской жидкости на участке стабилизации в условиях малой диссипации было установлено, что в этом случае наблюдается более интенсивное остывание жидкости. Это связано как с более плоской формой профиля скорости для жидкостей, подчиняющихся степенному реологическому закону, так и с увеличением длины участка гидродинамической стабилизации. Такая форма профиля скорости в этой зоне сопровождается более высокой теплоотдачей возле стенок, а более длинный участок гидродинамической стабилизации способствует более интенсивному теплообмену со стенкой.

На рис. 4.8 показано изменение температуры на оси трубы для жидкостей со степенным реологическим уравнением с различными значениями аномалии вязкости n . Интенсивность теплообмена на начальном участке возрастает с уменьшением n , а длина зоны термической стабилизации L_T сокращается.

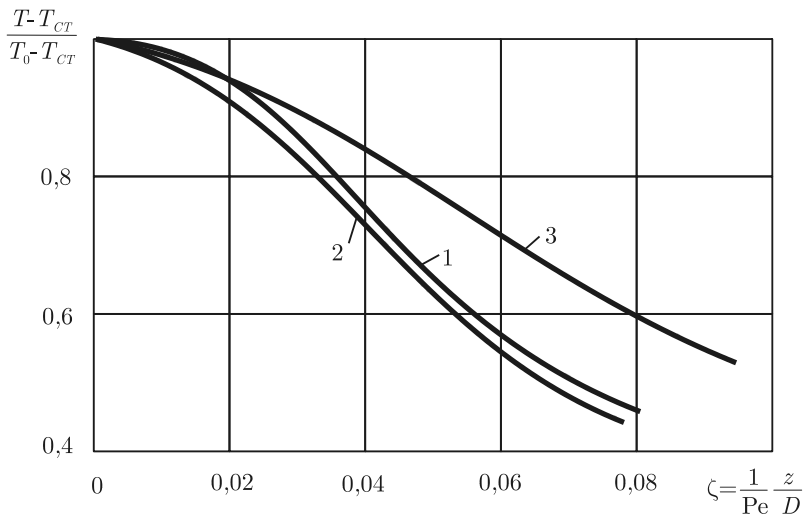


Рис. 4.8. Изменение температуры на оси трубы на участке термической стабилизации для жидкостей с различными реологическими свойствами: 1 – $n = 1$, $k = 0$; 2 – $0,5$, 0 ; 3 – 1 , $0,04$

Влияние диссипативного фактора существенно изменяет картину формирования температурного поля. При этом изменяется не только форма профиля температуры, но и длина участка термической стабилизации, а также предельное значение критерия Nu_{∞} , которое достигается после термической стабилизации потока.

На рис. 4.9 показано развитие профилей температуры при течении высоковязкой ньютоновской жидкости в трубе с «холодными» стенками в условиях существенной диссипации механической энергии. Диссипативный разогрев, наиболее интенсивный в зоне больших скоростей сдвига вблизи стенки, способствует разогреву жидкости во внутренних областях канала. Остывание жидкости происходит лишь в тонком пристенном слое. Таким образом, профили температуры по мере продвижения жидкости вдоль трубы стремятся к параболическому виду [см. уравнение (4.10, б)]. Распределение температуры, приведённое на рис. (4.6, а) и (4.9), получено при одинаковых значениях критерия Pe , а значит, и при одинаковой относительной длине канала $\zeta = \frac{1}{Pe} \cdot \frac{z}{D} = 0,06$. Их сравнение даёт наглядное представление о значимости диссипативного фактора при формировании температурного поля в случае течения высоковязких растворов и расплавов полимеров.

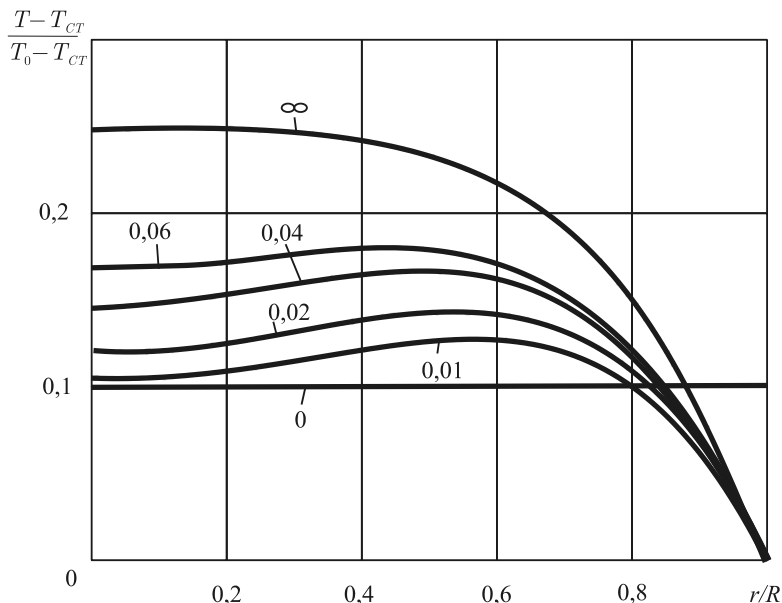


Рис. 4.9. Поле температуры ньютоновской жидкости на участке термической стабилизации в условиях значительного диссипативного разогрева. Цифры у кривых — расстояние от входа в $\frac{1}{Pe} \cdot \frac{z}{D}$

В условиях существенного диссипативного тепловыделения длина участка термической стабилизации определяется соотношением двух факторов — интенсивностью диссипации и диффузионной теплопроводности. Это соотношение характеризуется числом Бринкмана

$$Br = \frac{B_1 \bar{v}_0^2}{\lambda(T - T_{cm})}.$$

Как показывают расчеты, величина L_T оказывается пропорциональной числу Br : усиление диссипации удлиняет зону нестабилизированного теплообмена, а увеличение интенсивности диффузии тепла, определяемой разностью температур в потоке жидкости и на стенке трубы, ускоряет стабилизацию потока. Так, сравнивая рис. 4.9 и 4.6, а, можно заметить, что в условиях сильной диссипации нестабилизированные профили температуры наблюдаются на расстоянии, превосходящем размеры зоны L_T для течения без тепловыделения.

Поле температуры в трубе при сильном диссипативном разогреве существенно неоднородно. На рис. 4.9 показано изменение температуры для

случая, когда диссипативный разогрев значительно превышает диффузию тепла через стенки и сравним с конвективным переносом тепла. При этом наблюдается сильный разогрев жидкости вблизи стенки, причём максимум температуры в начале участка стабилизации находится на расстоянии $0,9R$ от оси и перемещается к центру канала по мере удаления от входа. Местный разогрев значительно превосходит среднюю температуру потока, так как ядро не успевает разогреваться при высоких скоростях течения. Экспериментальное подтверждение этого факта можно найти в работах [114, 115]. Возможность появления локальных перегревов вследствие диссипативного фактора необходимо учитывать, особенно при переработке термочувствительных растворов, а также расплавов полимеров, качество которых определяется весьма жёсткими температурными условиями.

Диссипативный разогрев ярче проявляется при течении ньютоновских жидкостей. На рис. 4.10 показаны профили температуры, полученные на участке трубы, приведённая длина которого $\zeta = 0,075$, при различных законах изменения вязкости. Снижение вязкости жидкости, подчиняющейся степенному реологическому уравнению, наиболее значительное в области максимальных скоростей сдвига вблизи стенки, значительно уменьшает местный диссипативный разогрев в этой зоне (кривая 3). К тому же результату приводит уменьшение вязкости с ростом температуры (кривая 2). Совместный учёт зависимости вязкости от температуры и скорости деформации (кривая 4) ещё больше снижает максимальное значение диссипативного разогрева, при этом форма профиля температуры остаётся той же.

Зависимость вязкости полимерной жидкости от температуры существенно усложняет картину течения и теплообмена. На рис. 4.11 и 4.12 показаны изменения скорости и температуры при течении ньютоновской жидкости в трубе с «холодными» стенками. Зависимость вязкости от температуры описывается соотношением (4.12), где принято $n = 1$. Диссипативный разогрев мал. Как видно из рисунка, наиболее интенсивное охлаждение идёт на начальном участке трубы возле стенки. При этом вязкость жидкости вблизи стенки быстро нарастает, и жидкость в этом слое сильно тормозится, образуя как бы утолщение стенки и уменьшая просвет трубы. Не успевшая остыть жидкость устремляется к центру потока, и скорость на оси возрастает по сравнению со скоростью изотермического течения. Увеличение скорости в центре трубы приводит к усиленному конвективному переносу тепла в этой зоне, и остывание жидкости происходит медленнее, чем у жидкости с постоянной вязкостью (ср. рис. 4.8 и 4.12).

Дальнейшее охлаждение жидкости приводит к выравниванию температуры, а следовательно, и вязкости по сечению трубы.

На рис. 4.13 показано изменение давления по длине для жидкости, вязкость которой зависит от температуры. Градиент давления $|\partial P / \partial z|$ равномерно увеличивается по мере удаления от входа канала с ростом вязкости жидкости и становится постоянным при достижении области термически стабилизированного течения.

Рис. 4.14 показывает изменение скорости на оси трубы при различных значениях расхода. Как видно из рисунка, скорость на оси канала изменяется немонотонно. На начальном участке канала интенсивное охлаждение жидкости возле стенок приводит к образованию вблизи стенки слоя высоковязкой медленно текущей жидкости и ускорения центральных слоев потока. По мере удаления от входа скорость центральных слоёв жидкости снижается в связи с уменьшением температуры в центре трубы и выравниванием вязкости жидкости по сечению.

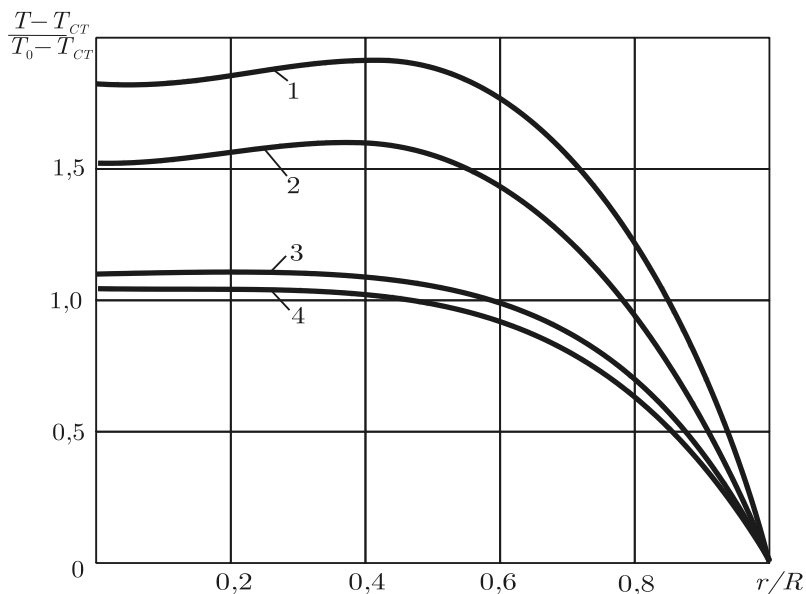


Рис. 4.10. Профили температуры для жидкостей с различными реологическими свойствами на расстоянии $\frac{1}{Pe} \cdot \frac{z}{D} = 0,075$ от входа в трубу: 1 — $n = 1, k = 0$; 2 — 1, 0,04; 3 — 0,5, 0; 4 — 0,5, 0,04

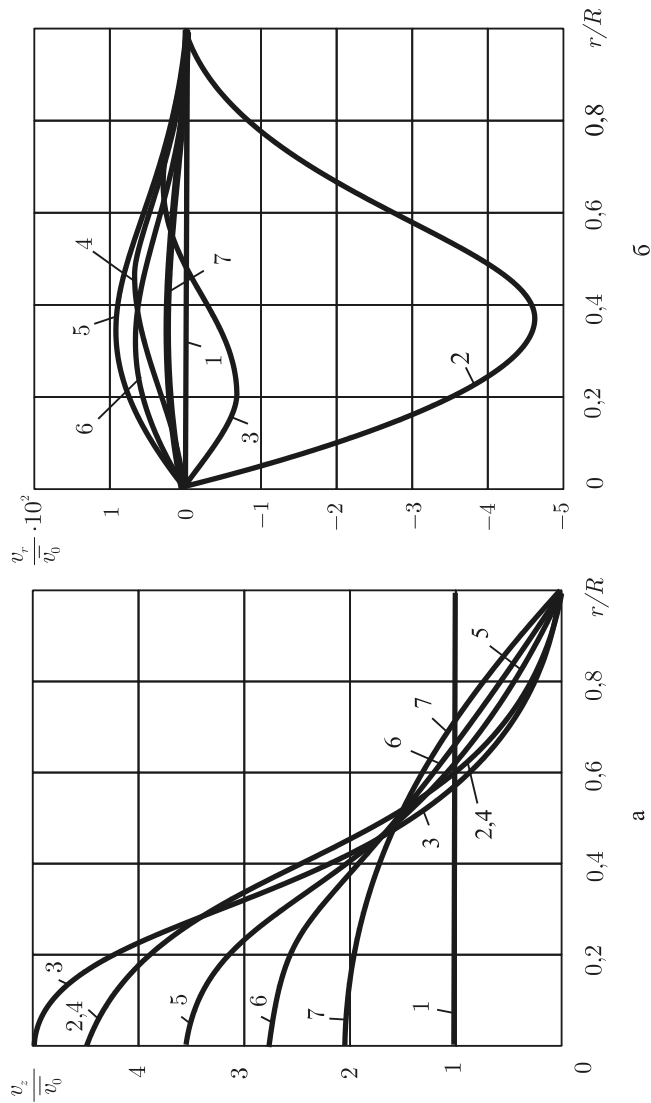


Рис. 4.11. Поле продольной (а) и радиальной (б) скоростей жидкости с температурным коэффициентом вязкости $k = 0,04$ 1/град в трубе: 1 — $z/R = 0$, $\frac{1}{Pe} \cdot \frac{z}{D} = 0$; 2 — 3,9, 0,01; 3 — 7,8, 0,02; 4 — 11,9, 0,03; 5 — 21, 0,0053; 6 — 32,4, 0,081; 7 — 44,3, 0,111

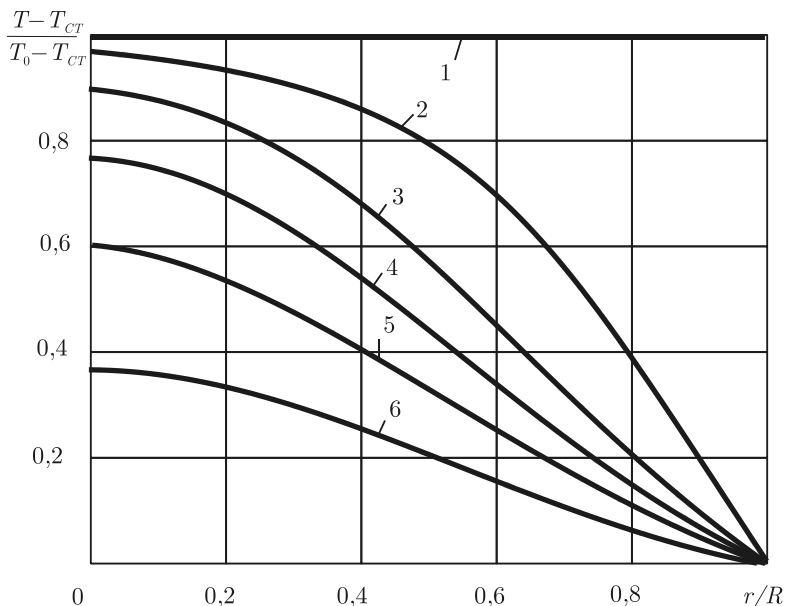


Рис. 4.12. Поле температуры жидкости с температурным коэффициентом вязкости $k = 0,04$ 1/град. в трубе: 1 — $z/R = 0$ ($\zeta = \frac{1}{\text{Pe}} \cdot \frac{z}{D} = 0$); 2 — 3,9 (0,01); 3 — 11,9 (0,03); 4 — 21 (0,053); 5 — 32,4 (0,081); 6 — 44,3 (0,111)

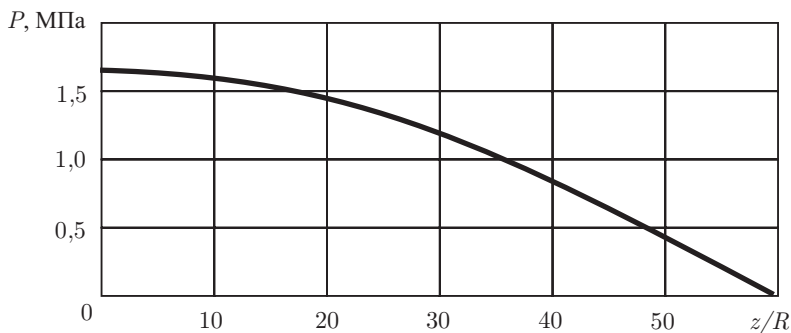


Рис. 4.13. Распределение давления по оси трубы для жидкости с температурным коэффициентом вязкости $k = 0,04$ 1/град

Профиль скорости жидкости при различных значениях расхода может меняться вдоль канала по-разному. Так, при малых скоростях течения ско-

рость жидкости на оси трубы достигает максимального значения на некотором расстоянии от входа, а затем убывает, стремясь к $2\bar{v}_0$. При больших расходах жидкость «проскакивает» трубу, не достигая точки максимума, поэтому при продвижении по трубе скорость центральных слоёв постоянно возрастает, а зона торможения вблизи стенок расширяется.

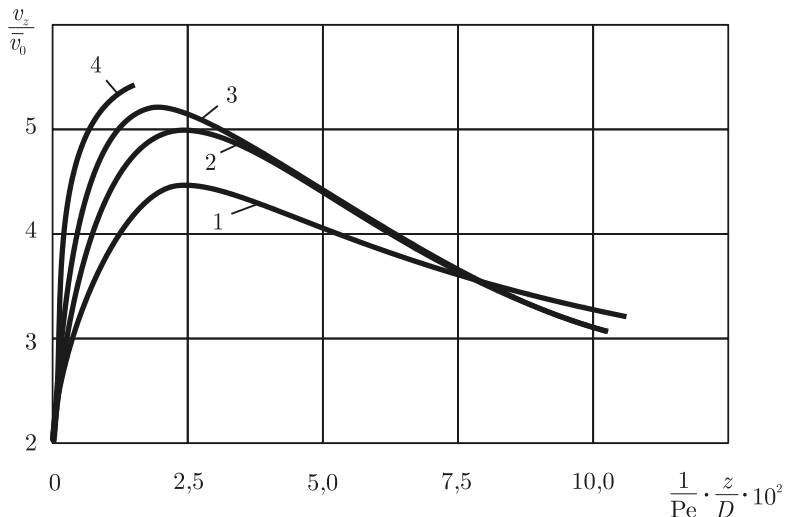


Рис. 4.14. Скорость жидкости с температурным коэффициентом вязкости $k=0,04$ 1/град на оси трубы: 1 — $\bar{v}_0=10^{-3}$ м/с; 2 — $5 \cdot 10^{-3}$; 3 — 10^{-2} ; 4 — $4 \cdot 10^{-2}$

Существенная нелинейность дифференциальных уравнений, описывающих течение жидкости с вязкостью, зависящей от температуры, может привести к появлению неединственности решений. Примером такой неоднозначности решения может служить явление «теплового взрыва», описанное в работах [112, 113, 116, 117]. В этих работах на основании анализа одномерного течения показано, что напорно-расходные характеристики могут, в зависимости от условий течения и свойств жидкости, быть монотонными, иметь точку перегиба или принимать S-образную форму (см. рис. 4.15). Как видно из рисунка, при определённых условиях при течении в трубе в режиме заданного давления существует область неоднозначности зависимости $P = f(Q)$. На практике это выражается в гистерезисных явлениях, наблюдаемых в этой области [116].

В работе [117] приводится аналитическое решение для связанной задачи течения и теплообмена жидкости в бесконечной трубе со стенками постоянной температуры $T_{\text{ст}}$. Реологические свойства жидкости определяют

ся соотношением (4.12). Решение, связывающее интегральные характеристики течения: расход $Q = 2\pi \int_0^R v_z r dr$ и среднемассовую температуру

$$\bar{T} = \frac{2\pi}{Q} \int_0^R T v_z r dr, \text{ имеет вид:}$$

$$\bar{T}(\zeta) = T_{\text{ст}} + (T_{\text{ст}} - T_0) \exp(-\zeta / \tilde{Q}). \quad (4.13)$$

Здесь введены безразмерные переменные $\zeta = z / L$, $\tilde{Q} = \frac{Q \rho C_p}{2\pi R L \alpha}$;

$$\alpha = \frac{\lambda}{(T_{\text{ст}} - \bar{T})} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} - \text{коэффициент теплопередачи.}$$

В этом случае безразмерные величины расхода \tilde{Q} и давления на входе канала $\tilde{P}_0 = \frac{P_0}{2\mu L} \left[\frac{R^{2+1/n} \rho C_p}{2(3+1/n)L\alpha} \right]^n$ оказываются связанными соотношением

$$\tilde{P}_0 = \tilde{Q}^{n+1} \exp(-k T_{\text{ст}}) \left[\text{Ei}(-\tilde{B}) - \text{Ei}(-\tilde{B} \exp(-1/\tilde{Q})) \right], \quad (4.14)$$

где $\tilde{B} = k(T_0 - T_{\text{ст}})$ — безразмерный параметр, $\text{Ei}(\cdot)$ — интегральная показательная функция, n — аномалия вязкости; k — температурный коэффициент вязкости; T_0 — температура жидкости, входящей в трубу; $T_{\text{ст}}$ — температура стенки трубы.

Анализ полученного решения позволяет указать условия, при которых расходно-напорная характеристика такого течения становится неоднозначной. Эти условия определяются соотношением:

$$\frac{\tilde{B}}{n} = \frac{k(T_0 - T_{\text{ст}})}{n} \leq e = 2,72. \quad (4.15)$$

На примере кривой 3 рис. 4.15 остановимся более подробно на эффектах, проявляющихся в результате неоднозначности напорно-расходных характеристик. Предположим, что жидкость перекачивается из сосуда А в сосуд Б по трубе, напорно-расходная характеристика которой изображается кривой 3 (рис. 4.15). В сосуде А газом создается определённое давление, которое и служит движущей силой перемещения жидкости по трубе. При увеличении давления в ёмкости А расход жидкости по трубе начинает возрастать и в точке *a* напорно-расходной характеристики достигает величины Q_1 . При дальнейшем небольшом увеличении давле-

ния газа в сосуде А расход жидкости в трубе скачком увеличится до величины Q_2 (точка б).

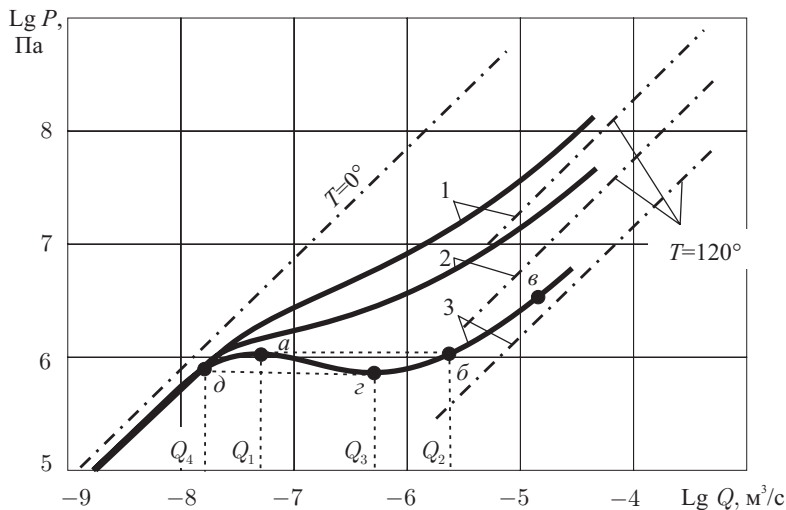


Рис. 4.15. Напорно-расходные характеристики течения жидкости в трубе:

1 — $k = 0,03$ 1/град ($\bar{B}/n = 3,6$); 2 — 0,04 (4,8); 3 — 0,05 (6)

При дальнейшем увеличении давления газа в сосуде А мы поднимемся до точки в напорно-расходной характеристики и выше. Таким образом, при повышении давления газа в ёмкости А участок аб напорно-расходной характеристики трубы является нереализуемым. При уменьшении давления газа в ёмкости А мы опустимся с точки в напорно-расходной характеристики трубопровода до точки б, а затем до точки з с расходом Q_3 . Дальнейшее уменьшение давления газа в сосуде А сначала уменьшит расход в трубе до величины Q_4 (точка д), и нереализуемым становится участок зд напорно-расходной характеристики.

Если жидкость транспортировать из сосуда А в сосуд Б, например, шестеренным насосом (контролируя расход), то с увеличением оборотов насоса можно получить все точки напорно-расходной характеристики трубопровода.

Численное решение, приведённое в работе [94], моделирует течение и теплообмен жидкости на начальном участке канала в режиме заданного расхода. При решении предполагалось, что температура стенки канала постоянна, вязкость жидкости описывалась соотношением (4.12). На основании решения двумерной задачи получена S-образная напорно-расходная характеристика, включая неустойчивый участок (рис. 4.15).

Напорно-расходные характеристики течения ньютоновской жидкости в круглой трубе, приведенные на рис. 4.15, рассчитаны для различных значений параметра \bar{B} . Зависимости $P = f(Q)$, построенные в логарифмических координатах, асимптотически стремятся при малых и больших расходах к прямым, соответствующим характеристикам для изотермического течения жидкостей с температурами $T_{\text{ст}}$ (малые расходы) и T_0 (большие расходы). При этом в первом случае профили температуры почти на всем протяжении, за исключением короткого участка в начале канала, близки к $T_{\text{ст}}$. Во втором случае температура изменяется от T_0 до $T_{\text{ст}}$ только в пределах пограничного слоя, толщина которого мала на всём протяжении трубы.

В области средних значений расхода поле температуры и вязкости существенно неравномерно, и зависимость $\lg P = f(\lg Q)$ значительно отличается от линейной. Понижение давления с ростом расхода в средней части кривой связано с тем, что с увеличением скорости течения теплообмен через стенку уменьшается, средняя по сечению температура жидкости возрастает, а вязкость падает.

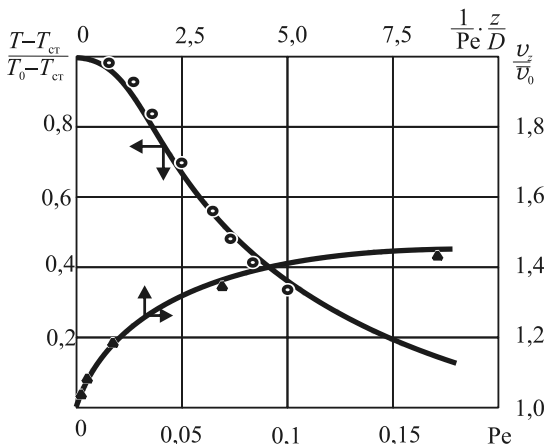


Рис. 4.16. Изменение скорости и температуры жидкости на оси трубы на участке стабилизации течения: — — численное решение; ▲ — аналитическое решение Шлихтинга; ○ — аналитическое решение Гретса-Нуссельта

При фиксированном перепаде температур $T_0 - T_{\text{ст}}$ отклонение градиента $\partial \lg P / \partial \lg Q$ от постоянной величины, соответствующей изотермическому течению, возрастает с ростом температурного коэффициента вязкости k (с усилением зависимости вязкости от температуры). В численном эксперименте монотонность расходно-напорных кривых наблюдалась

вплоть до значений параметра

$$(\bar{B}/n) < 5,5. \quad (4.16)$$

Дальнейшее увеличение параметра \bar{B}/n вследствие роста коэффициента k или перепада температур $(T_{\text{ст}} - T_0)$ сопровождается появлением на напорно-расходной характеристике участка, где $\partial \lg P / \partial \lg Q < 0$.

Результаты численного анализа задачи о течении и теплообмене ньютоновских и аномальновязких жидкостей на входе в трубу при стационарном течении сравнивались с результатами, полученными Шлихтингом [101] с использованием методов теории пограничного слоя (рис. 4.16) и аналитического решения задачи [20].

На рис. 4.17 показано сравнение стабилизированных профилей v_x и T при различных значениях n . Максимальное расхождение составило для v_x — 1%, для T — 1,5%.

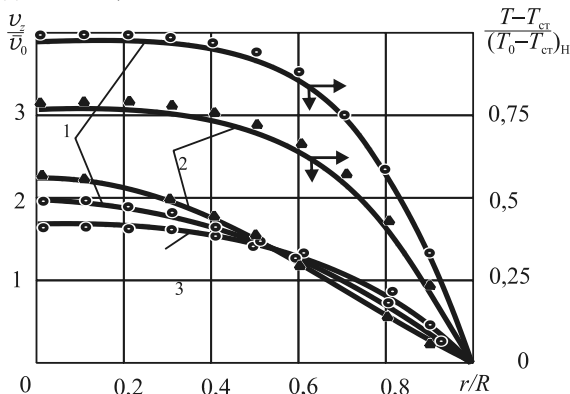


Рис. 4.17. Профили скорости и температуры ньютоновской (1, 2) и степенной $n = 0,5$ (3) на участке установившегося течения в трубе: — — численное решение; \circ , \blacktriangle — аналитическое решение МакКелви [20]; 1 — несвязная задача; 2 — связанная задача; $(T_0 - T_{\text{ст}})_H$ — разность температур в несвязной задаче

Стационарное течение полимерных жидкостей

Изотермическое течение

Рассмотрим изотермическое стационарное течение растворов и расплавов полимеров в круглой трубе с внутренним радиусом R и длиной L . Направим ось z по оси трубы, а ось r — по её радиусу. Течение жидкости происходит за счёт давления P_0 , приложенного на входе в трубу. Расчётная схема задачи приведена на рис. 4.18.

В качестве реологического уравнения для жидкости используем уравнение Балкли–Гершеля для нелинейной вязкопластической жидкости (2.71), которое для нашего случая течения запишется в виде выражения (3.73).

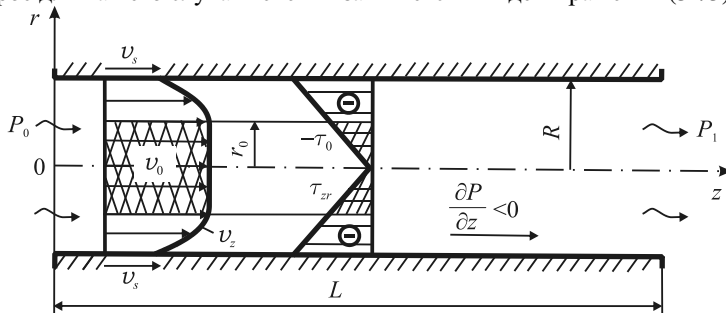


Рис. 4.18. Схема стационарного течения вязкопластической жидкости в трубе со скольжением

На границе зададим условия скольжения:

$$v_s = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau \leq \tau_s; \\ \frac{\beta_s(\tau_{ст})|\tau_{ст}|}{R^{m_0}} & \text{при } \tau > \tau_s. \end{cases} \quad (4.17)$$

Уравнение движения в проекции на ось z (см. уравнение 2.17, в) запишется так:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{zr}) = -A \quad (A = |\partial P / \partial z|). \quad (4.18)$$

Интегрируя уравнение (4.18) с использованием условия, что при $r = r_0 = 2\tau_0 / A$ $\tau_{zr} = -\tau_0$, получим

$$\tau_{zr} = -\frac{Ar}{2}. \quad (4.19)$$

Учитывая, что $\tau_{zr}|_{r=R} = -\frac{AR}{2}$, и считая $\beta_s = \text{const}$, граничные условия скольжения жидкости по внутренней поверхности трубы преобразуются к виду:

$$v_s = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau \leq \tau_s; \\ \frac{1}{2} \beta_s A R^{1-m_0} & \text{при } \tau > \tau_s. \end{cases} \quad (4.20)$$

Подставляя уравнение (4.19) в реологическое уравнение (3.73), придём к выражению

$$-\tau_0 - B \left| -\frac{\partial v_z}{\partial r} \right|^n = -\frac{Ar}{2},$$

откуда

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = -\left(\frac{1}{B}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{Ar}{2} - \tau_0\right)^{\frac{1}{n}}. \quad (4.21)$$

Интегрируя уравнение (4.21) по r с использованием граничного условия (4.20) при $\tau > \tau_s$, получим формулу для определения профиля скорости v_z :

$$v_z = \frac{2n}{1+n} \left(\frac{1}{B}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{1}{A} \left[\left(\frac{A}{2}R - \tau_0\right)^{\frac{1+n}{n}} - \left(\frac{A}{2}r - \tau_0\right)^{\frac{1+n}{n}} \right] + \frac{1}{2} \beta_s A R^{1-m_0}. \quad (4.22)$$

Скорость упругой зоны (ядра потока) получим из выражения (4.22) при $r = r_0 = 2\tau_0/A$:

$$v_0 = \frac{2n}{1+n} \left(\frac{1}{B}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{1}{A} \left(\frac{A}{2}R - \tau_0\right)^{\frac{1+n}{n}}. \quad (4.23)$$

Расход жидкости через трубу вычисляется следующим образом:

$$Q_z = \pi r_0^2 v_0 + 2\pi \int_{r_0}^R v_z r dr. \quad (4.24)$$

Подставляя в уравнение (4.24) значения скоростей v_z и v_0 из выражений (4.22) и (4.23) и произведя интегрирование с учётом того, что $r_0 = 2\tau_0/A$, будем иметь:

$$Q_z = \frac{4n}{1+n} \pi \left(\frac{1}{B}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{1}{A} \left(\frac{A}{2}R - \tau_0\right)^{\frac{1+n}{n}} \times \\ \times \left\{ \frac{R}{2} - \frac{4n}{A^2} \left[\frac{\left(\frac{A}{2}R - \tau_0\right)^2}{1+3n} + \tau_0 \frac{\left(\frac{A}{2}R - \tau_0\right)}{1+2n} \right] \right\} + \frac{1}{2} \pi \beta_s A R^{3-m_0}. \quad (4.25)$$

Поскольку $A = \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right| = \frac{|\Delta P|}{L}$, то, задавшись перепадом давления ΔP , по уравнению (4.25) легко определить величину расхода жидкости Q_z .

Рассмотрим частные случаи полученного решения задачи.

При $n = 1$ получим формулы для течения линейной вязкопластичной жидкости, подчиняющейся реологическому уравнению (2.70), с учётом пристенного скольжения:

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = -\frac{1}{\mu} \left(\frac{A}{2} r - \tau_0 \right); \quad (4.26)$$

$$\left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{1}{\mu} \left(\frac{A}{2} R - \tau_0 \right); \quad (4.27)$$

$$v_z = \frac{1}{\mu} \left[\frac{A}{4} (R^2 - r^2) - (R - r) \tau_0 \right] + \frac{1}{2} \beta_s A R^{1-m_0}; \quad (4.28)$$

$$v_0 = \frac{1}{\mu A} \left(\frac{A}{2} R - \tau_0 \right)^2 + \frac{1}{2} \beta_s A R^{1-m_0}; \quad (4.29)$$

$$Q_z = \frac{2\pi}{\mu A} \left(\frac{A}{2} R - \tau_0 \right)^2 \times \\ \times \left\{ \frac{R^2}{2} - \frac{4}{A^2} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{A}{2} R - \tau_0 \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{A}{2} R - \tau_0 \right) \tau_0 \right] \right\} + \frac{1}{2} \pi \beta_s A R^{3-m_0}. \quad (4.30)$$

При $\tau_0 = 0$ получим формулы для течения растворов и расплавов полимеров, подчиняющихся степенному реологическому уравнению (2.72), с учётом пристенного скольжения:

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = - \left(\frac{1}{B} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{A}{2} r; \quad (4.31)$$

$$\left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_{r=R} = - \left(\frac{1}{B} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{A}{2} R; \quad (4.32)$$

$$v_z = \frac{n}{1+n} \left(\frac{A}{2B} \right)^{\frac{1}{n}} R^{\frac{1+n}{n}} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{1+n}{n}} \right] + \frac{1}{2} \beta_s A R^{1-m_0}; \quad (4.33)$$

$$v_0 = \frac{n}{1+n} \left(\frac{A}{2B} \right)^{\frac{1}{n}} R^{\frac{1+n}{n}} + \frac{1}{2} \beta_s A R^{1-m_0}; \quad (4.34)$$

$$Q_z = \frac{n}{1+3n} \left(\frac{AR}{2B} \right)^{\frac{1}{n}} \pi R^3 + \frac{1}{2} \pi \beta_s A R^{3-m_0}. \quad (4.35)$$

При $\tau_0 = 0$ и $n = 1$ получим выражения, описывающие течение ньютоновской жидкости с учётом пристенного скольжения:

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = -\frac{A}{2\mu} r; \quad (4.36)$$

$$\left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{A}{2\mu} R; \quad (4.37)$$

$$v_z = \frac{A}{4\mu} R^2 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \beta_s A R^{1-m_0}; \quad (4.38)$$

$$v_0 = \frac{A}{4\mu} r^2 + \frac{1}{2} \beta_s A R^{1-m_0}; \quad (4.39)$$

$$Q_z = \frac{\pi A}{8\mu} R^4 + \frac{1}{2} \beta_s A R^{3-m_0}. \quad (4.40)$$

Положив во всех полученных выражениях $\beta_s = 0$, получим формулы течения жидкости с учётом прилипания их к внутренней стенке трубы (течение без скольжения).

Неизотермическое течение

Рассмотрим установившееся ламинарное неизотермическое течение расплава поликапроамида в круглой бесконечной трубе. Подобная задача для степенной жидкости в предположении, что её вязкость не зависит от температуры, рассматривалась в работе [20].

Предположим, что скорость расплава полимера и его температура не изменяются вдоль трубы (направление z) и изменяются только по её радиусу r , а теплопроводность расплава полимера λ не зависит от температуры. Допустим, что только одна компонента вектора скорости, направленная вдоль оси трубы, не равна тождественно нулю. Массовыми силами будем пренебрегать. Температуру стенки будем принимать постоянной и равной T_0 (стенка трубы термостатирована). На внутренней поверхности трубы действует граничное условие прилипания.

С учетом принятых допущений уравнения движения (2.17, в) и энергии (2.21) выглядят следующим образом:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \tau_{rz}) = -A, \quad (A = |dP / dz|); \quad (4.41)$$

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{\tau_{rz}}{\lambda} \frac{dv_z}{dr} = 0. \quad (4.42)$$

В качестве реологической модели для расплава поликапроамида прием реологическое уравнение Рабиновича с параболической зависимостью вязкости от температуры:

$$\frac{dv_z}{dr} = \frac{1 + \beta^2 (T - T_0)}{\mu_0} (1 + c\tau_{rz}^2) \tau_{rz}, \quad (4.43)$$

где μ_0 — наибольшая ньютоновская вязкость расплава.

Интегрируя уравнение движения (4.41) с использованием граничного условия $\tau_{rz}(0) = 0$, получим:

$$\tau_{rz} = -\frac{1}{2} Ar. \quad (4.44)$$

Подставляя выражения (4.43) и (4.44) в уравнение (4.42) и вводя безразмерные переменные $\theta = 1 + \beta^2 (T - T_0)$ и $\zeta = r / R_0$, будем иметь:

$$\zeta^2 \frac{d^2 \theta}{d\zeta^2} + \zeta \frac{d\theta}{d\zeta} + \left(\frac{C\beta^2 R_0^6 A^4}{16\mu_0 \lambda} \zeta^6 + \frac{\beta^2 R_0^4 A^2}{4\mu_0 \lambda} \zeta^4 \right) \theta = 0, \quad (4.45)$$

где R_0 — внутренний радиус трубы.

Производя в уравнении (4.45) замену переменной $\xi = \zeta / \alpha$, получим дифференциальное уравнение для определения температуры расплава полимера вдоль радиуса трубы:

$$\xi^2 \frac{d^2 \theta}{d\xi^2} + \xi \frac{d\theta}{d\xi} + (\xi^6 + x\xi^4) \theta = 0, \quad (4.46)$$

где $\alpha = \sqrt[6]{\frac{16\mu_0 \lambda}{C\beta^2 R_0^6 A^4}}$, $x = \sqrt[3]{\frac{4\beta^2}{C^2 A^2 \lambda \mu_0}}$.

Частные решения уравнения (4.46) будем искать в виде степенных рядов по степеням ξ :

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} C_k \xi^k \quad (C_0 = 1); \\ \theta_2 &= \theta_1 \ln \xi + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi^k, \end{aligned} \quad (4.47)$$

а общее решение — в виде

$$\theta = A_1 \theta_1 + B_1 \theta_2, \quad (4.48)$$

где A_1 и B_1 — постоянные коэффициенты.

Подставляя θ_1 в дифференциальное уравнение (4.46) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ξ , найдём:

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_5 = \dots = 0; \quad C_4 = -\frac{x}{16}; \quad C_6 = -\frac{1}{36}. \quad (4.49)$$

В данном случае общий вид коэффициентов можно определить из выражения

$$C_k = \frac{1}{k^2} (C_{k-6} + x C_{k-4}), \quad k = 6, 7, 8, \dots \quad (4.50)$$

Подставляя θ_2 в дифференциальное уравнение (4.46) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ξ , найдём коэффициенты второго ряда:

$$\begin{aligned} a_1 = a_2 = a_3 = a_5 = \dots = 0; \quad a_4 = \frac{x}{32}; \quad a_6 = \frac{1}{108}; \\ a_k = -\frac{1}{k^2} (2k C_k + a_{k-6} + x a_{k-4}), \quad k = 6, 7, 8. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Подставляя в выражение (4.48) значения θ_1 и θ_2 из формулы (4.47), получим:

$$\theta = A_1 \sum_{k=0}^{\infty} C_k \xi^k + B_1 \left(\ln \xi \sum_{k=0}^{\infty} C_k \xi^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k \right). \quad (4.52)$$

Для определения констант A_1 и B_1 воспользуемся граничными условиями:

$$\begin{aligned} \theta = 1 \quad \text{при} \quad \xi = 1/\alpha; \\ \frac{d\theta}{d\xi} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Коэффициенты A_1 и B_1 определим из выражения (4.52), используя граничные условия (4.53):

$$A_1 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} C_k \left(\frac{1}{\alpha} \right)^k}, \quad B_1 = 0, \quad (4.54)$$

тогда уравнение (4.52) примет вид

$$\theta = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} C_k \xi^k}{\sum_{k=0}^{\infty} C_k \left(\frac{1}{\alpha} \right)^k}. \quad (4.55)$$

Переходя в уравнении (4.55) к размерным переменным, получим:

$$T = \frac{1}{\beta^2} \left[\left(\beta^2 T_0 - 1 \right) + \frac{\sum_{k=0}^{\infty} C_k \left(\frac{\zeta}{\alpha} \right)^k}{\sum_{k=0}^{\infty} C_k \left(\frac{1}{\alpha} \right)^k} \right]. \quad (4.56)$$

Уравнение (4.56) описывает распределение температуры расплава полимера вдоль радиуса трубы. При $\zeta = 1$ ($r = R_0$) $T = T_0$.

Подставляя в реологическое уравнение (4.43) выражение (4.44) и (4.45) и вводя безразмерную скорость в виде $w = \mu_0 \frac{v}{AR_0^2}$, получим уравнение для определения градиента скорости:

$$\frac{dw}{d\xi} = -\frac{\alpha^2}{2} \cdot \frac{\xi \sum_{k=0}^{\infty} C_k \xi^k + \frac{\xi^3}{x} \sum_{k=0}^{\infty} C_k \xi^k}{\sum_{k=0}^{\infty} C_k \left(\frac{1}{\alpha} \right)^k}. \quad (4.57)$$

Интегрируя уравнение (4.57) с использованием условия прилипания расплава к стенке трубы $w = 0$ при $\xi = 1/\alpha$, получим выражение для определения профиля скорости:

$$w = \frac{\alpha^2}{2} \cdot \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k}{k+2} \left[\left(\frac{1}{\alpha} \right)^{k+2} - \xi^{k+2} \right] + \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k}{k+4} \left[\left(\frac{1}{\alpha} \right)^{k+4} - \xi^{k+4} \right]}{\sum_{k=0}^{\infty} C_k \left(\frac{1}{\alpha} \right)^k}. \quad (4.58)$$

Расход расплава полимера через трубу определим по формуле

$$Q = 2\pi \int_0^{R_0} r v dr = 2\pi \alpha^2 R_0^3 \frac{A}{\mu_0} \int_0^{1/\alpha} w \xi d\xi. \quad (4.59)$$

Подставляя в формулу (4.59) значение безразмерной скорости из уравнения (4.58), интегрируя полученное соотношение и заменяя $A = |\Delta P|/L$, будем иметь

$$Q = 2\pi \alpha^2 R_0^3 \frac{\Delta p}{L \mu_0} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} C_k \frac{k+2}{2(k+4)} \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{k+4} + \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} C_k \frac{k+4}{2(k+6)} \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{k+6}}{\sum_{k=0}^{\infty} C_k \left(\frac{1}{\alpha} \right)^k},$$

где ΔP — перепад давления расплава полимера на длине трубы L .

Стационарное течение жидкости в канале фильеры для нанесения оболочки на комплексную нить

Иногда для получения нитей специального технического назначения на её поверхность наносят оболочку. Не вдаваясь в технологические подробности изготовления и в сферы использования таких нитей, отметим лишь, что оболочка может состоять из клеящих составов (например, с абразивным порошком или без него), полимеров (получаемых из растворов с легкокипящим растворителем или легкоплавких расплавов) и других жидкостей. Схема нанесения оболочки на комплексную нить приведена на рис. 4.19. Нить, имеющую радиус поперечного сечения R_1 , пропускают через фильеру с постоянной скоростью V_0 . Фильера, как правило, имеет канал с тремя участками: заходный цилиндрический участок радиусом поперечного сечения R_2 и длиной L_1 , переходный конус (воронка) с переменным радиусом сечения R и длиной L_2 и калибрующий участок (зазор) радиусом сечения R_3 и длиной L_3 . Уровень жидкости для оболочки над фильерой поддерживается постоянным. Выйдя из фильеры, нить с оболочкой обрабатывается в специальной шахте и наматывается на приёмную бобину.

Рассмотрим изотермическое стационарное течение жидкости в канале такой фильеры. При постановке задачи входовыми и выходовыми эффектами будем пренебрегать, а течение жидкости будем считать осесимметричным и ламинарным. Будем интересоваться только составляющей скорости v_z (направление вдоль канала фильеры) и градиентами давления $\partial P / \partial z = A_z$, пренебрегая их изменением по радиусу r .

При решении задачи давлением столба жидкости над фильерой и массовыми силами будем пренебрегать, считая давление жидкости на входе в канал фильеры и на выходе из него постоянным и равным P_0 .

Анализ течения жидкости показывает, что профили скорости v_z будут изменяться по оси z канала фильеры так, как показано на рис. 4.19, а градиент давления A_z может менять знак при некотором значении $z = z_0$, то есть проходить через нуль. Величина z_0 в значительной степени зависит от геометрии канала, скорости нити и свойств жидкости. В общем случае координата z_0 может принимать значение как меньше суммарной длины канала L , так и больше ее. При $z_0 < L$ давление жидкости сначала растёт от P_0 до некоторой величины P_{\max} , а затем падает до величины P_0 , а при $z_0 > L$ давление жидкости на протяжении всей длины канала возрастает.

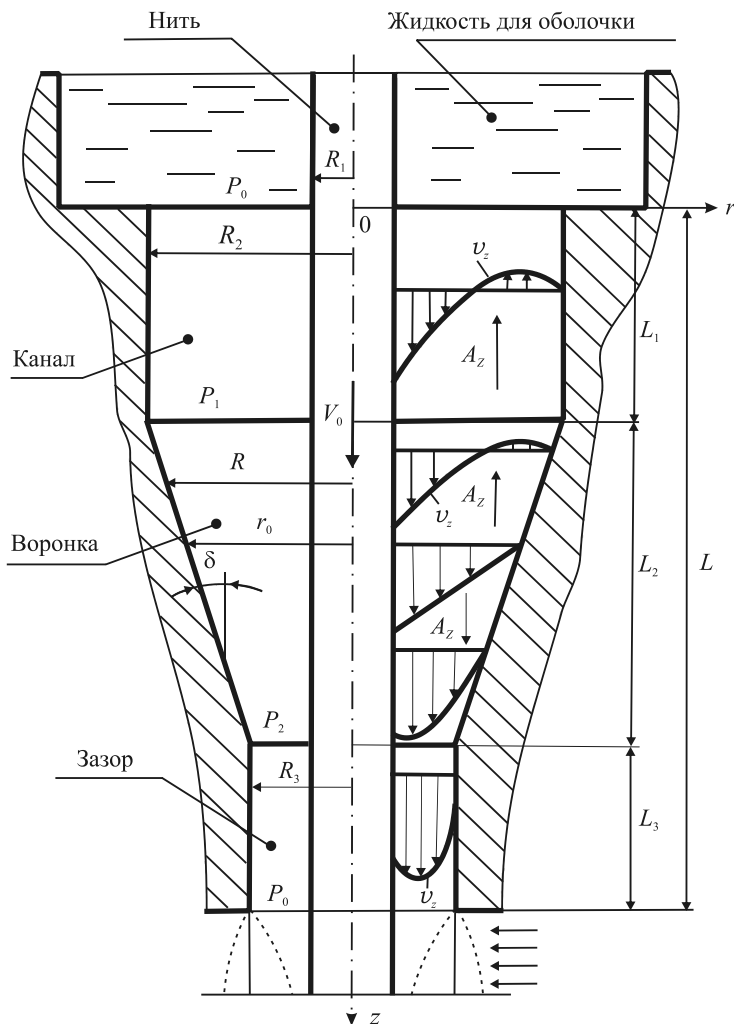


Рис. 4.19. Схема течения жидкости при нанесении оболочки на комплексную нить

В качестве реологического уравнения для жидкости оболочки используем степенное реологическое уравнение, которое запишем следующим образом:

$$\tau_{rz} = B \left| \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|^{\frac{1}{n}-1} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial r}. \quad (4.61)$$

Таким образом, нам необходимо рассмотреть две задачи течения в коаксиальном зазоре при $A_z \geq 0$ и при $A_z \leq 0$. Будем рассматривать течение между двумя коаксиальными цилиндрическими поверхностями с радиусами поперечного сечения R_1 (нить) и R (канал фильеры) при осевом движении цилиндра малого радиуса с постоянной скоростью V_0 .

Течение с положительным градиентом давления

Уравнение движения в направлении оси z запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rz}) = A_z r, \quad (4.62)$$

а его интеграл представим так:

$$\tau_{rz} = \frac{A_z}{2} \left(r - \frac{r_0^2}{r} \right), \quad (4.63)$$

где r_0 — константа интегрирования, численно равная радиусу цилиндра нулевых напряжений сдвига (см. рис. 4.20, а).

Действительно, при $r = r_0$ $\tau_{rz} = 0$.

Подобная задача при вращении наружного цилиндра и действии тангенциального градиента давления рассматривалась в работе [118]. Используем приведённую в этой работе методологию для решения нашей задачи.

Введём в рассмотрение безразмерные величины:

$$\begin{aligned} a &= \frac{R_1}{R}, \quad \zeta = \frac{r}{R}, \quad \zeta_0 = \frac{r_0}{R}, \quad \zeta_0^2 = \beta, \quad v = \frac{v_z}{V_0}, \\ \alpha &= \frac{V_0}{R} \left(\frac{2B}{A_z R} \right)^n, \quad q = \frac{Q_z}{2\pi V_0 R_1^2}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Здесь Q_z — расход жидкости в направлении оси z .

Решая совместно уравнения (4.61) и (4.63) с использованием безразмерных величин (4.64), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \zeta} &= \frac{1}{\alpha} \zeta^n \left(1 - \frac{\beta}{\zeta^2} \right)^n \quad (\tau \geq 0); \\ \frac{\partial v}{\partial \zeta} &= -\frac{1}{\alpha} \zeta^n \left(\frac{\beta}{\zeta^2} - 1 \right)^n \quad (\tau \leq 0). \end{aligned} \quad (4.65)$$

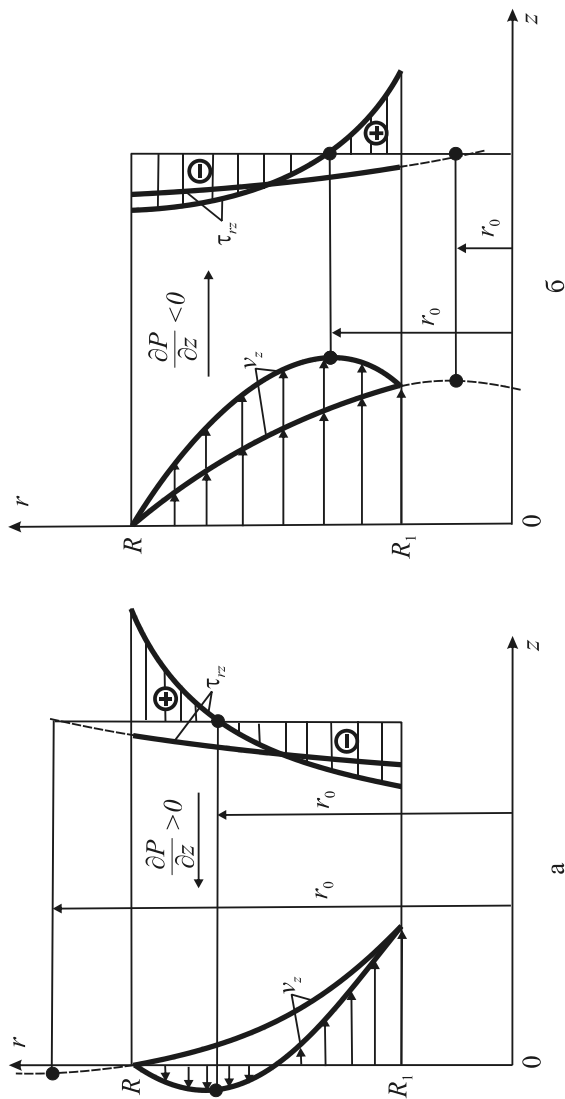


Рис. 4.20. Эпюры скоростей и касательных напряжений при положительном (а) и отрицательном (б) градиенте давления $A_z = \partial P / \partial z$

Граничные условия задачи следующие:

$$\text{при } \zeta = 1 \quad v = 0; \quad \text{при } \zeta = a \quad v = 1. \quad (4.66)$$

Интегрируя уравнение (4.65) с использованием граничных условий (4.66), получим уравнения для осевой скорости:

$$v = -\frac{1}{\alpha} \int_{\zeta}^1 \zeta^n \left(1 - \frac{\beta}{\zeta^2}\right)^n d\zeta \quad (\tau \geq 0); \quad (4.67)$$

$$v = -\frac{1}{\alpha} \int_a^{\zeta} \zeta^n \left(\frac{\beta}{\zeta^2} - 1\right)^n d\zeta + 1 \quad (\tau \leq 0). \quad (4.68)$$

Из (4.65) видно, что величина β связана со значением безразмерного радиуса ζ_0 , при котором градиент скорости, а следовательно, и напряжение сдвига обращаются в нуль, выражением $\beta = \zeta_0^2$. Если $a^2 \leq \beta < 1$ ($a \leq \zeta_0 < 1$), то напряжение сдвига обращается в нуль в зазоре между цилиндрами и профиль скорости определяется по формулам (4.67) и (4.68), а постоянная β — из условия сопряжения двух решений при $\zeta = \sqrt{\beta}$:

$$\int_a^{\sqrt{\beta}} \zeta^n \left(\frac{\beta}{\zeta^2} - 1\right)^n d\zeta = \int_{\sqrt{\beta}}^1 \zeta^n \left(1 - \frac{\beta}{\zeta^2}\right)^n d\zeta + \alpha. \quad (4.69)$$

Если же $\beta \geq 1$ ($\zeta_0 \geq 1$), то напряжения сдвига в кольцевом зазоре не обращаются в нуль и профиль скоростей определяется по формуле (4.68) для $\tau \leq 0$. В этом случае одно из граничных условий (4.66) используется в формуле (4.67), а другое служит для определения неизвестной величины β :

$$\alpha - \int_a^1 \zeta^n \left(\frac{\beta}{\zeta^2} - 1\right)^n d\zeta = 0. \quad (4.70)$$

При n целом интегралы в формулах (4.67)–(4.70) выражаются в виде сумм конечного числа слагаемых. При n нецелом биномы в этих выражениях можно разложить в равномерно сходящиеся ряды, интегрировать почленно и получать выражения для v , а также уравнения для определения неизвестной β в виде рядов.

В зависимости от величины β эти разложения будут иметь различный вид. Ниже приводятся формулы для определения скоростей и уравнения для определения β как при целом, так и нецелом n . Для краткости записи этих формул введём обозначения:

$$A_0 = \frac{1}{1-n}; \quad A_k = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k)}{(2k+1-n) \cdot k!}; \quad B_k = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k)}{(2k-1-n) \cdot k!}.$$

n — целое число.

Если $a^2 \leq \beta < 1$, то напряжение сдвига, как отмечено выше, меняет свой знак внутри кольцевого канала (см. рис. 4.20, а). Тогда на цилиндре $\zeta_0 = \sqrt{\beta}$ и профиль скорости выражается по-разному при $\zeta \leq \zeta_0$ и при $\zeta \geq \zeta_0$. В этом случае из выражений (4.67)–(4.69) имеем:

$$v = -\frac{1}{\alpha} \left[\frac{1 - \zeta^{n+1}}{n+1} + \sum_{k=1}^n (-1)^k B_k \left(\frac{1}{\zeta^{2k-n-1}} - 1 \right) \beta^k \right] \quad (\sqrt{\beta} \leq \zeta \leq 1); \quad (4.71)$$

$$v = 1 - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^n (-1)^k A_k \left(\zeta^{2k-n+1} - a^{2k-n+1} \right) \beta^{n-k} \quad (a \leq \zeta \leq \sqrt{\beta}); \quad (4.72)$$

$$\begin{aligned} \frac{1 - \beta^{\frac{n+1}{2}}}{n+1} - \sum_{k=0}^n (-1)^k A_k \left(\beta^{\frac{2k-n+1}{2}} - a^{2k-n+1} \right) \beta^{n-k} - \\ - \sum_{k=1}^n (-1)^k B_k \left(\frac{1}{\beta^{\frac{2k-n-1}{2}}} - 1 \right) \beta^n + \alpha = 0 \quad (a^2 < \beta < 1). \end{aligned} \quad (4.73)$$

Если $\beta \geq 1$, то профиль скоростей вычисляется по формуле (4.72) для всего диапазона $a \leq \zeta \leq 1$, а уравнение для определения величины β имеет вид:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k A_k \left(1 - a^{2k-n+1} \right) \beta^{n-k} - \alpha = 0. \quad (4.74)$$

В частности, при $n = 1$ (ньютоновская жидкость) для любого β получаем формулу

$$v = \left(1 - \frac{1 - a^2}{2\alpha} \right) \frac{\ln \zeta}{\ln a} - \frac{1 - \zeta^2}{2\alpha}. \quad (4.75)$$

Из формулы (4.75) при $A_2 = 0$ ($\alpha = \infty$) следует, что

$$v = \frac{\ln \zeta}{\ln a}. \quad (4.76)$$

Расходы жидкости в направлении оси z определяются так:

$$q = \frac{Q_z}{2\pi V_0 R_1^2} = \int_{\sqrt{\beta}}^1 v \zeta d\zeta + \int_a^{\sqrt{\beta}} v \zeta d\zeta \quad (a^2 < \beta < 1); \quad (4.77)$$

$$q = \int_a^1 v \zeta d\zeta \quad (\beta \geq 1). \quad (4.78)$$

Подставляя в формулы (4.77) и (4.78) соответствующие значения скоростей жидкости, получим:

$$q = \frac{\beta - a^2}{2} - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^n (-1)^k A_k \left[\frac{\beta^{\frac{2k-n+3}{2}} - a^{2k-n+3}}{2k-n+3} - \frac{a^{2k-n+1}}{2} (\beta - a^2) \right] \beta^{n-k} -$$

$$- \frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{n+1} \left(\frac{1-\beta}{2} - \frac{1-\beta^{\frac{n+3}{2}}}{n+3} \right) - \sum_{k=1}^n (-1)^k B_k \left(\frac{1-\beta}{2} - \frac{1-\beta^{\frac{n-2k+3}{2}}}{n-2k+3} \right) \right] \beta^k$$

($a \leq \beta < 1$); (4.79)

$$q = \frac{1-a^2}{2} - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^n (-1)^k A_k \left[\frac{1-a^{2k-n+3}}{2k-n+3} - \frac{a^{2k-n+1}}{2} (1-a^2) \right] \beta^{n-k}$$

($\beta \geq 1$). (4.80)

Для ньютоновской жидкости ($n = 1$) формула для определения расхода будет следующей:

$$q = \frac{a^2(1-2\ln a) - 1}{4\ln a} - \frac{1}{8\alpha} \left[2a^2(2-a^2) + \frac{1-a^2}{\ln a} - 1 \right]. \quad (4.81)$$

При $A_z = 0$ ($\alpha = \infty$) из формулы (4.81) получим

$$q = \frac{a^2(1-2\ln a) - 1}{4\ln a}. \quad (4.82)$$

n — нецелое число.

Если $a^2 \leq \beta < 1$, то по аналогии с предыдущим случаем получим:

$$v = -\frac{1}{\alpha} \left[\frac{1-\zeta^{n+1}}{n+1} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k B_k \left(\frac{1}{\zeta^{2k-n-1}} - 1 \right) \beta^k \right] \quad (\sqrt{\beta} \leq \zeta \leq 1); \quad (4.83)$$

$$v = 1 - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A_k \left(\zeta^{2k-n+1} - a^{2k-n+1} \right) \beta^{n-k} \quad (a \leq \zeta \leq \sqrt{\beta}); \quad (4.84)$$

$$\frac{1 - \beta^{\frac{n+1}{2}}}{n+1} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A_k \left(\beta^{\frac{2k-n+1}{2}} - a^{2k-n+1} \right) \beta^{n-k} -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k B_k \left(\frac{1}{\beta^{\frac{2k-n-1}{2}}} - 1 \right) \beta^k + \alpha = 0 \quad (a < \sqrt{\beta} < 1). \quad (4.85)$$

$$q = \frac{\beta - a^2}{2} - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A_k \left[\frac{\beta^{\frac{2k-n+3}{2}} - a^{2k-n+3}}{2k-n+3} - \frac{a^{2k-n+1}}{2} (\beta - a^2) \right] \beta^{n-k} -$$

$$- \frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{n+1} \left(\frac{1-\beta}{2} - \frac{1-\beta^{\frac{n+3}{2}}}{n+3} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k B_k \left(\frac{1-\beta}{2} - \frac{1-\beta^{\frac{n-2k+3}{2}}}{n-2k+3} \right) \beta^k \right]$$

$$(a^2 < \beta < 1). \quad (4.86)$$

Если $\beta \geq 1$ ($\zeta_0 \geq 1$), то скорость v вычисляется по формуле (4.84) во всём интервале измерения величины ($a \leq \zeta \leq 1$), а величина β найдётся из этого уравнения с использованием граничного условия при $\zeta = 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A_k (1 - a^{2k-n+1}) \beta^{n-k} - \alpha = 0, \quad (\beta \geq 1). \quad (4.87)$$

Расход жидкости при $\beta \geq 1$ определится из выражения (4.78) или

$$q = \frac{1 - a^2}{2} - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A_k \left[\frac{1 - a^{2k-n+3}}{2k-n+3} - \frac{a^{2k-n+1}}{2} (1 - a^2) \right] \beta^{n-k}. \quad (4.88)$$

При отсутствии продольного градиента давления $A_z = 0$ формулы для определения профиля скорости и расхода запишутся так:

$$v = \frac{1 - \zeta^{1-n}}{1 - a^{1-n}}; \quad q = \frac{1}{1 - a^{1-n}} \left(\frac{1 - a^2}{2} - \frac{1 - a^{1-n}}{1 - n} \right).$$

Течение с отрицательным градиентом давления

Уравнение движения с $A_z < 0$ необходимо записать так:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) = -A_z r, \quad (4.89)$$

тогда

$$\tau_{rz} = \frac{A_z}{2} R \left(\frac{\zeta_0^2}{\zeta} - \zeta \right). \quad (4.90)$$

Учитывая, что в данном случае

$$\alpha = \frac{V_0}{R} \left(\frac{2B}{|A_z| R} \right),$$

то решение уравнений (4.61) и (4.90) сводится к интегрированию следующих уравнений (см. рис. 4.20, б):

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \zeta} &= \frac{1}{\alpha} \zeta^n \left(\frac{\beta}{\zeta^2} - 1 \right)^n & (\tau \geq 0); \\ \frac{\partial v}{\partial \zeta} &= -\frac{1}{\alpha} \zeta^n \left(1 - \frac{\beta}{\zeta^2} \right)^n & (\tau \leq 0). \end{aligned} \quad (4.91)$$

Интегрируя выражение (4.91) с использованием граничных условий (4.66), получим:

$$v = \frac{1}{\alpha} \int_a^\zeta \zeta^n \left(\frac{\beta}{\zeta^2} - 1 \right)^n d\zeta + 1 \quad (\tau \geq 0); \quad (4.92)$$

$$v = \frac{1}{\alpha} \int_\zeta^1 \zeta^n \left(1 - \frac{\beta}{\zeta^2} \right)^n d\zeta \quad (\tau \leq 0). \quad (4.93)$$

При градиенте давления $A_z \geq 0$ величина ζ_0 изменялась в интервале $a < \zeta_0 \leq \infty$ ($a^2 < \beta \leq \infty$). При $A_z \leq 0$ интервал изменения величины ζ_0 меняется на $-\infty < \beta \leq a^2$ (см. рис. 4.20, б), что резко усложняет задачу.

n — целое число.

Если координата ζ_0 находится в зазоре между цилиндрами, то профили скоростей будут вычисляться по формулам (4.92) и (4.93), уравнение для определения β получим из условия стыковки решений:

$$\int_a^{\sqrt{\beta}} \zeta^n \left(\frac{\beta}{\zeta^2} - 1 \right)^n d\zeta = \int_{\sqrt{\beta}}^1 \zeta^n \left(1 - \frac{\beta}{\zeta^2} \right)^n d\zeta - \alpha, \quad (4.94)$$

а расход жидкости определится по выражению (4.77).

Если же координата ζ_0 окажется вне зазора, то во всём интервале $(-\infty < \beta \leq a^2)$ профиль скорости будет определяться по формуле (4.93) для $\tau \leq 0$, уравнение для определения величины β — из выражения (4.93) с использованием граничного условия при $\zeta = a$

$$\int_a^1 \zeta^n \left(1 - \frac{\beta}{\zeta^2}\right)^n d\zeta - \alpha = 0, \quad (4.95)$$

а расход жидкости — по формуле (4.78), справедливой уже в интервале $(-\infty < \beta \leq a^2)$.

Выполнив соответствующие подстановки и интегрирование, получим:

$$v = 1 + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^n (-1)^k A_k (\zeta^{2k-n+1} - a^{2k-n+1}) \beta^{n-k} \quad (a \leq \zeta \leq \sqrt{\beta}); \quad (4.96)$$

$$v = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{1 - \zeta^{n+1}}{n+1} + \sum_{k=1}^n (-1)^k B_k \left(\frac{1}{\zeta^{2k-n-1}} - 1 \right) \beta^k \right] (\sqrt{\beta} \leq \zeta \leq 1); \quad (4.97)$$

$$\begin{aligned} \frac{1 - \beta^{\frac{n+1}{2}}}{n+1} - \sum_{k=0}^n (-1)^k A_k \left(\beta^{\frac{2k-n+1}{2}} - a^{2k-n+1} \right) \beta^{n-k} + \\ + \sum_{k=1}^n (-1)^k B_k \left(\frac{1}{\beta^{\frac{2k-n-1}{2}}} - 1 \right) \beta^n - \alpha = 0 \quad (a^2 < \beta < 1); \end{aligned} \quad (4.98)$$

$$\begin{aligned} q = \frac{\beta - a^2}{2} + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^n (-1)^k A_k \left[\frac{\beta^{\frac{2k-n+3}{2}} - a^{2k-n+3}}{2k-n+3} - \frac{a^{2k-n+1}}{2} (\beta - a^2) \right] \beta^{n-k} + \\ + \frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{n+1} \left(\frac{1-\beta}{2} - \frac{1-\beta^{\frac{n+3}{2}}}{n+3} \right) - \sum_{k=1}^n (-1)^k B_k \left(\frac{1-\beta}{2} - \frac{1-\beta^{\frac{n-2k+3}{2}}}{n-2k+3} \right) \beta^k \right] \\ (a^2 < \beta < 1). \end{aligned} \quad (4.99)$$

Если координата ζ_0 окажется вне зазора и станет $\zeta_0 \leq a$ ($\beta \leq a^2$), то скорость жидкости необходимо будет рассчитывать по уравнению (4.97) для всего диапазона изменения координаты ζ от a до 1. Уравнение для определения величины β получим из выражения (4.97), подставив в него граничное условие на внутреннем цилиндре:

$$\frac{1 - a^{n+1}}{n+1} + \sum_{k=1}^n (-1)^k B_k \left(\frac{1}{a^{2k-n-1}} - 1 \right) \beta^n - \alpha = 0 \quad (\beta \leq a^2). \quad (4.100)$$

Уравнение для определения расхода жидкости в данном случае получим, проинтегрировав выражение (4.97) в интервале $(a \leq \zeta \leq 1)$:

$$q = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{n+1} \left(\frac{1-a^2}{2} - \frac{1-a^{n+3}}{n+3} \right) - \sum_{k=1}^n (-1)^k B_k \left(\frac{1-a^2}{2} - \frac{1-a^{n-2k+3}}{n-2k+3} \right) \beta^k \right] \quad (\beta \leq a^2). \quad (4.101)$$

n — нецелое число.

Если координата ζ_0 располагается в зазоре между цилиндрами, то выражения для определения v , β и q запишутся так:

$$v = 1 + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A_k \left(\zeta^{2k-n+1} - a^{2k-n+1} \right) \beta^{n-k} \quad (a \leq \zeta \leq \sqrt{\beta}); \quad (4.102)$$

$$v = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{1-\zeta^{n+1}}{n+1} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k B_k \left(\frac{1}{\zeta^{2k-n-1}} - 1 \right) \beta^k \right] \quad (\sqrt{\beta} \leq \zeta \leq 1); \quad (4.103)$$

$$\begin{aligned} \frac{1-\beta^{\frac{n+1}{2}}}{n+1} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A_k \left(\beta^{\frac{2k-n+1}{2}} - a^{2k-n+1} \right) \beta^{n-k} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k B_k \left(\frac{1}{\beta^{\frac{2k-n-1}{2}}} - 1 \right) \beta^n - \alpha = 0 \quad (a^2 < \beta < 1); \end{aligned} \quad (4.104)$$

$$\begin{aligned} q = \frac{\beta - a^2}{2} + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A_k \left[\frac{\beta^{\frac{2k-n+3}{2}} - a^{2k-n+3}}{2k-n+3} - \frac{a^{2k-n+1}}{2} (\beta - a^2) \right] \beta^{n-k} + \\ + \frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{n+1} \left(\frac{1-\beta}{2} - \frac{1-\beta^{n+1}}{2} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k B_k \left(\frac{1-\beta}{2} - \frac{1-\beta^{\frac{n-2k+3}{2}}}{n-2k+3} \right) \beta^k \right] \quad (a^2 < \beta < 1). \quad (4.105) \end{aligned}$$

При целом n во всём интервале $(-\infty < \beta < a^2)$ справедливы одна формула для осевой скорости v и одно уравнение для определения постоянной величины β . При нецелом n , ввиду необходимости обеспечения сходимости полученных рядов, этот интервал приходится разбивать на три участка.

При $(-a^2 < \beta \leq a^2)$ скорость жидкости вычисляется по формуле (4.103), а уравнения для β и q запишутся так:

$$\frac{1-a^{n+1}}{n+1} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k B_k \left(\frac{1}{a^{2k-n-1}} - 1 \right) \beta^k - \alpha = 0 \quad (-a^2 < \beta < a^2); \quad (4.106)$$

$$q = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{n+1} \left(\frac{1-a}{2} - \frac{1-a^{n+3}}{n+3} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k B_k \left(\frac{1-a^2}{2} - \frac{1-a^{n-2k+3}}{n-2k+3} \right) \beta^k \right] \\ (-a^2 \leq \beta \leq a^2). \quad (4.107)$$

При $-1 \leq \beta \leq a^2$ в области $\sqrt{|\beta|} \leq \zeta \leq 1$ осевая скорость v вычисляется по формуле (4.103) для $\tau \leq 0$, а в области $a \leq \zeta \leq \sqrt{|\beta|}$ — по формуле

$$v = 1 + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A_k (\zeta^{2k-n+1} - a^{2k-n+1}) |\beta|^{n-k}. \quad (4.108)$$

Уравнения для определения величины β и расхода запишутся так:

$$\left[\frac{1-|\beta|^{\frac{n+1}{2}}}{n+1} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k B_k \left(\frac{1}{|\beta|^{\frac{2k-n-1}{2}}} - 1 \right) \right] |\beta|^n - \\ - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A_k \left(|\beta|^{\frac{2k-n+1}{2}} - a^{2k-n+1} \right) |\beta|^{n-k} - \alpha = 0 \quad (-1 \leq \beta \leq -a^2); \quad (4.109)$$

$$q = \frac{|\beta| - a^2}{2} + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A_k \left[\frac{|\beta|^{\frac{2k-n+3}{2}} - a^{2k-n+3}}{2k-n+3} - \frac{a^{2k-n+1}}{2} (|\beta| - a^2) \right] |\beta|^{n-k} + \\ + \frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{n+1} \left(\frac{1-|\beta|}{2} - \frac{1-|\beta|^{\frac{n+3}{2}}}{n+3} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k B_k \left(\frac{1-|\beta|}{2} - \frac{1-|\beta|^{n-2k+3}}{n-2k+3} \right) \beta^k \right] \\ (-1 \leq \beta \leq -a^2). \quad (4.110)$$

Наконец, при $\beta \leq -1$ продольная скорость вычисляется по формуле (4.108), а выражения для β и q будут следующими:

$$q = \frac{1-a^2}{2} + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A_k \left[\frac{1-a^{2k-n+3}}{2k-n+3} - \frac{a^{2k-n+1}}{2} (1-a^2) \right] |\beta|^{n-k} \\ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A_k \left(|\beta|^{\frac{2k-n+1}{2}} - a^{2k-n+1} \right) |\beta|^{n-k} - \alpha = 0 \quad (\beta \leq -1). \quad (4.111)$$

$$(\beta \leq -1). \quad (4.112)$$

Определение давлений в канале фильеры и осевых усилий, действующих на нить

Необходимо отметить, что из-за того, что комплексная нить является по поперечному сечению неоднородной, поскольку между элементарными волокнами имеются пустоты, жидкость для оболочки проникает внутрь нити, чему способствует повышенное давление в конической части фильеры. Какая часть жидкости проникает внутрь нити за время её пребывания в фильере? Ответить на этот вопрос можно только поставив эксперимент.

Полученные выше формулы позволяют определить только количество жидкости, уносимой наружной поверхностью нити, движущейся со скоростью V_0 . На практике зазор канала фильеры радиусом R_3 и длиной L_3 практически перекрыт нитью, то есть $R_3 \approx R_1$, и лишняя жидкость снимается нижней кромкой конической воронки (см. рис. 4.19). В этом случае можно считать, что расход жидкости, уносимой поверхностью нити, равен нулю, а распределение давления по длине отверстия фильеры будет определяться кривой 1 рис. 4.21. Если R_3 всё же несколько больше радиуса поперечного сечения нити R_1 , то распределение давления будет определяться кривой 2.

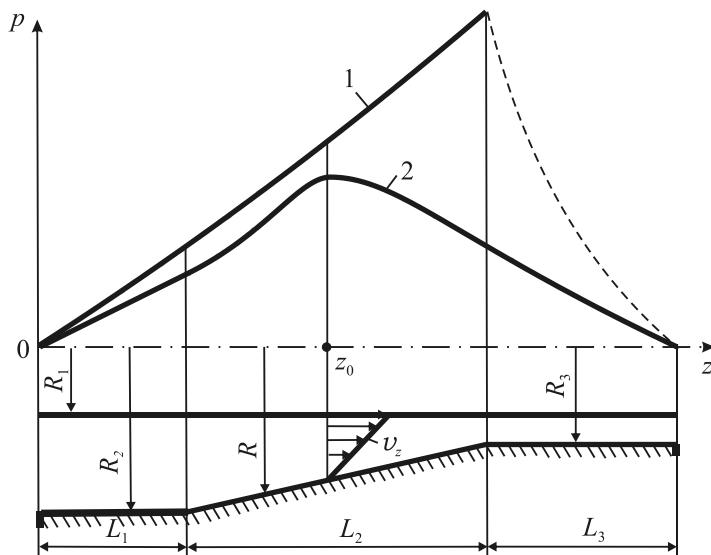


Рис. 4.21. Распределение давления жидкости по длине канала фильеры при расходе $q = 0$ (1) и $q \neq 0$ (2)

Рассмотрим сначала случай, когда комплексная нить, смазанная и пропитанная жидкостью, перекрывает калибрующую часть канала фильеры, то есть случай, когда $R_3 \approx R_1$ ($q = 0$).

В данном случае, приравнявая выражения (4.79) и (4.86) для q в интервале ($a^2 \leq \beta < 1$) к нулю и раскрывая значение α согласно принятым безразмерным величинам (4.64), получим выражение для определения продольного градиента давления

$$A_z = \frac{2B}{R} \left(\frac{V_0}{RD_1} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{2B}{R_1} \left(\frac{V_0}{R_1} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{a}{\alpha_0} \right)^{\frac{1}{n}} a, \quad (4.113)$$

где величина α_0 для целых и нецелых n и для ньютоновской жидкости ($n = 1$) запишется так:

$$\alpha_0 = \left\{ \sum_{k=0}^n (-1)^k A_k \left[\frac{\beta^{\frac{2k-n+3}{2}} - a^{2k-n+3}}{2k-n+3} - \frac{a^{2k-n+1}}{2} (\beta - a^2) \right] \beta^{n-k} + \right. \\ \left. + \frac{1}{n+1} \left(\frac{1-\beta}{2} - \frac{1-\beta^{\frac{n+3}{2}}}{n+3} \right) - \sum_{k=1}^n (-1)^k A_k \left(\frac{1-\beta}{2} - \frac{1-\beta^{\frac{n-2k+3}{2}}}{n-2k+3} \right) \beta^k \right\} \frac{2}{b-a^2} \\ (n - \text{целое}); \quad (4.114)$$

$$\alpha_0 = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A_k \left[\frac{\beta^{\frac{2k-n+3}{2}} - a^{2k-n+3}}{2k-n+3} - \frac{a^{2k-n+1}}{2} (\beta - a^2) \right] \beta^{n-k} + \right. \\ \left. + \frac{1}{n+1} \left(\frac{1-\beta}{2} - \frac{1-\beta^{\frac{n+3}{2}}}{n+3} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k A_k \left(\frac{1-\beta}{2} - \frac{1-\beta^{\frac{n-2k+3}{2}}}{n-2k+3} \right) \beta^k \right\} \frac{2}{b-a^2} \\ (n - \text{нецелое}); \quad (4.115)$$

$$\alpha_0 = \frac{\left[2a^2(2-a) + \frac{1-a^2}{\ln a} - 1 \right] \ln a}{2[a^2(1-2\ln a) - 1]} \quad (n = 1). \quad (4.116)$$

Перепад давления ΔP для первого цилиндрического участка канала фильеры радиусом R_2 и длиной L_1 определяется так:

$$\Delta P_1 = P_1 - P_0 = \frac{2B}{R_2} \left(\frac{V_0}{R_2 \alpha_0} \right)^{\frac{1}{n}} L_1, \quad (4.117)$$

где P_1 – давление жидкости на входе в конический участок канала фильеры.

Для определения перепада давления на коническом участке фильеры разобьём его ступенчато на ряд цилиндрических участков во всём интервале $R_2 > r > R_1$, определим на каждом участке величину a и β , а затем проинтегрируем, тогда

$$\Delta P_2 = P_2 - P_1 = \frac{2B}{R_1} \left(\frac{V_0}{R_2} \right)^{\frac{1}{n}} \int_0^{L_2} \left(\frac{a}{\alpha_0} \right)^{\frac{1}{n}} a dz, \quad (4.118)$$

где P_2 — давление жидкости в конце конического участка канала фильеры.

Текущее значение величины a для конического участка канала фильеры можно определить по формуле

$$a = \frac{R_1}{R_2 - (z - L_0) \operatorname{tg} \delta} \quad \left(\operatorname{tg} \delta = \frac{R_2 - R_3}{L_2} \right). \quad (4.119)$$

Из формулы (4.119) следует, что при $z = L_1$ $a = R_1 / R_2$, а при $z = L_1 + L_2$ — $a = R_1 / R_3$.

Величина β при целых и нецелых n определяется по формулам (4.73) и (4.85). В эти же формулы входит параметр α . Когда $q = 0$, величина α определяется по формулам (4.114) и (4.115). Подставим значения α из этих формул в выражения (4.73) и (4.85), тогда получим трансцендентные формулы для определения величины β в зависимости только от безразмерного отношения радиусов цилиндров $a = R_1 / R$ и n для случая, когда $q = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{1 - \beta^{\frac{n+1}{2}}}{n+1} - \sum_{k=0}^n (-1)^k A_k \left(\beta^{\frac{2k-n+1}{2}} - a^{2k-n+1} \right) \beta^{n-k} - \sum_{k=1}^n (-1)^k B_k \left(\frac{1}{\beta^{\frac{2k-n+1}{2}}} - 1 \right) \beta^k + \\ + \frac{2}{b - a^2} \left\{ \sum_{k=1}^n (-1)^k A_k \left[\frac{\beta^{\frac{n-2k+3}{2}} - a^{n-2k+3}}{n-2k+3} - \frac{a^{2k-n+1}}{2} (\beta - a^2) \right] \beta^{n-k} + \right. \\ \left. + \frac{1}{n+1} \left(\frac{1-\beta}{2} - \frac{1-\beta^{\frac{n+3}{2}}}{n+3} \right) - \sum_{k=1}^n (-1)^k B_k \left(\frac{1-\beta}{2} - \frac{1-\beta^{\frac{n-2k+3}{2}}}{n-2k+3} \right) \beta^k \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.120)$$

($q = 0$, n — целое);

$$\frac{1 - \beta^{\frac{n+1}{2}}}{n+1} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A_k \left(\beta^{\frac{2k-n+1}{2}} - a^{2k-n+1} \right) \beta^{n-k} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k B_k \left(\frac{1}{\beta^{\frac{2k-n+1}{2}}} - 1 \right) \beta^k +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{b-a^2} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k A_k \left[\frac{\beta^{\frac{n-2k+3}{2}} - a^{n-2k+3}}{n-2k+3} - \frac{a^{2k-n+1}}{2} (\beta - a^2) \right] \beta^{n-k} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{n+1} \left(\frac{1-\beta}{2} - \frac{1-\beta^{\frac{n+3}{2}}}{n+3} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k B_k \left(\frac{1-\beta}{2} - \frac{1-\beta^{\frac{n-2k+3}{2}}}{n-2k+3} \right) \beta^k \right\} = 0
\end{aligned}
\tag{4.121}$$

($q = 0$, n — нецелое).

Осевая сила на поверхности нити от сопротивления течения жидкости определяется так:

$$dF = -2\pi R_1 \tau_{rz} \Big|_{r=R_1} dz = -\pi R_1 R A_z \left(a - \frac{\beta}{a} \right) dz. \tag{4.122}$$

В таком случае усилие на цилиндрическом участке фильеры с наружным радиусом R_2 и длиной L_1 будет определяться формулой

$$F_{\text{кан}} = -\pi R_1 R_2 A_z \left(a - \frac{\beta}{a} \right) L_1 = -2\pi R_1 B L_1 \left(\frac{V_0}{R_2 a_{\text{кан}}} \right)^{\frac{1}{n}} \left(a - \frac{\beta}{a} \right), \tag{4.123}$$

а на коническом участке — выражением

$$F_{\kappa} = -\pi R_1 \int_0^{L_2} R \left(a - \frac{\beta}{a} \right) A_z dz = R_1 \left(\frac{V_0}{R_1} \right)^{\frac{1}{n}} \int_0^{L_2} \left(\frac{a}{\alpha_{\kappa}} \right)^{\frac{1}{n}} \left(a - \frac{\beta}{a} \right) dz. \tag{4.124}$$

Здесь $\alpha_{\text{кан}}$, α_{κ} — текущие значения параметров α на начальном участке канала фильеры и в его конической части. Суммарное усилие на нить определится как сумма сил $F_{\text{кан}}$ и F_{κ} .

Теперь рассмотрим случай течения жидкости, когда расход не равен нулю. В данной ситуации между нитью радиусом R_1 и калибрующим отверстием канала фильеры радиусом R_3 имеется небольшой зазор, то есть $R_3 > R_1$. Решение такой задачи усложняется, поскольку при заданной геометрии канала фильеры, реологии и скорости нити мы не знаем величины расхода q (она подлежит определению). Нам известно только, что перепад давления между входом и выходом фильеры равен нулю (см. рис. 4.21, кривая 2).

Зададимся значением безразмерного расхода жидкости $q > 0$. Зная q , можно по формуле

$$\frac{1}{1 - a_0^{1-n}} \left(\frac{1 - a_0^2}{2} - \frac{1 - a_0^2}{1 - n} \right) - q = 0 \quad (4.125)$$

определить сечение $a = a_0$, а значит, и $z = z_0$, в котором $A_z = 0$. При $0 \leq z \leq z_0$ $A_z \geq 0$, а при $z_0 \leq z \leq L$ ($L = L_1 + L_2 + L_3$) $A_z \leq 0$.

Зная расход жидкости q , можно, совместно решая уравнения для q и β , справедливых для одинаковых интервалов изменения величины β , определить значение параметра α для участков канала фильеры радиусами R_2 и R_3 . Зная $\alpha = \alpha_{\text{кан}}$ и $\alpha = \alpha_{\text{зз}}$, несложно определить перепад давления на этих цилиндрических участках канала фильеры по формулам:

$$\begin{aligned} \Delta P_{\text{кан}} &= P_1 - P_0 = \frac{2B}{R_2} \left(\frac{V_0}{R_2 \alpha_{\text{кан}}} \right)^{\frac{1}{n}} L_1; \\ \Delta P_{\text{зз}} &= P_0 - P_2 = -\frac{2B}{R_3} \left(\frac{V_0}{R_3 \alpha_{\text{зз}}} \right)^{\frac{1}{n}} L_3. \end{aligned} \quad (4.126)$$

Разобьём конический участок канала фильеры на два участка и заменим их цилиндрами радиуса $R_{\kappa 1}$ и $R_{\kappa 2}$. На каждом участке определим соответствующие значения α , а затем для заданного q , совместно решая пары уравнений для q и β , справедливых в одном интервале изменения величины β , определим значения параметров $\alpha = \alpha_{\kappa 1}$ и $\alpha = \alpha_{\kappa 2}$. Зная эти величины, несложно определить перепады давления на конических участках канала фильеры с положительным и отрицательным градиентом давления:

$$\Delta P_{\kappa 1} = P_{\text{max}} - P_1 = \frac{2B}{R_1} \left(\frac{V_0}{R_1} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot \int_0^{z_0} \left(\frac{a}{\alpha_{\kappa 1}} \right)^{\frac{1}{n}} adz; \quad (4.127)$$

$$\Delta P_{\kappa 2} = P_2 - P_{\text{max}} = -\frac{2B}{R_1} \left(\frac{V_0}{R_1} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot \int_0^{L_2 - z_0} \left(\frac{a}{\alpha_{\kappa 2}} \right)^{\frac{1}{n}} adz. \quad (4.128)$$

Сложив перепады давлений на отдельных участках канала фильеры, получим:

$$\begin{aligned} \Delta P_{\text{кан}} + \Delta P_{\text{зз}} + \Delta P_{\kappa 1} + \Delta P_{\kappa 2} &= \\ &= \left(\frac{1}{R_2} \right)^{\frac{1+n}{n}} \left(\frac{1}{\alpha_{\text{кан}}} \right)^{\frac{1}{n}} L_1 - \left(\frac{1}{R_3} \right)^{\frac{1+n}{n}} \left(\frac{1}{\alpha_{\text{зз}}} \right)^{\frac{1}{n}} L_3 + \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{1}{R_1} \right)^{\frac{1+n}{n}} \left[\int_0^{z_0} \left(\frac{a}{\alpha_{\kappa 1}} \right)^{\frac{1}{n}} a dz - \int_0^{L_2 - z_0} \left(\frac{a}{\alpha_{\kappa 2}} \right)^{\frac{1}{n}} a dz \right] = 0. \quad (4.129)$$

Если для заданного значения расхода жидкости условие (4.129) не удовлетворяется, нужно выбрать следующее значение расхода и расчёты повторять до тех пор, пока они не будут удовлетворять этому уравнению. Следует отметить, что если решение уравнения (4.129) даёт не нулевое, а отрицательное значение, то расход жидкости нужно уменьшить, а если положительное — увеличить.

Осевое усилие, действующее на нить на входном цилиндрическом участке канала фильеры радиусом R_2 , будет определяться по формуле (4.123), на участках конической части канала с положительным и отрицательным градиентом давления A_z — по выражениям:

$$F_{\kappa 1} = -2\pi B R_1 \left(\frac{V_0}{R_1} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot \int_0^{z_0} \left(\frac{a}{|\alpha_{\kappa 1}|} \right)^{\frac{1}{n}} \left(a - \frac{\beta}{a} \right) dz; \quad (4.130)$$

$$F_{\kappa 2} = -2\pi B R_1 \left(\frac{V_0}{R_1} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot \int_0^{L_2 - z_0} \left(\frac{a}{|\alpha_{\kappa 2}|} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{\beta}{a} - a \right) dz, \quad (4.131)$$

а на цилиндрическом (калибрующем) участке канала фильеры радиусом R_2 — по формуле

$$F_{\text{зав}} = -2\pi B R_1 L_3 \left(\frac{V_0}{R_3 \alpha_{\text{зав}}} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{\beta}{a} - a \right). \quad (4.132)$$

Общее усилие на нить со стороны жидкости будет равняться сумме составляющих:

$$F = F_{\text{кан}} + F_{\kappa 1} + F_{\kappa 2} + F_{\text{зав}}. \quad (4.133)$$

Значения величин $F_{\kappa 2}$ и $F_{\text{зав}}$ будут отрицательными (см. рис. 4.19), поскольку возникающие на нити касательные напряжения помогают нити двигаться в направлении оси z .

Для проведения численных расчётов конкретной задачи необходимо правильно выбрать нужные формулы, для чего надо знать, в какой интервал попадает β при выбранных исходных значениях параметров. Однако указать заранее этот интервал невозможно, так как β сама является искомой величиной. Но в силу монотонности зависимости β от a можно установить соответствие между интервалами изменения β и a , вычислив значения параметра a на стыках отдельных интервалов.

При $A_z \geq 0$

$$\alpha = \sum_{k=0}^n (-1)^k A_k (1 - a^{2k-n+1}) \quad (\beta = 1, n — \text{целое});$$

$$\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A_k (1 - a^{2k-n+1}) \quad (\beta = 1, n — \text{нецелое}).$$

При $A_z \leq 0$

$$\alpha = \frac{1 - a^{n+1}}{n + 1} + \sum_{k=1}^n (-1)^k B_k \left(\frac{1}{a^{2k-n-1}} - 1 \right) a^{2k} \quad (\beta = a^2, n — \text{целое});$$

$$\alpha = \frac{1 - a^{n+1}}{n + 1} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k B_k \left(\frac{1}{a^{2k-n-1}} - 1 \right) a^{2k} \quad (\beta = a^2, n — \text{нецелое}).$$

$$\alpha = \frac{1 - a^{n+1}}{n + 1} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k B_k \left(\frac{1}{a^{2k-n-1}} - 1 \right) a^{2k} \quad (\beta = -a^2, n — \text{целое});$$

$$\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A_k (1 - a^{2k-n+1}) a^{2k} \quad (\beta = -a^2, n — \text{нецелое}).$$

Глава 5

ТЕЧЕНИЕ РЕОКИНЕТИЧЕСКИХ ЖИДКОСТЕЙ

При течении по круглым трубам реагирующих жидкостей с высокой вязкостью диссипативное тепловыделение в системе может оказать сильное влияние на режим течения, особенно если вязкость жидкости резко увеличивается в процессе реакции, как это имеет место, например, при полимеризации. При наличии дополнительного источника тепла возможно изменение характера развития разогрева жидкости и уменьшение критического значения параметров. Оценка влияния диссипации механической энергии на предел воспламенения (переход на высокотемпературный режим течения) представляет также практический интерес, так как при превышении этого предела происходит смена низкотемпературного режима течения на высокотемпературный, что сопровождается резким изменением не только разогрева, но и состава и объема выхода продуктов. При взрывоопасных процессах (сильно экзотермическая реакция полимеризации, наличие побочных реакций) предел воспламенения определяет границу безопасного проведения процесса. По этим же причинам важно рассмотрение зависимости периода индукции от параметров процесса.

Вязкость вещества в ходе реакции при течении в трубе и, следовательно, диссипативное тепловыделение резко изменяются с температурой и глубиной химического превращения. С теоретической точки зрения, интересно исследовать взаимодействие двух источников тепла — химического и механического (диссипативного), различным образом зависящих не только от температуры, но и от глубины превращения вещества, найти те особенности развития процесса, которые появляются в результате резкого роста вязкости в ходе реакции.

Рассматривая течения аномально вязких жидкостей на входе в трубу, мы привели (рис. 4.15) напорно-расходные характеристики $\Delta P - Q$ при неизотермическом течении жидкости и показали, что при определенных условиях течения возможна их немонотонность. Было показано, что диссипация механической энергии и теплообмен с окружающей средой могут существенно изменить всю картину течения жидкости в трубе вплоть до появления гистерезисных явлений. Поэтому, прежде чем перейти к рассмотрению течения в трубах реагирующих (реокинетических) жидкостей, необходимо более подробно остановиться на роли диссипативного фактора при течении жидкости.

Влияние диссипации механической энергии на течение жидкости в трубах и каналах

Высокая вязкость перерабатываемых материалов, вызывающая большую диссипацию энергии, и сильная экспоненциальная зависимость вязкости от температуры приводят к существенному влиянию диссипативного фактора на гидродинамическую и теплофизическую картины процесса течения. Именно наличием механических источников тепла в жидкости с вязкостью, зависящей от температуры, обусловлены такие эффекты, как потеря тепловой устойчивости течения (так называемый «гидродинамический тепловой взрыв»), гидродинамические аналоги воспламенения и потухания, некоторые гистерезисные явления. С обзором работ на эту тему можно познакомиться в [119].

Впервые существование критического условия при неизотермических течениях жидкостей было обнаружено в работе [120] для напорного течения в плоской трубе. Методами интегрального анализа было показано, что при гиперболической или более сильной зависимости вязкости от температуры существует критическое значение градиента давления, выше которого стационарный режим течения невозможен.

Важным шагом в исследовании неизотермических течений явилась работа [113]. Авторам удалось свести решение задачи о напорном течении инертной жидкости с температурной зависимостью вязкости в бесконечной трубе круглого сечения при постоянном градиенте давления к основному уравнению стационарной теории теплового взрыва Д. А. Франк-Каменецкого [121, 122]. Оказалось возможным определить аналитически не только профили скоростей течения, но и критическое значение параметра диссипации, при превышении которого в системе происходит гидродинамический взрыв, то есть прогрессивное возрастание разогрева жидкости. Характерно, что явление гидродинамического теплового взрыва возможно лишь при задании постоянного градиента давления. При задании же постоянного расхода в системе всегда существует стационарное решение.

Следует отметить, что при изучении неизотермических течений вообще весьма полезным оказалось использование представлений и методов теории теплового взрыва и горения.

Результаты работы [113] в дальнейшем были распространены на случай течения неньютоновской жидкости со степенным реологическим уравнением [123], а также на обобщенное куэттовское течение неньютоновской жидкости [124].

В работе [125] проводилось исследование влияния длины трубы на явление гидродинамического теплового взрыва. Показано, что при течении в конечной трубе градиент давления изменяется по длине трубы и его распределение находится из заданного перепада давления или расхода. Кроме

того, доказано, что при любых значениях расхода или перепада давления существует стационарный режим течения.

Как было показано в работе [126], при напорном течении инертной жидкости в конечной трубе возможны два различных стационарных температурных режима течения: низкотемпературный и высокотемпературный. При изменении перепада давления переход от одного режима к другому происходит скачком, причем критические условия переходов при увеличении и при уменьшении перепада давления не совпадают, то есть имеют место гистерезисные явления, названные авторами «гидродинамическими аналогами воспламенения и потухания». Найдена область существования гистерезисных явлений. Показано, что зависимость перепада давления от расхода может быть немонотонной и одному значению перепада давления могут соответствовать до трех стационарных состояний с различными расходами, из которых среднее неустойчиво. Отмечается, что при задании постоянного расхода возможен только один стационарный режим, а при изменении расхода происходит плавный переход от низкотемпературного к высокотемпературному режиму течения.

В работе [127] было обнаружено явление вырождения гидродинамического воспламенения и потухания. Следует отметить, что вырождение теплового взрыва неподвижного вещества было исследовано в работе [128]. Причиной вырождения, то есть расширения узкой параметрической области перехода от режимов с малым разогревом к взрывным режимам, и постепенного исчезновения отчетливой границы между режимами явилось или уменьшение теплового эффекта реакции, или ослабление зависимости скорости тепловыделения от температуры. Это соответствует возрастанию известных в теории теплового взрыва малых параметров $\beta = RT_0 / E$ и $\gamma = C\rho RT_0^2 / (Q_0 E)$ [129, 130], где T_0 — масштабная температура; E — энергия активации реакции; R — универсальная газовая постоянная; C, ρ — теплоемкость и плотность вещества; Q_0 — тепловой эффект реакции.

Авторы работы [127] нашли аналог параметра γ при течении инертной жидкости, характеризующего адиабатический температурный разогрев. С увеличением этого параметра происходит вырождение гидродинамического воспламенения и потухания, аналогично вырождению теплового взрыва [128].

После обнаружения гидродинамического теплового взрыва при нормальном течении жидкости сдвиговые течения неоднократно исследовались методами, аналогичными работе [113], то есть при задании на движущейся поверхности постоянного значения скорости движения [131–134]. В результате было показано, что в этом случае всегда существует стационарное течение. Возможность гидродинамического теплового взрыва при безнапорном плоском сдвиговом течении была обнаружена авторами работы [135] при рассмотрении течения с заданным постоянным касательным напряжением на подвешенной пластине. Явления гидродина-

мического теплового взрыва исследовались в предположении отсутствия распределения температуры по зазору между пластинами, и для решения этой задачи впервые использовались методы теплового взрыва Н. Н. Семёнова [136]. Авторы работы [135] рассмотрели гидродинамический тепловой взрыв в общем виде и привели выражение функции диссипативного тепловыделения для ряда конкретных температурных зависимостей и реологических законов жидкости.

Гидродинамический тепловой взрыв был реализован экспериментально [137]. При задании на вращающемся цилиндре ротационного вискозиметра постоянного момента вращения (постоянного касательного напряжения) в зависимости от величины температуры теплоносителя наблюдались два резко отличных тепловых режима течения жидкости: выход на стационарный режим течения с малым разогревом или резкий самоускоряющийся рост температуры, то есть гидродинамический тепловой взрыв.

В ряде работ изучалось влияние диссипативного тепловыделения на течение реагирующей жидкости, в первую очередь на предел самовоспламенения. Впервые влияние на тепловой взрыв источника тепла было исследовано в работе [138], где были получены пределы зависимости воспламенения и других характеристик теплового взрыва от интенсивности этого источника.

Исследование течения реагирующей жидкости в бесконечной трубе при постоянном градиенте давления было проведено в работе [139]. Путем численного интегрирования получены зависимости предела воспламенения, максимального предвзрывного разогрева и времени индукции от диссипативного параметра. Показано, что величина предела воспламенения (критическое значение параметра Франк-Каменецкого) уменьшается, а значение максимального предвзрывного разогрева возрастает тем больше, чем меньше отношение энергий активации вязкого течения и реакции. Аналогичным образом в этой же работе рассмотрено течение реакционно-способной жидкости между вращающимися цилиндрами при постоянной скорости вращения цилиндра.

Для случая течения реагирующей жидкости в бесконечной трубе при постоянном градиенте давления обнаружено явление гидродинамического зажигания [140]. Еще в работе [113] было отмечено, что в отличие от химического источника тепла интенсивность диссипативного тепловыделения имеет максимум у стенок трубы. При высокой интенсивности диссипации у стенок резко возрастает температура, что приводит к падению вязкости жидкости, начинает интенсивно протекать химическая реакция, происходит «зажигание» реагирующей жидкости. Течение при этом происходит с квазитвердым ядром. При малой интенсивности диссипации тепловой взрыв происходит в режиме самовоспламенения.

Исследованию течения реагирующей жидкости в конических трубах посвящены работы [141, 142]. В работе [141] показано, что если при задании постоянного расхода возможно только стационарное решение, то слу-

чай постоянного перепада давления гораздо богаче физическими возможностями — может существовать до четырех стационарных решений, из которых устойчивы не более двух. Найдено 12 типов кривой тепловыделения, проведен анализ всех найденных режимов процесса, которые классифицированы в 3 группы: химические, гидродинамические и промежуточные. Определены области существования всех этих процессов, в том числе и область существования гидродинамического воспламенения и потухания, описанного в работе [126].

Используя метод решения, предложенный в работе [135], автор [142] исследовал влияние конечной длины канала на критическое условие теплового взрыва при нормальном течении реагирующей жидкости в круглой и плоской трубах. Показано, что в случае постоянного перепада давления и в случае постоянного расхода наблюдается взаимодействие двух процессов, влияющих на воспламенение: при возрастании расхода (перепада давления) возрастает диссипативное тепловыделение, но одновременно уменьшается время пребывания вещества в трубе. При малых расходах преобладает вторая тенденция и критическое значение параметра Семенова, определяющего тепловой взрыв, возрастает, при больших расходах преобладает рост диссипации механической энергии, которая линейно увеличивается с расходом, и критическое значение параметра Семенова уменьшается.

Проведенный анализ исследований показывает существенную роль диссипативного фактора и необходимость учета его при течении жидкости.

Нестационарное течение

Рассмотрим нестационарное течение реакционно-способной жидкости в бесконечной трубе с радиусом поперечного сечения r_0 . Будем считать, что вязкость жидкости μ экспоненциально зависит от температуры T и глубины химического превращения η :

$$\mu = \mu_0 \exp\left(\frac{U}{RT} + A\eta\right), \quad (5.1)$$

где T — абсолютная температура, U — энергия активации вязкого течения, η — глубина превращения мономера, R — универсальная газовая постоянная, μ_0 и A — константы.

Уравнения движения, энергии и кинетики процесса запишем так:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t_p} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r \frac{\partial v}{\partial r} \right); \quad (5.2)$$

$$C\rho \frac{\partial T}{\partial t_p} = Q_0 k_0 \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) \varphi(\eta) + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 + \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r}\right); \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t_p} = k_0 \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) \varphi(\eta). \quad (5.4)$$

Здесь r — текущий радиус; z — координата вдоль трубы; t_p — время; v — скорость течения; ρ , C , λ — плотность, теплоемкость и коэффициент теплопроводности вещества; Q_0 , k_0 , E — тепловой эффект, предэкспонент и энергия активации химической реакции; $\partial P / \partial z$ — продольный градиент давления; $\varphi(\eta)$ — кинетическая функция.

В ранее выполненных исследованиях по тепловому воспламенению при течении реагирующих жидкостей [139–142] считалось, что вязкость жидкости зависит только от температуры. Авторы этих исследований, как правило, не учитывали скорости химической реакции с глубиной превращения, то есть рассматривали реакции нулевого порядка ($\varphi(\eta) \equiv 1$).

Основная особенность полимеризационных процессов — резкий рост вязкости жидкости по мере увеличения глубины превращения. Поэтому необходимо учитывать изменение скорости реакции по мере увеличения глубины превращения. Обычно считают, что реакция полимеризации имеет первый, второй и дробный порядок по мономеру. Мы будем рассматривать реакции первого порядка как наиболее широко распространенные (например, при радикальной полимеризации [143]). Изменение порядка реакции ведет только к количественным изменениям по сравнению с реакциями первого порядка, что для рассматриваемого случая было проверено численным экспериментом.

При полимеризации в массе часто наблюдается изотермическое ускорение радикальной полимеризации, так называемый «гель-эффект», ярко выраженный при низких температурах полимеризации у акриловых и метакриловых соединений (метилакрилат, метилметакрилат и др.) и хуже — у стирола, капролактама и т. д. [143]. Для описания формальной кинетики в этом случае предложена функция автокатализа первого порядка [144]. Тепловое воспламенение жидкости при автокаталитической реакции имеет ряд характерных особенностей [145, 146], поэтому мы и будем рассматривать этот вид кинетической функции.

Таким образом, для простой реакции первого порядка кинетическая функция запишется так:

$$\varphi(\eta) = 1 - \eta,$$

а для автокатализа первого порядка — в виде

$$\varphi(\eta) = (1 - \eta)(\eta + \eta_0),$$

где η_0 — константа.

При решении задачи будем считать, что изменение температуры по радиусу трубы отсутствует, что, как известно по теории теплопередачи, выполняется при значении критерия Био $Bi = \alpha \cdot r_0 / \lambda \ll 1$ (α — эффективный коэффициент теплопередачи). При невыполнении этого условия можно говорить о некоторой средней по сечению трубы температуре [129]. Проведя усреднение уравнения теплового баланса (5.3) по сечению трубы, как это сделано в работе [126], получим:

$$C\rho \frac{\partial T}{\partial t_p} = Q_0 k_0 \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) \varphi(\eta) + \mu \frac{2\pi l}{V} \int_0^{r_0} \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 r dr - \alpha \frac{S}{V} (T - T_0). \quad (5.5)$$

Здесь S/V , l/V — отношение поверхности и длины элемента реагирующей системы к объему; T_0 — температура окружающей среды.

При больших величинах критерия Прандтля ($Pr = \frac{C\mu(T_0)}{\lambda} \gg 1$) процесс неизотермического течения, с гидродинамической точки зрения, является квазистационарным [139]. Полагая в уравнении (5.2) $\rho \frac{\partial v}{\partial t_p} = 0$, легко исключить уравнение гидродинамики из системы уравнений (5.2)–(5.4), подставив выражение градиента скорости в уравнение (5.5).

Величину градиента скорости dv/dr найдем после интегрирования уравнения (5.2) при $\rho \partial v / \partial t_p = 0$:

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{A_1}{2\mu} r \quad \left(A_1 = -\frac{dP}{dz} \right). \quad (5.6)$$

Рассмотрим два случая течения: с постоянным градиентом давления A_1 и с постоянным расходом Q [139–142]. Задание постоянного градиента давления справедливо для достаточно длинных труб на участке стабилизированного в тепловом и гидродинамическом отношении течения [147]. Интенсивность механического тепловыделения W_m различным образом зависит от вязкости системы μ для этих двух случаев, что можно установить из следующих выражений:

$$W_m = \tau_{rz} \frac{\partial v}{\partial r}, \quad \tau_{rz} = \mu \frac{\partial v}{\partial r}.$$

Характер этой зависимости легко проследить на примере стационарного течения ньютоновской жидкости в трубе. В этом случае из уравнения (5.2) следует, что $\tau_{rz} = -A_1 r / 2$, то есть при $A_1 = \text{const}$ распределение напряжения сдвига по радиусу трубы не зависит от вязкости. Из выражений для W_m и τ_{rz} видно, что при $A_1 = \text{const}$ увеличение вязкости ведет к уменьшению расхода и, как следствие, вызывает уменьшение диссипативного тепловыделения ($W_m \sim 1/\mu$).

При течении с постоянным расходом распределение скорости жидкости по радиусу остается неизменным при любом значении вязкости. Увеличение вязкости приводит к увеличению напряжения сдвига и к росту диссипативного тепловыделения ($W_m \sim \mu$).

Введем в рассмотрение следующие безразмерные переменные [141, 148]:

$$\theta = \frac{E}{RT_0^2}(T - T_0), \quad t = \frac{\alpha S}{C_p V} t_p, \quad \beta = \frac{RT_0}{E}, \quad \sigma = \frac{U}{E}, \quad \frac{S}{V} = \frac{2}{r_0},$$

$$\chi = \frac{Q_0 E k_0 \exp[-E/(RT_0)]}{\alpha R T_0^2 S / V}, \quad \nu = \frac{A_1^2 r_0^2 E \exp[-U/(RT_0)]}{8\mu_0 \alpha R T_0^2 S / V},$$

$$B = \frac{C \rho k_0 \exp[-E/(RT_0)]}{\alpha S / V}.$$

С учетом безразмерных величин система уравнений (5.4) и (5.5) для случая течения с постоянным градиентом давления $A_1 = -\partial P / \partial z = \text{const}$ преобразуется к виду:

$$\frac{d\theta}{dt} = \chi \exp\left(\frac{\theta}{1 + \beta\theta}\right) \varphi(\eta) + \nu \exp\left(\frac{\sigma\theta}{1 + \beta\theta} - A\eta\right) - \theta; \quad (5.7)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = B \exp\left(\frac{\theta}{1 + \beta\theta}\right) \varphi(\eta). \quad (5.8)$$

Начальные условия задачи следующие:

$$\theta = 0, \quad \eta = 0 \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Необходимо отметить, что запись уравнения теплового баланса в форме (5.7) позволяет рассмотреть взаимодействие двух источников тепла (химического и механического) в широком диапазоне изменения параметров, в частности, при $\chi = 0$ (термoneйтральная реакция) и $\chi < 0$ (эндотермическая реакция).

В случае поддержания в трубе постоянного расхода ($Q = \text{const}$) воспользуемся формулой Пуазейля $Q = \pi r_0^4 A_1 / (8\mu)$, которая будет справедливой вследствие постоянства температуры и глубины превращения по сечению трубы. Выражая в уравнении (5.6) градиент давления A_1 через постоянный расход Q и подставляя результат в выражение (5.5), получим в безразмерном виде следующую систему уравнений:

$$\frac{d\theta}{dt} = \chi \exp\left(\frac{\theta}{1 + \beta\theta}\right) \varphi(\eta) + \nu \exp\left(A\eta - \frac{\sigma\theta}{1 + \beta\theta}\right) - \theta; \quad (5.9)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = B \exp\left(\frac{\theta}{1 + \beta\theta}\right) \varphi(\eta). \quad (5.10)$$

Эту систему необходимо решить с теми же начальными условиями, но при

$$\nu = \frac{8Q^2\mu_0 E \exp[U/(RT_0)]}{\pi^2 r_0^6 \alpha R T_0^2 S/V}.$$

Важно отметить, что вследствие произведенного усреднения уравнений, описывающих процесс течения реагирующих жидкостей, полученные уравнения будут справедливы не только для круглой трубы, но и для ряда других каналов. При этом будет лишь меняться соотношение S/V и выражение диссипативного параметра ν . Так, для течения между бесконечными параллельными плоскостями $S/V = 1/h$ (h — расстояние между пластинами) получим:

$$\nu = \frac{A_1^2 h^2 E \exp[-U/(RT_0)]}{12\mu_0 \alpha R T_0^2 S/V} \quad \text{при } A_1 = \text{const};$$

$$\nu = \frac{12Q^2 E \mu_0 \exp[U/(RT_0)]}{h^2 \alpha R T_0^2 S/V} \quad \text{при } Q = \text{const}.$$

При тангенциальном течении жидкости между вращающимися коаксиальными цилиндрами $S/V = \frac{2}{r_2 - r_1}$ (r_2, r_1 — наружный и внутренний радиус цилиндра). В случае с постоянным касательным напряжением на внешнем цилиндре ($\tau_{r\theta}|_{r=r_2} = \tau_0 = \text{const}$) будем иметь

$$\nu = \frac{E(r_1^2/r_2^2) \exp[-U/(RT_0)] \tau_0^2}{\mu_0 \alpha R T_0^2 S/V}.$$

В случае течения с постоянной угловой скоростью ω_0 вращения цилиндра получим:

$$\nu = \frac{4(r_1^2/r_2^2)}{(1 - r_1^2/r_2^2)^2} \cdot \frac{\omega_0^2 \mu_0 E \exp[U/(RT_0)]}{\alpha R T_0^2 S/V}.$$

Системы уравнений (5.7)–(5.10) решались численно. Решение задачи слабо зависит от параметров β и B (пока выполняются условия $\beta \ll 1$ и $B \ll 1$) [129, 148], поэтому их значения были зафиксированы на уровне

не $\beta = 0,03$ и $B = 0,01$. Такие значения параметров соответствуют характерным значениям размерных параметров полимеризации: $E = (75 \div 96)$ кДж/моль; $C = (1670 \div 2090)$ Дж/(кг · град); $\rho = (800 \div 1000)$ кг/м³ $T_0 = 300^0$ С; $\alpha \sim 4,19 \cdot 10^{-8}$ Дж/(м² · с · град); $r_0 \sim 0,01$ м; $k_0 \exp[-E/(RT_0)] = (10^{-4} \div 10^{-6})$ с⁻¹). Поскольку основной интерес для исследования представляет зависимость вязкости от глубины превращения, отношение энергий активации вязкого течения и химической реакции также было зафиксировано на уровне $\sigma = 0,5$ (для мономеров $U = 17 \div 50$ кДж/моль). Значение параметра автокаталитичности в процессе расчетов изменялось в широких пределах от $\eta_0 = 0,01$ до $\eta_0 = 0,2$. Количественно закономерности процесса не зависят от величины η_0 , поэтому на рисунках будут представлены результаты численного решения при $\eta_0 = 0,01$, когда характерные особенности автокатализа отчетливо выражены.

Течение при постоянном градиенте давления

С ростом интенсивности выделения тепла (с ростом величины ν) интенсивность химического тепловыделения, необходимая для взрывного протекания реакции, уменьшается, поэтому величина критического значения параметра χ монотонно убывает с ростом ν [см. рис. 5.1]. При постоянном градиенте давления A_1 диссипативное тепловыделение обратно пропорционально вязкости системы, поэтому чем сильнее возрастает вязкость в ходе реакции, тем меньше диссипация механической энергии и тем больше значение $\chi_{кр}$. Влиянием диссипации на величину предела воспламенения можно пренебречь в тем более широком интервале значений градиента давления A_1 , чем более возрастает вязкость в ходе реакции. Увеличение вязкости при постоянном градиенте давления означает замедление течения (уменьшение расхода Q). В пределе при бесконечной вязкости продукта ($A \rightarrow \infty$) течение в трубе прекращается ($Q = 0$), а $\chi_{кр} \rightarrow \chi_{пр}$ при $\nu = 0$.

Значение предела воспламенения при $\nu = 0$ соответствует случаю теплового воспламенения без диссипативного источника тепла. Эта величина совпадает с соответствующим значением, найденным в теории теплового взрыва [129, 146], и не зависит от того, как изменяется вязкость жидкости (см. рис. 5.1).

Хорошо известно, что при течении с постоянным градиентом давления жидкости с температурной зависимостью вязкости возможен гидродинамический тепловой взрыв [113, 135]. Рост вязкости в ходе реакции не влияет на вывод о возможности гидродинамического теплового взрыва. На

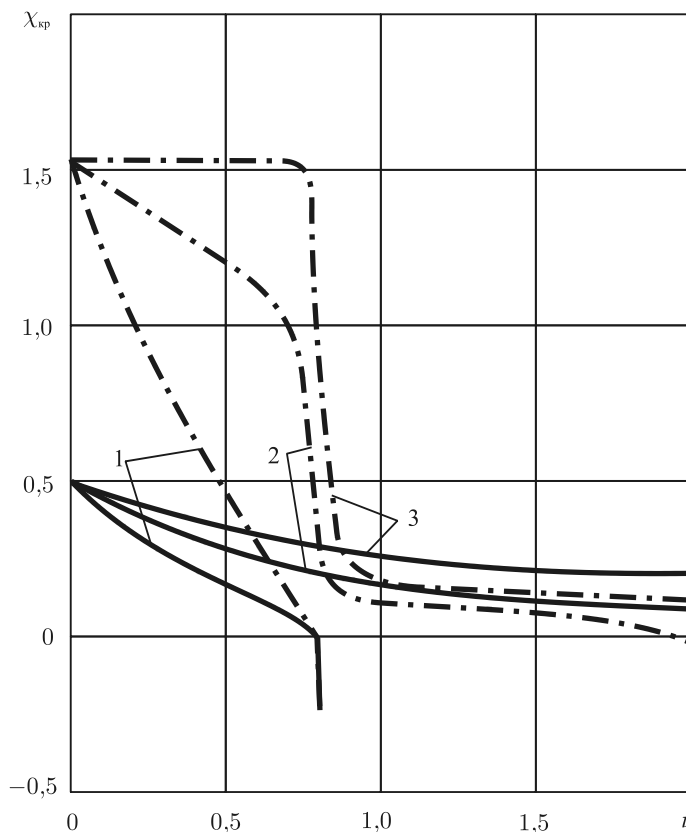


Рис. 5.1. Зависимость критического значения теплового эффекта реакции $\chi_{кр}$ от параметра диссипации ν для различных значений константы A : 1 — $A=0$; 2 — 3; 3 — 10; — — — реакция первого порядка; — · — — автокаталитическая реакция

рис. 5.1 гидродинамическому взрыву соответствуют точки кривых при $\chi = 0$ (термонеutralная реакция). Следует отметить, что при высокой интенсивности диссипативного тепловыделения воспламенение (переход в высокотемпературный режим) возможно даже при протекании в системе эндотермической реакции ($\chi < 0$), когда тепло вязкого трения поглощается химической реакцией.

Интересно, что при отсутствии роста вязкости в ходе реакции ($A=0$) в области эндотермических реакций критическое условие выражается через величину диссипативного параметра $\nu = \nu_{кр}$ и не зависит от величины χ , то есть от теплового эффекта реакции (см. рис. 5.1, кривые 1). По-

скольку интенсивность диссипативного тепловыделения при этом не зависит от глубины превращения η , то взрывной рост температуры на пределе воспламенения начинается после завершения эндотермической реакции, при $\eta = 1$, когда отсутствует тепловое торможение, и поэтому $\nu_{кр}$ не зависит от теплового эффекта реакции.

Зависимость предела воспламенения от величины диссипативного параметра для реакции первого порядка для различных значений величины A качественно не отличается от зависимости, полученной для случая только температурной зависимости вязкости.

Наиболее интересна зависимость $\chi_{кр}(\nu)$ для случая автокаталитической реакции, особенно при резком росте вязкости (рис. 5.1, кривая 3). В этом случае происходит взаимодействие химического и диссипативного источников тепла, различным образом зависящих от глубины превращения (см. рис. 5.2). По мере протекания реакции интенсивность диссипации вследствие роста вязкости резко падает, в то время как интенсивность

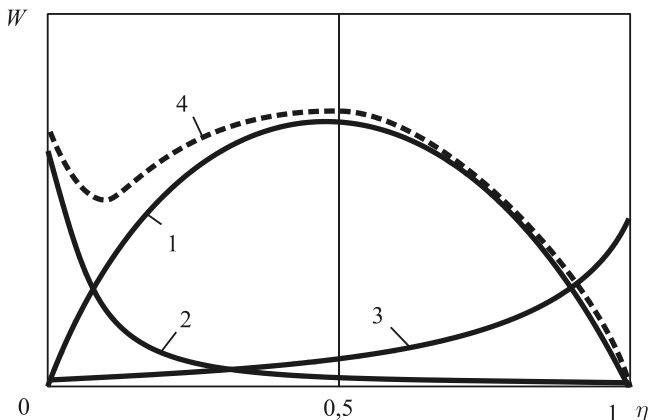


Рис. 5.2. Схематическое изображение зависимости интенсивности тепловыделения от степени превращения η : 1 — W_x ; 2 — W_m при $A_1 = \text{const}$; 3 — W_m при $Q = \text{const}$; 4 — $W_{\text{сум}}$ при $A_1 = \text{const}$

химического тепловыделения проходит через максимум. При этом температурная кривая $\theta(t)$ в неизотермическом, подкритическом режиме (режиме слабой реакции) может иметь два максимума (рис. 5.3). Максимумам W_m и W_x соответствуют максимумы разогрегов $\theta(t)$. Увеличение вклада химического и диссипативного источника (χ или ν) приводит к тому, что тепловой срыв процесса происходит в результате действия только одного из источников, со второго или первого максимума температурной кривой (рис. 5.3, а, б).

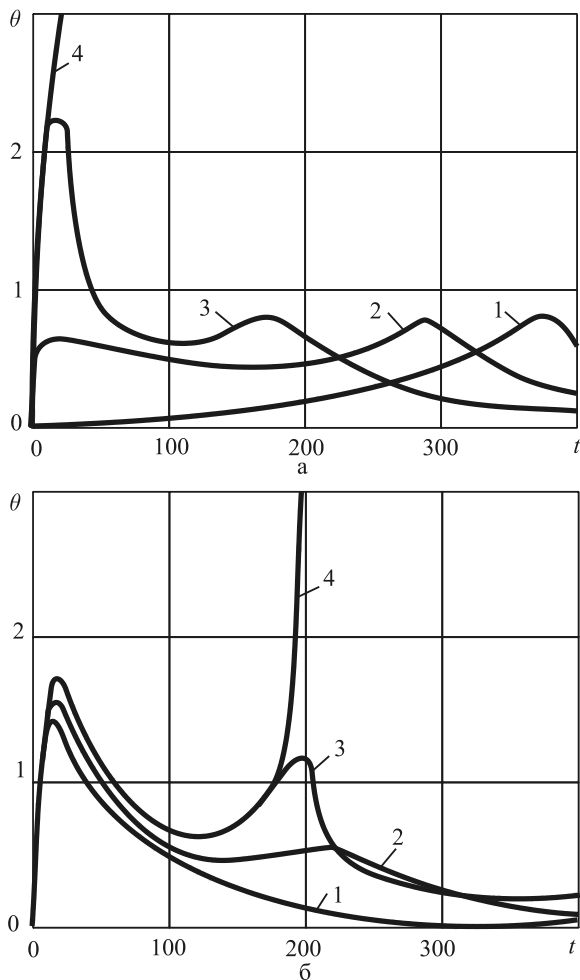


Рис. 5.3. Зависимость разогрева жидкости θ от времени t для автокаталитической реакции при различных значениях параметров χ и ν :

а) $\chi = 1.4$. 1 — $\nu = 0$; 2 — 0,4; 3 — 0,79; 4 — 0,8;

б) $\nu = 0.75$. 1 — $\chi = 0$; 2 — 1,2; 3 — 1,5; 4 — 1,51

При сравнительно малой интенсивности диссипации (малые ν) срыв режима происходит в результате действия химического источника тепла W_x . Резкое уменьшение величины $\chi_{кр}$ (падение кривых 2 и 3, рис. 5.1) происходит тогда, когда срыв низкотемпературного режима происходит с первого температурного максимума в результате действия диссипативного тепловыделения.

Таким образом, при резком росте вязкости в процессе течения при наличии автокаталитического ускорения реакции существуют две отчетливо разделенные области значений параметров, в каждой из которых срыв низкотемпературного режима определяется только одним источником тепла. Для реакции первого порядка область значений параметров, где срыв режима определяется химическим тепловыделением, плавно переходит в область, где основной причиной срыва является диссипативное тепловыделение, так же, как и для случая, когда вязкость зависит только от температуры [139, 148].

Рассмотрим теперь, как изменяется во времени величина расхода жидкости, то есть функцию $Q(t)$. Отметим, что отчетливо выраженный для автокаталитической реакции переход из одной области срыва в другую (см. рис. 5.1) хорошо виден на рис. 5.5. Эта зависимость представлена на рис. 5.4. С увеличением вязкости жидкости величина расхода и диссипативного тепловыделения пропорционально уменьшается. В высокотемпературном, надкритическом режиме резкий рост температуры ведет к быстрому уменьшению вязкости, которое преобладает над ростом вязкости с глубиной превращения (при $A \leq 10$), и величина расхода резко возрастает. Напомним, что при высокой интенсивности диссипации именно этот самоускоряющийся рост расхода и механического тепловыделения является основной причиной срыва режима слабой химической реакции (см. кривую 1, рис. 5.4).

В низкотемпературном режиме возможны два варианта развития расхода во времени. При значительном удалении от предела воспламенения величина расхода слабо изменяется (кривая 3, рис. 5.4). Вблизи предела при высокой интенсивности диссипации наблюдается резкий рост расхода жидкости вследствие роста разогрева. Однако увеличение вязкости вследствие быстрого роста глубины превращения ведет к резкому уменьшению диссипативного тепловыделения, система остывает, расход уменьшается (кривая 2, рис. 5.4). Подобное изменение расхода, когда начавшийся переход в высокотемпературный режим останавливается в результате роста вязкости в ходе реакции, происходит в области значений параметров, ограниченной кривыми $\chi_{кр}(\nu)$ для $A = 0$ и величиной A в текущей жидкости.

Поскольку система уравнений (5.7)–(5.8) рассматривается для реакции первого порядка, то период индукции на пределе воспламенения $t_{кр}$ является величиной конечной [149]. Изменение периода индукции с ростом диссипации представлено на рис. 5.5. Точное определение значения периода индукции в критических условиях затруднено [149], поэтому все значения находились с одинаковой точностью в определении $\chi_{кр}$ ($\Delta = 0,005$).

Качественный вид зависимости не изменяется при различном росте вязкости с глубиной превращения (различные величины значений константы A). С увеличением интенсивности диссипативного тепловыделения величина критического периода индукции уменьшается, развитие срыва режима ускоряется, так как увеличение вклада диссипативного источника

тепла интенсифицирует реакцию при малых глубинах превращения (максимум диссипативного тепловыделения соответствует $\eta = 0$, см. рис. 5.2).

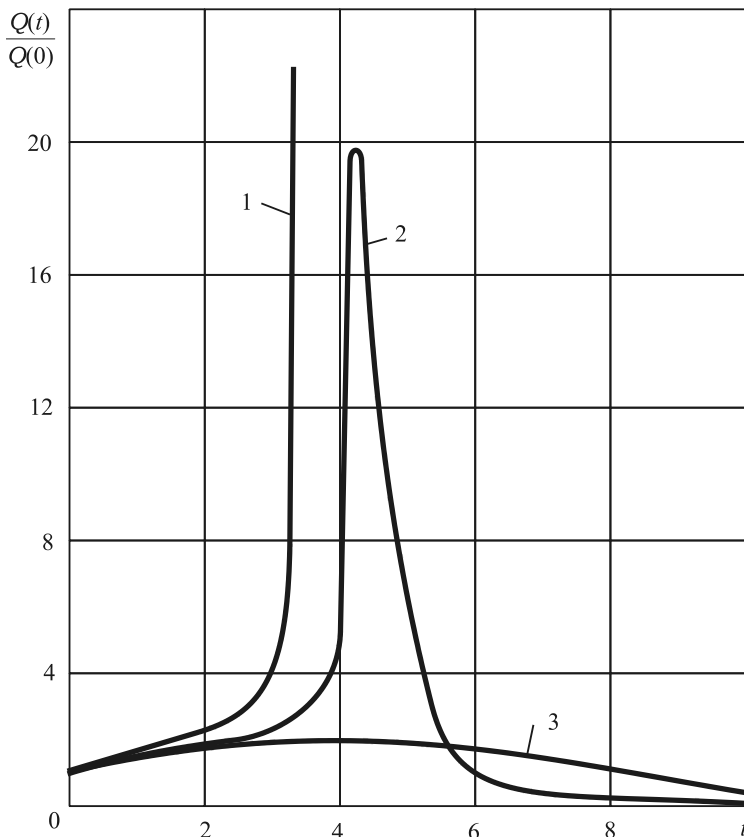


Рис. 5.4. Изменение расхода жидкости во времени для реакции первого порядка при различных значениях параметра диссипации ν : 1 — $\nu = 0,9$; 2 — $0,8$; 3 — $0,7$

При дальнейшем увеличении диссипации процесс переходит в область, где основной причиной срыва режима слабой химической реакции является диссипативное тепловыделение. При гидродинамическом тепловом взрыве период индукции в критических условиях стремится к бесконечности, поэтому при приближении к гидродинамическому тепловому взрыву происходит увеличение критического периода индукции. Величина его бесконечно растёт, при этом асимптотой служит прямая $\nu = \nu_{кр}$, соответствующая критическому условию гидродинамического взрыва [151].

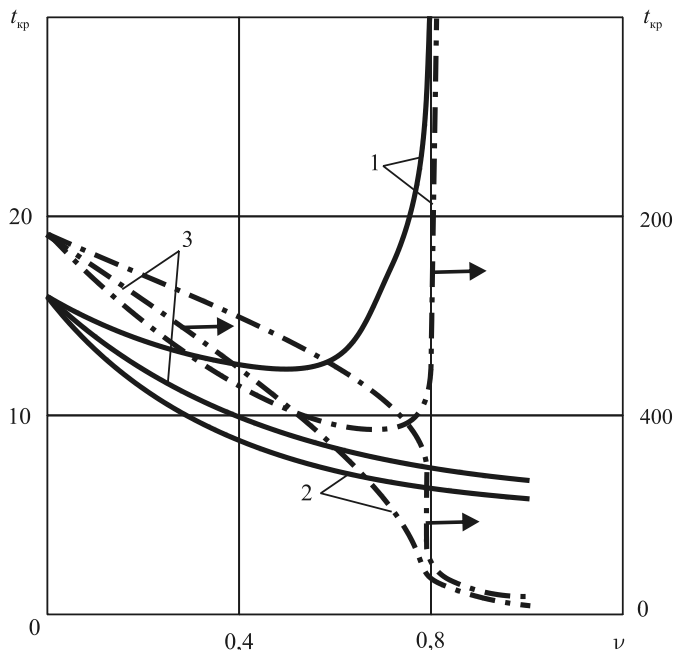


Рис. 5.5. Зависимость периода индукции на пределе воспламенения $t_{кр}$ от параметра диссипации ν для различных значений константы A : 1 — $A = 0$; 2 — 3; 3 — 10; — — — реакция первого порядка; — · — · — автокаталитическая реакция

На рис. 5.6 и 5.7 приведены кривые зависимости времени достижения максимальной температуры в низкотемпературном режиме t_m и периода индукции $t_{инд}$ в высокотемпературном режиме от параметров χ и ν . Зависимости эти аналогичны найденным в работе [149] зависимостям $t_m(\chi)$ и $t_{инд}(\chi)$ для реакции первого порядка и в работах [145, 146] для автокаталитической реакции. Величины параметров ν и A не влияют на форму кривых, как и для случая [139], когда вязкость жидкости зависит только от температуры. Важно отметить, что пики на кривых соответствуют критическим значениям параметров. Величина и форма пика зависит от значений параметров ν , A и χ . Период индукции с ростом любого источника тепла монотонно убывает. Время достижения максимума температуры в низкотемпературном режиме с появлением и ростом диссипативного тепловыделения уменьшается, так как при этом реакция ускоряется при малых глубинах превращения. Аналогия зависимости периода индукции от параметров χ и ν объясняется аналогичной экспоненциальной зависимостью интенсивности тепловыделения за счёт химической реакции и вязкого трения от температуры.

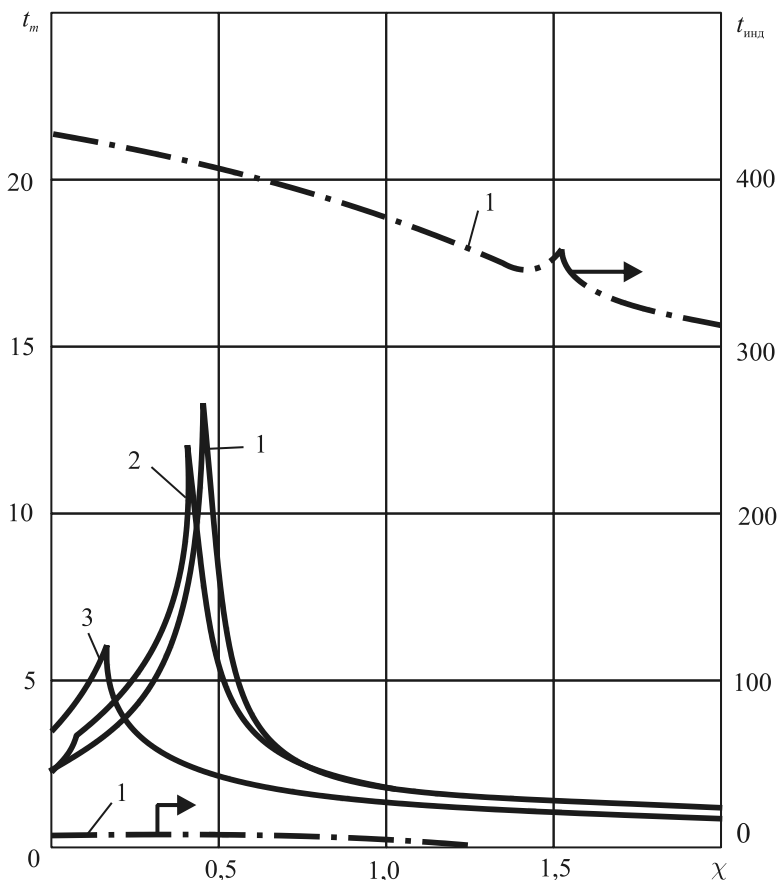


Рис. 5.6. Зависимость времени достижения максимальной температуры в низкотемпературном режиме t_m и периода индукции в высокотемпературном режиме $t_{\text{инд}}$ от параметра химического источника тепла χ при различных значениях константы A и параметра диссипации ν : 1 — $A = 10$, $\nu = 0,1$; 2 — 3, 0,1; 3 — 3, 0,9; — — — — реакция первого порядка; — · — · — автокаталитическая реакция

Для реакции с автокаталитическим ускорением возможно существование двух максимумов разогрева в режиме слабой химической реакции (см. рис. 5.2) с различными характерными временами (см. рис. 5.6 и 5.7, кривые 1). Существование двух максимумов возможно только при достаточной интенсивности обоих источников тепла. Если один из источников тепла существенно слабее другого, то соответствующий максимум разогрева исчезает (см. рис. 5.2, 5.6, 5.7).

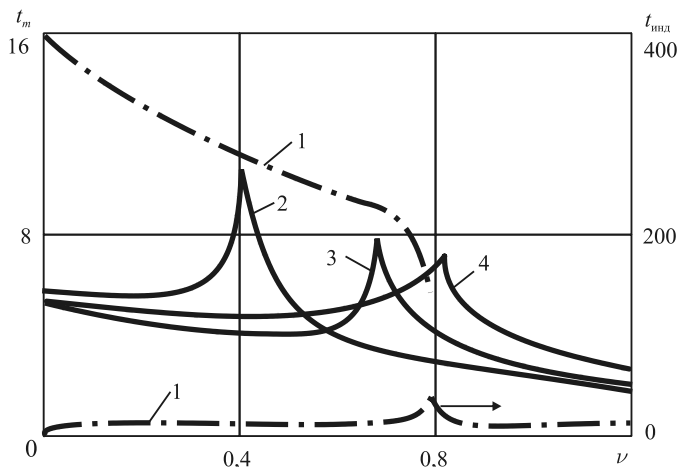


Рис. 5.7. Зависимость времени достижения максимальной температуры в низкотемпературном режиме t_m и периода индукции в высокотемпературном режиме $t_{\text{инд}}$ от параметра диссипации ν при различных значениях константы A и параметра химического источника тепла χ : 1 — $A = 10$, $\chi = 1,4$; 2 — 3, 0,3; 3 — 10, 0,3; 4 — 3, 0,2; — — — — реакция первого порядка; — · — · — автокаталитическая реакция

Течение при постоянном расходе

При поддержании в трубе постоянного расхода жидкости интенсивность диссипативного тепловыделения прямо пропорциональна вязкости. Поэтому ряд закономерностей срыва низкотемпературного режима течения реагирующей жидкости с переменной вязкостью существенно отличается от случая течения при постоянном градиенте давления [148], и в системе гидродинамический тепловой взрыв невозможен [135, 139, 148].

Резкое увеличение вязкости в ходе химической реакции приводит при постоянном расходе к пропорциональному увеличению напряжения сдвига и, следовательно, росту вязкой диссипации. Диссипативные разогревы в системе тем больше, чем сильнее увеличивается вязкость в ходе реакции (см. рис. 5.8). В режиме слабой химической реакции могут достигаться высокие разогревы. Наибольшей температурой жидкости при этом может быть стационарная температура, соответствующая ситуации, когда реакция закончилась и вязкость жидкости максимальна (см. рис. 5.8, кривая 5). При постоянном расходе жидкости через трубу интенсивность диссипативного тепловыделения в реагирующей жидкости монотонно возрастает с глубиной химического превращения (см. рис. 5.2), максимум интенсивности суммар-

ного тепловыделения при большой величине диссипативного источника соответствует большим глубинам превращения. Поэтому значительные разогревы жидкости наблюдаются после длительного слабого протекания реакции, когда глубина превращения вещества достигает высоких значений.

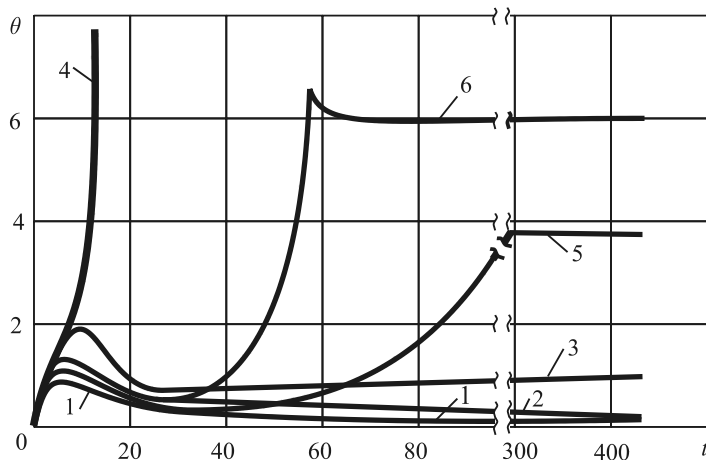


Рис. 5.8. Зависимость разогрева жидкости θ от времени t для реакции первого порядка в зависимости от параметров химического источника тепла χ , диссипации ν и константы A : 1 — $\chi = 0,45$; $\nu = 0$; 2 — $\chi = 0,45$; $\nu = 0,005$; $A = 3$; 3 — $0,45$; $0,075$; 4 — $0,4$; $0,008$; 10 ; 5 — $0,4$; $0,001$; 10 ; 6 — $0,4$; $0,004$; 10

Такое своеобразное развитие разогревов в ходе реакции накладывает отпечаток на зависимость критического значения параметра Семенова χ от величины диссипативного параметра ν . Увеличение начальной интенсивности диссипации (рост величины ν) ведет к росту вклада механического источника тепла, тем более сильному, чем больше увеличивается вязкость в ходе реакции. Критическое значение величины χ уменьшается, а в случае сильного роста вязкости резко падает (см. рис. 5.9). Граница между низкотемпературным и высокотемпературным режимами реакции становится все менее отчетливо выраженной и наконец исчезает (кривые на рис. 5.9 обрываются). Происходит своеобразное вырождение теплового воспламенения.

Вырождение теплового воспламенения при наличии только химического тепловыделения происходит в результате либо ослабления зависимости скорости химической реакции от температуры, либо уменьшения теплового эффекта реакции (увеличение параметров β и γ [128]). В нашем случае причиной вырождения является ослабление зависимости суммарной интенсивности тепловыделения от температуры при возрастании вклада диссипативного источника в общее тепловыделение. Вязкость жидкости

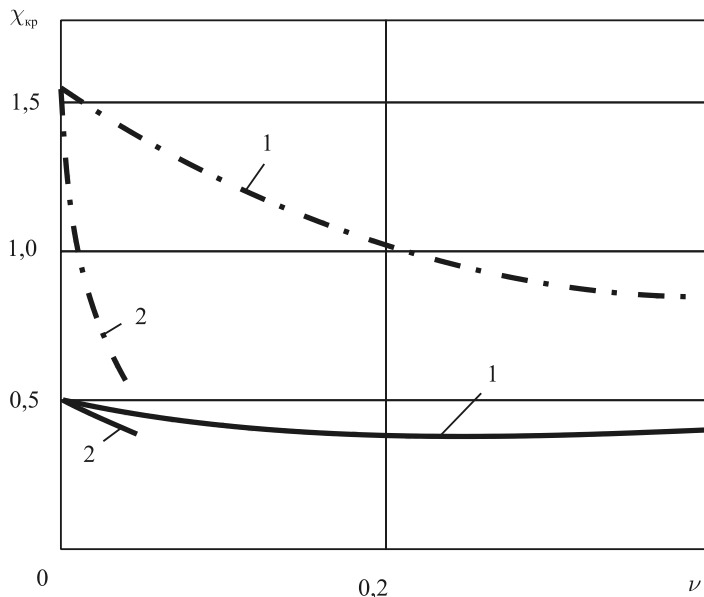


Рис. 5.9. Зависимость критического значения параметра химического источника тепла $\chi_{кр}$ от параметра диссипации ν при различных значениях коэффициента A : 1 — $A = 3$; 2 — 10; — — — реакция первого порядка; — · — — автокаталитическая реакция

уменьшается с ростом температуры, и при $Q = \text{const}$ с ростом температуры диссипативное тепловыделение уменьшается [$W_m \sim \exp(\sigma\theta)$]. Таким образом, чем больше доля механического источника тепла в суммарном тепловыделении, тем более слабой является зависимость интенсивности суммарного тепловыделения от температуры.

Увеличение вязкости в ходе реакции способствует вырождению теплового воспламенения, так как максимум интенсивности тепловыделения сдвигается в сторону почти полного превращения вещества и взрывной рост температуры начинается при значительных глубинах химического превращения (например, максимум кривой 6 рис. 5.8 соответствует $\eta = 0,96$), и, следовательно, слабом химическом источнике тепла. Чем сильнее возрастает вязкость в ходе химической реакции, тем при меньших расходах жидкости наступает вырождение теплового воспламенения (см. рис. 5.9 и 5.10).

Рост вязкости и соответствующие высокие диссипативные разогревы определяют интересную черту такого вырождения. В отличие от классического вырождения теплового взрыва [128] и вырождения гидродинамического теплового взрыва инертной жидкости [127] в нашем случае по мере

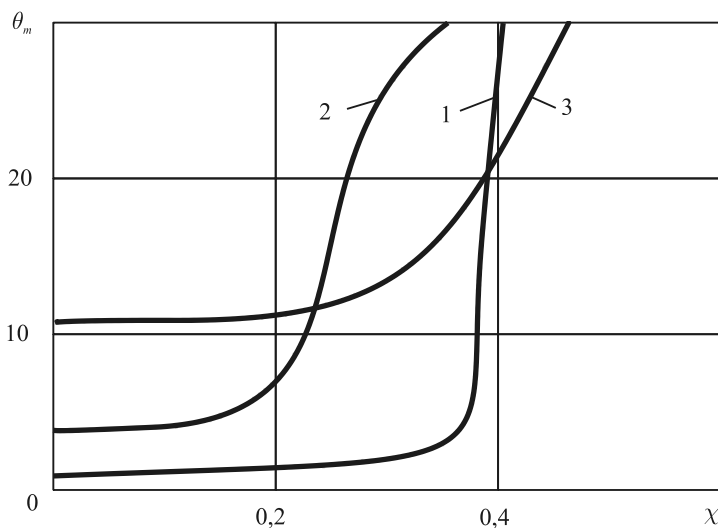


Рис. 5.10. Зависимость максимального разогрева жидкости от параметра химического источника тепла χ при различных значениях константы A и параметра диссипации ν : 1 — $A = 3$, $\nu = 0,3$; 2 — 3, 1,5; 3 — 10, 0,03

увеличения вырождения разрывы в системе не уменьшаются, а возрастают (см. рис. 5.10).

Вырождение теплового воспламенения полимеризующейся жидкости вследствие роста диссипации происходит при очень высоком диссипативном тепловыделении, что соответствует большим скоростям течения или высоким начальным вязкостям и резкому росту вязкости в ходе реакции.

Отметим, что во многих промышленных процессах роль диссипативного фактора мала либо вследствие малых скоростей течения, либо вследствие малой начальной вязкости, и диссипативный параметр ν мал и не превышает 0,01 (например, в производстве полиэтилена). Однако даже такая величина параметра ν уже влияет на предел воспламенения (см. рис. 5.9).

Зависимость периода индукции воспламенения от параметров χ и ν аналогична зависимостям при течении реагирующих жидкостей с постоянным градиентом давления.

Квазистационарный подход к решению задачи о тепловом воспламенении реокинетических жидкостей в круглой трубе

Характерной особенностью развития разогрева реагирующих жидкостей в ходе полимеризации является наличие хорошо выраженных квазистационарных температурных режимов (см. рис. 5.3 и 5.8). Даже над пределом воспламенения некоторое время температуры жидкости изменяются

незначительно. Квазистационарный режим особенно ярко выражен в том случае, когда с увеличением глубины превращения тепловыделение одного источника возрастает, а другого — падает. Наличие таких режимов при течении полимеризующихся жидкостей позволяет применить для нахождения аналитического решения задачи квазистационарную теорию теплового взрыва А. Г. Мержанова и Ф. И. Дубовицкого [145–146]. Основное предположение этой теории — наличие квазистационарного температурного режима, при котором скорость **теплонакопления** в системе много меньше скорости **тепловыделения**, и поэтому температура вещества остается почти постоянной. Пренебрегая скоростью теплонакопления и учитывая изменение температуры только через изменение глубины превращения химической реакции, можно аналитически получить выражения характеристик теплового взрыва. В работе [146] дано обобщение квазистационарной теории на случай произвольного вида функции тепловыделения, которым можно воспользоваться для решения системы уравнений (5.4) и (5.5).

Следуя работе [146], будем пренебрегать малым параметром $\beta = RT_0 / E \ll 1$. Переходя в уравнениях (5.4) и (5.5) к безразмерным переменным, используемым в теории теплового взрыва [129, 130, 146],

$$t = k_0 t_p \exp[-E / (RT_0)] \quad \gamma = \frac{C \rho R T_0^2}{Q_0 E},$$

$$\nu = \frac{A_1^2 r_0^2}{8 Q_0 k_0 \mu_0} \exp[(U - E) / (RT_0)] \quad (A_1 = \text{const}),$$

$$\nu = \frac{8 Q^2 \mu_0}{\pi^2 r_0^6 k_0} \exp[(U + E) / (RT_0)] \quad (Q = \text{const}),$$

и принимая прочие обозначения такими же, что и в предыдущем разделе (см. выражения 5.4 и 5.5), получим [152]:

$$\begin{aligned} \gamma \frac{d\theta}{dt} &= \varphi(\eta) \cdot \exp \theta + \nu \cdot \exp[\pm(\sigma\theta - A\eta)] - \frac{\theta}{\chi}; \\ \gamma \frac{d\eta}{dt} &= \varphi(\eta) \cdot \exp \theta. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Здесь и далее верхний знак (плюс) в квадратных скобках относится к случаю течения жидкости с постоянным градиентом давления ($A_1 = \text{const}$), а нижний (минус) — к случаю с постоянным расходом ($Q = \text{const}$).

Исследуем случай реакции с автокаталитическим ускорением, то есть

$$\varphi(\eta) = (1 - \eta)(\eta + \eta_0).$$

Для малых значений параметров γ и η_0 в определенном интервале значений χ скорость теплонакопления в системе намного меньше скорости тепловыделения [146], и поэтому членом $\dot{\gamma} \cdot d\theta/dt$ можно пренебречь. Процесс протекает квазистационарно, и система уравнений упрощается:

$$\varphi(\eta) \exp \theta + \nu \exp [\pm (\sigma \theta - A \eta)] - \frac{\theta}{\chi} = 0; \quad (5.12)$$

$$\gamma \frac{d\eta}{dt} = \varphi(\eta) \exp \theta. \quad (5.13)$$

Задачу необходимо решать при начальном условии: $\eta = 0$ при $t = 0$. Начальная температура θ_0 определяется из соотношения (5.12) при подстановке в него $\eta = 0$.

Следуя схеме расчета характеристик теплового воспламенения, детально разработанной в [145, 146], из уравнений (5.12) и (5.13) можно получить выражения для определения всех характерных величин. Выведем эти выражения.

Начальная температура θ_0 и граница области нестационарности $\chi_{\text{нест}}$ определяются из следующих уравнений:

$$\theta_0 \exp(-\theta_0) = \chi \{ \eta_0 + \nu \exp[(\pm \sigma - 1) \theta_0] \}; \quad (5.14)$$

$$\chi_{\text{нест}} = \frac{\theta'_0}{\eta_0 \exp \theta'_0 + \nu \exp(\pm \sigma \theta'_0)}. \quad (5.15)$$

Здесь θ'_0 — максимальное значение начальной температуры θ_0 , при котором процесс ещё протекает квазистационарно, определяется из условия

$$(1 - \theta'_0) \eta_0 \exp[(1 \mp \sigma) \theta'_0] = \nu (\pm \sigma \theta'_0 - 1). \quad (5.16)$$

Характерные величины для критического режима определяются так:

$$\chi_{\text{кр}} = \frac{1}{(1 + H\sigma) \varphi(\eta_{\text{кр}}) \exp(\theta_{\text{кр}})}; \quad (5.17)$$

$$\theta_{\text{кр}} = \frac{1 \pm H}{1 + H\sigma}; \quad H = \frac{\varphi'(\eta_{\text{кр}})}{A\varphi(\eta_{\text{кр}})},$$

а величина $\eta_{\text{кр}}$ определяется из уравнения

$$\pm \nu A = \varphi'(\eta_{\text{кр}}) \exp \left[\frac{1 \pm H}{1 + H\sigma} (1 \mp \sigma) \pm A \eta_{\text{кр}} \right]. \quad (5.18)$$

Здесь $\theta_{кр}$ — максимальный предвзрывный разогрев на пределе самовоспламенения $\chi_{кр}$; $\eta_{кр}$ — соответствующая этому разогреву глубина превращения.

Характерные величины для подкритического, низкотемпературного режима определяются следующим образом:

$$\eta_m = \frac{1 - \eta_0}{2} \mp \frac{1}{A} \pm \sqrt{\frac{(1 + \eta_0)^2}{4} + \frac{1}{A^2} - \frac{1}{\chi} \theta_m \exp(-\theta_m)}. \quad (5.19)$$

Величина θ_m находится из уравнения

$$\pm \nu A = \varphi'(\eta_m) \exp[(1 \mp \sigma) \theta_m \pm A \eta_m], \quad (5.20)$$

где θ_m и η_m — максимальный разогрев системы и соответствующая этому разогреву глубина превращения.

Характерные величины для надкритического, высокотемпературного режима вычисляются по формулам:

$$\eta_{взр} = \frac{1 - \eta_0}{2} - \sqrt{\frac{(1 + \eta_0)^2}{4} - \frac{(1 \mp \sigma \theta_{взр})}{(1 \mp \sigma) \chi} \exp(-\theta_{взр})}; \quad (5.21)$$

$$\theta_{взр} - 1 = \nu \chi (1 \mp \sigma) \exp[\sigma \theta_{взр} - A \eta_{взр}], \quad (5.22)$$

где $\theta_{взр}$ и $\eta_{взр}$ — наибольшие предвзрывные разогрев и глубина превращения.

При $\sigma = 1$ в системе уравнений (5.21) и (5.22) может возникнуть неопределённость. Решая задачу с подстановкой в исходное уравнение (5.12) значения $\sigma = 1$, получим $\theta_{кр} = 1$, а значение $\eta_{взр}$ находится из выражения

$$\varphi(\eta_{взр}) - \nu \exp(-A \eta_{взр}) = \frac{1}{e \chi},$$

где e — основание натурального логарифма.

Отметим, что все полученные выражения в отсутствие диссипации механической энергии, то есть при $\nu = 0$, сводятся к соответствующим выражениям работы [146].

При квазистационарном подходе к решению задачи рассматривается несколько иная система уравнений, чем в предыдущем разделе. В квазистационарном режиме диссипативный источник тепла играет только вспомогательную роль, а увеличение его интенсивности ведёт к нарушению квазистационарности (см. рис. 5.11). Поэтому в данном случае исследуется, как влияет на протекание реакции наличие сравнительно слабого

диссипативного тепловыделения. В нестационарном рассмотрении оба источника были одинаково важны. Переход от системы уравнений (5.7)–(5.8) и (5.9)–(5.10) к системе (5.12)–(5.13) производится по формулам

$$\gamma = \frac{B}{\chi}, \quad t_{\text{кв}} = t_{\text{нест}} B, \quad \nu_{\text{кв}} = \frac{\nu_{\text{нест}}}{\chi}.$$

Некоторые результаты расчётов квазистационарной задачи представлены на рис. 5.11 и 5.12. Зависимости для случаев течения с постоянным градиентом давления изображены сплошными линиями, а для случая течения с постоянным расходом — штриховыми линиями.

При появлении и росте дополнительного диссипативного источника тепла увеличивается скорость теплонакопления в системе и, следовательно, сужается область квазистационарного протекания реакции (см. рис. 5.11). Поскольку значение $\chi_{\text{нест}}$ определяется из рассмотрения начального момента процесса при $\eta = 0$, то величина $\chi_{\text{нест}}$ не зависит от того, насколько быстро возрастает вязкость с глубиной превращения, то есть от значения константы A . Так, при $\sigma = 1$

$$\chi_{\text{нест}} = \frac{1}{e(\eta_0 + \nu)}.$$

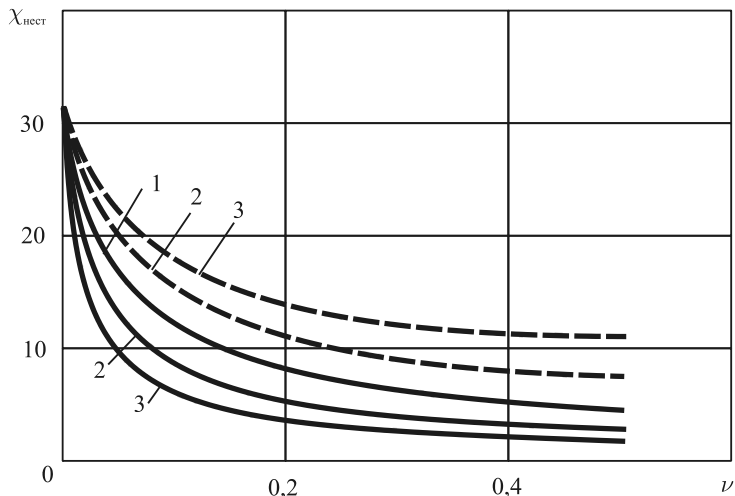


Рис. 5.11. Зависимость параметра химического источника тепла при нестационарном течении $\chi_{\text{нест}}$ от параметра диссипации ν при различных значениях величины σ : 1 — $\sigma = 0$; 2 — 0,25; 3 — 0,5; — — — течение при $A_1 = \text{const}$; — — — — течение при $Q = \text{const}$

Заметим, что при $\sigma = 0$, как в случае $A_1 = \text{const}$, так и в случае $Q = \text{const}$, имеем одну и ту же кривую. Это объясняется тем, что при $\sigma = 0$ вязкость от температуры не зависит, а следовательно, не зависит от температуры и механический источник тепла. В этом случае задание постоянного градиента давления равносильно заданию постоянного расхода. Увеличение σ приводит к уменьшению вязкости, а следствием этого является увеличение механических источников тепла при постоянном градиенте давления и уменьшение их при постоянном расходе. Увеличение интенсивности источников тепла приводит к уменьшению $\chi_{\text{нест}}$, то есть к сокращению области квазистационарности. В силу различного характера влияния величины σ на интенсивность диссипативного тепловыделения с ростом этой величины при постоянном градиенте давления кривые $\chi_{\text{нест}}(\nu)$ опускаются, а при постоянном расходе — поднимаются.

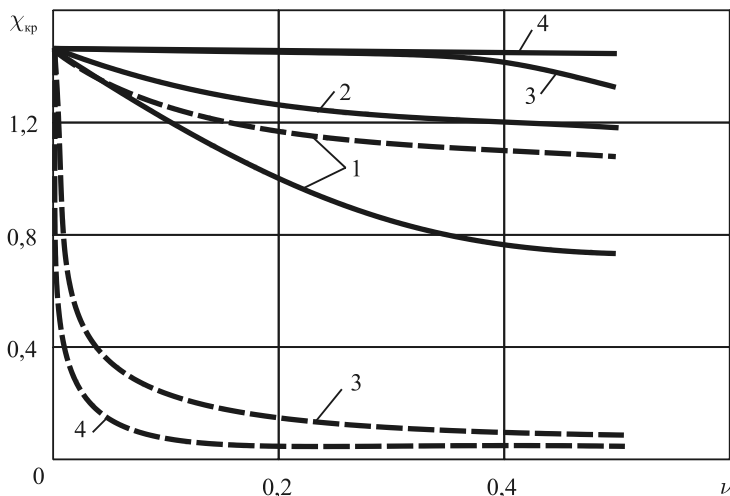


Рис. 5.12. Зависимость предела воспламенения $\chi_{\text{кр}}$ от параметра диссипации ν при различных значениях константы A : 1 — $A = 0$; 2 — 6; 3 — 8; 4 — 10; — — — течение при $A_1 = \text{const}$; — — — — течение при $Q = \text{const}$

Зависимость величины предела воспламенения $\chi_{\text{кр}}$ от интенсивности диссипативного тепловыделения (параметра диссипации ν), определяемая из уравнений (5.17) и (5.18) (см. рис. 5.12), качественно не отличается от зависимостей, полученных выше. При этом квазистационарный режим наблюдается в области значений параметров до начала резкого уменьшения $\chi_{\text{кр}}$ (см. рис. 5.1).

Качественное сравнение квазистационарного и нестационарного решения приводится на рис. 5.13. Отметим хорошо выраженную температурную квазистационарность (рис. 5.13, а), связанную с резким уменьшением диссипативного тепловыделения по мере роста глубины превращения.

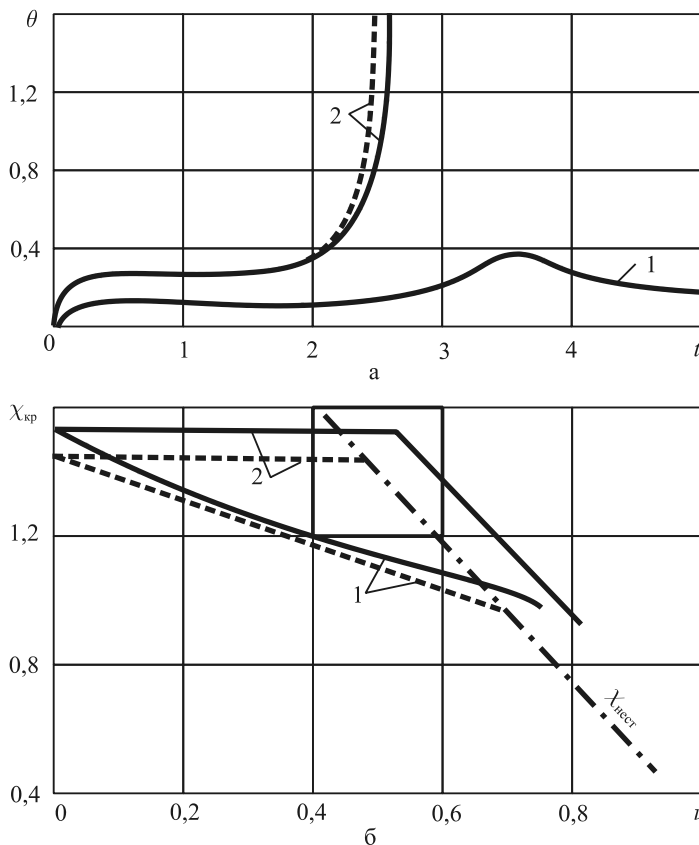


Рис. 5.13. Сравнение результатов решения квазистационарной (пунктирные линии) и нестационарной (сплошные линии) задачи при $\gamma = 0,01$:

а) зависимость разогрева θ от времени при $A=10$ и $\nu=0,1$; 1— $\chi=1$; 2—2;

б) зависимость предела воспламенения $\chi_{кр}$ от параметра диссипации ν и константы A ; 1 — $A=3$; 2 — 10

Сравнение величины критического значения χ проводилось в широком интервале изменения параметров: $\gamma = 0,01 \div 0,05$; $\eta_0 = 0,01 \div 0,2$; $A = 0 \div 10$; ν — во всём интервале квазистационарного протекания процесса. Максимальная ошибка в определении $\chi_{кр}$ в квазистационарном при-

ближении Δ_m не зависит заметно от величины η_0 . С увеличением диссипативного тепловыделения величина ошибки не увеличивается, так что если квазистационарный метод даёт приемлемую точность при наличии только химического источника тепла, то им можно пользоваться и для учёта влияния диссипации. Величина ошибки быстро растёт с увеличением параметра γ , поскольку становится всё менее допустимым пренебрежение членом $(\gamma \cdot d\theta / dt)$ в уравнении теплового баланса. В области невырожденных режимов Δ_m не превышает 20% (без учёта поправок на значение β [129, 130] и γ [146]):

$$\Delta_m(\gamma = 0,01) = 6\%; \quad \Delta_m(\gamma = 0,03) = 12\%; \quad \Delta_m(\gamma = 0,05) = 20\%.$$

При $\gamma = 0,05$ существует заметное вырождение процесса перехода к высокотемпературному режиму в отсутствие диссипации, ширина переходной зоны увеличивается до $\Delta\chi = 0,04 \div 0,1$ (в зависимости от величины η_0 [128]).

На рис. 5.14 и 5.15 приведены кривые зависимостей максимального предвзрывного разогрева $\theta_{кр}$ и соответствующей этому разогреву глубины превращения $\eta_{кр}$ от параметра диссипации ν при различных значениях константы A . Из рисунков видно, что зависимость этих характеристик теплового воспламенения от ν и A при постоянном градиенте давления слабая. При больших значениях A величины $\theta_{кр}$ и $\eta_{кр}$ близки к соответствующим значениям для случая неподвижной жидкости. Как отмечалось выше, это обусловлено резким ростом вязкости и уменьшением диссипативного разогрева. Заметим, что $\eta_{кр}$ при двух предельных значениях $A = \infty$ и $A = 0$ совпадает с соответствующими значениями, приведёнными в работах [145, 146]. Это объясняется тем, что при $A \rightarrow \infty$ жидкость переходит в неподвижное состояние, а при $A = 0$ диссипативное тепловыделение не зависит от глубины превращения.

В случае постоянства расхода $\theta_{кр}$ и $\eta_{кр}$ сильно зависят от ν на начальном участке кривой, особенно при больших значениях A . Следует отметить, что воспламенение в критических условиях происходит при гораздо большей глубине превращения, чем в чисто химическом случае. Это является следствием сильного сдвига в сторону больших η максимума суммарной кривой тепловыделения (см. рис. 5.2) за счёт добавления экспоненциально возрастающего с глубиной превращения механического источника тепла.

Период индукции и время достижения максимального разогрева можно определить так же, как и в работах [145, 146]:

$$t_{инд} = \int_0^{\eta_{кр}} \frac{\exp[-\theta(\eta)]}{\varphi(\eta)} d\eta.$$

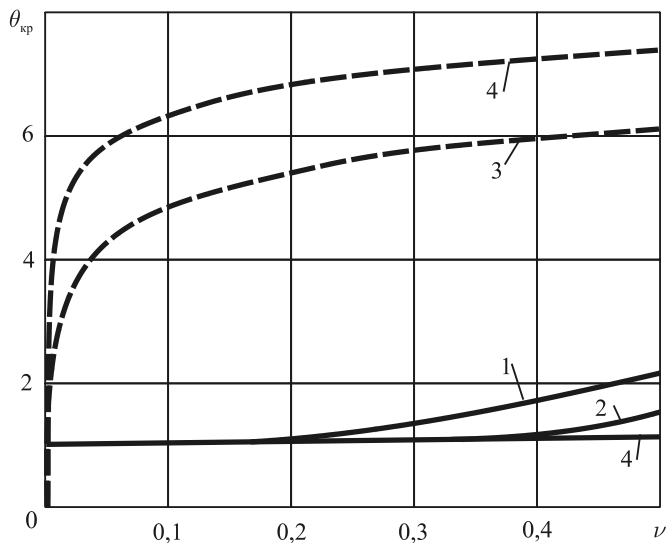


Рис. 5.14. Зависимость критического разогрева жидкости $\theta_{кр}$ от параметра диссипации ν при различных значениях константы A : 1 — $A = 0$; 2 — 6; 3 — 8; 4 — 10; — — — течение при $A_1 = \text{const}$; - - - - течение при $Q = \text{const}$

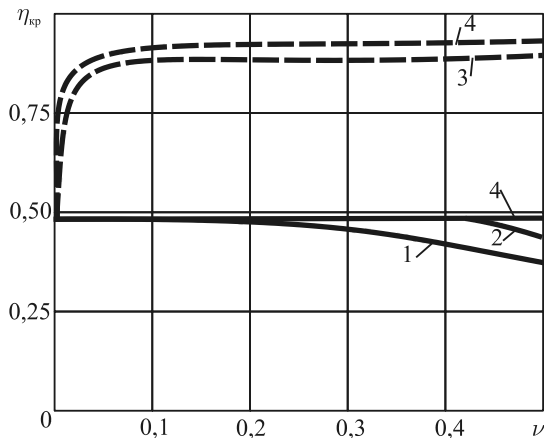


Рис. 5.15. Зависимость критической глубины превращения реакции $\eta_{кр}$ от параметра диссипации ν при различных значениях константы A : 1 — $A = 2$; 2 — 6; 3 — 8; 4 — 10; — — — течение при $A_1 = \text{const}$; - - - - течение при $Q = \text{const}$

Для сильно самоускоряющихся реакций, используя разложение $\exp(\theta) \approx 1 + \theta$, можно получить следующее выражение:

$$t_{\text{инд}} = \int_0^{\eta_{\text{кр}}} \frac{1 - \chi[\varphi(\eta) \pm \nu\sigma \exp(\mp A\eta)]}{\varphi(\eta)[1 + \chi\nu(1 \mp \sigma) \exp(\mp A\eta)]} d\eta.$$

Как показали расчёты, с увеличением ν период индукции и время достижения максимального разогрева монотонно убывают, причем их значения в случае $Q = \text{const}$ выше, чем в случае $A_1 = \text{const}$.

Таким образом, с помощью квазистационарного метода оказалось возможным путём несложных расчётов определить основные характеристики теплового воспламенения при движении по трубам реагирующих жидкостей с переменной вязкостью.

Глава 6

ТЕЧЕНИЕ ПОЛИМЕРИЗУЮЩИХСЯ МАСС В ТРУБЧАТОМ РЕАКТОРЕ ВЫТЕСНЕНИЯ

Полимеризация в трубчатом реакторе представляет собой сложный макрокинетический процесс, в котором имеется большое количество различных взаимовлияющих факторов. При исследовании движения полимеризующейся среды в трубчатом реакторе обычно принимались допущения, позволяющие упростить реальный процесс вытеснения, в частности, не учитывались диссипативное тепловыделение при течении реагентов, осевой кондуктивный теплоперенос, радиальное распределение температурных и концентрационных полей. Мы же рассматриваем влияние всех этих факторов на процесс течения в трубе. Для лучшего понимания закономерностей процесса задача вначале решается в одномерной постановке.

Постановка задачи

Рассмотрим стационарное течение реакционноспособной жидкости в круглой трубе радиуса r_0 и длиной L . Пусть вязкость жидкости экспоненциально изменяется с температурой и глубиной превращения и подчиняется зависимости (5.1). В жидкости происходит инициированная полимеризация. С окружающей средой через стенки трубы (реактора) осуществляется теплообмен по закону Ньютона с коэффициентом теплообмена α [граничное условие III рода по температуре, см. уравнение (2.79)]. Диффузией вещества в осевом направлении трубы будем пренебрегать, так как в низкотемпературном режиме малы градиенты концентрации [153, 154], а в высокотемпературном режиме высоким градиентам концентрации соответствует очень вязкая жидкость и критерий Льюиса $Le = D/a \ll 1$ (D — коэффициент диффузии, a — коэффициент температуропроводности). В этих предположениях и в одномерной постановке процесс будет описываться следующей системой уравнений, записанной в безразмерном виде [155–157]:

$$q\epsilon \frac{d\theta}{d\xi} = (1 - \eta)^m i^n \exp \frac{\theta}{1 + \beta\theta} + \nu q^2 \exp \left(A\eta - \frac{\sigma\theta}{1 + \beta\theta} \right) + \frac{1}{\delta} \frac{d^2\theta}{d\xi^2} - \frac{\theta}{\chi}; \quad (6.1)$$

$$q\varepsilon \frac{d\eta}{d\xi} = \gamma(1-\eta)^m i^n \exp \frac{\theta}{1+\beta\theta}; \quad (6.2)$$

$$q\varepsilon \frac{di}{d\xi} = -\gamma_i i^s \exp \frac{\omega\theta}{1+\beta\theta}; \quad (6.3)$$

$$\Delta p = q \int_0^1 \exp \left(A\eta - \frac{\sigma\theta}{1+\beta\theta} \right) d\xi. \quad (6.4)$$

В качестве граничных условий на входе в трубу принимаются условия постоянства температуры и концентрации реагентов, что достаточно хорошо выполняется, если зона интенсивной химической реакции достаточно удалена от входа. На выходе из трубы предполагается равенство нулю градиента температуры. Эти граничные условия в безразмерном виде будут записываться так:

$$\xi = 0: \quad \theta = \theta_n, \quad \eta = \eta_n, \quad i = 1; \quad (6.5)$$

$$\xi = 1: \quad d\theta/d\xi = 0. \quad (6.6)$$

В определении безразмерных величин в уравнениях (6.1)–(6.4) и граничных условиях (6.5)–(6.6) приняты следующие обозначения:

$$\xi = \frac{z}{L}; \quad \eta = \frac{M_0 - M}{M_0}; \quad i = \frac{I}{I_0}; \quad \varepsilon = \frac{r_0}{L}; \quad \omega = \frac{E_i}{E}; \quad \gamma = \frac{C\rho RT_c}{EQ_0 M_0};$$

$$\chi = \frac{r_0 EQ_0 k_0 M_0^m I_0^n}{2\alpha R T_c^2} \exp[-E/(RT_c)];$$

$$\gamma_i = \frac{k_{i0} I_0^{s-n-1} C \rho R T_c^2}{EQ_0 M_0^m k_0} \exp[(E - E_i)/(RT_c)];$$

$$\delta = \frac{L^2 EQ_0 k_0 M_0^m I_0^n}{\lambda R T_c^2} \exp[-E/(RT_c)]; \quad \theta_n = \frac{E}{RT_c^2} (T_n - T_c);$$

$$\nu = \frac{8E^2 Q_0 k_0 M_0^m I_0^n \mu_0}{(C \rho R T_c^2)^2} \exp[(U - E)/(RT_c)]; \quad \sigma = \frac{U}{E};$$

$$q = \frac{C \rho R T_c^2 Q}{\pi r_0^3 EQ_0 k_0 M_0^m I_0^n} \exp[E/(RT_c)]; \quad \theta = \frac{E}{RT_c^2} (T - T_c); \quad \beta = \frac{RT_c}{E};$$

$$\Delta p = \frac{C \rho R T_c^2 \Delta P}{8EQ_0 k_0 M_0^m I_0^n \mu_0} \exp[(E - U)/(RT_c)].$$

В принятых обозначениях: z — продольная координата; r_0 , L — радиус и длина трубы; T_n — температура вещества на входе в реактор (трубу); M , M_0 , I , I_0 — текущие и начальные концентрации мономера и инициатора; k_{i0} , E_i — предэкспонент и энергия активации реакции распада инициатора; k_0 , E — предэкспонент и энергия активации химической реакции; m , n , s — порядки реакций; Q — объёмный расход; ΔP — перепад давления в трубе; Q_0 — тепловой эффект химической реакции; ρ , C , λ — плотность, теплоемкость и коэффициент теплопроводности вещества; U — энергия активации вязкого течения; R — универсальная газовая постоянная; T_c — температура окружающей среды; a — коэффициент теплообмена; η — глубина превращения химической реакции; μ , A — константы.

Записанная кинетическая схема соответствует наиболее важным в промышленности реакциям [148] (полимеризация стирола, этилена, акрилатов и т. д.).

Наиболее важными параметрами задачи являются: безразмерные расход q и перепад давления Δp , диссипативный параметр ν и параметр δ , характеризующий отношение интенсивности химического тепловыделения и интенсивности осевого кондуктивного теплопереноса (параметр Франк-Каменецкого). Выбор параметров определяется целью задачи: получить напорно-расходную характеристику реактора; поэтому специально выделен в параметр расход, в отличие от тех исследований, где целью являлось определение границ различных областей протекания процесса (см., например, работы [158–160]).

Для детального изучения влияния на процесс полимеризации каждого из факторов (диссипативного тепловыделения и осевого кондуктивного теплопереноса) рассмотрим вклад каждого из них в отдельности, то есть сначала рассмотрим влияние диссипации в пренебрежении кондуктивным теплопереносом ($\nu \geq 0$; $l/\delta = 0$), а затем изучим влияние кондуктивного переноса тепла (кондукции) без учета диссипации ($\nu = 0$).

Влияние диссипативного тепловыделения на гидродинамику и теплофизику процесса

Система уравнений (6.1)–(6.4) решалась численно [155–157] в пренебрежении кондуктивным членом [третий член правой части уравнения (6.1)] с начальными условиями (6.5), то есть рассматривался реактор идеального вытеснения. Некоторые результаты расчетов иллюстрируются рис. 6.1–6.5. В расчетах фиксировалось значение параметра $\beta = 0,03$, а поскольку величина параметра ω в реальных процессах находится в узком интервале $\omega = 1,3 \div 1,6$, поэтому принималась $\omega = 1,4$. Кинетические параметры m , n , и s изменялись в процессе расчетов, но оказалось, что ха-

рактор зависимостей при этом в качественном отношении не изменяется. В расчетах, приведенных на рисунках, были выбраны следующие значения величин: $m = 1$; $n = 0,5$; $s = 1$. Параметры y и y_i не влияют на характер развития процесса при выполнении условия $\gamma \leq 0,05$; $\gamma_i \ll \gamma$ [161]. Для реакций с высоким тепловым эффектом полимеризации и высокой константой распада инициатора эти условия хорошо выполняются. В расчетах $\gamma = 0,03$, а $\gamma_i = 0,005$. Проведенные расчеты показали, что в случае термополимеризации ($\gamma_i = 0$) основные закономерности рассматриваемого случая сохраняются. Величина параметра σ для различных мономеров изменяется. Поскольку основной целью задачи было изучение роста вязкости в ходе полимеризации, принималось, что $\sigma = 0,5$. Начальная температура вещества, как показали расчеты, при $\theta_n < 0$ влияет только на величину прогрева вещества, поэтому в большинстве вариантов принято $\theta_n = -6$. В аппаратах с осуществлением принудительного перемешивания отношение длины L к радиусу r_0 сравнительно невелико: $L/r_0 = 1/\varepsilon = 30 \div 50$, поэтому в расчетах фиксировалось $\varepsilon = 0,02$. Отметим, что при заданном радиусе изменение длины реактора не оказывает качественного влияния на характеристики процесса.

Хорошо известно [161–164], что процесс полимеризации в трубчатом реакторе протекает в двух качественно различных режимах: низкотемпературном (режим слабой реакции) и высокотемпературном. Высокотемпературный режим подразделяется на режим горения, самовоспламенения и промежуточный [158, 160, 165–167]. Поскольку в нашем случае на входе в реактор (в трубу) задана постоянная температура $\theta_n < 0$, то будем говорить просто о высокотемпературном режиме, при этом речь идет о режиме самовоспламенения (индукционном). Границы областей существования различных режимов (без учета диссипации) установлены в работах [158–160].

На рис. 6.1 ясно видны два возможных режима полимеризации: низкотемпературный (кривая 1) и высокотемпературный (кривые 3–4). Переход от одного режима к другому осуществляется скачком. В случае отсутствия механического источника тепла это происходит при достижении параметром χ некоторого критического значения $\chi_{кр}$ (в нашем случае $\chi_{кр} = 0,535 \pm 0,002$). Диссипативный разогрев приводит к тому, что переход в высокотемпературный режим становится возможным при $\chi < \chi_{кр}$, но при достаточно больших расходах q .

Профили температуры в высокотемпературном режиме, как правило, имеют отчетливо выраженный максимум, так называемую «горячую точку». Рост температуры реагентов приводит к быстрому разложению инициатора вследствие его большой энергии активации. При выгорании инициатора полимеризация прекращается, вещество остывает за счет теплообмена через

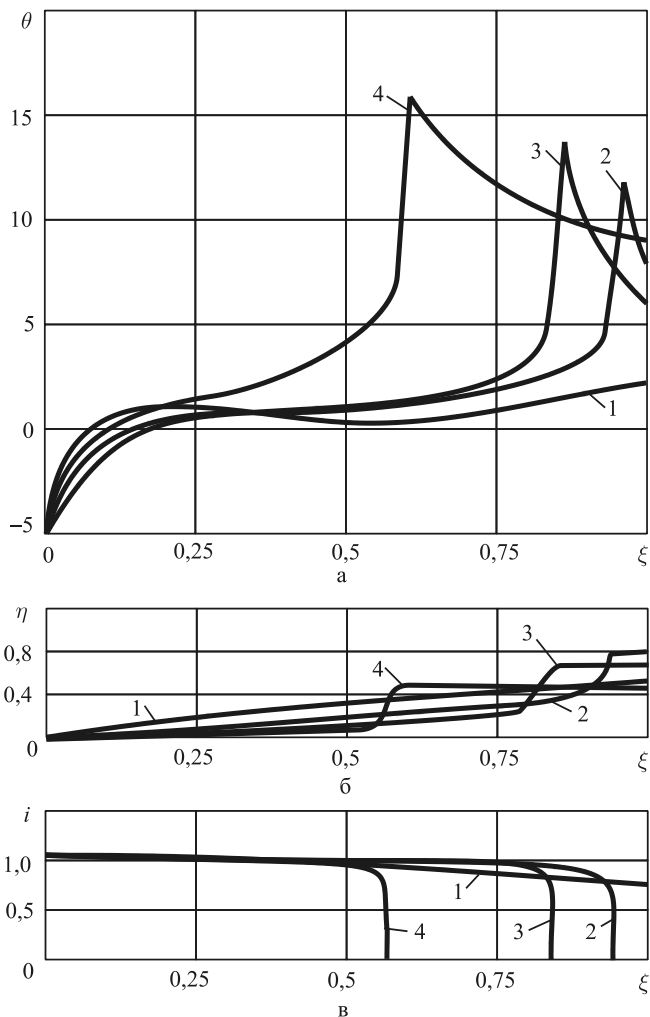


Рис. 6.1. Распределение температуры θ (а), глубины превращения η (б) и концентрации инициатора i (в) по длине реактора (трубы) ξ при $\chi = 0.5$, $A = 8$ и $\nu = 0.002$ в зависимости от величины расхода жидкости q : 1 — $q = 4$; 2 — 9; 3 — 13; 4 — 50

стенку реактора. Увеличение расхода при наличии высокой вязкости жидкости ведет к росту интенсивности тепловыделения, рост разогревов становится более резким, инициатор разлагается быстрее, и конечная степень

полимеризации уменьшается. Так как диссипативное тепловыделение происходит и за горячей точкой, то по мере роста расхода жидкости температура за горячей точкой увеличивается.

При исследовании изменения температурных и концентрационных профилей представляет интерес прежде всего изменение координаты горячей точки $\xi = \xi_0$ с изменением расхода q . Поскольку за горячей точкой полимеризация не происходит, то положение этой точки определяет необходимую длину реактора. В высокотемпературном режиме в реакторе заданной длины нужно стремиться, чтобы горячая точка находилась вблизи выхода при наибольшем расходе и конечной степени превращения.

При пренебрежимо малой диссипации (малая начальная вязкость $\mu(T_0) < 10^{-2} \text{ Па} \cdot \text{с}$) рост расхода приводит к смещению каждой точки температурного профиля пропорционально расходу, максимум профиля смещается к выходу и при некотором расходе исчезает (см. кривые 1, 2 на рис. 6.2). Этот факт экспериментально подтвержден в работах [161, 163].

При течении жидкости в низкотемпературном режиме рост диссипации с увеличением расхода обуславливает появление горячей точки ближе ко входу в трубу, чем в случае отсутствия диссипации (см. рис. 6.2). При некоторой величине расхода, зависящей от параметров ν , A и σ , диссипация механической энергии становится настолько значительной, что приводит к смещению горячей точки ко входу в реактор (см. кривые 2 и 3, рис. 6.2). Так как $W_m \sim q^2$ и скорость реакции растет с температурой по экспоненте, а конвективный унос тепла пропорционален расходу, то с дальнейшим ростом расхода влияние диссипации преобладает и смещение горячей точки ко входу трубы продолжается.

Более сложная зависимость изменения координаты горячей точки от расхода жидкости возможна в том случае, когда рост диссипации переводит процесс из низкотемпературного режима в высокотемпературный (см. кривые 4–6, рис. 6.2). Если для перехода процесса требуется мощное диссипативное тепловыделение (мала величина χ), то после появления горячей точки рост расхода ведет только к ее смещению ко входу, рост диссипации преобладает над конвективным выносом вещества (см. кривую 4, рис. 6.2). Если для перехода с низкотемпературного режима в высокотемпературный достаточно сравнительно слабого вклада диссипации (χ близка к $\chi_{\text{кр}}$), то движение горячей точки с ростом расхода ко входу может смениться на противоположное (см. кривые 5 и 6 рис. 6.2). При этом происходит ослабление диссипации, поскольку уменьшается глубина превращения, при которой начинается взрывной рост температуры и, следовательно, вязкость жидкости уменьшается (см. рис. 6.1). Дальнейший рост расхода жидкости приводит к росту диссипативного источника $W_m \sim q^2$, и максимум температуры

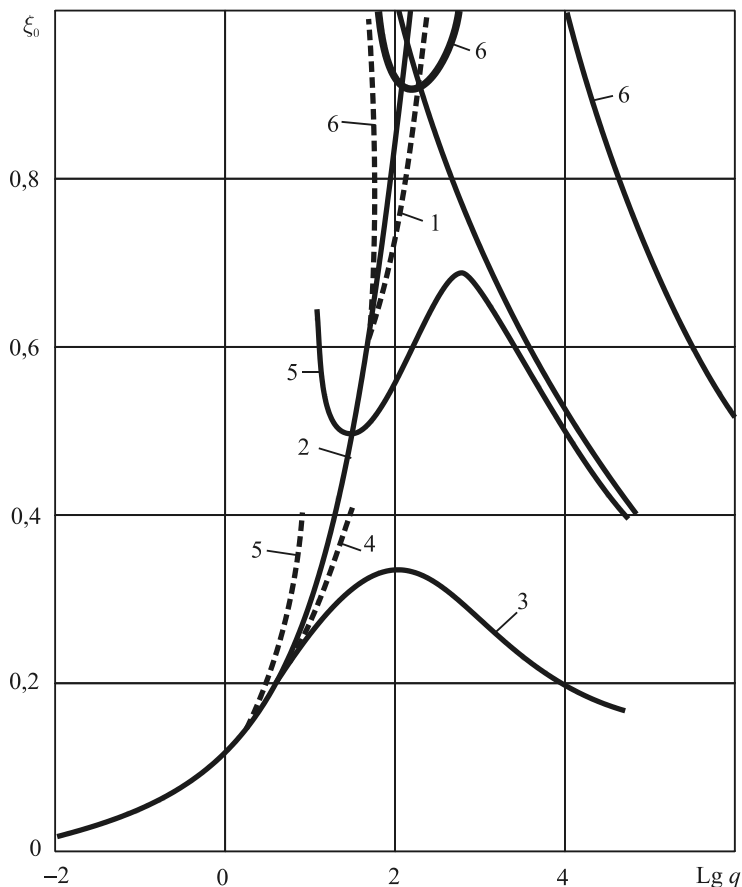


Рис. 6.2. Зависимость расположения горячей точки реактора ξ_0 от величины расхода при различных значениях величин χ , ν и A : 1 — $\chi = 0,5$, $\nu = 0$; 2 — $0,55$, 0 ; 3 — $\chi = 0,55$, $\nu = 0,02$, $A = 8$; 4 — $0,4$, $0,005$, 8 ; 5 — $0,5$, $0,005$, 8 ; 6 — $0,5$, $0,002$, 6 ; — — — — высокотемпературный режим; — — — — низкотемпературный режим

вновь смещается ко входу. При достаточно малых значениях начальной диссипации наблюдается исчезновение горячей точки из реактора и потом повторное появление ее при больших расходах вследствие роста диссипации (см. кривую 6 рис. 6.2).

Резкий рост вязкости при полимеризации и соответствующее увеличение диссипации ведут еще к одной особенности изменения температурных профилей с расходом жидкости. Величина диссипативного разогрева мо-

жет стать настолько значительной, что исчезает максимум температуры не только в низкотемпературном, но и в высокотемпературном режиме (кривые на рис. 6.2 обрываются), то есть рост температуры продолжается и после прекращения полимеризации.

Следует отметить, что рассматриваемые эффекты имеют место при наличии высокой начальной вязкости ($1 \div 10 \text{ Па} \cdot \text{с}$ и более) и резкого роста вязкости в ходе реакции. Подобный случай имеет место при полимеризации в несколько этапов, когда в реактор подается предварительно прореагировавшее на некоторую глубину вещество (например, при полимеризации стирола).

Одной из наиболее важных характеристик реактора является его напорно-расходная характеристика, то есть зависимость перепада давления от расхода жидкости. Изучение ее обнаружило существование таких режимов течения, при которых зависимость $\Delta p(q)$ не является монотонной (рис. 6.3), а расход не является однозначной функцией перепада давления. Исследованный диапазон изменения размерного расхода составлял от 0 до $5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{с}$, т. е. средняя скорость течения изменялась в пределах от 0 до 0,4 м/с при радиусе трубы $r_0 = 0,02 \text{ м}$.

Если интенсивность диссипации пренебрежимо мала, то зависимость перепада давления от расхода при полимеризации имеет резко выраженный максимум как в низкотемпературном, так и высокотемпературном режимах (см. кривые 1 и 2 на рис. 6.3). Падение перепада давления после максимума происходит в результате того, что при высоких значениях расхода очень вязкие продукты полимеризации выносятся из реактора и большая часть реактора заполняется менее вязким веществом с меньшей глубиной превращения. В низкотемпературном режиме неизотермичность процесса при $T_n < T_c$ не оказывает качественного влияния на вид кривой $\Delta p(q)$, полностью аналогичной кривой для изотермического случая течения [168].

В высокотемпературном режиме наличие диссипативного тепловыделения не оказывает качественного влияния на вид напорно-расходной характеристики (см. кривые 2 и 3 рис. 6.3). Вследствие дополнительного разогрева вязкость жидкости уменьшается, уменьшается и перепад давления.

При переходе из низкомолекулярного режима в высокомолекулярный (вследствие роста диссипации) с увеличением расхода происходит резкая перестройка температурных и концентрационных полей. При этом происходит и быстрое изменение перепада давления (см. кривые 4 и 5, рис. 6.3). Возникновение высокотемпературного режима на кривых 4 и 5 отмечено кружочком. Если преобладает температурная зависимость вязкости, то при этом перепад давления уменьшается, а если преобладает концентрация мономера — растёт.

Дальнейший рост расхода ведет к уменьшению перепада давления, который происходит из-за уменьшения вязкости жидкости за горячей точкой

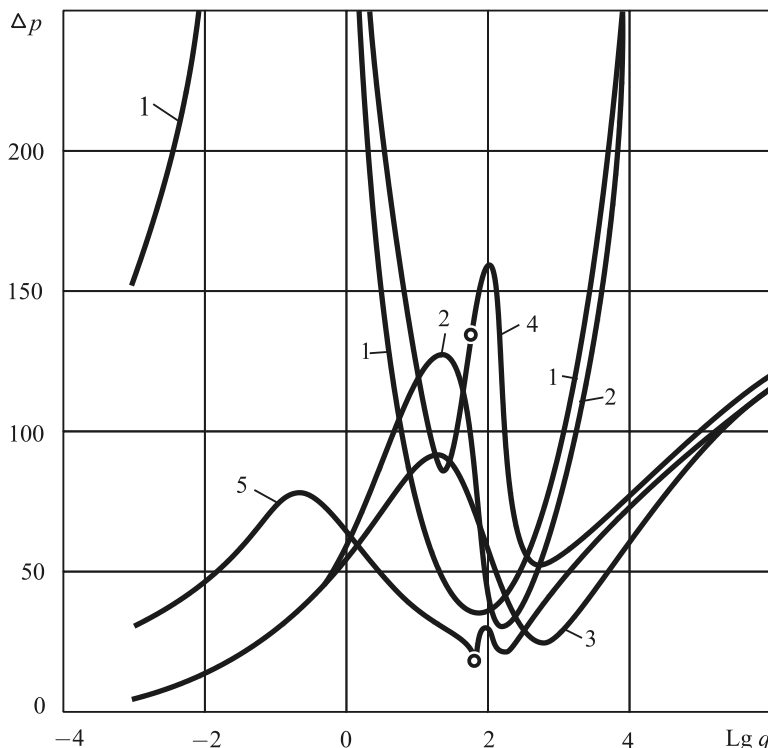


Рис. 6.3. Зависимость перепада давления Δp от расхода q при $\theta_n = 6$ и различных значениях χ , ν и A : 1— $\chi = 0,5$, $\nu = 0$, $A = 8$; 2— $0,55$, 0 , 6 ; 3— $0,55$, $0,002$, 6 ; 4— $0,5$, $0,002$, 8 ; 5— $0,5$, $0,002$, 6

(уменьшается конечная степень полимеризации и возрастает температура, см. рис. 6.1). Кроме того, возможно смещение горячей точки к выходу, в результате чего уменьшается доля реактора, заполненная вязкими продуктами полимеризации, что также способствует уменьшению перепада давления.

При очень высоких значениях расхода горячая точка смещается ко входу в реактор вследствие высокой диссипации (см. рис. 6.3), конечная степень полимеризации почти не меняется и перепад давления вновь растет за счет роста расхода (рис. 6.4).

Таким образом, рост диссипации с увеличением расхода способен вызывать переход процесса в высокотемпературный режим, при этом на напорно-расходной характеристике наблюдаются два максимума, и одному значению перепада давления может соответствовать до пяти стационарных состояний реактора с различными значениями расходов.

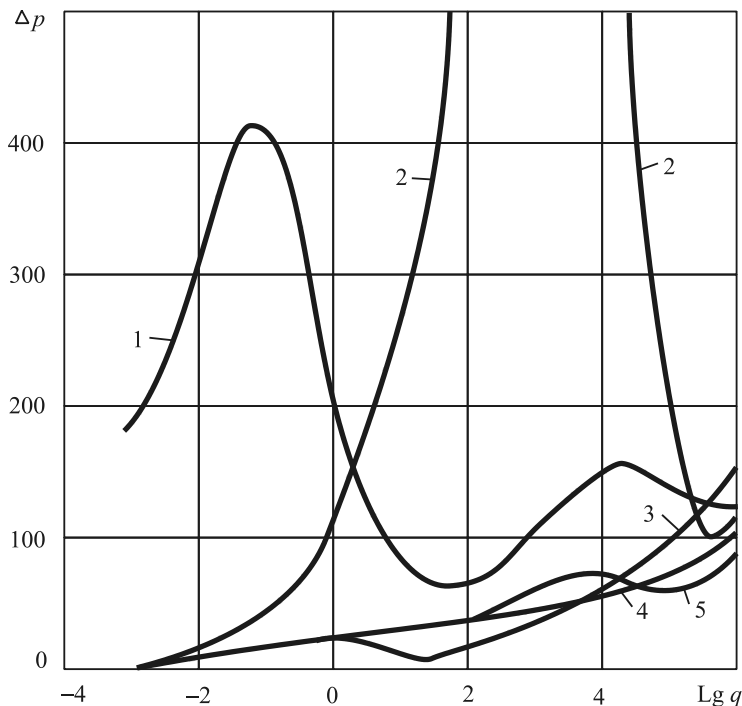


Рис. 6.4. Зависимость перепада давления Δp от расхода q при $\theta_n = 4$, $\nu = 0$ и при различных значениях величин χ и η_n : 1 — $\chi = 0,12$, $\eta_n = 0$; 2 — 0,13, 0; 3 — 0,1, 0,5; 4 — 0,2, 0,5; 5 — 0,24, 0,5

Аналогичный характер зависимости перепада давления от расхода имеет место и в отсутствие диссипативного тепловыделения. В работе [116] показано, что при сильной зависимости вязкости жидкости от температуры зависимость $\Delta p(q)$ при течении в трубе инертной жидкости может быть немонотонной в случае $T_n > T_c$. Наличие резкой зависимости вязкости от температуры и глубины превращения может привести к существованию двух максимумов перепада давления (рис. 6.4). Первый максимум, при малых значениях расхода, связан с выносом вязких продуктов полимеризации из трубы. При этом на выходе из трубы резко изменяется глубина превращения, в то время как температура почти постоянна, $\theta(1) \approx 0$. Уменьшение перепада давления после второго максимума при высоких расходах связано с выносом холодной, более вязкой жидкости. На выходе резко увеличивается температура жидкости, глубина превращения практически не меняется, $\eta(1) \approx 0$.

В высокотемпературном режиме полимеризации возможен только один максимум напорно-расходной характеристики (кривая 2 рис. 6.4), так как резкое изменение температуры и концентрации происходит совместно, вблизи горячей точки.

Итак, напорно-расходная характеристика полимеризационного реактора (трубы) может иметь два максимума и два минимума (и даже больше). На рис. 6.5 схематично представлены возможные виды немонотонной зависимости $\Delta p(q)$. Хорошо известно, что при наличии максимума кривой $\Delta p(q)$ стационарные состояния процесса, соответствующие ветви кривой с отрицательным наклоном ($d\Delta p/dq < 0$), неустойчивы при поддержании постоянного градиента давления [116, 163, 169]. В нашем случае, при наличии двух максимумов, область такой гидродинамической неустойчивости состоит из двух отдельных интервалов изменения расхода.

При изменении перепада давления в системе возможны гистерезисные переходы [116, 166, 168, 169] (на рис. 6.5 изображены линиями **AB** и **CD**). Неустойчивые состояния при этом являются и нереализуемыми при изменении перепада давления. В случае двух максимумов зависимости $\Delta p(q)$ при задании Δp могут не реализовываться и устойчивые состояния реактора (ветвь **EF** рис. 6.5, б, что соответствует кривым 4 и 5 рис. 6.4). В противном случае, если реализуются все состояния с положительным наклоном (см. рис. 6.5, в и кривую 1 рис. 6.4), то область нереализуемых значений расхода состоит из двух интервалов, а в системе возможны четыре различных скачкообразных перехода процесса при изменении перепада давления. Следует отметить, что при задании постоянного расхода в данном случае реализуются и являются устойчивыми состояния реактора при всех значениях расхода.

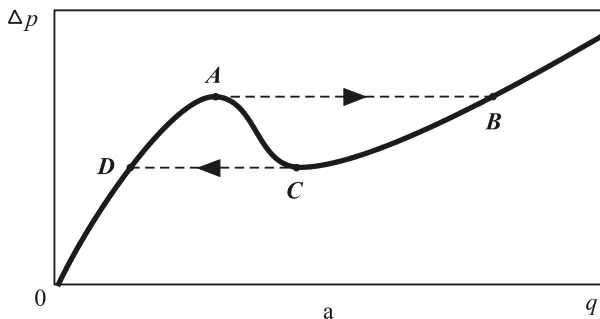


Рис. 6.5. Схематическое изображение зависимости перепада давления Δp от расхода q (обозначение в тексте)

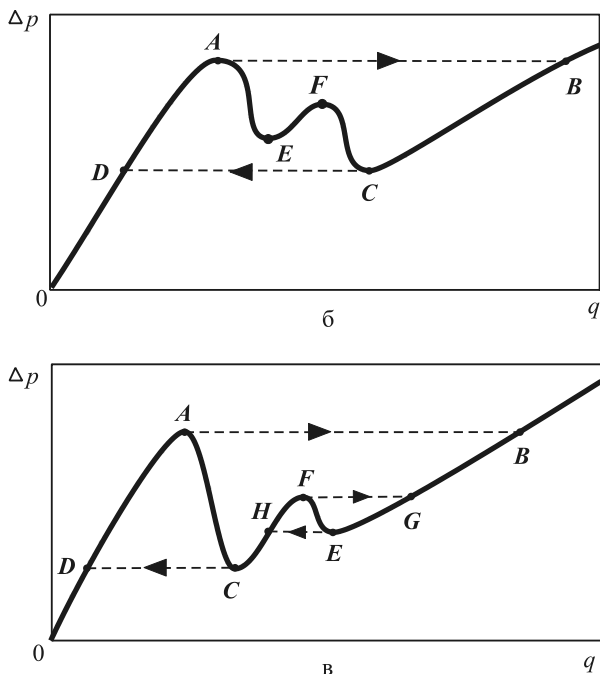


Рис. 6.5. (Продолжение)

Влияние осевого теплопереноса на течение

Еще с работ Ван Хирдена [170–171] известно, что наличие значительного осевого теплопереноса приводит к появлению множественности стационарных состояний реактора. Одному набору значений параметров могут соответствовать до трех различных стационарных режимов протекания процесса. Вместе с тем влияние кондуктивного теплопереноса и множественности стационарных состояний на гидродинамические характеристики трубчатого реактора до настоящего времени мало изучено.

Рассмотрим систему уравнений (6.1)–(6.4) с граничными условиями (6.5) и (6.6), пренебрегая тепловыделением за счет диссипации энергии ($\nu = 0$). Система уравнений решалась численно [172] при таких же значениях параметров, что и в предыдущем разделе, за исключением величин χ и θ_n , которые принимались равными: $\chi = 0,6$; $\theta_n = -3,5$.

В случае значительного кондуктивного теплопереноса ($\delta \leq 100$) существует достаточно широкая область изменения расхода, в которой возможно наличие трех стационарных решений задачи (см. рис. 6.6). Верхнее решение соответствует высокотемпературному режиму, нижнее — низко-

температурному, а среднее является неустойчивым [170, 171]. Отметим, что при задании на входе постоянных значений температуры и концентрации число возможных решений не превышает трех [173].

В верхнем режиме кривая $\theta(\xi)$ всегда имеет максимум (горячую точку) внутри реактора. Наличие максимума и резкое падение температуры за горячей точкой объясняется быстрым и полным выгоранием инициатора вблизи этой точки, после чего реакция полимеризации завершается и вещество остывает как инертное тело. В нижнем и среднем режимах инициатор выгорает не полностью, его концентрация изменяется по длине реактора плавно, соответственно и профиль температуры получается более плавным. Падение температуры после максимума в этом случае связано с кинетическим торможением реакции. При достаточно больших значениях расхода максимумы кривых $\theta(\xi)$ в среднем и нижнем режимах могут выноситься из реактора, тогда температурные профили представляют собой монотонно возрастающие кривые. Максимумы исчезают только при уменьшении параметра δ . Причиной исчезновения максимума на кривой $\theta(\xi)$ в этом случае является увеличение оттока тепла от зоны наибольшего тепловыделения ко входу реактора.

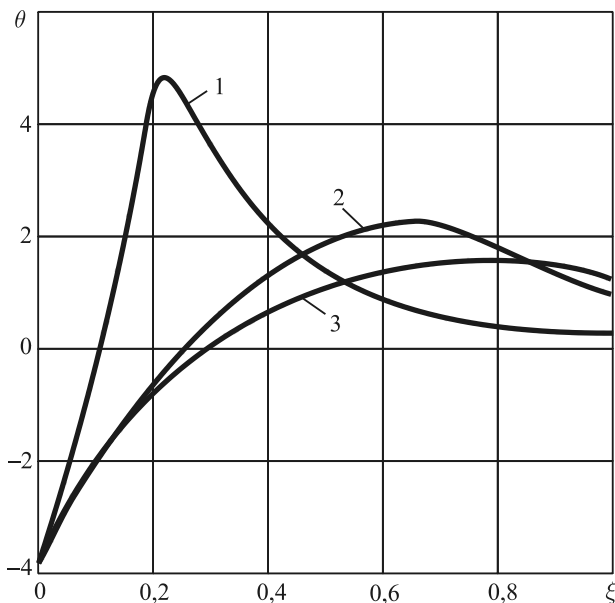


Рис. 6.6. Распределение температуры θ по длине реактора ξ при $q = 0,5$ и $\delta = 50$ для трех стационарных состояний: верхнего (1), среднего (2) и нижнего (3)

На рис. 6.7 изображены зависимости максимальной температуры, координаты максимума температуры и наибольшей степени полимеризации от безразмерного расхода. Участки кривых, соответствующие среднему, неустойчивому решению, здесь и далее изображены штриховыми линиями.

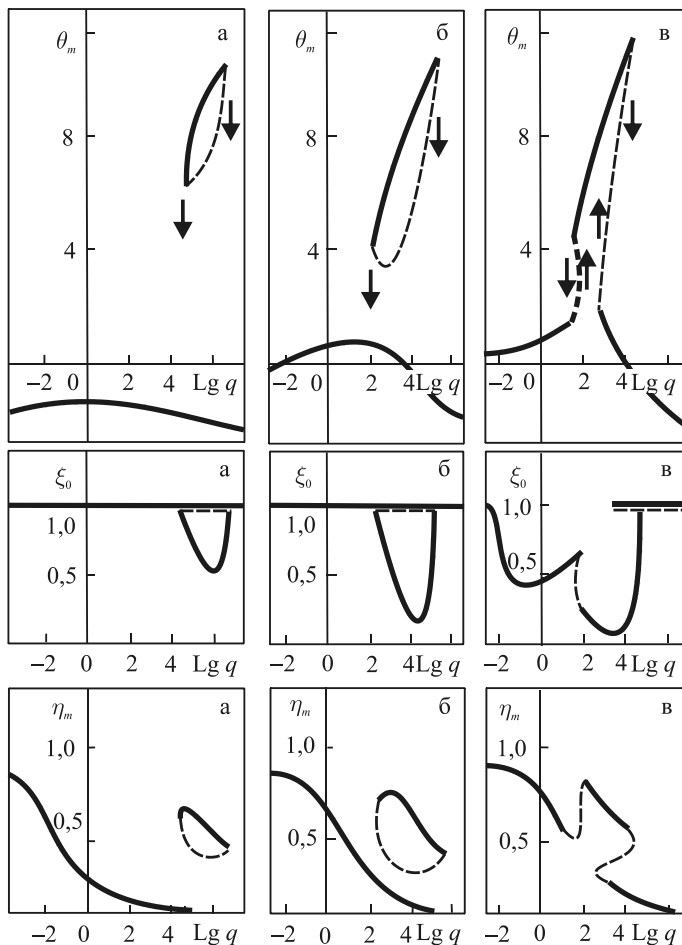


Рис. 6.7. Зависимость максимальной температуры θ_m , координаты максимума температуры (горячей точки) ξ_0 и наибольшей степени полимеризации η_m от расхода q и величины δ : а — $\delta = 1$; б — 10; в — 50

Высокотемпературный режим полимеризации существует в определенном интервале значений расхода. При малых расходах происходит потухание вследствие уменьшения химического тепловыделения и возрастания

отвода тепла ко входу реактора. При высоких значениях расхода потухание происходит вследствие конвективного уноса тепла. В случае множественности решений переходы процесса при изменении расхода могут иметь гистерезисный характер (места и направления этих переходов на рис. 6.7 показаны стрелками).

Рост расхода приводит к увеличению температуры горячей точки в высокотемпературном режиме (см. рис. 6.7), так как при этом растет химическое тепловыделение. Координата горячей точки меняется немонотонно.

Возникнув на выходе из реактора при каком-либо значении расхода, при дальнейшем его росте горячая точка сначала перемещается ко входу в реактор, затем к выходу и выносится из реактора. Такое поведение горячей точки объясняется двоякой ролью расхода. С одной стороны, с увеличением расхода в реактор поступает большее количество вещества и интенсивность тепловыделения возрастает, что приводит к увеличению максимальной температуры, усилению оттока тепла и перемещению горячей точки ко входу. С другой стороны, с увеличением расхода усиливается конвективный снос горячей точки.

Особо следует остановиться на случае больших значений δ (рис 6.7, в). Из рисунка следует, что при больших δ горячая точка возникает внутри реактора, а кривая зависимости ξ_0 от q состоит из двух ветвей: правая соответствует верхнему режиму, то есть перемещению горячей точки, а левая – перемещению точки максимума температуры для нижнего режима.

Наибольшая величина глубины превращения в нижнем режиме η_m с увеличением расхода монотонно падает из-за сокращения времени пребывания вещества в реакторе и слабого изменения температуры. В верхнем режиме, сразу после появления в реакторе горячей точки, η_m возрастает в основном за счет увеличения степени выгорания инициатора вплоть до полного ($i = 0$). Затем увеличение θ_m и градиента температуры перед горячей точкой приводит к тому, что инициатор выгорает быстрее, вещество не успевает прореагировать и конечная глубина превращения уменьшается.

На рис. 6.7, в область существования трех стационарных решений состоит из двух раздельных интервалов расходов. При этом имеется интервал значений q , в котором невозможно существование нижнего режима. При изменении расхода в системе наблюдается два гистерезиса. Правый гистерезис и правая область множественности связаны с эффектом выноса горячей точки из реактора. Левый гистерезис связан с затуханием верхнего режима при малых расходах вследствие недостаточного подвода свежего вещества и малого тепловыделения. С уменьшением δ концы ветвей нижнего режима сближаются и при некотором значении величины δ смыкаются. Дальнейшее уменьшение δ приводит к отрыву среднего режима от нижнего (см. рис. 6.7, б) и образованию характерной замкнутой петли, названной в работе [174] «изолой». Существование изолы экспериментально

подтверждено в работе [175]. При больших δ изола отсутствует, причем с увеличением δ интервалы изменения q , внутри которых имеется множественность стационарных состояний, уменьшаются. В пределе при $\delta \rightarrow \infty$ множественность стационарных состояний исчезает, и мы приходим к задаче предыдущего раздела.

Отметим, что в случае существования изола гистерезисные явления при изменении расхода отсутствуют. Возможны только два перехода системы из верхнего состояния в нижнее, сопровождающихся скачкообразным изменением температур и глубины превращений. При непрерывном изменении q обратного перехода не происходит. В отличие от случая, представленного на рис. 6.7, *в*, нижнее решение реализуется при всех значениях q , а область стационарных решений представляется одним интервалом изменения q .

На рис. 6.8 изображены напорно-расходные характеристики трубчатого реактора, построенного для случаев, изображенных на рис. 6.7. Рисунки, сведенные в горизонтальный ряд, отличаются от другого горизонтального ряда величинами параметров A и σ , отражающих зависимость вязкости от глубины превращения и температуры.

На рис. 6.8, *а*, *б*, *в* представлены напорно-расходные характеристики для случая, когда вязкость вещества зависит от температуры, а кривые $\Delta p(q)$ полностью определяются профилем $\theta(\xi)$. Так как разогрев вещества выше в верхнем режиме, то кривая $\Delta p(q)$ для этого режима лежит ниже, чем для среднего и нижнего режимов. Резкий рост кривой в конце интервала верхнего режима связан с приближением горячей точки к выходу из реактора и заполнением реактора более вязким холодным веществом.

Наличие изола на кривых $\theta_m(\xi)$ приводит к образованию замкнутой петли на кривой $\Delta p(q)$ для верхнего и среднего режимов. При изменении расхода q или перепада давления Δp возможен переход от верхнего режима к нижнему, сопровождающийся соответственно скачкообразным увеличением перепада давления или скачкообразным уменьшением расхода. Переход от нижнего режима к верхнему посредством изменения q или Δp в данном случае невозможен.

Если изола разрывается на участке среднего режима (рис. 6.7, *в*), то разрывается и соответствующая петля кривой $\Delta p(q)$. На напорно-расходной характеристике возможны два гистерезиса не только при изменении расхода, но и при изменении перепада давления. При переходе от нижнего режима к верхнему происходит скачкообразное увеличение расхода при изменении Δp или уменьшение перепада давления при изменении q . Переход от верхнего режима к нижнему сопровождается скачком этих величин в противоположном направлении.

На рис. 6.8, *к*, *л*, *м* представлены напорно-расходные кривые для случая, когда вязкость вещества зависит только от степени полимеризации.

Кривая $\Delta p(q)$ в нижнем режиме имеет в этом случае ярко выраженный максимум, связанный с выносом вязкого прореагированного вещества при увеличении расхода.

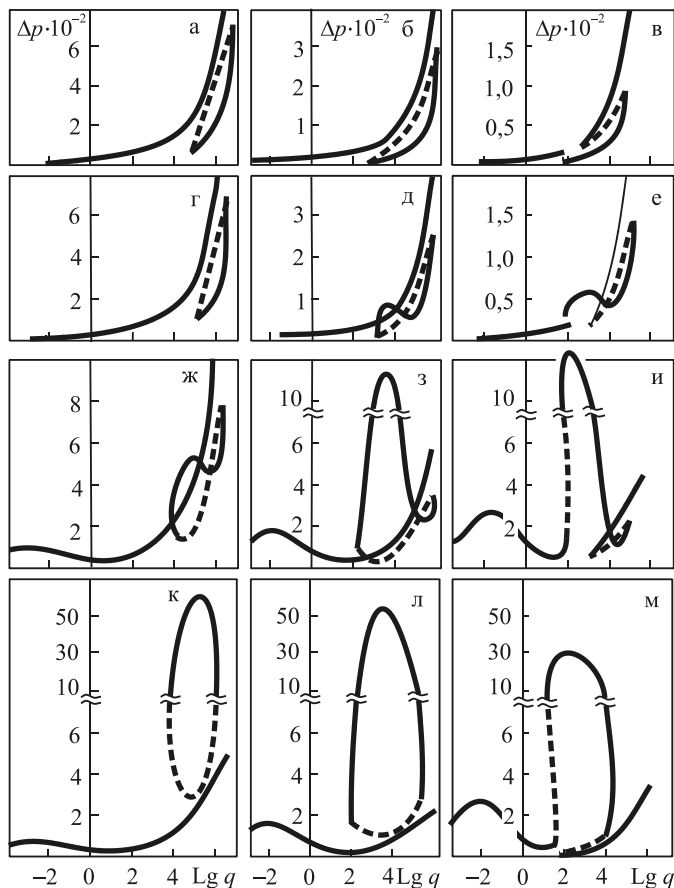


Рис. 6.8. Зависимость перепада Δp от расхода q при различных значениях величины A , σ , δ : а, б, в — $A = 0$, $\sigma = 0,4$; г, д, е — 3, 0,4; ж, з, и — 8, 0,4; к, л, м — 8, 0; а, г, д, к — $\delta = 1$; б, д, з, л — 10; в, е, и, м — 50

Ветвь кривой $\Delta p(q)$, соответствующая верхнему режиму, лежит выше ветви для нижнего режима, так как глубина превращения в верхнем режиме много выше. На напорно-расходной кривой для верхнего режима также имеется максимум. Быстрый подъем кривой $\Delta p(q)$ сразу после возникновения горячей точки связан с ростом η_m и перемещением горячей точки ко

входу в реактор, в результате чего большая часть последнего заполняется более вязким веществом. Поскольку при дальнейшем росте расхода обе эти тенденции сменяются на противоположные (см. рис. 6.7), то перепад давления уменьшается.

Рис. 6.8, *а, б, в* и 6.8, *к, л, м* представляют крайние случаи, когда вязкость зависит только от температуры или глубины превращения, а кривые второго (6.8, *г, д, е*) и третьего (6.8, *ж, з, и*) ряда получены при условии, что вязкость зависит от обоих факторов, причем во втором ряду напорно-расходные кривые соответствуют слабой зависимости вязкости от глубины превращения ($A = 3$), а в третьем ряду — сильной ($A = 8$). Как видно из рисунка, наличие двух конкурирующих факторов может привести к качественному изменению вида кривых $\Delta p(q)$ и увеличению числа стационарных состояний, соответствующих одному значению перепада давления. Первые три ряда графиков получены при постоянном значении σ и различных A , что дает возможность проследить влияние этого параметра: при малых значениях A кривая нижнего режима монотонна, но с ростом A на этой кривой появляется максимум.

Качественно новым моментом, по сравнению с рассмотренными выше крайними случаями, является появление максимума на кривых верхнего режима. Максимум связан с зависимостью вязкости от глубины превращения, причина его появления уже обсуждалась. Когда горячая точка приближается к выходу из реактора, область, занятая очень вязкой прореагировавшей массой, сильно уменьшается, концентрационный фактор ослабевает, а доминирующим становится температурный фактор. Последний, как было показано выше, приводит к резкому росту Δp вблизи конца кривой верхнего режима. В результате Δp , пройдя через минимум, начинает расти.

Обсудим вопрос о числе стационарных состояний и числе реализуемых стационарных состояний. Выше отмечалось, что средний режим абсолютно неустойчив и не реализуется ни при фиксированном перепаде давления, ни при фиксированном расходе. Отмечалось также, что если на кривой $\Delta p(q)$ имеется максимум, то участки с отрицательным градиентом неустойчивы при фиксированных значениях перепада давления. Поэтому при немонотонности кривых $\Delta p(q)$ при фиксированном значении Δp будут реализовываться только их восходящие участки, а при фиксированных q — полностью все кривые.

Из рис. 6.8 видно, что каждому значению расхода соответствует только одно значение перепада давления в любом из трех режимов в соответствующих областях их существования. Если на кривых $\Delta p(q)$ экстремумы отсутствуют, то каждому значению перепада давления также соответствует только одно значение расхода в каждом режиме. Наибольшее число стационарных состояний — три, реализуемых — два. С появлением экстремумов на кривых $\Delta p(q)$ число стационарных состояний, соответствующих одному

значению Δp , может измениться до трех (рис. 6.8, *з*), до семи (рис. 6.8, *и*), а реализуемых — от двух до четырех, причем четыре стационарных состояния будут реализовываться в случае, когда левый конец и максимум кривой верхнего режима лежат ниже максимума кривой нижнего режима.

Если система находится в нижнем режиме, то при увеличении расхода поведение системы будет зависеть от наличия изолю. При ее наличии можно пройти всю кривую нижнего режима. В области изменения параметра q , где возможны оба режима, переход к верхнему режиму невозможен, так как при наличии изолю для этого необходимо задавать большие начальные температуры («поджечь» реагирующую массу). Если же кривая нижнего режима разомкнута, то с конца левого участка кривой нижнего режима происходит переход на верхний режим, что означает воспламенение системы. При дальнейшем увеличении расхода система снова перейдет на нижний режим.

Аналогичная картина наблюдается, если увеличивается перепад давления, а кривые верхнего и нижнего режимов монотонны. Если же на этих кривых имеются экстремумы, то при увеличении перепада давления с максимума кривой нижнего режима происходит переход на правую восходящую ветвь этой же кривой, а с максимума кривой верхнего режима — на правую восходящую ветвь этой кривой, если конец ее находится выше этого максимума (см. рис. 6.8, *д*, *е*, *ж*), и на кривую нижнего режима, если конец ее лежит ниже максимума (см. рис. 6.8, *з*, *и*, *к*, *л*, *м*).

Стационарный режим существует при всех значениях расхода. Однако в некотором интервале изменения перепада давления (см. рис. 6.8, *е*) при фиксированном значении Δp существование стационарного режима невозможно.

В заключение отметим, что мы привели результаты расчетов для случая $\chi > \chi_{кр}$, когда имеется множественность стационарных состояний. Если $\chi < \chi_{кр}$, то при всех значениях расхода существует только одно низкотемпературное стационарное состояние.

Влияние радиального распределения температурных и концентрационных полей

Выше был рассмотрен ряд закономерностей процесса полимеризации в трубчатом реакторе. Однако некоторые существенные стороны процесса не могут быть изучены в одномерной постановке, принятой ранее. Резкий рост вязкости в ходе полимеризации приводит при ламинарном течении реагентов к ускорению течения жидкости в осевой части трубы, профили скорости течения искажаются, уменьшается время пребывания вещества в осевой части аппарата. В результате длину реактора, необходимую для достижения нужной степени полимеризации, необходимо увеличивать.

Поэтому интересным и важным является изучение профилей скоростей течения при полимеризации, структуры потока жидкости и влияния изменения расхода на процесс.

Рассмотрим нестационарное течение жидкости, в которой происходит реакция инициированной полимеризации в конечной круглой трубе при постоянном расходе. Вязкость жидкости изменяется с температурой и глубиной превращения вещества по закону (5.1). Будем считать, что процесс протекает квазистационарно с гидродинамической точки зрения, так как для вязких жидкостей критерий Прандтля $Pr \gg 1$, и поле скоростей течения быстро подстраивается под изменение температурного и концентрационного полей [139]. Считаем также, что изменение осевой составляющей скорости v_z вдоль радиуса трубы происходит намного сильнее, чем в направлении оси z , и что осевая составляющая скорости течения много больше радиальной, т.е. $v_z \gg v_r$. Эти предположения справедливы для ламинарного течения в прямой круглой трубе постоянного радиуса. Предполагается, что теплообмен через стенки реактора происходит по закону Ньютона, тепловыделение от диссипации энергии и от распада инициатора пренебрежимо мало. С учетом сделанных допущений систему уравнений, описывающих процесс и начальные граничные условия для нее, можно записать в виде [156]:

$$\frac{dP}{dz} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [\mu(T, \eta) r \frac{\partial v_z}{\partial r}]; \quad (6.7)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0; \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \\ = \frac{\lambda}{C\rho} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{Q_0 k_0}{C\rho} M^m I^n \exp[-E/(RT)]; \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} + v_r \frac{\partial M}{\partial r} + v_z \frac{\partial M}{\partial z} = -k_0 M^m I^n \exp[-E/(RT)]; \quad (6.10)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} + v_r \frac{\partial I}{\partial r} + v_z \frac{\partial I}{\partial z} = -k_{i0} I^s \exp[-E_i/(RT)]; \quad (6.11)$$

$$\text{при } t = 0, \quad T = T_n, \quad M = M_0, \quad I = I_0; \quad (6.12)$$

$$\text{при } z = 0, \quad T = T_n, \quad M = M_0, \quad I = I_0; \quad (6.13)$$

$$\text{при } z = L, \quad \partial T / \partial z = 0;$$

$$\text{при } r = 0, \quad \partial\theta_z/\partial r = 0, \quad \partial T/\partial r = 0;$$

$$\text{при } r = r_0, \quad \theta_z = 0, \quad \theta_r = 0, \quad \lambda \partial T/\partial r = -\alpha(T - T_c).$$

Здесь r — текущая радиальная координата; t — время; v_z , v_r — осевая и радиальная составляющие скорости течения. Прочие обозначения те же, что и в предыдущем разделе.

Введем в рассмотрение следующие безразмерные величины и параметры [156]:

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{r}{r_0}; \quad \xi = \frac{z}{L}; \quad \tau = \frac{EQ_0M_0^mI_0^nk_0}{C\rho RT_c^2} t \exp[-E/(RT_c)]; \\ v_\zeta &= \frac{v_r}{v_{cp}}; \quad v_\xi = \frac{v_z}{v_{cp}}; \quad v_{cp} = \frac{Q}{\pi r_0^2}; \quad Bi = \frac{\alpha r_0}{\lambda}; \\ \Delta p &= \frac{C\rho RT_c^2 \Delta P}{2\mu_0 EQ_0M_0^mI_0^nk_0} \exp[(E - U)/(RT_c)]; \quad \theta = \frac{E}{RT_c}(T - T_c); \\ \delta &= \frac{r_0^2 EQ_0M_0^mI_0^nk_0}{\lambda RT_c^2} \exp[-E/(RT_c)]; \quad \varepsilon = \frac{r_0}{L}; \quad \sigma = \frac{U}{E}; \\ q &= \frac{C\rho RT_c^2 Q}{\pi r_0^3 EQ_0M_0^mI_0^nk_0} \exp[E/(RT_c)]; \quad \beta = \frac{RT_c}{E}; \quad i = \frac{I}{I_0}; \\ \delta &= \frac{r_0^2 EQ_0k_0M_0^mI_0^n}{\lambda RT_c^2} \exp[-E/(RT_c)]; \quad \omega = \frac{E_i}{E}; \quad \theta_n = \frac{E}{RT_0^2}(T_n - T_c); \\ \gamma_i &= \frac{k_{i0}I_0^{s-n-1}C\rho RT_c^2}{EQ_0M_0^mI_0^nk_0} \exp[(E - E_i)/(RT_c)]; \quad \gamma = \frac{C\rho RT_c^2}{EQ_0M_0}. \end{aligned}$$

Расход жидкости через трубу радиусом r_0 определим так:

$$Q = 2\pi \int_0^{r_0} r v_z dr.$$

Тогда, интегрируя уравнения (6.7) и (6.8) при соответствующих граничных условиях, получим выражения для осевой и радиальной составляющей скоростей течения и перепада давления. Переходя к безразмерным величинам, систему уравнений (6.7) и (6.8) с начальными и граничными условиями (6.12) и (6.13) преобразуем к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + q \left(v_\zeta \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} + \varepsilon v_\xi \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) = \\ = \frac{1}{\delta} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \right) + (1 - \eta)^m i^n \exp \left[\frac{\theta}{(1 + \beta \theta)} \right]; \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} + q \left(v_{\zeta} \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} + \varepsilon v_{\xi} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) = \gamma (1 - \eta)^m i^n \exp \left[\frac{\theta}{(1 + \beta \theta)} \right]; \quad (6.15)$$

$$\frac{\partial i}{\partial \tau} + q \left(v_{\zeta} \frac{\partial i}{\partial \zeta} + \varepsilon v_{\xi} \frac{\partial i}{\partial \xi} \right) = -\gamma_i i^s \exp \left[\frac{\omega \theta}{(1 + \beta \theta)} \right]; \quad (6.16)$$

$$\Delta p = \frac{q}{\varepsilon} \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{\zeta^2 d\zeta}{\mu(\theta, \eta)} \right]^{-1} d\xi; \quad \mu(\theta, \eta) = \exp \left(A\eta - \frac{\sigma \theta}{1 + \beta \theta} \right); \quad (6.17)$$

$$v_{\zeta} = -\frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\zeta \int_0^1 \frac{\zeta d\zeta}{\mu(\theta, \eta)} + \frac{1}{\zeta} \int_0^1 \frac{\zeta^2 d\zeta}{\mu(\theta, \eta)} \right]; \quad (6.18)$$

$$v_{\xi} = \frac{\int_{\zeta}^1 \frac{\zeta d\zeta}{\mu(\theta, \eta)}}{\int_0^1 \frac{\zeta d\zeta}{\mu(\theta, \eta)}}; \quad (6.19)$$

$$\text{при } \tau = 0 \quad \theta = \theta_n, \quad \eta = 0, \quad i = 1; \quad (6.20)$$

$$\text{при } \xi = 0 \quad \theta = \theta_n, \quad \eta = 0, \quad i = 1;$$

$$\text{при } \xi = 1 \quad \partial \theta / \partial \xi = 0;$$

$$\text{при } \zeta = 0 \quad \partial \theta / \partial \zeta = 0; \quad (6.21)$$

$$\text{при } \zeta = 1 \quad \partial \theta / \partial \zeta = \text{Bi} \cdot \theta.$$

Здесь Bi — критерий Био.

Наиболее важными параметрами задачи являются: q — безразмерный расход, θ_n — безразмерная начальная температура, δ — параметр Франк-Каменецкого, выражающий соотношение между масштабами теплоприхода и теплоотвода.

Полученная система уравнений описывает два типа режимов полимеризации: низко- и высокотемпературный. Рассмотрим вначале низкотемпературный режим полимеризации, когда безразмерные разогревы θ не превышают $1 \div 2$.

Низкотемпературный режим полимеризации

При численном решении значения безразмерных параметров были выбраны так, чтобы описать радикальную полимеризацию стирола при ини-

цировании перекисью бензоила, экспериментально изученную в работах [161, 162, 176]. К сожалению, в этих работах не изучались закономерности низкотемпературного режима.

Расчеты показали, что изменения параметров β , γ и γ_i при условии $\beta < 0,04$, $\gamma < 0,05$ и $\gamma_i < 0,01$, а также порядков реакций $m = 1 \div 2$, $n = 0 \div 0,5$ не оказывают качественного влияния на ход процесса и характеристики стационарного состояния реактора. Параметры Bi и δ слабо влияют на закономерности низкотемпературного режима вследствие малых разогревов вещества в реакторе. Поэтому значения этих параметров в расчетах, приведенных на рис. 6.9–6.14, были зафиксированы на уровне: $\beta = 0,036$; $\gamma = 0,032$; $\gamma_i = 0,0013$; $m = 1$; $n = 0,5$; $s = 1$; $\omega = 1,38$; $Bi = 1,4$; $\delta = 0,1$. Критическое значение параметра Франк-Каменецкого δ при начальной температуре $\theta_n = -3,5$ равнялось $\delta_{кр} = 0,11 \pm 0,005$. Размеры реактора считались следующими: $\varepsilon = r_0 / L = 0,002$.

При вычислении значений параметров использовались кинетические данные монографии [177] и данные справочника [178]. Величина энергии активации вязкого течения стирола, полученная из обработки таблиц [179], составляет $U = 14,6 \div 16,7$ кДж/моль, $\sigma = 0,2$.

В литературе приводятся в основном данные по зависимости вязкости от концентрации полистирола для раствора полимера, сильно отличающейся от зависимости, имеющей место при протекании полимеризации [180]. В реальных условиях изменение вязкости с ростом степени полимеризации стирола зависит в основном от условий полимеризации. Поэтому использовалось представление об экспоненциальной зависимости вязкости $\mu(\eta)$ с показателем $A = 8$.

Рассмотрим, как развивается процесс течения полимеризующейся жидкости, если в реактор подается холодное вещество (наиболее частый случай в реальных технологических процессах). В начальный момент времени реактор заполнен холодной смесью мономера и инициатора, на вход подается та же смесь. По мере движения жидкости в реакторе происходит ее прогрев как за счет теплообмена с окружающей средой через стенку реактора, так и за счет химического тепловыделения. Распределение скоростей течения жидкости по радиусу трубы (реактора) приводит к тому, что время пребывания частиц жидкости в канале будет различным. Пристеночные слои жидкости дольше находятся в реакторе, и полимеризация успевает пройти в них на большую глубину (см. рис. 6.9). Вязкость вещества резко растет в ходе полимеризации, поэтому вблизи стенок течение замедляется, время пребывания возрастает, а глубина превращения увеличивается. В результате на стенках реактора образуется слой очень вязких продуктов реакции ($\eta \approx 1$), перемещающихся с очень малой скоростью (см. рис. 6.9–6.11). Так как расход жидкости постоянен, то замедление течения у стенок

ведет к увеличению скорости потока в осевой части реактора (рис. 6.11), время пребывания частиц жидкости резко уменьшается и глубина превращения в ходе полимеризации ведет к уменьшению химического тепловыделения и разогревов в системе (см. рис. 6.9).

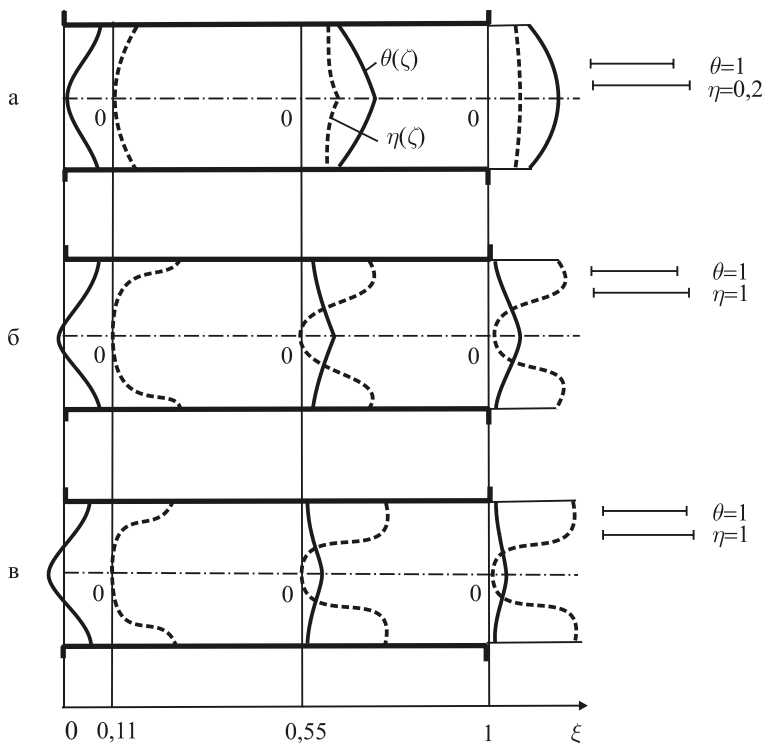


Рис. 6.9. Развитие температурных θ и концентрационных η полей при расходе $q = 20$ во времени τ : а — $\tau = 2,4$; б — $41,5$; в — $79,8$

Таким образом, при стационарном течении жидкости в трубчатом реакторе имеются две отчетливо выраженные зоны: налипший слой продуктов у стенок, где скорость течения мала, и струя маловязкой жидкости с низкими степенями полимеризации, где скорость течения много больше средней (рис. 6.10, 6.11). Многочисленные расчеты показали, что образование струи маловязкой жидкости в толще полимерной массы происходит при всех реальных скоростях полимеризации, начальных температурах, условиях теплообмена и т. д., если только в ходе реакции происходит резкий рост вязкости жидкости. Отсюда следует вывод: вре-

мя пребывания вещества в осевой части реактора может быть меньше среднего (в $10\div 20$ раз и более, в зависимости от роста вязкости), поэтому для осуществления полного превращения вещества в реакторе необходима намного большая длина, чем та, что рассчитана по среднему времени пребывания.

В стационарном процессе вещество по мере течения в реакторе прогревается вначале как инертное тело, затем с ростом температуры происходит саморазогрев вещества. Максимум разогрева вначале находится у стенок, затем смещается к оси реактора, что хорошо видно на рис. 6.10.

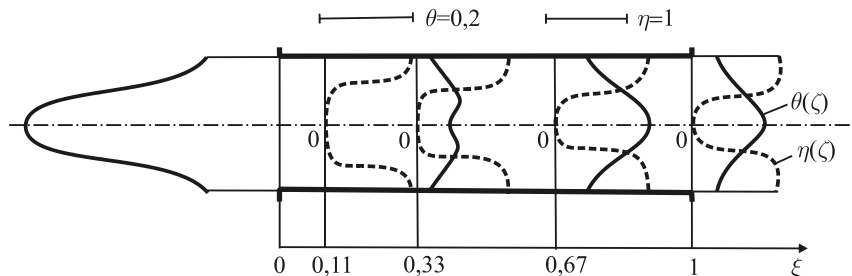


Рис. 6.10. Стационарное распределение температуры θ и глубины превращения η по объему реактора при расходе $q = 20$

Изменение расхода вещества значительно влияет на стационарный режим полимеризации. При очень малых расходах ($v_{cp} < 0,0004$ м/с) время пребывания в реакторе достаточно велико, вещество успевает полностью прореагировать, и все сечение реактора на выходе заполнено полимерной массой ($\eta \approx 1$). Течение маловязкой жидкости в виде вытянутой струи происходит только на части длины реактора. За пределами области струйного течения вязкость жидкости примерно одинакова ($\eta \approx 1$, разогревы невелики), поэтому профили скорости близки к параболическим, что наглядно видно из рис. 6.11, а.

С ростом расхода время пребывания вещества в реакторе уменьшается, струя маловязкой жидкости вытягивается и при определенном значении расхода достигает выхода из реактора. При этом большая часть трубы заполнена очень вязкой, медленно перемещающейся полимерной жидкостью. Движение вещества в основном происходит в струе маловязкой жидкости, где глубина превращения невелика ($\eta \leq 0,25 \div 0,3$) (см. рис. 6.11, б).

Последующее увеличение расхода ведет к уменьшению глубины превращения η в струе. Струя расширяется, так как в пристеночной зоне уменьшаются глубина превращения и вязкость жидкости. С расширением струи вследствие постоянства расхода падает относительная скорость течения в ней (рис. 6.11, в).

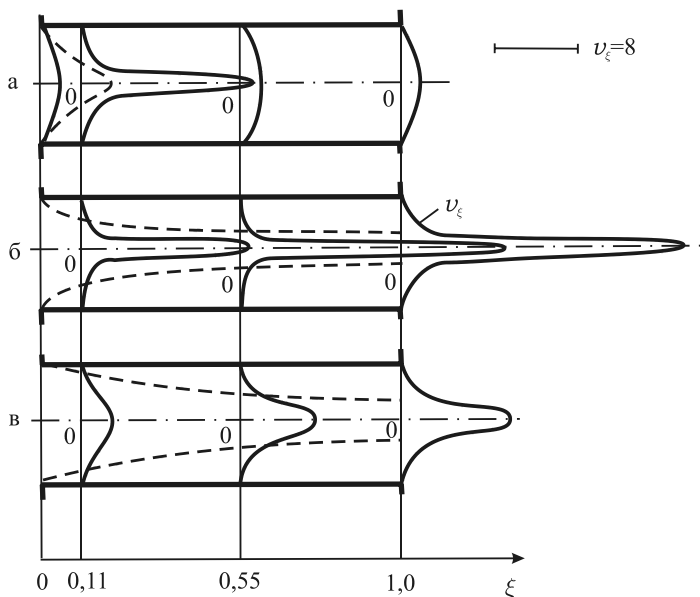


Рис. 6.11. Стационарные профили скорости течения жидкости v_ξ при различных значениях расхода q : а — $q = 1$; б — 5 ; в — 20 ; — — — граница налипшего слоя

При высоких расходах жидкости ($v_{cp} > 0,025 \div 0,03$ м/с) последняя покидает реактор, не успев прогреться и прореагировать на сколь угодно значительную глубину, за исключением тонкого слоя на стенке. Этот слой образуется вследствие условия прилипания и бесконечного времени пребывания вещества на стенке реактора.

Изменение расхода приводит к значительному изменению не только полей скорости течения, вязкости и концентрации, но и температурных полей. Из рис. 6.12 видно, что при очень малых расходах все тепло, выделяющееся при полимеризации, успевает отводиться через стенки и температура вещества не превышает температуры окружающей среды. С ростом расхода роль теплоотвода уменьшается, наблюдается разогрев жидкости. В зависимости от величины расхода профиль температуры на оси реактора может иметь максимум или быть монотонно возрастающим. Наиболее отчетливо максимум выражен в том случае, когда длина струи маловязкой жидкости невелика, всё вещество успевает прореагировать на большей части длины реактора (см. рис. 6.11, а и кривую 1 рис. 6.12). С увеличением расхода струя вытягивается, то есть происходит растяжение области химического тепловыделения. Наименьшее значение максимума температурного

профиля соответствует расходу, при котором струя достигает выхода из реактора.

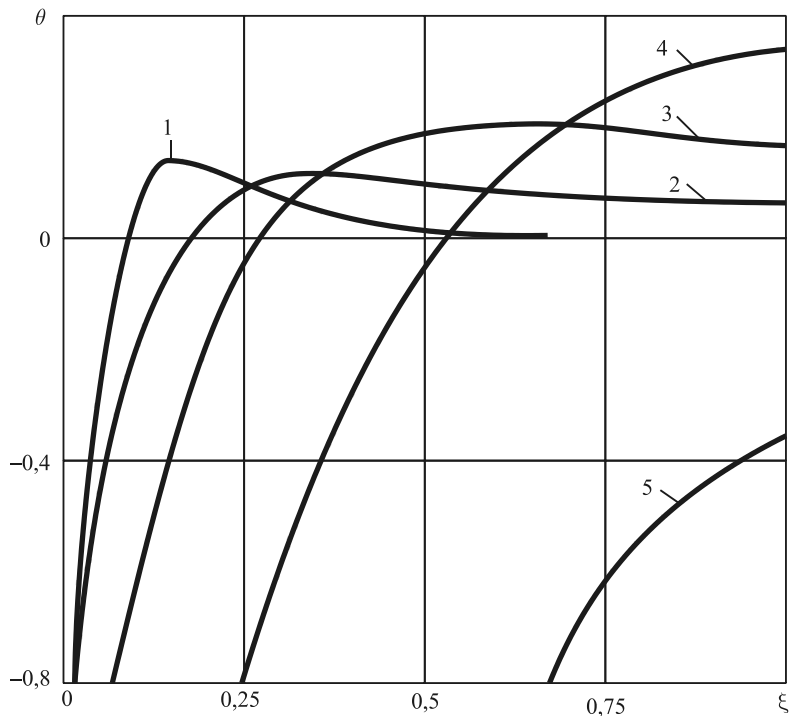


Рис. 6.12. Стационарное распределение температуры θ на оси реактора по его длине ξ при различных значениях расхода q : 1 — $q = 1$; 2 — 5; 3 — 20; 4 — 100; 5 — 200

Дальнейший рост расхода приводит к расширению области струйного течения, роль теплоотвода уменьшается, и происходит рост разогревов жидкости (см. кривые 3 и 4 рис. 6.12). Вместе с тем растет и конвективный вынос тепла. При достижении высоких расходов ($v_{\text{cp}} \sim 0,0025$ м/с) жидкость не успевает прогреться в реакторе, а ее температура остается ниже температуры окружающей среды (кривая 5, рис. 6.12). Вещество при этом практически не реагирует.

При проведении полимеризации в трубчатом реакторе важно знать его напорно-расходную характеристику. Выше было показано, что резкое увеличение вязкости в процессе полимеризации приводит к появлению максимума на кривой $\Delta p(q)$ и, следовательно, к появлению интервала расходов, не реализуемых при задании перепада давления. Расчеты, проведен-

ные при решении задачи в двухмерной постановке, показали, что напорно-расходная характеристика в этом случае качественно не отличается от характеристики, вычисленной в предположении отсутствия распределения температуры и концентрации по сечению реактора (см. рис. 6.13). Вынос вязких продуктов и увеличение области струйного течения с ростом q ведут к отклонению зависимости $\Delta p(q)$ от линейной, характерной для постоянной вязкости. Расходу, при котором струя маловязкой жидкости достигает выхода из трубы, соответствует максимум перепада давления.

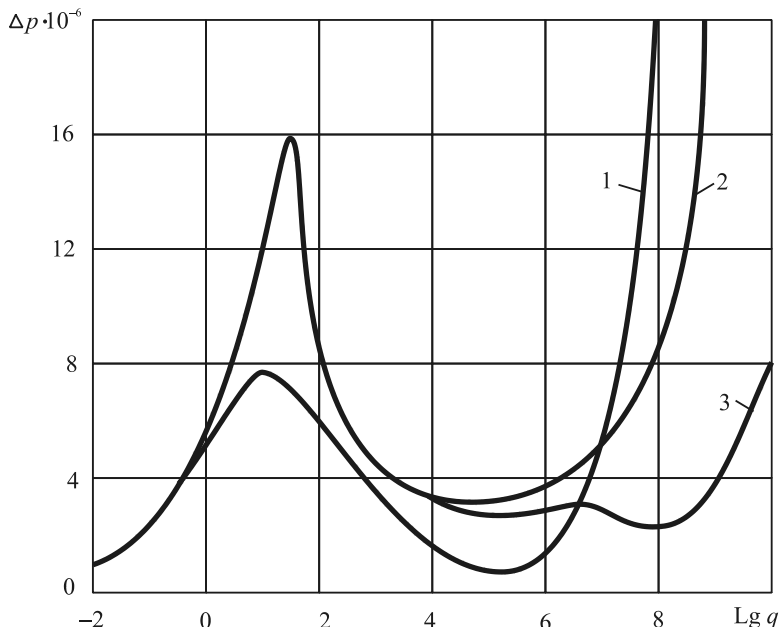


Рис. 6.13. Зависимость перепада давления Δp от расхода q при различных значениях θ_n и σ : 1 — $\theta_n = -3,5$, $\sigma = 0,2$; 2 — $3,5$, $0,2$; 3 — $3,5$, $0,8$

При больших расходах перепад давления быстро уменьшается вследствие расширения струи маловязкой жидкости (рис. 6.11) и уменьшения глубины превращения в струе, а следовательно, и вязкости жидкости. При высоких расходах жидкость не успевает прогреться в реакторе, реакция почти не идет ($\eta < 1\%$). Рост расхода в этой области ведет к примерно пропорциональному росту перепада давления.

Рассмотрение двухмерного течения полимеризующейся жидкости показывает, что возможно повторное уменьшение перепада давления с ростом расхода, связанное с температурной зависимостью вязкости (кривая 3 рис. 6.13). Если температура жидкости на входе больше температуры ок-

ружающей среды ($\theta > 0$) и вязкость резко уменьшается с температурой (высокое значение σ), то при больших расходах ($v_{\text{ср}} \sim 0,006 \div 0,1$ м/с) вынос холодного более вязкого вещества обуславливает уменьшение перепада давления.

Таким образом, изучение напорно-расходной характеристики как при одномерном, так и при двумерном рассмотрении позволяет сделать вывод: в низкотемпературном режиме полимеризацию следует проводить при расходах, меньших значения, которому соответствует максимум перепада давления. Двумерное рассмотрение показывает, что при этом на выходе получается продукт практически с полной глубиной превращения, почти постоянной по сечению трубы.

Исследование напорно-расходной характеристики при течении жидкости с возрастающей вязкостью проведено в работе Д. А. Ваганова [181]. Но постановка задачи в этой работе значительно отличалась от нашей. Предполагалась изотермичность процесса, и считалось, что вязкость жидкости изменяется скачком от $\mu_1 = \text{const}$ до $\mu_2 = \text{const}$ при повышении периода индукции. Д. А. Ваганов показал, что в этих предположениях при $\mu_1 \ll \mu_2$ в трубе формируется струя маловязкой жидкости, а зависимость перепада давления от расхода является монотонной.

Для изучения влияния неизотермичности процесса и вида зависимости вязкости от глубины превращения на напорно-расходную характеристику были проведены расчеты, результаты которых представлены на рис. 6.14. Зависимость $\Delta p(q)$ в случае изотермической полимеризации имеет менее выраженные максимум и минимум, чем в случае наличия прогрева и саморазогрева (отношение $\Delta p_{\text{max}} / \Delta p_{\text{min}} = 8,5$ для кривой 1 и $\Delta p_{\text{max}} / \Delta p_{\text{min}} = 2,3$ для кривой 2). Неизотермичность процесса влияет на гидродинамическую картину течения не только через температурную зависимость вязкости, но и через влияние температуры на концентрационные поля: при одинаковом времени пребывания степень полимеризации, а следовательно и вязкость, больше в тех слоях, где выше температура.

Предположение о скачкообразном изменении вязкости жидкости значительно изменяет вид напорно-расходной кривой. С ростом расхода глубина превращения вещества в струе на выходе из реактора уменьшается от 25÷30% практически до нуля (0,5÷2%). В случае экспоненциальной зависимости вязкость жидкости в струе при этом намного уменьшается (при $A = 8$ – в 7÷10 раз), что способствует уменьшению перепада давления. При скачкообразной зависимости вязкость в струе постоянна. Неучёт изменения вязкости в струе ослабляет тенденцию уменьшения перепада давления с ростом расхода ($\Delta p_{\text{max}} / \Delta p_{\text{min}} = 2,5$ для кривой 3 вместо 8,5 для кривой 1).

Если предположить наличие и изотермичности процесса, и скачкообразного изменения вязкости, то зависимость $\Delta p(q)$ становится почти монотонной (см. кривую 4 рис. 6.14). Незначительное падение давления по-

сле слабо выраженного максимума ($\Delta p_{\max} / \Delta p_{\min} = 1,2$), по-видимому, есть результат погрешностей счёта. Непосредственное сравнение кривой 4 с результатами работы [181] показывает, что величина расхода, при котором струя достигает выхода из реактора, в нашем случае больше на ~ 15%, а соответствующая величина перепада давления в нашем случае выше на 40%. Это наибольшее расхождение результатов, далее с ростом перепада давления расхождение результатов уменьшается.

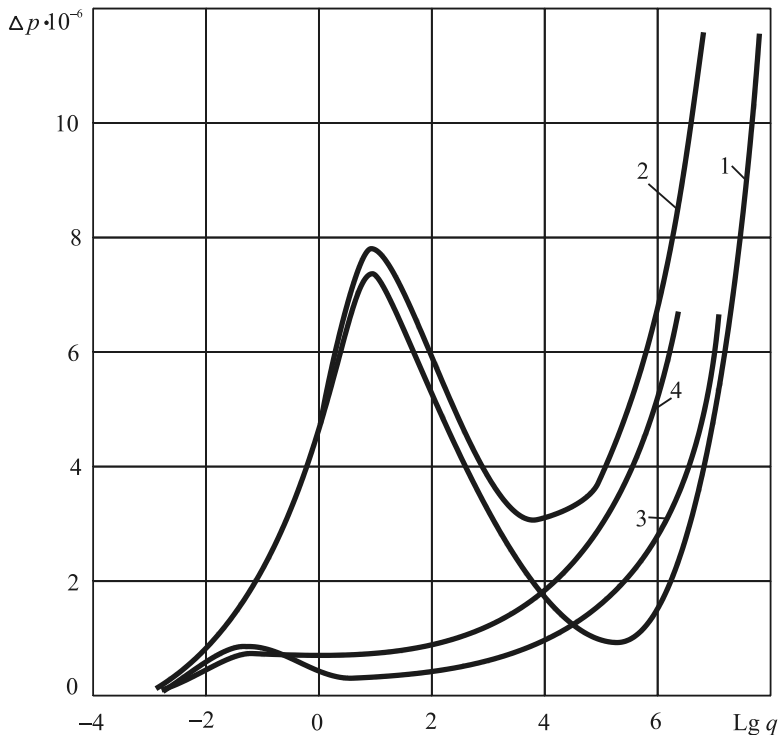


Рис. 6.14. Зависимость перепада давления Δp от расхода q для различных значений θ_n и μ : 1 — неизо термическое течение $\theta_n = -3,5$, $\mu(\eta) = e^{8\eta}$;

2 — изо термическое течение $\theta_n = 0$, $\mu(\eta) = e^{8\eta}$;

3 — неизо термическое течение $\theta_n = -3,5$, $\mu = \begin{cases} 1 & \text{при } \eta < 0,95; \\ e^8 & \text{при } \eta \geq 0,95; \end{cases}$

4 — изо термическое течение $\theta_n = 0$, $\mu = \begin{cases} 1 & \text{при } \eta < 0,95; \\ e^8 & \text{при } \eta \geq 0,95 \end{cases}$

Приведённые результаты подтверждают вывод о наличии максимума на кривой напорно-расходной характеристики полимеризационного реактора.

Высокотемпературный режим полимеризации

Протекание процесса полимеризации в высокотемпературном режиме, когда разогревы вещества достигают значительных величин ($\theta_m \gg 1$), резко отличается по своим закономерностям от низкотемпературного режима ($\theta_m = 1 \div 2$).

В экспериментальном исследовании инициированной перекисью бензоила полимеризации стирола [176] показано, что стационарный высокотемпературный режим полимеризации в трубчатом реакторе при ламинарном течении реагентов не осуществляется. Развитие процесса происходит в четыре стадии: прогрев, воспламенение, горение и погасание.

При увеличении расхода происходит вырождение, то есть исчезновение стадии горения. Максимум температурного профиля в ходе процесса вначале движется ко входу в реактор, затем стабилизируется, далее — движется к выходу. Изучение полимеризации в стеклянном реакторе показало, что вблизи горячей точки существует резкое искажение профиля скоростей жидкости.

В работе [176] дано качественное объяснение потуханию высокотемпературного режима. Рост вязкости в ходе полимеризации приводит к образованию вязкого налипшего слоя продуктов на стенке реактора и ускорению течения жидкости в его осевой части. Жидкость воспламеняется на большом удалении от начала реактора, происходит дальнейший рост процесса налипания продуктов реакции к стенкам и ускорения течения вплоть до выноса горячей точки из реактора.

Значения параметров, при которых проводились расчёты, не отличались от параметров, принятых для низкотемпературного режима полимеризации, за исключением величины $\gamma_i = 0,0045$. Расхождение расчётных параметров с параметрами работы [176] были в критерии Био и в величинах ε и T_n . В нашем случае эти величины составляли: $Bi = 1,4$; $\varepsilon = 0,002$; $T_n = 315^\circ K$. В работе [176] эти величины были следующими:

$Bi = 0, \div 0,15$; $\varepsilon = \frac{0,003\mu}{3,85\mu} = 0,00078$; $T_n = 288^\circ K$. Более интенсивный

теплоотвод в нашем случае соответствует наличию ярко выраженного распределения температуры по сечению реактора, в то время как в работе [176] указывается, что распределение температуры по сечению трубы практически отсутствует. Различия в начальной температуре и длине реактора не являются принципиальными. Эти факторы компенсируют друг друга.

При выбранных значениях параметров $\delta_{кр} = 0,11 \div 0,005$ величина разогревов, достигаемых в ходе полимеризации, зависит от значения параметров q и δ и достигает $\theta_m = 15$ (190°).

Переход процесса в высокотемпературный режим может происходить в режиме самовоспламенения (вспышка всего вещества в реакторе) при $\delta_{кр} < \delta < 1$ и в режиме зажигания (воспламенение у стенки) при $\delta \gg 1$. Были исследованы оба случая. Особое внимание уделялось режиму зажигания холодного вещества в реакторе горячей стенкой ($\theta_n = -3,5$), что соответствует параметрам эксперимента [176], где $\delta = 3,5 \div 5$.

В качестве иллюстрации проведенных расчётов на рис. 6.15 и 6.16 приводятся результаты расчета одного из вариантов, где переход в высокотемпературный режим происходит в режиме зажигания ($\delta = 5$). Величина расхода была выбрана такой, чтобы в реакторе была возможна вспышка реагирующей массы ($q = 30$, что соответствует средней скорости течения $v_{ср} \approx 0,0036$ м/с).

Вследствие малой кондуктивной теплопередачи по реактору трубы при больших значениях δ пристеночные слои жидкости прогреваются значительно быстрее, чем вещество в осевой зоне реактора. Реакция начинает быстро развиваться у стенки трубы, где происходит воспламенение вещества. Чем меньше величина расхода, тем больше протяжённость зоны вспышки.

В стадии воспламенения потоки тепла от образовавшейся зоны интенсивной реакции (см. рис. 6.15 и 6.16, а) распространяются по массе холодного реагирующего вещества, прогревая его и тем самым ускоряя реакцию полимеризации.

В реакторе быстро формируется фронт полимеризации (штриховая линия на рис. 6.15) — отчетливо выраженная граница между холодным непрореагированным веществом и горячей зоной продуктов, где реакция не идет вследствие выгорания инициатора. Основное превращение реагентов происходит именно на фронте полимеризации. Температура вещества на фронте составляет $\theta = 10 \div 14$ (разогревы в $130^\circ \div 170^\circ$). Экспериментальные значения разогревов на фронте не превышали 110° [176], но следует учитывать, что эти разогревы являются средними по сечению. В нашем случае средняя величина разогрева по сечению не превышала 130° (см. рис. 6.15).

После формирования фронта полимеризации он быстро распространяется в осевом и радиальном направлениях. Скорость распространения фронта зависит при заданных кинетических теплофизических параметрах от величины расхода. Возникновение пристеночной зоны вязких продуктов ведет к ускорению движения жидкости вблизи оси трубы (см. рис. 6.16, а). При достаточно больших расходах конвективный унос тепла может привести сразу к потуханию горячей зоны у стенок реактора

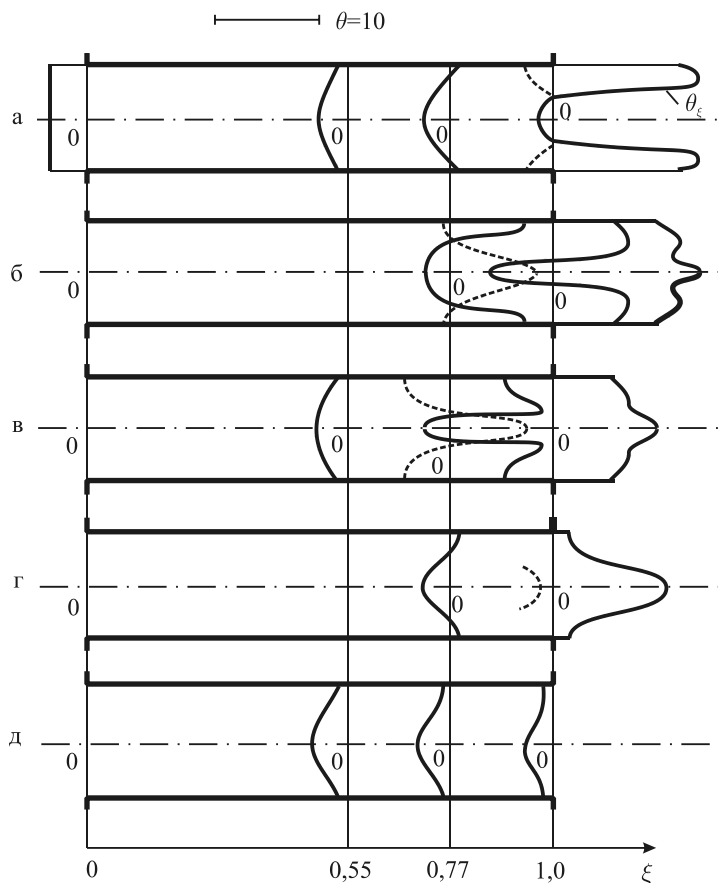


Рис. 6.15. Развитие температурных полей θ по объему реактора во времени τ : а — $\tau = 15,67$; б — $17,37$; в — $24,02$; г — $34,2$; д — $63,4$; — — — фронт полимеризации

и потуханию высокотемпературного режима. При $q = 40$ ($v_{\text{cp}} \approx 0,0047$ м/с) происходит быстрое потухание, что соответствует экспериментально найденному «вырождению» [175], происходящему при $v_{\text{cp}} = 0,006 \div 0,007$ м/с.

При $q < 40$ происходит смыкание фронта, всё выходное сечение реактора заполнено продуктами полимеризации (см. рис. 6.16, б). В момент вспышки вещества на оси реактора в результате сложения тепловых потоков от реагирующих пристеночных слоев и от вспышки осевых слоев профиль температуры по радиусу трубы может иметь три максимума (см. рис. 6.15, б).

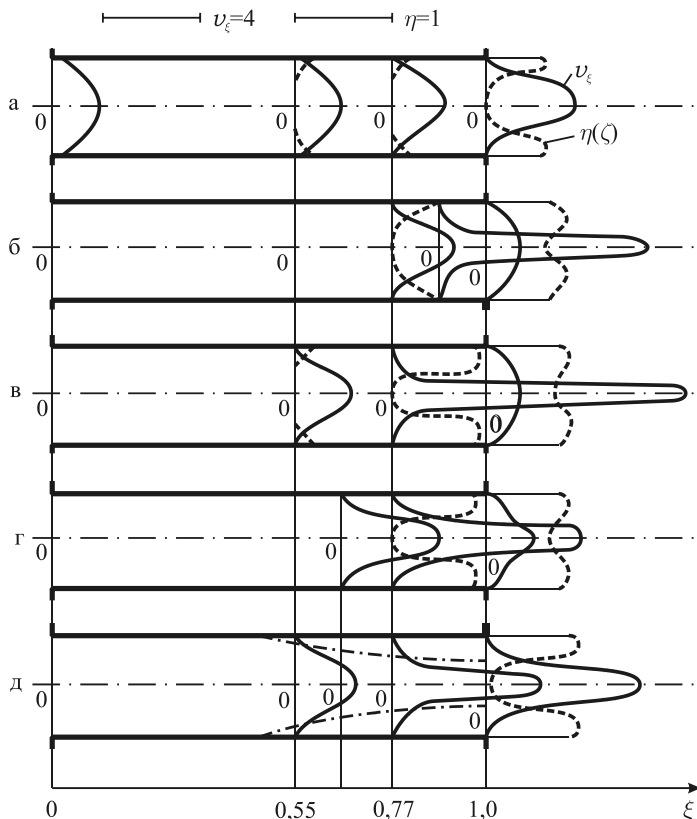


Рис. 6.16. Распределение глубины превращения η и скорости течения v_ξ по объему реактора во времени τ : а — $\tau=15,67$; б — $17,37$; в — $24,02$; г — $34,2$; д — $63,4$; — · — · — стационарная граница вязкого слоя

В стадии горения фронт полимеризации движется навстречу потоку реагентов за счет кондуктивного прогрева вещества перед фронтом. Скорость его движения постоянно уменьшается. Причиной уменьшения скорости является всё возрастающий отток тепла от фронта ко всё более холодной смеси реагентов. Когда достигается равенство скорости подачи реагентов и скорости «горения», фронт останавливается. Этот момент изображен на рис. 6.15, в и 6.16, в. Довольно длительное время местоположение фронта не меняется, происходит его стабилизация, что наблюдается и в эксперименте [176]. Координата точки остановки фронта z_* в эксперименте составляла 2,6 м (при $v_{cp} \approx 0,0036$ м/с), а в расчетах с учетом стадии прогрева до $T_n = 315$ К — $z_* = 2,2$ м.

Как во время движения фронта, так и при его стабилизации фронт имеет искривленную форму (рис. 6.15), что связано с наличием распределения скоростей течения по реактору и плохой теплопередачей в радиальном направлении ($\delta = 5$). Неравномерность распределения скорости течения усиливается по мере накопления вязких продуктов полимеризации у стенки реактора (см. рис. 6.16). Искривление фронта значительно уменьшается при увеличении роли теплопроводности и с уменьшением теплоотвода через стенку.

При стабилизации фронта реакции продолжается рост степени полимеризации вещества в пристеночной зоне перед фронтом, происходит увеличение толщины вязкого налипшего слоя. В результате возрастает скорость течения жидкости в осевой зоне реактора. Понижается температура вещества, подходящего к фронту в осевой зоне, так как вещество не успевает прогреться. В силу этих причин скорость подачи реагентов становится больше скорости «горения» и начинается постепенный снос фронта полимеризации и его потухание. Потуханию фронта способствует рост глубины превращения в пристеночном слое перед фронтом и соответствующее уменьшение химического тепловыделения во фронте. При движении фронта полимеризации к выходу из реактора условия существования фронта ухудшаются. Увеличивается толщина слоя налипших продуктов, растет глубина превращения и вязкость в этом слое, скорость течения в осевой зоне возрастает. Происходит дальнейшее уменьшение температуры во фронте и его дальнейшее движение к выходу вплоть до полного потухания (см. рис. 6.15, ε , δ).

После срыва высокотемпературного режима в реакторе устанавливается стационарный низкотемпературный режим (рис. 6.15, δ и 6.16, δ), описанный выше. Единственное различие — меньшее значение η на стенке (рис. 6.16, δ) — связано с условием прилипания. Значение глубины превращения на стенке реактора, достигнутое при прохождении фронта, в дальнейшем не изменяется, так как инициатор выгорает, массообмен на стенке не осуществляется. В этой части реактора, где горячей зоны не было, процесс развивается так же, как и в низкотемпературном режиме.

В заключение отметим, как влияет на ход процесса изменение наиболее важных параметров δ и q . При уменьшении δ происходит переход от режима зажигания к самовоспламенению. При стабилизации фронта искривление его уменьшается, и требуется значительно больше времени для нарастания вязкого слоя перед фронтом и значительной деформации профиля скоростей течения. Поэтому продолжительность существования высокотемпературного режима при меньших δ намного больше, однако и в этом случае в дальнейшем происходит снос фронта и его потухание.

При изменении расхода существует его критическое значение $q = q_{кр}$, ниже которого вспышка вещества невозможна, так как время пребывания его в реакторе становится меньше периода индукции [158–160]. Нижнего

предела по изменению расхода нет, вспышка возможна и при $q = 0$ (тепловое воспламенение неподвижного вещества). Чем меньше значение расхода при $q < q_{кр}$, тем ближе ко входу в реактор осуществляется перемещение фронта реакции. При очень малых расходах потухание высокотемпературного режима происходит вследствие увеличения роли теплоотвода.

Таким образом, резкий рост вязкости в ходе полимеризации приводит к потуханию высокотемпературного режима полимеризации при ламинарном течении реагентов. Однако при наличии перемешивания в зоне интенсивной химической реакции возможно существование стационарного высокотемпературного режима полимеризации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Седов Л. И. Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1973. – Том 1. 536 с.
2. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 848 с.
3. Папков С. П. Физико-химические основы формирования искусственных и синтетических волокон. – М.: Химия, 1970. – 312 с.
4. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред / Пер. с англ. под ред. М. Э. Эглит. – М.: Мир, 1974. – 318 с.
5. Седов Л. И. Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1973. – Том 2. – 584 с.
6. Виноградов Г. В., Малкин А. Я. Реология полимеров. – М.: Химия, 1977. – 440 с.
7. Пакшвер А. Б. Физико-химические основы технологии химических волокон. – М.: Химия, 1972. – 432 с.
8. Хан Ч. Д. Реология в процессах переработки полимеров / Пер. с англ. под ред. Г. В. Виноградова и М. Л. Фридмана. – М.: Химия, 1979. – 309 с.
9. Астарита Д., Марруччи Д. Основы гидродинамики неньютоновских жидкостей. / Пер. с англ. под ред. Ю. А. Буевича. – М.: Мир, 1979. – 309 с.
10. Малкин А. Я., Чалых А. Е. Диффузия и вязкость полимеров. Методы измерения. – М.: Химия, 1979. – 304 с.
11. Шульман З. П., Хусид Б. М. Нестационарные процессы конвективного переноса в неньютоновских средах. – Минск: Наука и техника, 1983. – 256 с.
12. Coleman B. D., Noll W. // Arch. Rat. Mech. Anal. 1960. V. 6, № 1. P. 355–370.

13. Леонов А. И. Неравновесная термодинамика и реология упруго-вязких сред. – Минск, 1975. – 189 с. (Препринт ИТМО АН БССР).
14. Johnson M. W., Segalman D. // J. of Non-Newton. Fluid Mech. 1977. V. 2, p. 255–270.
15. Dashner P. A., Vanarsdale W. E. // J. of Non-Newton. Fluid Mech. 1981. V. 8, № 1–2. P. 124–132.
16. Agrawal P. K., Zee W. K. et al // Trans Soc. Rheol., 1977. V. 21, № 3. P. 355–373.
17. Лодж А. Эластичные жидкости / Пер. с англ. под ред. Б. М. Берковского и З. П. Шульмана. – М.: Наука, 1969. – 464 с.
18. Крайнов В. К. Движение растворов и расплавов полимерных материалов с учетом вязкоупругости в каналах фильер при производстве химических волокон. Дисс. ... канд. тех. наук: 01.02.05. Пермь: ППИ, 1990. – 176 с.
19. Крайнов В. К., Первадчук В. П., Шакиров Н. В. / В сб.: Моделирование процесса течения неклассических жидкостей. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1989. – С. 80–88.
20. МакКелви Д. М. Переработка полимеров. / Пер. с англ. под ред. Г. В. Виноградова, А. И. Леонова и А. Я. Малкина. – М.: Химия, 1966. – 444 с.
21. Смольский Б. М., Шульман З. П., Гориставец В. М. Реодинамика и теплообмен нелинейно вязкопластичных материалов. – Минск: Наука и техника, 1970. – С. 440.
22. Вопросы экструзии полимеров / Сб. переводов под ред. А. Н. Левина. – М.: Изд-во иностр. литер., 1963. – 334 с.
23. Лобанова Г. А. Изучение и технологическое использование реологических свойств растворов полимеров и сополимеров акрилонитрила. Дисс. ... канд. тех. наук: 05.17.15. – Калинин: ВНИИСВ, 1971. – 205 с.
24. Бернхард Э. Переработка термопластичных материалов / Пер. с англ. под ред. Г. В. Виноградова. – М.: Химия, 1965. – 747 с.
25. Перепёлкин К. Е. Физико-химические основы процессов формирования химических волокон. М.: Химия, 1978. 320 с.
26. Бедер Л. М. // Хим. волокна. – 1969. – № 6. – С. 17–19.
27. Виноградов Г. В., Малкин А. Я., Прозоровская Н. В. и др. // ДАН СССР. – 1963. – Т. 150. – № 3. – С. 574–577.

28. Виноградов Г. В., Малкин А. Я., Прозоровская Н. В. и др. // ДАН СССР. – 1964. – Т. 154. – № 4. – С. 890–893.
29. Неверов А. П., Игнатъева А. И., Пакшвер Э. А. / В кн.: Карбоцепные волокна. – М.: Химия, 1966. – С. 90–98.
30. Алексеева В. М. Исследование процессов получения поливинилхлоридных волокон повышенной теплостойкости. Дисс. ... канд. тех. наук: 05.17.15. – Калинин: ВНИИСВ, 1972. – 251 с.
31. Малкин А. Я., Бегишев В. П. Химическое формирование волокон. – М.: Химия, 1991. – 240 с.
32. Победра Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Изд-во Московского университета, 1981. – 344 с.
33. Berger R. // Plast und Kautschuk. 1982. Bd. 29, № 4. S. 113–118.
34. Бубнов В. А. / В сб.: Конвекция в каналах. – Минск: ИТМО им. А. В. Лыкова АН БССР, 1971. – С. 10–13.
35. Бубнов В. А. / В кн. Тепло- и массоперенос. Минск: ИТМО им. А. В. Лыкова АН БССР, 1972. – Т. 3. – С. 66–70.
36. Померанцев А. А. Курс лекций по теории тепло- и массопереноса. – М.: Высшая школа, 1965. – 350 с.
37. Дивиден М. Течение и теплообмен разреженных газов. – М.: Иностранная литература, 1962. – 273 с.
38. Веландер П. / В кн.: Течение и теплообмен разреженных газов. – М.: Иностранная литература, 1962. – С. 195–197.
39. Тимирязев А. К. // Временник общества им. Х.И. Леденцова. – 1914. – Приложение № 5. – С. 1–66.
40. Джозеф Д., Тао Л. // Прикладная механика. Тр. Амер. об-ва инж. мех. – 1966. – Т. 33. – № 4. – С. 39–46.
41. Тао Л., Джозеф Д. // Прикладная механика. Тр. Амер. об-ва инж. мех. – 1962. – Т. 29. – № 2. – С. 229–234.
42. Beavers G. S., Joseph D. D. // J. of Fluid Mech. 1967. V. 30. P. 197–207.
43. Биверс Г., Спэрроу Е., Магнусон Р. // Теоретические основы инженерных расчетов. Тр. Амер. об-ва инж. мех. – 1970. – Т. 92. – № 4. – С. 146–151.
44. Sparrow E. M., Beavers G. S. // The physics of Fluid. 1971. V. 14, № 7. P. 1312–1319.
45. Murti P. R. K. // Wear. 1973. № 25. P. 365–372.

46. Микаэли В. Экструзионные головки для пластмасс и резины. / Пер. с англ. – СПб.: Профессия, 2007. – 470 с.
47. Барр Г. Вискозиметрия. – М.–Л.: ГОНТИ, 1938. – 318 с.
48. Толстой Д. М. // Коллоидный журнал. – 1947. – Т. 9. – Вып. 6. – С. 450–461.
49. Mooney M. // J Rheology. 1931.V. 2, № 2. P. 210–222.
50. Белкин И. М., Виноградов Г. В., Леонов А. И. Ротационные приборы. – М.: Машиностроение, 1968. – 381 с.
51. Великовский Д. С. / В кн.: Теория и практика производства и применения консистентных смазок. – М.: Гостопиздат, 1939. – С. 105–112.
52. Толстой Д. М. // Коллоидный журнал. – 1948. – Т. 10. – Вып. 2. – С. 105–112.
53. Толстой Д. М. // ДАН СССР. – 1952. – Т. 85. – №5. – С. 1089–1091.
54. Толстой Д. М. // ДАН СССР. – 1952. – Т. 85. – №6. – С. 1329–1333.
55. Рейнер М. Деформация и течение. Введение в реологию. – М.: Наука, 1973. – 420 с.
56. Рейнер М. Реология. – М.: Наука, 1965. – 223 с.
57. Бетчелор Дж. Введение в динамику жидкости. – М.: Наука, 1965. – 223 с.
58. Scott-Blais // Rheol. Acta. 1958. № 1. P. 123–130.
59. Сейвинс Д. // Механика. Тр. Амер. об-ва инж. мех. – 1974. – № 2. – С. 59–115.
60. Oldroyd J. G. // J. Colloid. Sci. 1949. V. 4. P. 333–342.
61. Олдройд Дж. Г. / В кн. Реология. Под ред. Эйриха. – М.: Иностранная литература, 1962. – 250 с.
62. Toms B. A. // J. Colloid. Sci. 1949. V. 4. P. 511–521.
63. Виноградов В. Г., Синицын В. В. // ДАН СССР. – 1952. – Т. 91. – №2. – С. 537–576.
64. Синицын В. В., Виноградов В. Г. // ДАН СССР. – 1953. – Т. 92. – №2. – С. 323–326.
65. Maxwell B., Calt J. G. // J. Polymer Sci. 1962. V. 62. P. 50–53.
66. Calt J. G., Maxwell B. // Mod. Plast. 1964. V. 42, № 4. P. 115–131.

67. Otter J. L., Wales J. L., Schijf J. // *Rheol. Acta*. 1967. V. 6, № 3. P. 205–209.
68. Малкин А. Я., Леонов А. И. / В кн.: *Успехи реологии полимеров*. – М.: Химия, 1970. – С. 98–117.
69. Jastrzebski Z. D. // *Ing. Engng. Chem. Foundament*. 1967. V. 6, № 3. P. 445–454.
70. Pfannschmidt P., Reger E. O. // *Plaste und Kautschuk*. 1972. Bd. 19. № 5. S. 502–507.
71. Vinogradov G. V., Ivanova L. I. // *Rheol. Acta*. 1967. V. 6, № 1. P. 209–222.
72. Иванова Л. И., Виноградов Г. В. // *Мех. полимеров*. –1968. – № 3. – С. 336–342.
73. Vinogradov G. V., Ivanova L. I. // *Rheol. Acta*. 1968. V. 7, № 3. P. 243–254.
74. Дерягин Б. В., Федакин Н. Н. // *ДАН СССР*. – 1968. – Т. 182, – № 6. – С. 1300–1302.
75. Ким А. Х., Сугак М. Б. // *Прикладная реология*. – Минск, 1970. – Т. 2. – С. 25–35.
76. Козеев М. П. / В кн.: 26 научно-техническая конференция Белорусского политехнического института. Матер. секции теор. и прикл. мех. – Минск, 1970. – С. 24–29.
77. Козеев М. П. / В кн.: 26 научно-техническая конференция Белорусского политехнического института. Матер. секции теор. и прикл. мех. – Минск, 1970. – С. 30–33.
78. Гранчик И. П., Ким А. Х. / В кн.: 26 научно-техническая конференция Белорусского политехнического института. Матер. секции теор. и прикл. мех. – Минск, 1970. – С. 8–12.
79. Первадчук В. П., Труфанов Н. А. // *Химическое машиностроение*. Киев: Наука и техника, – 1981. – № 32. – С. 45–51.
80. Боярченко В. И. Теоретическое исследование закономерностей движения и теплообмена в процессах переработки полимерных материалов. Дисс. ... канд. ф.-мат. наук: 05.04.17. – Черноголовка: ОИХФ АН СССР, 1972. –153 с.
81. Янков В.И. / В сб.: *Реологические свойства полимерных систем*. – Свердловск: УНЦ АН СССР, –1979. – С. 81–87.
82. Первадчук В. П., Янков В. И., Боярченко В. И. // *ИФЖ*. – 1981. – Т. 41. – № 1. – С. 94–98.

83. Янков В. И., Боярченко В. И., Крылов А. Л. / В сб.: Полимерные материалы в машиностроении. – Пермь: ППИ, 1976. – С. 94–102.
84. Первадчук В. П. Исследование и расчет шнековых машин для переработки полимерных материалов. Дисс. ... канд. тех. наук: 05.04.09. – Пермь: ППИ, 1976. – 150 с.
85. Абдулаев А. А. // Химическая промышленность. – 1966. – № 1. – С. 58–62.
86. Андрушников Б. И. Механизация и автоматизация процессов дозирования в производстве шин и РТИ. – М.: Химия, 1974. – 232 с.
87. Гальперин Ф. С. Основные тенденции развития весовых дозаторов непрерывного действия. – М.: ЦНИИТЭИПриборостроения, –1977. – 50 с.
88. Каприн Е. Б. Средства автоматизации для измерения и дозирования массы. Расчёт и конструирование. – М.: Машиностроение, 1971. – 469 с.
89. Орлов С. П. Дозирующие устройства. – М.: Машиностроение, 1966. – 286 с.
90. Рачинский Г. А. Дозирование сыпучих материалов. – М.: Химия, 1978. – 173 с.
91. Виденеев Ю. Д. Автоматическое непрерывное дозирование сыпучих материалов. – М.: Энергия, 1973. –118 с.
92. Орлов С. П. Весы и дозаторы: Справочник. Изд. 2-е. – М.: Машиностроение, 1972. – 328 с.
93. Янков В. И., Неверов А. П., Зуева М. Л. / В кн.: Гидравлические и прочностные характеристики машин и конструкций. – Пермь: ППИ, 1978. – С. 91–98.
94. Глот И. О. Движение и теплообмен жидкостей в каналах фильер. Дисс. ... канд. ф.-мат. наук: 01.02.05. – Томск: Томский ун-т, 1985. – 190 с.
95. Perwadtshuk W. P., Jankow W. I., Reher E.-O., Glot I. O. // Plaste und Kautschuk. 1983. Bd. 30. № 6. S. 336–341.
96. Госмен А. Д., Пан В. М., Ранчел А. К., Сполдинг Д. Б., Вольштейн М. Численные методы исследования течений вязкой жидкости. – М.: Мир, 1972. – 342 с.
97. Слёзкин Н. А. Динамика вязкой жидкости. – М.: Гостехиздат, 1955. – 519 с.

98. Торнер Р. В. // ИФЖ. – 1960. –Т. 16. – № 3. – С. 23–28.
99. Торнер Р. В., Майзель М. М. // Известия вузов. Технология легкой промышленности. –1959. – № 4. – С. 64–88.
100. Жанин Н. П., Макаров В. А. // Каучук и резина. – 1966. – № 7. – С. 24–27.
101. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1969. – 742 с.
102. Warg I. A., Longwell P. A. // A.I.Ch.E.J. 1964. V. 10, № 3. P. 324–329.
103. Toor H. L. // Ind. Eng. Chem. 1956. V. 48, № 6. P. 922–924.
104. Toor H. L. // Trans.Soc.Rheol. 1957. V. 1, № 3. P. 177–190.
105. Зябицкий А. Теоретические основы формирования волокон. –М.: Химия, 1979. – 504 с.
106. Jastrzebski Z. D. // Ing. Engng. Chem. Foundament. 1967. V. 6, № 3. P. 445–454.
107. Pfannschmidt P., Reher E.-O. // Plast und Kautschuk. 1972. Bd. 19. № 7. S. 502–507.
108. Fredrickson A. G., Bird R.B. // Ind. Eng. Chem. 1958. V. 50. P. 377–385.
109. Петухов Б. С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. – М.: Энергия, 1967. – 412 с.
110. Высокоскоростное формование полимеров. / Под ред. Зябицкого А., Каваи Х. – М.: Химия, 1988. – 488 с.
111. Chong J., Christiansen E., Baer A. // J. Appl. Polym. Sci. 1971. V. 15, № 2. P. 369–379.
112. Барзыкин В. В., Мержанов А. Г. // ДАН СССР. – 1958. –Т. 120. – № 6. – С. 1277–1273.
113. Бостанжиян С. А., Мержанов А. Г., Худяев С. И. // ДАН СССР. – 1965. – Т. 163. – № 1. – С. 133–136.
114. Тадмор З., Гогос К. Теоретические основы переработки полимеров / Пер. с англ. под ред. Р. В. Торнера. – М.: Химия, 1984. – 632 с.
115. Торнер Р. В. Теоретические основы переработки полимеров. – М.: Химия, 1972. – 454 с.
116. Pearson J. R., Shan Y. T., Vieina E. S. // Chem. Eng. Sci. 1973. V. 28, № 11. P. 2079–2087.
117. Skul'skiy O. I., Slavnov Ye. V., Shakirov N. V. // J. Non-Newtonian Fluid Mech., 1999, V. 81, P. 17–26.

118. Бостанжиян С.А., Боярченко В.И. // Механика полимеров. –1968. – № 6. – С. 1094–1102.
119. Stolin A. M., Malkin A. J., Merzhanov A. G. // Polym. Eng. Sci. 1979. V. 19, № 15. P. 1079–1080.
120. Качанов С. А. // ПМТФ – 1962. –№ 3. – С. 96–98.
121. Франк-Каменецкий Д. А. // ЖФХ. – 1934. – Т. 13. – Вып. 6. – С. 738–755.
122. Франк-Каменецкий Д. А. // ЖФХ. – 1958. – Т. 32. – Вып. 5. – С. 1182–1183.
123. Бостанжиян С. А., Черняева С. М. // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1966. – № 3. – С. 85–89.
124. Бостанжиян С. А., Столин А. М. // ИФЖ. – 1969. – Т. 17. – № 1. – С. 86–94.
125. Столин А. М., Мержанов А. Г. / В кн.: Тепло - и массоперенос. – Минск: ИТМО им. А. В. Лыкова АН БССР, – 1972. – Т. 3. – С. 341–349.
126. Мержанов А. Г., Столин А. М. // ПМТФ. –1974. – № 1. – С. 65–74.
127. Столин А. М., Клевков В. И. / В кн.: Горение конденсированных систем. – Черноголовка, 1977. – С. 20–24.
128. Мержанов А. Г., Зеликман Е. Г., Абрамов В. Г. // ДАН СССР. – 1986. – И. 180. – № 3. – С. 639–642.
129. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. – М.: Наука, 1967. – 491 с.
130. Мержанов А. Г., Дубовицкий Ф. И. // Успехи химии. – 1966. –Т. 35. – Вып. 4. – С. 656–683.
131. Бостанжиян С. А., Мержанов А. Г., Худяев С. И. // ПМТФ. – 1965. – № 5. – С. 45–50.
132. Gavis J., Laurence R. L. // Ind. Eng. Chem. Fundamentals. 1968. V. 7, № 2. P. 232–239.
133. Кудасов Ж. К., Рыбалова Р. П. / В сб.: Труды Алма-атинского медицинского института. – Алма-Ата: Наука, 1966. – Т. 23. – С. 259–238.
134. Ершин Ш. А., Кудасов Ж. К. / В сб.: Проблемы теплоэнергетики и прикладной теплофизики. – Алма-Ата: Наука, 1969. – Вып. 5. – С. 128–142.
135. Мержанов А.Г., Столин А.М. // ДАН СССР. – 1971. – Т. 198. – № 6. – С. 1291–1294.

136. Семенов Н. Н. // УФН. –1940. – Т. 23. – Вып. 3. – С. 251–292.
137. Мержанов А. Г., Посецельский А. П., Столин А. М. // ДАН СССР. – 1973. – Т. 210. – № 1. – С. 52–54.
138. Марголин А. Ф. // ЖФХ. – 1963. – Т. 4. – С. 887–888.
139. Бостанжиян С. А., Мержанов А. Г., Пручкина Н. М. // ПМТФ. – 1968. – № 5. – С. 38–43.
140. Гришин А. М., Новомирский В. Б., Панин В. Ф. // ФГВ. – 1977. – № 2. – С. 156–164.
141. Столин А. М. // ФГВ. – 1975. – № 3. – С. 425–433.
142. Дик И. Г. // ФГВ. – 1976. – № 1. – С. 81–89.
143. Багдасарьян Х. С. Теория радикальной полимеризации. – М.: Наука, 1967. – 300 с.
144. Берлин А. А., Кефели Т. А., Королёв Г. В. Полиэфиракрилаты. – М.: Наука, 1967. – 377 с.
145. Мержанов А. Г., Дубовицкий Ф. И. // ДАН СССР. – 1958. – Т. 210. – № 5. – С. 1068–1071.
146. Мержанов А. Г., Дубовицкий Ф. И. // ЖФХ. – 1960. – Т. 34. – Вып. 10. – С. 2235–2244.
147. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1951. – 420 с.
148. Столин А. М., Мержанов А. Г. // ФГВ. –1971. – № 4. – С. 502–510.
149. Барзыкин В. В., Гонтковская В. Т., Мержанов А. Г. // ПМТФ. – 1964. – № 3. – С. 118–125.
150. Боярченко В. И. Макрокинетическая теория экструзии полимерных материалов. Дисс. ... докт. ф.-мат. наук: 01.04.17. – Черноголовка: ОИХФ АН СССР, 1982. – 393 с.
151. Жирков П. В., Боярченко В. И., Бостанжиян С. А. // ФГВ. – 1976. – № 4. – С. 511–519.
152. Жирков П. В., Боярченко В. И., Бостанжиян С. А. / В сб.: Горение и взрыв. – М.: Наука, 1977. – С. 282–290.
153. Бесков В. С., Кузин В. А., Слинько М. Г. // Хим. промышленность. – 1964. – № 7. – С. 508–514.
154. Абрамов В. Г., Мержанов А. Г. // ФВГ. – 1968. – № 4. – С. 548–556.

155. Bojarchenko B. I., Zhirkov P. V., Jankov V. I. // Heat Transfer-Soviet Reseach. 1977. V. 9, № 6. P. 153–161.
156. Бостанжиян С. А., Боярченко В. И., Жирков П. В. // ПМТФ. – 1979. – № 1. – С. 130–137.
157. Жирков П. В., Бостанжиян С. А., Боярченко В. И. / В кн.: Математическое моделирование и аппаратурное оформление полимеризационных процессов. – Владимир: ВНИИСС, 1979. – С. 56–59.
158. Бутаков А. А., Максимов Э. И., Шкадинский К. Г. // ФГВ. – 1978. – № 1. – С. 62–69.
159. Максимов Э. И. // ДАН СССР. – 1977. – Т. 237. – № 2. – С. 387–390.
160. Максимов Э. И. // ФВГ. – 1978. – № 2. – С. 76–84.
161. Бутаков А. А., Максимов Э. И. / В сб. докладов V Всесоюзной конф. по моделированию химических, нефтехимических и нефтеперерабатывающих процессов и реакторов. «Химреактор-V». – Киев, 1979. – С. 14–18.
162. Максимов Э. И. // ДАН СССР. – 1970. – Т. 191. – № 5. – С. 1091–1094.
163. Бутаков А. А., Максимов Э. И. // ДАН СССР. – 1973. – Т. 209. – № 3. С. 643–645.
164. Максимов Э. И. // ТОХТ. – 1974. – Т. 8. – № 4. – С. 618–620.
165. Зайдель Р. М., Зельдович Я. Б. // ПМТФ. – 1962. – № 4. – С. 27–32.
166. Мержанов А. Г., Филоненко А. К. // ДАН СССР. – 1963. – Т. 152. – № 1. – С. 143–146.
167. Хайкин Б. И., Руманов Э. Н. // ФГВ. – 1975. – № 5. – С. 671–678.
168. Ваганов Д. И. // ПМТФ. – 1975. – № 2. – С. 168–172.
169. Московский С. А., Консетов В. В., Хохлов В. А. / В сб.: Полимеризационные процессы. Аппаратурно-технологическое оформление и математическое моделирование. – Ленинград: ОНПО «Пластполимер», 1974. – С. 174–177.
170. Van Heerden C. // Chem. Eng. Sci. 1958. V. 8, № 2. P. 133–145.
171. Van Heerden C. // Ind. Eng. Chem. 1953. V. 45, № 6. P. 1242–1247.
172. Жирков П. В., Бостанжиян С. А., Боярченко В. И. // ТОХТ. – 1980. – Т. 14. – № 5. – С. 702–708.

173. Hlavaček V., Hofmann H., Kubiček M. // Chem. Eng. Sci. 1971. V. 26, № 10. P. 1629–1634.
174. Hlavaček V., Kubiček M., Jelinek J. // Chem. Eng. Sci. 1970. V. 25, № 9. P. 1441–1462.
175. Pool P. B., Schmitz R. A. // Chem. Eng. J. 1969. V. 15, № 5. P. 670–679.
176. Бутаков А. А., Занин А. М. // ФГВ. – 1978. – № 5. – С. 91–95.
177. Хувник Р., Ставерман А. Химия и технология полимеров. Т. 2. – М. – Л.: Химия, 1965. – 508 с.
178. Теплофизические и реологические характеристики полимеров. Справочник. (Под ред. Ю. С. Липатова.) – Киев: Наукова думка, 1977. – 244 с.
179. Козулин Н. А., Шапиро А. Я., Гавурина Р. К. Оборудование для производства и переработки пластических масс. Л.: Госхимиздат, 1963. 783 с.
180. Чернобыльский Н. А., Городинская С. А., Трохин Ю. И. / В кн.: Тепло- и массоперенос. Минск: ИТМО им. А.В. Лыкова АН БССР, 1972. – Т. 3. – С. 401–407.
181. Ваганов Д. А. // ПМТФ. –1977. – № 1. – С. 114–122.
182. Межиковский С. М. Физикохимия реакционноспособных олигомеров. – М.: Наука, 1998. – 233 с.
183. Малкин А. Я., Исаев А. И.. Реология. Концепции, методы, приложения. / Пер. с англ. – СПб.: Профессия, 2007. – 560 с.

*Рекомендовано к изданию Ученым советом
Института механики сплошных сред УрО РАН*

Научное издание

**Янков Виктор Иванович, Боярченко Валерий Иванович,
Первадчук Владимир Павлович, Глот Ирина Олеговна,
Шакиров Нагим Вагизович**

ПЕРЕРАБОТКА ВОЛОКНООБРАЗУЮЩИХ ПОЛИМЕРОВ

**ОСНОВЫ РЕОЛОГИИ ПОЛИМЕРОВ
И ТЕЧЕНИЕ ПОЛИМЕРОВ В КАНАЛАХ**

*Дизайнер С. В. Дементьев
Технический редактор А. В. Ширококов
Компьютерная верстка А. В. Моторин
Корректор Г. Г. Тетерина*

Подписано в печать 03.12.08. Формат 60×84 ¹/₁₆.
Усл. печ. л. 15,35. Уч. изд. л. 16,04. Гарнитура Таймс.
Бумага офсетная №1. Печать офсетная. Заказ №70.
АНО «Ижевский институт компьютерных исследований»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
<http://shop.rcd.ru> E-mail: mail@rcd.ru

Уважаемые читатели!

Интересующие Вас книги нашего издательства можно заказать через наш Интернет-магазин <http://shop.rcd.ru> или по электронной почте subscribe@rcd.ru

Книги можно приобрести в~наших представительствах

МОСКВА

Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН
ул. Бардина, д. 4, корп. 3, к. 414, тел.: (499) 135-54-37

ИЖЕВСК

Удмуртский государственный университет
ул. Университетская, д. 1, корп. 4, 2 эт., к. 211, тел./факс: (3412) 500-295

Также книги можно приобрести:

МОСКВА

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
ГЗ (1 эт.), Физический ф-т (1 эт.), Гуманитарный ф-т (0 и 1 эт.),
Биологический ф-т (1 эт.).

Российский государственный университет нефти и~газа им.
И. М. Губкина
ГЗ (3-4 эт.), книжные киоски фирмы «Аргумент».

Магазины:

МОСКВА:

«Дом научно-технической книги» Ленинский
пр., 40. тел.: 137-06-33
«Московский дом книги» ул. Новый Арбат, 8,
тел.: 290-45-07
«Библиоглобус» м. «Лубянка», ул. Мясницкая, 6,
тел.: 928-87-44

ДОЛГОПРУДНЫЙ: Книжный магазин «Физматкнига» новый корп.
МФТИ, 1 эт. тел.: 409-93-28

**САНКТ-
ПЕТЕРБУРГ:**

«Санкт-Петербургский дом книги»
Невский проспект, 28
Издательство СПбГУ, Магазин №1
Университетская набережная, 7/9