**6.** Известно, что атмосферное давление падает с высотой. Это падение описывается барометрической формулой

$$p(h) = p(0) \cdot \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right),$$

где $M$ — средняя молярная масса воздуха, $h$ — высота, $p(0)$ — давление на нулевой высоте. Приняв температуру у поверхности равной 25 °C, а атмосферное давление — 750 мм рт. ст. и использовав справочное значение теплоты испарения воды, а также приняв влажность воздуха у поверхности равной 60 %, найдите высоту облачного слоя при спокойной атмосфере. Считайте, что температура падает на 8 °C при подъёме на каждый километр.

По условию T линейно убывает с высотой.
т.е. $T_h = T_0(1-ah)$, где $T_0$ – темп. у поверх. Земли
$a$ – коэфф. объемного расшир. воздуха

Продифференцируем барометрическую ф-лу:

$$\ln\frac{P}{P_0} = -\frac{Mgh}{RT}$$

$$\frac{dP}{P} = -\frac{Mg\,dh}{RT}$$

$$dP = -\frac{PMg}{RT}dh$$

$$\frac{dP}{dh} = -\frac{PMg}{RT}$$ или $$\frac{\Delta P}{\Delta h} = -\frac{PM}{RT}g \Rightarrow \frac{\Delta P}{\Delta h} = -\frac{PMg}{RT_0(1-ah)}$$

С другой стороны при заданном распределении T давление убывает с высотой по закону:

$$P_h = P_0(1-ha)^{\alpha}$$

Производная давления по высоте:

$$P' = -\alpha a P_0(1-ah)^{\alpha-1}$$

Отсюда получаем:

$$-\alpha a P_0(1-ah)^{\alpha-1} = -\frac{P_0(1-ah)^{\alpha}Mg}{RT_0(1-ah)} = -\frac{P_0 Mg}{RT_0}(1-ah)^{\alpha-1}$$

т.к. $\Delta h = \frac{\Delta T}{T_0 a}$, то зная $\frac{\Delta P}{\Delta h}$ найдем $\alpha$:

$$\alpha = \frac{Mg}{aRT_0}$$

Т.к. давление в поднимающейся порции воздуха следует считать равным давлению окружающего воздуха на любой высоте, то определим ее темп. из уравнения адиабатного процесса:

$$\frac{PV}{T} = const \Rightarrow V = const\cdot\frac{T}{P}$$

$$P\cdot\frac{T^\gamma}{P^\gamma} = P^{1-\gamma}T^\gamma = const \Rightarrow TP^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = const$$

Выразим const через условия на поверхности Земли:

$$TP^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_0P_0^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

Зная зависимость давления от высоты, найдем зависимость температуры:

$$T_h = T_0\left(\frac{P_0}{P_0(1-ah)^\alpha}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_0(1-ah)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}\alpha}$$

Обозначим показатель степени как

$$\delta = \frac{\gamma-1}{\gamma}\alpha = \frac{\gamma-1}{\gamma}\cdot\frac{Mg}{aRT_0}$$

Условие начала конденсации водяных паров:

$$\varphi P_{нас}(T_0) = P_{нас}(T_h)$$

Давление насыщенного пара связано с температурой соотношением:

$$\ln\frac{P_{нас}(T)}{P_{нас}(T_0)} = -\frac{qM_{H_2O}}{R}\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_0}\right),$$ где q - удел. теплота испар. воды

Отсюда получаем:

$$\ln\frac{P_{нас}(T_h)}{P_{нас}(T_0)} = \ln\frac{\varphi P_{нас}(T_0)}{P_{нас}(T_0)} = \ln\varphi$$

$$\ln\varphi = -\frac{qM_{H_2O}}{R}\left(\frac{1}{T_h}-\frac{1}{T_0}\right) = -\frac{qM_{H_2O}}{RT_0}\left(\frac{T_0}{T_h}-1\right)$$

$$T_h = \frac{T_0}{1-\frac{RT_0}{qM_{H_2O}}\ln\varphi}$$

$$T_0(1-ah)^{\delta} = \frac{T_0}{1-\frac{RT_0}{qM_{H_2O}}\ln\varphi}$$

т.к. величины $ah \ll 1$ и $-\frac{RT_0}{qM_{H_2O}}\ln\varphi \ll 1$, то

упростим ур-я помощ. разл-ия:

$$1-\delta ah = 1+\frac{RT_0}{qM_{H_2O}}\ln\varphi \Rightarrow \delta ah = -\frac{RT_0}{qM_{H_2O}}\ln\varphi$$

Используя выражение для показателя степени $\delta$ получим выражение для образования (высоты образ.) облаков:

$$\delta ah = -\frac{RT_0}{qM_{H_2O}}\ln\varphi$$

$$\frac{\gamma-1}{\gamma}\cdot\frac{Mg}{aRT_0}ah = -\frac{RT_0}{qM_{H_2O}}\ln\varphi \Rightarrow \boxed{h = -\frac{\gamma}{\gamma-1}\cdot\frac{(RT_0)^2}{qM\cdot M_{H_2O}g}\cdot\ln\varphi}$$

$$h = -\frac{1,4}{0,4}\cdot\frac{(8,31\cdot 298)^2}{2,2\cdot10^{6}\cdot29\cdot10^{-3}\cdot18\cdot10^{-3}\cdot9,8}\cdot\ln 0,6 = \boxed{974,2\ м}$$